ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

La conceptualización de la variable en la enseñanza media

Fecha de recepción: Abril, 1999

Educación Matemática
Vol. 12 No. 2 Agosto 2000
pp. 27-48

María Trigueros, Sonia Ursini
Instituto Tecnológico Autónomo de México,
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
trigue@itam.mx, sursini@mailer.main.conacyt.mx
Dolores Lozano
Instituto San Angel Inn

Resumen. *Se ha mostrado que aun después de cursar álgebra durante varios años, los estudiantes universitarios tienen dificultades serias para comprender los usos elementales de la variable. En este trabajo se presentan y analizan los resultados de un estudio en el que se investigó la comprensión del concepto de variable en los diferentes grados de la enseñanza media. El estudio se realizó con 98 estudiantes de entre 12 y 19 años. Los resultados muestran que las concepciones de la variable que tienen los estudiantes en los diferentes cursos, no reflejan una diferencia sustancial en la comprensión de este concepto. Consideramos que las dificultades que manifiestan los estudiantes están fuertemente influidas por las prácticas docentes y el contenido de los cursos de álgebra.*

Abstract. *It has been shown that even after several algebra courses starting college students still have serious difficulties in understanding the elementary uses of variable. In this paper we present and analyse the results of a study that investigated the understanding of variable through different school levels. The study involved 98 students aged 12- 19 years. Results obtained show that students' conceptions of variable do not substantially different in the tested school levels. We consider that students' difficulties are strongly influenced by current teaching strategies and content of algebra curses.*

Introducción

La comprensión de cualquier rama de las matemáticas, requiere de un manejo completo y profundo de los conceptos algebraicos, particularmente del concepto de variable. Los procesos cognitivos que conducen a la construcción del concepto de variable se han estudiado tratando de ver cuáles son las dificultades y los errores más comunes en los que incurren los estudiantes al intentar resolver problemas algebraicos en diferentes grados escolares (Reggiani 1994, Ursini y Trigueros 1998, López 1996, Lozano 1998, Warren 1995; Stacey and MacGregor 1997, Boulton-Lewis et al. 1998). En particular se ha encontrado (Ursini y Trigueros 1998) que después de haber llevado varios cursos de álgebra los estudiantes que ingresan a las universidades siguen teniendo serias dificultades con la comprensión de los usos elementales de la variable. Aunque son capaces de interpretar, simbolizar y manipular la variable cuando ésta aparece en expresiones simples, no lo pueden hacer cuando enfrentan expresiones más complejas.

Estos resultados generan las siguientes preguntas: ¿Qué ocurre con la comprensión del concepto de variable a través de la enseñanza media? ¿Hay algún uso de la variable que se fortalece más que otros?

Para dar respuesta a las preguntas anteriores se hizo un estudio acerca de la forma en la que estudiantes de distintos niveles escolares (secundaria, preparatoria e inicio de la universidad) interpretan, simbolizan y manipulan la variable en sus distintos usos. En particular, se comparó la capacidad para trabajar con ellos a lo largo de la enseñanza media; cuál es el uso de la variable que los estudiantes manejan mejor en cada grado escolar; y en qué tipo de situaciones lo hacen con mayor soltura.

Marco teórico

El concepto de variable es multifacético e incluye, como un todo, distintos aspectos. Los aspectos considerados como más relevantes para un manejo competente del álgebra elemental y que han sido destacados en otras investigaciones (Usiskin, 1988; Bell, 1996; Ursini, 1996), son: el uso de la variable como incógnita, como número general y en una relación funcional. Consideramos que una conceptualización adecuada de cada uno de estos aspectos requiere de ciertas capacidades básicas como las que sugieren Ursini y Trigueros (1998):

Variable como incógnita

La conceptualización de la variable como incógnita implica:

- **I1** reconocer e identificar en un problema la existencia de algo desconocido que se puede determinar;
- **I2** interpretar la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos;
- **I3** sustituir el o los valores de la variable que hacen que la ecuación sea verdadera;
- **I4** determinar la incógnita que aparece en ecuaciones o problemas llevando a cabo las operaciones algebraicas o aritméticas necesarias;
- **I5** identificar la incógnita en una situación específica y representarla simbólicamente en una ecuación.

Variable como número general

La conceptualización de la variable como número general implica:

- **G1** reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas;
- **G2** interpretar la variable simbólica como un ente que puede tomar cualquier valor;
- **G3** interpretar la variable simbólica como un objeto indeterminado que se puede operar;
- **G4** desarrollar la idea de método general distinguiendo los elementos variables de los invariantes en familias de problemas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual éste actúa;
- **G5** manipular el símbolo para simplificar o desarrollar expresiones algebraicas,

Variables en relación funcional

La conceptualización de las variables en relación funcional implica:

F1 reconocer la correspondencia entre cantidades en sus diferentes representaciones: tabla, gráfica, problema verbal o expresión analítica;
F2 determinar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la variable independiente;
F3 determinar los valores de la variable independiente cuando se conocen los de la variable dependiente;
F4 reconocer la variación conjunta de las variables que intervienen en una relación en cualquiera de sus formas de representación;
F5 determinar los intervalos de variación de una de las variables cuando se conocen los de la otra;
F6 expresar una relación funcional de manera tabular, gráfica y/o analítica, a partir de los datos de un problema.

La posibilidad de darle significado al concepto de variable implica, además:

- superar la simple realización de cálculos y operaciones con letras o con símbolos, para alcanzar una comprensión de las razones por las que funcionan estos procedimientos;
- prever hacia dónde conducen dichas operaciones;
- establecer relaciones entre los distintos aspectos que asume la variable en el contexto del álgebra elemental.

Diremos que un estudiante es capaz de trabajar con la variable como un ente matemático integrado, cuando la emplea en una situación específica, pasa de uno a otro de sus aspectos de manera flexible y los integra como componentes de un mismo ente matemático.

Metodología

Para estudiar la comprensión del concepto de variable por parte de los estudiantes en las diferentes etapas de su formación, se usó el cuestionario diseñado y validado por Ursini y Trigueros (1998). Este cuestionario explora la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar situaciones que implican los distintos usos del concepto de variable mencionados anteriormente. Dicho cuestionario se aplicó a un total de 98 alumnos distribuidos en todos los niveles escolares de secundaria (12 a 15 años de edad) y preparatoria (16 a 18 años de edad), así como a un grupo de estudiantes recién ingresados a la universidad. En todos los casos el cuestionario se aplicó en instituciones educativas particulares mexicanas.

El cuestionario fue respondido por 37 estudiantes de secundaria: 20 de primer año, 8 de segundo y 9 de tercero. Cada grupo requirió de cuatro sesiones de 50 minutos cada una para poder contestar todas las preguntas. Cabe señalar que en primero de secundaria los alumnos no habían sido introducidos aún al álgebra y los de segundo apenas habían llevado una instrucción superficial referida principalmente a la confrontación con el lenguaje algebraico, la jerarquía en las operaciones y el uso de paréntesis (pre-álgebra). Los estudiantes de tercero, en cambio, ya se habían enfrentado al concepto de variable al resolver ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones, al simplificar expresiones generales, al resolver problemas y al trabajar con funciones sencillas.

En el caso de preparatoria se trabajó con 30 alumnos, de los cuales 12 estaban en primero, 10 en segundo y 8 en tercer año. Estos alumnos habían llevado respectivamente dos, tres y cuatro cursos de matemáticas con un marcado enfoque hacia el estudio del álgebra.

Finalmente, se aplicó el cuestionario a un grupo de 31 alumnos de primer ingreso en la universidad, integrado por estudiantes de las carreras de Economía, Administración, Contaduría, Ciencias Políticas y Relaciones Internacionales que cursaban la materia de Introducción a las Matemáticas. La anterior es la primera de por lo menos cinco materias de matemáticas de nivel superior que estos estudiantes tendrán que cursar.

Las respuestas dadas al cuestionario se clasificaron como respuestas correctas, incorrectas y no contestadas, para hacer un análisis cuantitativo global, por grupo y por alumno. Este primer análisis ofrece una perspectiva general de la capacidad de los alumnos para trabajar con los distintos usos de la variable. A través de la comparación de los resultados obtenidos en los diferentes niveles escolares, el análisis nos proporciona información acerca de la forma en que la docencia influye en la variación de dicha capacidad.

Para ahondar en los significados que dan los alumnos al concepto de variable y estudiar con detenimiento las dificultades que presentan al manejarlo, se realizó un análisis cualitativo minucioso de sus respuestas apoyado en el marco teórico.

Finalmente, se eligieron cuatro alumnos universitarios para ser entrevistados con el fin de aclarar algunos aspectos y profundizar en el análisis de los resultados obtenidos.

Análisis de la comprensión del concepto de variable

Antes de iniciar el análisis de los datos obtenidos, es conveniente señalar que los programas de matemáticas correspondientes a los grados escolares de los alumnos de este estudio incluyen una introducción al lenguaje algebraico y al manejo de ecuaciones de primer y segundo grado y de expresiones algebraicas en los dos primeros años de secundaria y, adicionalmente, un breve estudio de las funciones elementales en tercero de secundaria. En la preparatoria, los cursos consisten en un estudio más profundo del álgebra en primero, geometría analítica en segundo e introducción al cálculo diferencial e integral o matemáticas financieras en tercero.

Para llevar a cabo el análisis cuantitativo de las respuestas de los estudiantes se calcularon los porcentajes de aciertos obtenidos en cada uno de los grupos, considerando el total de las preguntas correspondientes a cada uno de los usos de la variable. Se compararon los porcentajes obtenidos por los distintos grupos y se identificó cuál de los distintos usos de la variable se manejaba con mayor soltura en cada grado escolar.

A continuación se presentan y discuten las gráficas correspondientes a cada uno de los tres usos de la variable considerados. En ellas se representan los porcentajes de aciertos obtenidos por cada uno de los siete grupos de estudiantes que participaron en el estudio. La nomenclatura utilizada en todas ellas es la siguiente: Sec1, Sec 2 y Sec3 se refieren a primero, segundo y tercero de secundaria respectivamente; Prepa1, Prepa 2 y Prepa 3 se refieren a primero, segundo y tercero de preparatoria respectivamente y Univ se refiere a grupo de primer año de universidad. Cabe recordar que en el análisis de los datos se tomaron en cuenta las respuestas de los alumnos al cuestionario y a las entrevistas, y se clasificaron de acuerdo a las características mencionadas en la descomposición del concepto de variable.

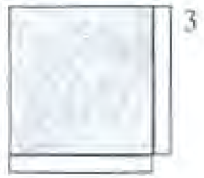
En la Gráfica 1 se presentan los resultados relativos a la conceptualización de la *variable como incógnita*. Las preguntas del cuestionario referentes a este aspecto de la variable incluyen ítems como los siguientes:

¿Cuántos valores puede tomar la letra en $4 + x^2 = x(x + 1)$?

Escribe los valores que piensas que puede tomar la literal: $13x - 27 - 2x = 30 + 5x$

Escribe una fórmula que permita resolver el siguiente problema:

El área total de la siguiente figura es 27. El ancho de cada uno de los rectángulos no sombreados es 3. Calcula el lado del cuadrado sombreado.



Como se observa en la Gráfica 1, la variabilidad en las puntuaciones de los diferentes grupos es relativamente pequeña, si bien se aprecia una ligera mejoría en los sucesivos niveles escolares. En segundo de preparatoria, parece alcanzarse un máximo en la comprensión de la variable como incógnita que luego baja nuevamente. Esta baja coincide con el inicio del estudio de materias nuevas para ellos como son la Geometría Analítica y el Cálculo, en las que se hace menos énfasis en el uso de la variable como incógnita. Hay que señalar, sin embargo, que una comprensión adecuada de los conceptos involucrados en estas materias requiere también de una buena comprensión de la variable como incógnita.

Gráfica 1

En la Gráfica 2 se presenta la conceptualización de la *variable como número general*. Algunos ejemplos de preguntas que se refieren a este uso de la variable se muestran a continuación:

Escribe una fórmula que exprese:

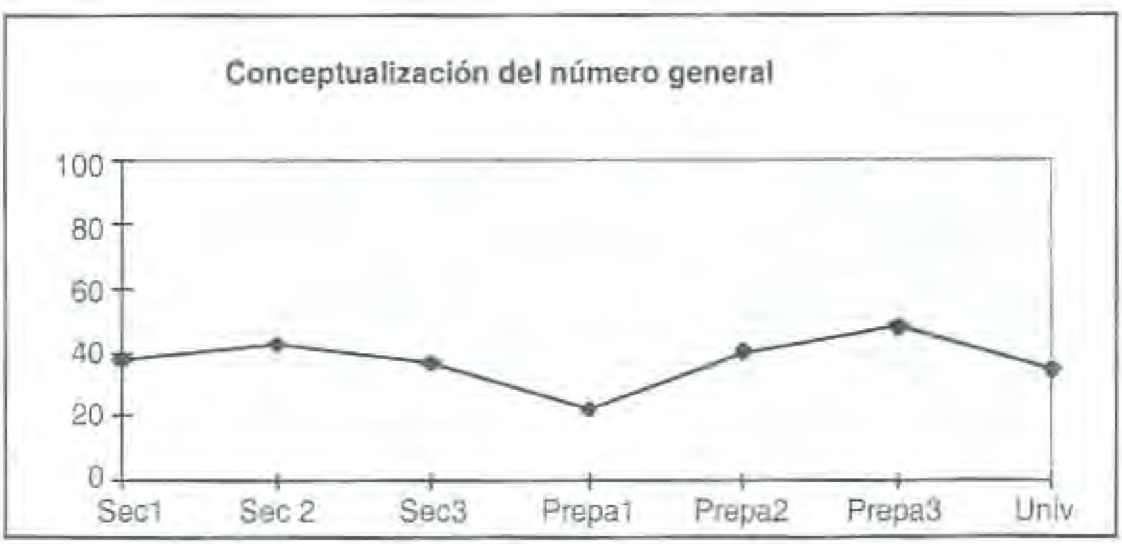
Un número desconocido dividido por 5 y el resultado sumado a 7.

¿Cuáles son todos los valores que puede tener la letra en: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$?

Completa:

1 + 2 + 3 = (3 ¥ 4)/2
1 + 2 + 3 + 4 = (4 ¥ 5)/2
...
1 + 2 + 3 + ___ + n =

Como se puede observar, a lo largo de los primeros tres años de secundaria los cambios en la comprensión de la variable como número general son mínimos. Ésta baja después del segundo año de secundaria para alcanzar un mínimo en el primer año de preparatoria. En segundo año de preparatoria se recupera esta comprensión, misma que mejora en tercer año para volver a disminuir al inicio de los estudios universitarios. Se observó que el procentaje de aciertos logrado por los estudiantes que están por terminar los cursos de álgebra propiamente dichos (en tercero de secundaria y primero de preparatoria) es menor que en los otros grados. Esto se debe posiblemente a que en estos cursos se suele enfatizar el uso de la variable como incógnita y no como número general. Por lo contrario, cuando llevan otros cursos, como Geometría Analítica y Cálculo (segundo y tercer año de preparatoria), mejora la comprensión del uso de la variable como número general. Sin embargo, como ya se observó en la Gráfica 1, en este contexto la comprensión de la variable como incógnita tiende a debilitarse. Esto sugiere que ninguno de estos dos usos de la variable ha sido firmemente comprendido por los estudiantes, dado que el tipo de respuestas que domina está fuertemente influenciado por el uso de la variable enfatizado en la instrucción en ese momento.



Gráfica 2

En la Gráfica 3 se presentan los resultados que ilustran la conceptualización de las *variables en relación funcional* cuando los estudiantes contestaron ítems del tipo de los siguientes:

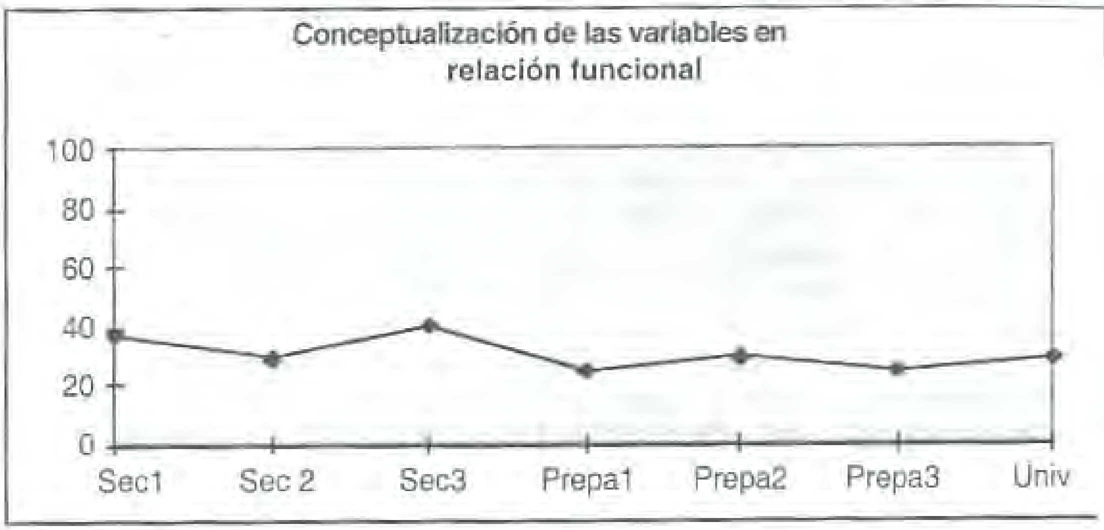
Si $x + 3 = y$ ¿qué valores puede tomar x?

Considera la siguiente expresión $y = 3 + x$. Si queremos que los valores de y sean mayores que 3 pero más pequeños que 10, ¿qué valores puede tomar x?

El peso de la mercancía que se compra en el mercado se mide con una báscula. En el puesto de Don Panchito, por cada kilogramo de peso la charola de la báscula se desplaza 4 cm.

Encuentra una relación entre el peso de la compra y el desplazamiento de la charola.

Si la charola se desplaza 10.5 cm al pesar una bolsa de manzanas ¿Cuántos kilos pesa la bolsa?



Gráfica 3

De la gráfica anterior se desprende que la comprensión de las variables en relació funcional cambia muy poco a lo largo de los años analizados. Es sorprendente observa que los alumnos de primero de secundaria alcanzaron un promedio de aciertos más alt que los alumnos de los demás grupos con excepción de aquéllos de tercero de secundari donde se estaba estudiando justamente el tema de funciones al momento de aplicar cuestionario. Estos resultados indican que a lo largo de los distintos cursos de matemá ticas los alumnos no desarrollan una comprensión adecuada de este uso de la variable.

Con base en los resultados anteriores pueden hacerse los comentarios siguiente

- A pesar de estar cursando diferentes grados los alumnos obtuvieron pu tuaciones muy similares en las respuestas correspondientes a la comprensió de cada uno de los usos de la variable; en particular los alumnos de prep ratoria y universidad obtuvieron puntuaciones por debajo de lo que deber esperarse.
- Dentro de cada uno de los grupos no se perciben diferencias significativas cuanto a la comprensión de los diferentes usos de la variable.
- Al comparar entre sí las tres gráficas se aprecia que la capacidad para trabaj con un uso particular de la variable mejora o empeora dependiendo del tipo cursos de matemáticas que estén recibiendo. A continuación se presenta u tabla en la que aparece el uso de la variable que se manejó mejor en cada niv

Grupo	Uso de la variable
Secundaria 1	Número General
Secundaria 2	Número General
Secundaria 3	Relación Funcional
Preparatoria 1	Incógnita
Preparatoria 2	Incógnita
Preparatoria 3	Número General
Universidad	Incógnita

Al parecer, los alumnos que están iniciando el estudio del álgebra (primero y segundo de secundaria) manejan mejor la variable como número general. Esta capacidad, sin embargo, no parece cultivarse a lo largo de los distintos cursos de matemáticas y termina debilitándose, sobresaliendo el uso de la variable como incógnita, que es el que se usa constantemente a lo largo de toda la enseñanza media. Los alumnos de primero y segundo grado de preparatoria, tienen un mayor dominio de la variable como incógnita. En cambio, los alumnos de tercer grado de preparatoria parecen desempeñarse mejor con el número general. Sin embargo, la comprensión de este uso de la variable parece ser sólo superficial y el resultado de la influencia momentánea que ejerce el material que se está estudiando en ese momento en el curso de matemáticas. En efecto, al ingresar a la universidad el uso de la variable que mejor dominan es una vez más el de incógnita. La comprensión de la variable en relación funcional no se desarrolla al nivel deseado y este uso aparece como dominante únicamente en tercero de secundaria cuando se empieza a trabajar con funciones. Es importante mencionar que estos comentarios están basados en diferencias muy pequeñas en las puntuaciones obtenidas en los cuestionarios, sin embargo, coinciden con las apreciaciones de los profesores de matemáticas y con los resultados obtenidos de la observación en clase (López, 1996).

Análisis de las capacidades específicas relacionadas con los distintos usos de la variable

Con el objeto de tener una mejor perspectiva de la capacidad de los estudiantes para interpretar, simbolizar y manipular la variable en sus distintos usos, se hizo un análisis cualitativo de las respuestas al cuestionario y a las entrevistas. Esto condujo a establecer categorías que permiten comparar, utilizando el marco teórico antes mencionado, la forma en la que los estudiantes en los distintos grados escolares manejan la variable.

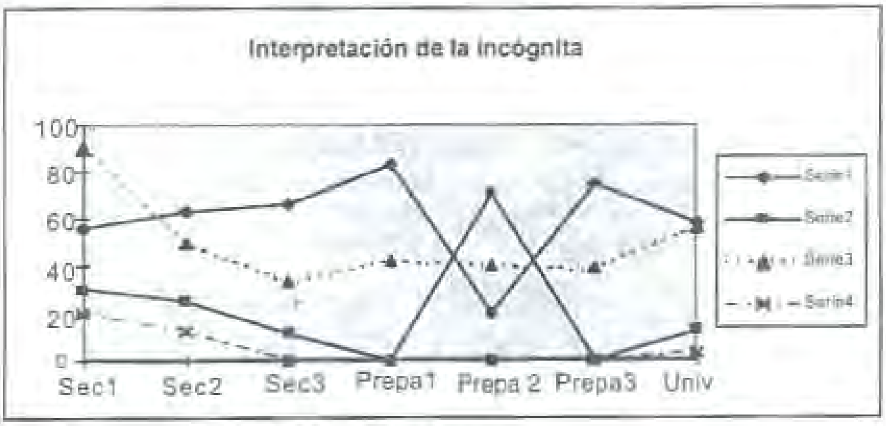
Variable como incógnita

Al analizar las respuestas a las preguntas que requerían que los estudiantes *interpretaran* a la variable como incógnita en ecuaciones y problemas se encontró que podría distinguirse entre aquéllos que:

- interpretan a la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar valores específicos (serie 1);
- interpretan a la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que puede tomar cualquier valor (serie 2);

- reconocen en una situación problemática simple (que da lugar a una ecuación lineal) la existencia de algo desconocido que se puede determinar (serie 3);
- reconocen en una situación problemática compleja (que da lugar a una ecuación de segundo grado) la existencia de algo desconocido que se puede determinar (serie 4).

En la gráfica siguiente se presentan los porcentajes de alumnos por categoria y por año escolar.



Gráfica 4

Analizando la información presentada en la gráfica anterior, resalta el hecho de que un porcentaje bastante alto de alumnos de primero de secundaria interpreta a la variable simbólica que aparece en una ecuación como un ente que representa un valor determinado (serie 1). Esta concepción (**I2**) parece fortalecerse en segundo, en tercer año de secundaria y primero de preparatoria, ciclos en los que se cursa el álgebra con énfasis en la resolución de ecuaciones. Simultáneamente puede observarse (serie 2) el decaimiento del porcentaje de alumnos que interpreta la incógnita como si se tratara de un número general (**G2**). En segundo de preparatoria, sin embargo, esta última manera de interpretar la variable simbólica reaparece de manera muy notable, decayendo drásticamente su interpretación como incógnita. Esto coincide con el curso obligatorio de Geometría Analítica en el cual la variable como número general cobra mayor relevancia. La interpretación de la variable como incógnita reaparece al pasar a tercero de preparatoria.

Lo anterior confirma una vez más que en la enseñanza que se imparte a lo largo de los ciclos estudiados tiende a fortalecer la interpretación de la variable como incógnita; sin embargo, ésto no parece lograrse totalmete dado que, al momento de trabajar con situaciones que requieren otro uso de la variable, ésta interpretación se muestra poco firme. Queda así de manifiesto lo difícil que resulta para los alumnos que reciben este tipo de enseñanza interpretar distintos usos de la variable y su tendencia a poner atención a un único uso de la variable a la vez. Lo anterior queda claramente ilustrado en el siguiente comentario de un alumno universitario cuando se le pidió contestar la siguiente pregunta:

¿Cuántos valores puede tomar la letra en $7x^2 = 2x - 5$?

A Cualquier valor.

E ¿Porqué?

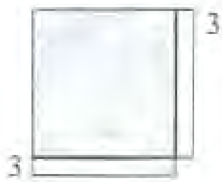
(Se queda pensando.)

A Lo que pasa es que yo me imaginaba una parábola y el dominio pues es para toda x por eso me confundí. Pero aquí buscas la intersección de la parábola con la recta y a lo más lo puede atravesar en dos puntos.

Como se puede observar este alumno percibe inicialmente la variable como parte de una relación funcional, lo que lo lleva a considerar que puede tomar cualquier valor. La pregunta del entrevistador, sin embargo, le genera dudas que le permiten reflexionar nuevamente sobre la pregunta y rectificar su respuesta.

Tratándose de problemas (serie 3 y 4), parece sorprendente el hecho de que tanto en situaciones sencillas como de mayor dificultad, los alumnos de primero de secundaria, que no han recibido instrucción algebraica, identifican mejor a la incógnita (**I1**) que el resto de los estudiantes. Esto podría deberse a que enfrentan la situación de manera más intuitiva y utilizan libremente los recursos de los que disponen. Por el contrario, los estudiantes universitarios tienen mayor dificultad como se puede apreciar en el siguiente extracto de entrevista en la que se estaba trabajando con el problema siguiente:

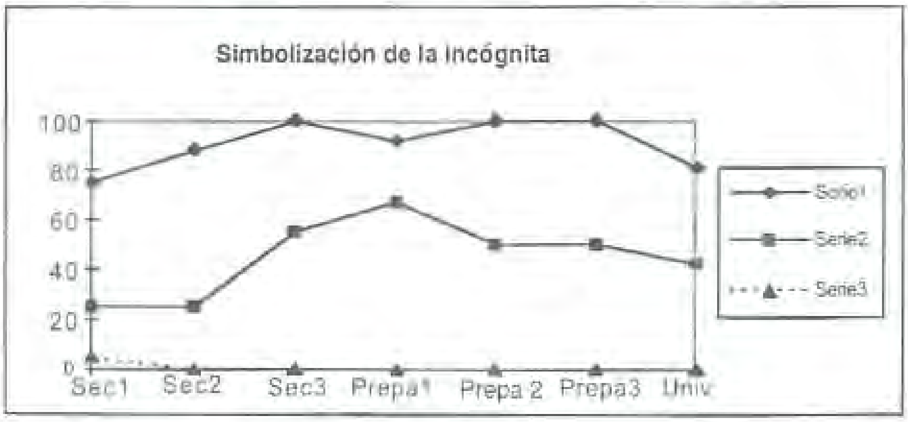
El área total de la siguiente figura es 27. El ancho de cada uno de los rectángulos no sombreados es 3. Calcula el lado del cuadrado sombreado.



A Bueno, tengo (escribe: $A=27$.)
D Pero ¿vas a poder sacar el lado del cuadrado sombreado de ahí?
A No, pero entonces ¿cómo se hace?

En la siguiente gráfica se muestran los resultados relativos a la *simbolización* de la variable como incógnita cuando se solicitó:

- traducir frases sencillas a lenguaje algebraico (serie 1);
- plantear ecuaciones para resolver problemas sencillos (serie 2);
- plantear ecuaciones para resolver problemas complejos (serie 3).



Gráfica 5

Se observa (serie 1) que los alumnos son capaces de traducir al lenguaje algebraico frases sencillas que involucran una incógnita, hayan o no recibido instrucción en esta materia. La gráfica relativa a la serie 3 muestra, para todos los grupos, una falta de capacidad para identificar la incógnita en problemas complejos y representarla simbólicamente en una ecuación (**I5**). Por ejemplo, frente al problema que se mencionó anteriormente, al comentar los resultados referentes a la interpretación de la incógnita, un estudiante universitario que había reconocido la presencia de la incógnita, no fue capaz de simbolizarla ni encontró cómo determinarla; y no logró desprenderse de la fórmula del área del cuadrado:

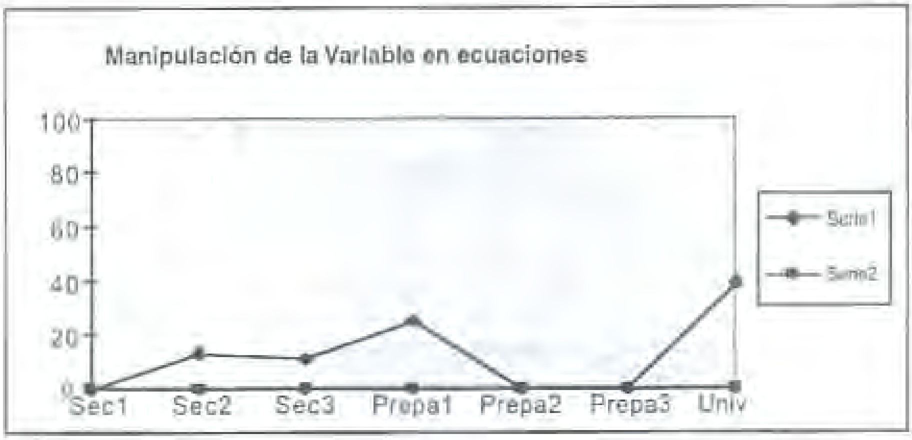
> S Es que mira, toda el área es 27 ¿no?, pero ¿cómo sé cuál es el área de lo negro si no sé el lado? (silencio). Y luego, sin el área, ¿cómo saco el lado?

Aunque en situaciones más sencillas (serie 2) un número mayor de alumnos logra identificar la incógnita y escribir la ecuación correspondiente (**I5**), los porcentajes de alumnos que lo logran son bajos. Si bien se percibe un aumento en los aciertos en los grupos que se encuentran recibiendo instrucción matemática con énfasis en el álgebra, resulta desalentador observar que esta capacidad es muy baja en los grados escolares superiores.

Para conocer la capacidad de *manipulación* de la variable cuando aparece en ecuaciones, se analizaron las respuestas que requerían de esta habilidad para:

- resolver ecuaciones lineales (serie 1);
- resolver ecuaciones cuadráticas (serie 2).

Estos resultados se muestran en la siguiente gráfica.



Gráfica 6

Resulta dramática, en general, la poca capacidad de los alumnos para manipular la variable (**I4**). Es claro además que esta habilidad casi desaparece en los ciclos en los que no se imparten cursos de álgebra (segundo y tercer año de preparatoria), a pesar de que en el curso de Geometría Analítica se hacen ejercicios de manipulación simbólica. Esta capacidad reaparece en el grupo que inicia los estudios universitarios. En el caso de ecuaciones lineales (serie 1) los alumnos muestran algo de capacidad para sustituir el valor de la variable que hace que la ecuación sea verdadera (**I3**) y también cierta capacidad de manipulación (**I4**), pero los resultados en todos los casos indican un desempeño muy pobre. En ninguno de los cursos se encuentra que los alumnos tengan una capacidad satisfactoria para resolver ecuaciones cuadráticas (serie 2), ni cuando tratan de resolverla por inspección directa, evitando la manipulación, ni cuando tratan de manipular la expresión. Ilustramos lo anterior con el siguiente extracto en el que se puede observar como este alumno trata inicialmente de resolver el problema por inspección, lo que lo lleva a un resultado equivocado.

D Escribe los valores que puede tomar la letra en: $(x + 3)^2 = 36$
A ¿Lo puedo desarrollar?
D Sí, como tu quieras.
A Ah pues el –3.
D ¿Cumple?
A Ah no, se haría cero
(Se queda pensando)

Recurre entonces a la manipulación, pero también comete errores y no llega al resultado correcto. Sin tratar de encontrar donde está su error recurre a otro método que tampoco lo lleva a encontrar la respuesta correcta.

A Desarrollas eso y te sale el resultado. ¿Lo saco todo?
D Si porfa
(Escribe: $x^2 + 6x + 9 = 36$, $x^2 - 6x - 27 = 0$)
A ¿Aplico la ley del chicharronero?
D Ajá

(Escribe
$$\frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)2 - 4(1)(-27)}}{2(1)}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2}$$
$$= \frac{6 \pm 12}{2}$$
$$x_1 = 6 + 12 = \frac{18}{2} = 9$$
$$x_2 = 6 - 12 = \frac{-6}{2} = -3$$

A Bueno puede ser que la parábola esté así:
(Grafica la función)
A Pero eso es cuando te sale negativo en la raíz y se te indetermina. Mmm, a ver si le hago así... *((x) (x))*, signo del de enmedio y producto de los signos, luego dos números que sumados den –6 y multiplicados –27 ....mmm... ya, nueve y tres

$(x - 9)(x + 3)$ (lo saca de $x^2 - 6x - 27 = 0$)
$x_1 = 9$
$x_2 = 3$

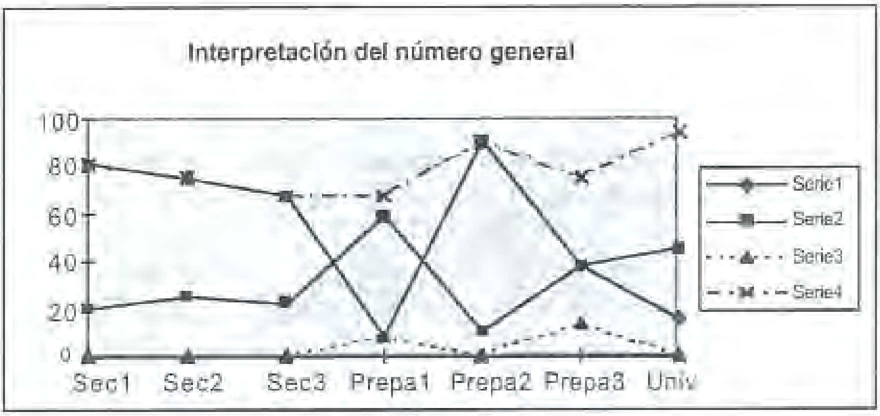
Podemos apreciar que este alumno ha memorizado distintos procedimientos para resolver ecuaciones de segundo grado, sin embargo, las deficiencias que tiene para manipular las expresiones no le permiten encontrar la solución correcta.

Variable como ~~número~~ ~~general~~

A continuación se analizan las *interpretaciones* de los alumnos cuando se enfrentan a la variable como número general cuando aparece en expresiones abiertas, tautologías, secuencias numéricas o en relación a una secuencia de figuras.

El análisis de las respuestas dadas por los alumnos permitió agruparlas en términos de aquellos estudiantes que:

- interpretan la variable que aparece en una expresión abierta o en una tautología como un ente que puede tomar cualquier valor (serie 1);
- interpretan la variable que aparece en una expresión abierta o en una tautologia como un ente que representa un valor determinado (serie 2);
- interpretan la variable que aparece en una expresión abierta o en una tautología como un objeto, es decir, como representación de algo indeterminado con lo cual se puede operar (serie 3);
- reconocen un patrón en una secuencia numérica o en una secuencia de figuras (serie 4).



Gráfica 7

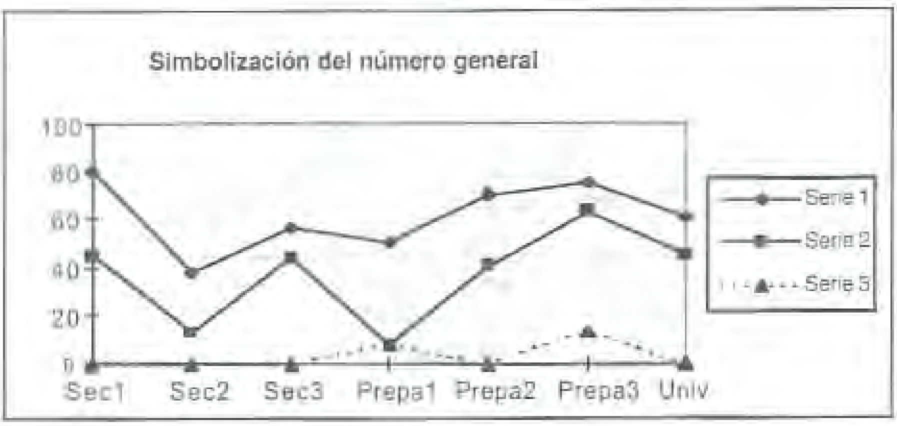
Según se aprecia en la Gráfica 7, los alumnos que no han recibido instrucción algebraica interpretan al símbolo en expresiones generales como la representación de cualquier número (**G2**) (serie 1). Sin embargo, esta comprensión decae en los grados siguientes y los estudiantes tienden a interpretar al número general como si fuera una incógnita (**I2**) (serie 2). Esto ocurre sobre todo en el primer año de preparatoria, cuando la clase de matemáticas se enfoca principalmente al trabajo con ecuaciones. Si bien se nota que en segundo de preparatoria reaparece la interpretación de la variable como número general (**G2**), ésta no se mantiene en los grados superiores. Esto se ilustra con la respuesta dada por un estudiante universitario durante la entrevista:

D ¿Cuántos valores puede tomar la letra en $7x^2 + 2x = 5$?
S Pues tienes que buscar los números, despejas ¿no?
D ¿Cómo?
S Es que ya no me acuerdo de cómo despejar.
...
D Bueno, ahora ¿cuántos valores puede tomar la letra en esta: $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$?
S Es que es lo mismo, ya no me acuerdo.
D De las siguientes dos expresiones $n + 2$ y $2 \times n$ ¿cuál es más grande?
S No se puede saber porque no se sabe cuánto es n, puede ser aquí uno y aquí dos.

Muy pocos alumnos logran interpretar la variable como un número indeterminado (**G3**) (serie 3). En la gráfica 7 puede observarse que la serie 4, que representa la capacidad de los alumnos para reconocer un patrón en una secuencia numérica o en una secuencia de figuras (**G1**), es bastante alta en todos los niveles. Los alumnos son capaces de continuar la secuencia dada, lo que implica que pueden "ver" el patrón que la rige. El hecho de poder "ver" un patrón es considerado uno de los pasos necesarios en el proceso de generalización (Mason et al., 1985), sin embargo, como se verá más adelante, tienen dificultades para simbolizar la regla general que rige a un patrón dado.

Al analizar la capacidad de los alumnos para *simbolizar* a la variable como número general, se distinguió entre los estudiantes que:

- usan expresiones algebraicas para representar matemáticamente frases sencillas y fórmulas para áreas y perímetros (serie 1);
- usan una expresión algebraica para representar el término general de una secuencia numérica simple (serie 2);
- usan una expresión algebraica para representar simbólicamente el cambio de un paso a otro en una secuencia numérica (serie 3).



Gráfica 8

La gráfica muestra que no hay mucha diferencia entre los distintos grupos en la capacidad para traducir al lenguaje algebraico frases sencillas o para utilizar símbolos para representar áreas y perímetros que implican un número general (serie 1). En el caso de expresiones que representan secuencias numéricas se observa una gran variabilidad. Únicamente en los casos de secuencias numéricas simples, los estudiantes pueden deducir un método general y simbolizarlo mediante una fórmula (**G4**) (serie 2). Cuando las secuencias son ligeramente más complejas se observa (serie 3) una gran debilidad en la capacidad de reconocer un patrón o regla general (**G1**) y simbolizarlo (**G4**). En el siguiente extracto de entrevista se observa que un alumno universitario que ya había reconocido el patrón gráfico y numérico, tiene problemas para encontrar la regla general y simbolizarla cuando está trabajando con el siguiente problema:

Observa las siguientes figuras:

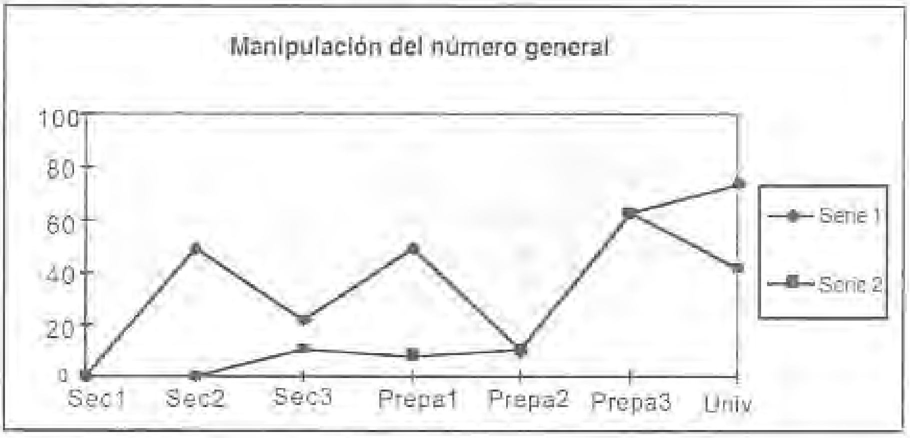
		Número de puntos
Figura #1	o	1
Figura #2	oo oo	4
Figura #3	ooo ooo ooo	9
Figura #4		

D ¿Cuántos puntos agregas para pasar de la figura #m a la siguiente?
A No se puede saber.
D ¿Por qué?
A Porque no sé cuánto vale m.
(Se queda pensando.)
D Entonces de #m a la siguiente.
A Sería la siguiente menos los de m.
D A ver, escríbelo.
A Pero no se cómo escribir la siguiente.
D ¿Cómo se te ocurre?
A No se sabe.
D Escríbelo de alguna forma, como puedas.
A Bueno, n.
D ¿Porqué n?
A Por que es la letra que sigue de m.

El estudiante no puede considerar la variable como un número general, necesita conocer el valor de la variable y para ello establece una correspondencia entre los números y las letras del alfabeto.

La siguiente gráfica compara el desempeño de los estudiantes al *manipular* el número general. Se presentan en ella los porcentajes de alumnos que lograron:

- simplificar expresiones (serie 1);
- desarrollar expresiones (serie 2).



Gráfica 9

La capacidad de los alumnos para manipular el número general (G5) fluctúa mucho a lo largo de los diferentes niveles escolares. Aunque en forma global pudiera observarse un aumento en el número de alumnos que logran manipular expresiones (serie 1 y 2), no hay estabilidad en el comportamiento de las respuestas y, en particular, podría decirse que la simplificación resulta para estos alumnos más simple que el desarrollo de expresiones. El siguiente intercambio ilustra lo anterior.

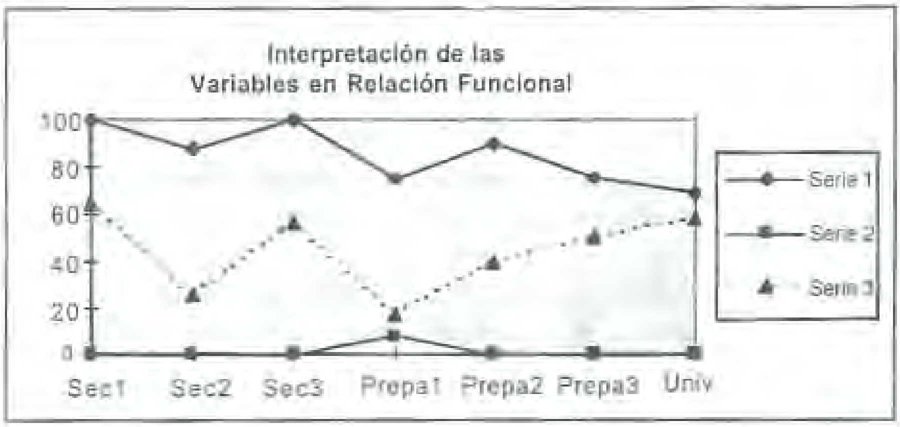
D—¿Puedes desarrollar la expresión $(x+1)^2$?
G— Ah, queda equis al cuadrado y uno ¿no?

En cambio la tercera parte de los estudiantes universitarios son capaces de simplificar correctamente la expresión $y^2 + 2y + 4y^2 - 5y - 8$.

Variables en relación funcional

Al analizar las respuestas dadas por los estudiantes a problemas que requerían *interpretar* variables en relación funcional se identificaron aquellos estudiantes que:

- reconocen la correspondencia entre cantidades numéricas (serie 1);
- reconocen la variación conjunta de variables relacionadas (serie 2);
- conciben la relación sólo en términos de valores discretos (serie 3).



Gráfica 10

En cuanto a la capacidad de reconocer la correspondencia entre cantidades numéricas (**F1**), los grupos obtuvieron puntuaciones parecidas y razonablemente altas (serie 1). Sin embargo, llama la atención que los porcentajes decrecen para los grupos más avanzados. Se observa que la concepción discreta de la variación (serie 3), si bien fluctúa, está presente en todos los niveles. Lo que está claramente ausente en todos los niveles escolares (serie 2), es la capacidad de concebir la variación conjunta de dos cantidades relacionadas (**F4**). Algunos alumnos no distinguen la relación entre las variables, como se ilustra con el siguiente ejemplo:

Al analizar el comportamiento de las variables cuyos valores aparecen en la tabla

x	y
0	0
10	100
–15	225
25	625
20	400
10	100
15	225
–20	400

Sí queremos que el valor de y esté entre 256 y 10000 ¿entre qué valores tiene que estar x?

S Pues igual ¿no?
D ¿Cómo que igual?
S También la x debe estar como la y, entre 256 y 10000, para que quede igual.
D ¿Pero por qué?
S No sé.

En el caso de otros estudiantes, hay cierta interpretación de la variación, y si bien en una primera lectura pareciera ser que la manejan correctamente, un análisis más cuidadoso muestra que sobregeneralizan la interpretación de la variación lineal a cualquier tipo de relación, lo cual indica que su capacidad de interpretar la relación conjunta entre las variables es muy limitada. Este es el caso del ejemplo que se muestra a continuación cuando se trabaja con la misma pregunta que en el ejemplo anterior:

A Bueno, sería y entre 256 y 10000 o sea x debe estar entre la raíz de 256 y la de 10000.

(*Escribe.*) $256 < y < 10000$

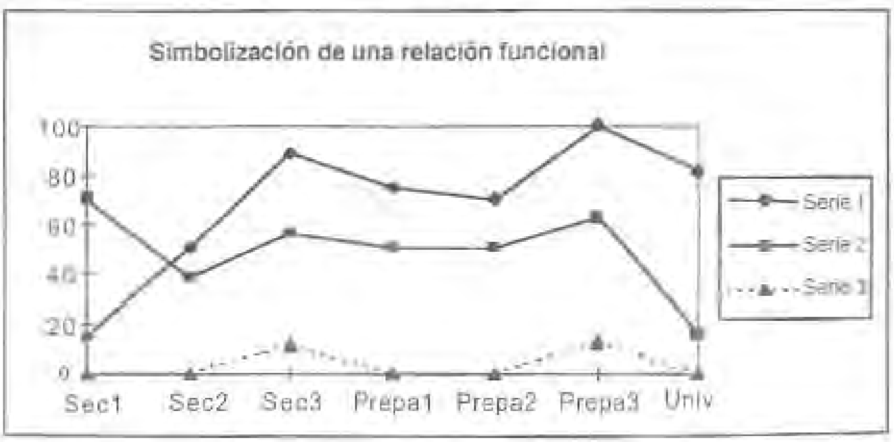
$256 < x^2 < 10000$

A Entonces debe ser entre, a ver, raíz de 256 es, ¿puedo usar calculadora?
O Sí.
A Ah, es 16, y raíz de 10000 es 100. Entre 16 y 100.

Estos resultados resaltan una vez más que en los cursos de matemáticas que se imparten en los niveles básicos y preparatorios de la enseñanza no se logra que los alumnos comprendan este aspecto que es fundamental para la comprensión de la noción de función.

En cuanto a la capacidad para *simbolizar* una relación funcional (**F6**) es posible distinguir entre quienes son capaces de hacerlo a partir de:

- una relación funcional sencilla expresada en lenguaje coloquial (serie 1);
- la representación tabular de la relación (serie 2);
- el análisis de un problema verbal (serie 3).



Gráfica 11

Como se puede observar en la Gráfica 11, la capacidad de simbolizar frases que expresan una relación funcional (serie 1) es mejor en los grados más avanzados. No sucede así cuando se trata de expresar algebraicamente relaciones que se derivan de una situación problemática (serie 3). Frente a problemas verbales, los alumnos de todos los niveles muestran fuertes dificultades para simbolizar una relación funcional. Cuando los datos se presentan en una tabla (serie 2) sorprende que los alumnos que no han estudiado álgebra tengan mayor capacidad para simbolizar y que los recién ingresados a la universidad sean los que presentan más dificultades: En entrevista se pidió a uno de los estudiantes que escribiera la regla general que relaciona el número de fotocopias con el costo, en base a los datos que aparecen en la siguiente tabla:

Número de fotocopias	Costo
5	6.25
10	12.30
15	
	25.00
25	31.25
35	
	62.50
100	

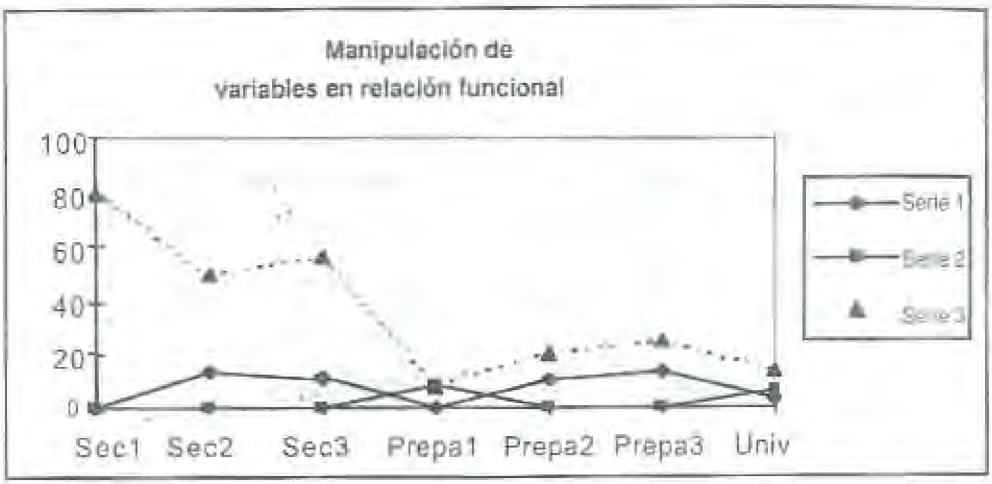
D ¿Podrías escribir la regla general que relaciona el número de fotocopias con el costo?
H Este... (Escribe $xn = 6.25y$)
D A ver, ¿por qué? ¿Cómo va?
H Bueno, es que de este lado (primera columna) si lo multiplicas por algo entonces también de este lado lo multiplicas. Multiplicas 6.25 para ver cuánto va a costar.

El siguiente diálogo se dio con otro alumno:

S Pues.. (Escribe: $n = 1.25$)
D ¿Por?
S Porque 6.25 entre 5 da 1.25.
D Y eso ¿qué es?
S Es ... lo que cuesta la copia, una.

Para analizar la *manipulación* de las variables en relación funcional, se consideró el porcentaje de alumnos que:

- determinan valores sustituyendo en la expresión analítica de una función (serie 1);
- encuentran intervalos de variación a partir de la representación analítica de una función (serie 2);
- utilizan los valores obtenidos en consecuencia de la manipulación para graficar una función sencilla (serie 3).



Gráfica 12

Los alumnos de todos los ciclos escolares muestran muy poca habilidad para manipular las variables en relación funcional. Esto se observa tanto cuando es necesario determinar valores sustituyendo en la función (**F2**) (serie 1), cuanto al tener que determinar intervalos de variación (**F5**) (serie 2), como se muestra en el siguiente diálogo:

D Dada la expresión $40 - 15x - 3y = 17y - 5x$ ¿Qué valor tendrá y para $x = 16$?

H Pues a ver...

(Escribe.)

$$40 - 15x - 3y = 17y - 5x$$

$$40 - 20x = 20y$$

$$40 - 20(16) = 20y$$

$$40 - 320 = 20y$$

$$y = \frac{-320}{20} = 16$$

H Es 16.

La determinación de los intervalos de variación requiere de encontrar los valores de la variable dependiente cuando se conocen los de la independiente (**F2**). Para trabajar con el intervalo puede ser necesario tener que determinar los valores de la variable independiente a partir de los de la variable dependiente (**F3**). Los resultados encontrados sugieren que hay una relación íntima entre las dificultades para encontrar intervalos de variación en general y la dificultad que tienen para concebir la variación conjunta (**F4**), de la que ya se habló anteriormente.

Por otra parte, graficar una función implica reconocer la correspondencia entre cantidades (**F1**) y la posibilidad de calcular los valores de la variable dependiente a partir de los de la independiente (**F2**). En este caso (serie 3) se observa un contundente decrecimiento del porcentaje de respuestas correctas en los ciclos escolares examinados. Sorprende que los alumnos que inician la secundaria muestren mayor capacidad para graficar que aquellos que ingresan a la universidad.

Capacidades generales

Resumiendo los resultados presentados hasta aquí, podemos decir que en cuanto a la capacidad de *manipulación*, *interpretación* y *simbolización* de cada uno de los distintos usos de la variable aparecen diferencias en los distintos grupos. A continuación se presenta una tabla en la que se señala la capacidad para la cual cada grupo obtuvo una proporción mayor de respuestas correctas.

Grupo	**Capacidad de**
Secundaria 1	Interpretación
Secundaria 2	Interpretación
Secundaria 3	Simbolización
Preparatoria 1	Simbolización
Preparatoria 2	Simbolización
Preparatoria 3	Simbolización
Universidad	Manipulación

En esta tabla se observa que para los alumnos de primero y segundo de secundaria, que empiezan a aprender álgebra, es más fácil interpretar correctamente la variable en sus distintos usos que simbolizarla o manipularla. En cuanto a los grupos que ya han cursado álgebra, se encuentra que la capacidad sobresaliente es la simbolización de la variable en sus distintos usos. Sin embargo, esto ocurre siempre y cuando se trate de hacerlo en situaciones que requieren de la traducción directa de un enunciado simple. Cuando se trata de simbolizar a partir del análisis de un problema, esta capacidad disminuye notablemente. El grupo de alumnos que empieza sus estudios universitarios muestra tener mayor capacidad cuando la tarea requiere de la manipulación de la variable.

Este análisis sugiere que cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez con el concepto de variable su preocupación fundamental es darle sentido a los símbolos que se usan para representarlo. A pesar de las dificultades que encuentran en ello, esta capacidad sobresale cuando se compara con las capacidades para simbolizar y manipular los símbolos. En los grados más avanzados, las actividades escolares requieren que ellos mismos desarrollen la capacidad para simbolizar las variables. La gran mayoría logra hacerlo de manera satisfactoria sólo cuando se trata de traducir a lenguaje algebraico enunciados sencillos. Aun así se observa que, a lo largo de varios ciclos escolares, la capacidad para simbolizar la variable supera las capacidades para interpretarla y manipularla. Al término de la enseñanza media, sin embargo, es la capacidad de manipulación de los símbolos la que sobresale. El desarrollo de una buena capacidad de manipulación sigue siendo uno de los aspectos a los que se da mucha importancia en los cursos de álgebra y los resultados parecen indicar que al menos una parte de los estudiantes adquiere finalmente esta capacidad, aunque no en el grado deseado.

Estos resultados permiten concluir que la comprensión del concepto de variable cambia en los distintos grados de la enseñanza media, lo que sugiere que los alumnos se van apropiando progresivamente de las capacidades de interpretación, simbolización y manipulación de la variable. Es importante señalar, sin embargo, que estas capacidades parecen desarrollarse a un nivel de profundidad mucho más bajo que el que sería deseable.

Comentarios finales

Si bien los diferentes usos de la variable están siempre presentes en cada uno de los cursos de matemáticas que se imparten en la enseñanza media, los estudiantes no adquieren la capacidad de interpretarlos, de simbolizarlos y de manipularlos de manera satisfactoria. Al finalizar este ciclo de enseñanza los estudiantes no han desarrollado una conceptualización satisfactoria de los distintos usos de la variable, lo que a su vez impide una comprensión del carácter multifacético de este concepto. Es evidente la falta de solidez en la capacidad de distinguir entre los diferentes usos de la variable y queda de manifiesto la fuerte influencia que ejercen sobre su interpretación, los temas que se están tratando en un momento dado en el salón de clase.

Los datos analizados en este trabajo sugieren que a lo largo de la instrucción los estudiantes aprenden a manejar técnicas específicas y algoritmos, pero no aprenden a reflexionar sobre su utilidad y pertinencia. Se trata de un aprendizaje memorístico que en lugar de favorecer su comprensión del concepto de variable, tiende a entorpecerlo. Esto podría explicar porqué en muchas de las situaciones presentadas, los alumnos que no han cursado álgebra logran mejores resultados que aquellos que ya han recibido instrucción al respecto. Parecería que la forma actual de enseñanza va en detrimento de la intuición matemática que tienen originalmente los alumnos y que, en principio, debieran desarrollar más. Es importante notar, por otra parte, que los errores cometidos por los estudiantes que aún no han cursado álgebra no se corrigen y se mantienen hasta los niveles superiores, independientemente del álgebra estudiada en la escuela.

Los resultados que aquí reportamos no sugieren que las dificultades que manifiestan los estudiantes sean de naturaleza cognitiva o epistemológica, sino más bien parecen tener su origen en la manera como se tratan los distintos usos de la variable en los cursos de álgebra. Si bien se trabaja con los distintos usos de la variable, las características que los hacen diferentes no suelen hacerse explícitas. En los distintos cursos se pone énfasis en uno u otro uso de la variable de manera aislada, y no se hace ningún esfuerzo explícito para ayudar a los estudiantes a integrarlos y darse cuenta que se trata de un concepto multifacético.

Consideramos que una mala conceptualización de la variable puede ser una causa importante para las múltiples dificultades que suelen tener los estudiantes en los cursos de matemáticas en los distintos niveles de enseñanza media y superior. Es necesario por lo tanto repensar profundamente el contenido de los cursos de álgebra así como las estrategias de enseñanza que actualmente se emplean y buscar acercamientos que favorezcan un aprendizaje significativo del concepto de variable. Desde sus primeros acercamientos al álgebra y a lo largo de los cursos sucesivos, los estudiantes deberían trabajar de manera simultánea con los tres usos de la variable, y sería importante indicarles explícitamente cuáles son las características que los hacen diferentes. Pensamos que es además necesario ayudar al estudiante a adquirir la capacidad de interpretar, simbolizar y manipular las variables a través de situaciones diversas de creciente grado de complejidad.

Bibliografía

Bell A. (1996). *Algebraic Thought and the Role of a Manipulable Symbolic Language*, en Bednarz N., Kieran, C. y Lee L. (Eds.), Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching, Kluwer Academic Publishers, p. 151-154.

Boulton-Lewis G.M., Cooper T., Atweh B., Pillay H. and Wilss L. (1998). *Pre-algebra: A Cognitive Perspective*, en Proceedings of the XXII PME International Conference, Stellenbosch, South Africa, p.2 – 144, 2 – 151.

López A. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior*, Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Lozano D. (1998). *El Concepto de Variable. Evolución a lo largo de la Instrucción Matemática*, Tesis de Licenciatura, ITAM, México.

Mason J., Graham A., Pimm D. y Gowar N. (1985). *Routs to/Roots of Algebra*, Open University Press, Great Britain.

Reggiani M. (1994). *Generalisation as a Basis for Algebraic Thinking: Observations with 11-12 Year Old Pupils*, en Proceedings of the XVIII PME International Conference, pp. IV-97-104.

Stacey K. y MacGregor M. (1997). *Multiple Referents and Shifting Meaning of Unknowns in Students' Use of Algebra*, en E. Pehkonen E. (Ed.), Proceedings of the PME XXI International Conference, Lahti, Finland, p. 4 – 190, 4 – 197.

Usiskin Z. (1988). *Conceptions of School Algebra and Uses of Variables*, en Coxford A.F. y Shulte A.P. (Eds.), The Ideas of Algebra K-12, pp. 8-19.

Ursini S. (1996). *Creación de un Potencial para Trabajar con la Noción de Variable*, en Hitt F. (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa, Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 423-440.

Ursini S. y Trigueros M. (1997). *Understanding of Different Uses of Variable: A Study with Starting College Students*, en E. Pehkonen E. (Ed.), Proceedings of the XXI PME International Conference, Lahti, Finland, p. 4 – 254, 4 – 261.

Ursini S. y Trigueros M. (1998). *Dificultades de los Estudiantes Universitarios Frente al Concepto de Variable*, en Hitt, F. (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, Grupo Editorial Iberoamérica.

Warren E. (1995). *The Development of Elementary Algebraic Understanding*, en Meira L. y Carraher D. (Eds.), Proceedings of the IXX PME International Conference, Recife, Brasil, p. 2 – 98, 2 – 105.