Educación Matemática
Vol. 11 No. 2 Agosto 1999
pp. 90-101

Validación y Exploración de Métodos de Solución a Problemas Propuestos a través del uso de la Tenología[1]

Fecha de recepción: Mayo, 1998

Luz Manuel Santos Trigo y Eugenio Díaz Barriga Arceo
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
Departamento de Matemática Educativa
ediazbar@mail.cinvestav.mx, msantos@mail.cinvestav.mx

Resumen. *El uso de ambientes instruccionales donde se consideren actividades que incluyan el uso de la tecnología parece extenderse cada vez más en el estudio de las matemáticas. Particularmente, ilustramos el uso del software Cabri-Geomètre para resolver problemas propuestos. Un recurso importante de este software es que permite fijar un cierto número de variables y explorar el cambio de formas de las figuras manipulando elementos seleccionados del diseño de la representación. Las fases que aparecen durante el proceso de solución del problema (que incluyen su comprensión, diseño e implementación de un plan de solución y la realización de exploraciones posteriores), son usadas para dar un marco de discusión en donde se destacan la representación del problema en la computadora, los criterios de justificación de la solución y la formulación de preguntas relacionadas al problema. Se muestra también que los métodos de solución, los recursos y estrategias matemáticas usadas para resolver los problemas vía software son diferentes al compararse con los que normalmente exhiben las soluciones tradicionales. Aquí, es importante que los estudiantes discutan las ventajas y desventajas de ambos métodos.*

Abstract. *The use of computers-based learning environments seems to be more common in the study of mathematics. Particulary, we illustrate the use the Cabri-géometre software to approach proposed problems. An important feature of this software is that it allows to fix a number of variables and explore the behavior of the figure by varying only one element of the representation. Phases that appear during the problem solving process that include understanding the problem, designing and implementing a plan of solution, and making future exploration are used as a framework to discuss issues related to the representation of the problem in the computer, criteria to support the solution, and the formulation of questions related to the problem. It is also shown that the mathematical resources and strategies used to approach the problems via the software are different when compared with traditional approachés. Here, it becomes important that students discuss the advantages and disadvantages of both methods.*

Introducción

El uso de la tecnología ha llegado a ser un aspecto fundamental en el aprendizaje de las matemáticas en los últimos 10 años; sin embargo, la presencia de las computadoras

[1] Se agradece el apoyo recibido del Conacyt durante el desarrollo de este trabajo (ref. # 28105-S).

en la instrucción ha cambiado significativamente en este periodo. Kaput (1992) establece que "la mayoría del software educacional que existía hasta 1988 fomentaban una instrucción a base de repetición y práctica (p. 548). Es decir, el uso de la computadora, en esa dirección respaldaba una concepción o modelo tradicional de aprendizaje. En la actualidad, las reformas en la educación matemática establecen que el aprendizaje de los estudiantes va más allá de la aplicación de reglas o algoritmos. Incluye que los estudiantes atiendan el significado de las ideas matemáticas y desarrollen estrategias y formas de pensar consistentes con el quehacer matemático. Goldenberg (1996) critica los cambios curriculares que se basan en sumar y eliminar contenidos matemáticos; propone lo que llama "hábitos del pensamiento matemático" como elementos organizadores del curriculum. Por ejemplo, la actividad de reformular o diseñar problemas esta dentro de los hábitos que los estudiantes deben desarrollar en sus experiencias de aprendizaje. En particular, actividades como visualizar, representar, y formular relaciones matemáticas aparecen como centrales en las últimas propuestas del currículum matemático a nivel preuniversitario (National Council of Teachers of Mathematics, 1998).

¿Cómo promover actividades instruccionales donde los estudiantes puedan desarrollar hábitos consistentes con el quehacer matemático? ¿Qué tareas o problemas ayudan a generar un ambiente donde los estudiantes tengan oportunidades para plantear sus propias preguntas y argumentos de solución? Una actividad poco explotada que puede ayudar a que los estudiantes reflexionen sobre el potencial de sus recursos matemáticos es que trabajen con problemas o ejercicios propuestos y propongan explícitamente conexiones nuevas y distintas formas de solución. En particular, una de las principales fuentes de consulta para la preparación de clases de los profesores de matemáticas en EUA, a nivel medio superior, es el conjunto de problemas que aparece en el *Calendar del Mathematics Teacher* en su espacio central. Hay diferentes formas en las que los profesores utilizan este material: como problemas de tarea, problemas para discusión en pequeños grupos, ejemplos de aplicación, etc. Los problemas ofrecen al estudiante la oportunidad de utilizar sus conocimientos en diversas áreas tales como aritmética, álgebra, cálculo, geometría y probabilidad. Además, una parte significativa de los problemas puede ser resuelta utilizando diversos métodos. Así los estudiantes pueden discutir las propiedades matemáticas presentes en los procesos de solución y ver la importancia de ir más allá de encontrar una respuesta a un problema propuesto (Santos, 1996; 1997; 1997a).

El uso de computadoras o calculadoras ha sido identificado como una componente importante en el aprendizaje de la Matemática (NCTM, 1989; 1998). Como consecuencia, es necesario explorar formas en las que este instrumento puede ayudar a los estudiantes. Por su versatilidad en la representación de objetos geométricos, sus posibilidades de simulación de objetos y fenómenos reales, elegimos el software Cabri-Géomètre, para abordar algunos de los problemas propuestos. Este entorno de Geometría Dinámica, aporta un elemento que consideramos relevante en la exploración de los problemas: la manipulación dinámica de sus objetos en forma "directa" mediada por la computadora; en particular, la búsqueda de propiedades "invariantes" a través de la interacción mecánico-visual que ejerce el usuario en el monitor por medio de la acción combinada de teclas y movimientos del "mouse".

¿Qué aspectos del proceso de solución se resaltan con el uso de la herramienta con respecto al uso tradicional del papel y lápiz? En este trabajo se ilustran dos ejemplos en los cuales es interesante formular con precisión y proponer preguntas durante del proceso de aplicar esta herramienta al intentar resolver el problema. Aspectos relativos al tipo de recursos matemáticos necesarios para representar el problema en la computadora, la importancia de enfocarse en un tipo específico de representación, las estrategias y los criterios usados para justificar la solución serán usados en el marco de discusión del proceso de solución asociado a cada problema. Aunque dos problemas se han seleccionado para ilustrar el potencial del software, es importante mencionar que hay muchos más ejemplos del "Calendar" que pueden ser tratados similarmente.

Problema 1. Sea ABCD un rectángulo. F es un punto sobre el segmento AB. Los segmentos DF y CB se prolongan hasta encontrarse en el punto E. Los segmentos Ac y DF se cortan en G. Si FG = 2 y FE = 6, encuentre DG (Calendar, January 1998, # 2).

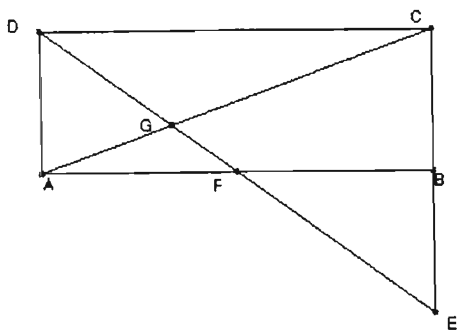

Figura 1. Sea ABCD un rectángulo. ¿Cuánto mide DG si FG = 2 y FE = 6?

Primer ciclo: Comprensión del problema. Una pregunta fundamental dirigida al estudiante es *¿cómo se puede representar el problema en la computadora o en que entorno es susceptible de solución este problema?* Para responder esta pregunta, será necesario identificar los componentes clave del problema y representarlos para explorar algunas de sus propiedades y relaciones. La representación de los datos puede tomar diferentes rumbos o direcciones. En particular, al iniciar la construcción de la figura, el estudiante tiene que atender a las propiedades geométricas particulares y traducirlas à los comandos establecidos en el programa. Por ejemplo, algunas preguntas importantes incluyen: ¿Cuáles son los aspectos o propiedades importantes de un rectángulo? ¿Cómo se construye una figura con dos pares de lados paralelos o cuatro ángulos rectos? ¿Cómo se construye un segmento? ¿Cómo se construye una línea perpendicular a un segmento dado? El plantearse este tipo de preguntas ayuda a que el estudiante no sólo vea una figura, diagrama o representación estable del problema, sino que vislumbre y manipule un conjunto de propiedades de la representación.

Una primera lectura del problema puede determinar el orden en el que la información se representa para buscar y alcanzar la solución del problema. Por ejemplo, parece que la figura del rectángulo, su diagonal y la longitud de algunos segmentos son aspectos que deben exhibirse en el problema 1. Uno puede iniciar la construcción fijando un rectángulo y variando las longitudes de los segmentos o fijando las longitudes de los segmentos dados en el problema y variando el rectángulo. Así, ¿qué dirección tomar? Un análisis más profundo de la información ayudará a determinar que comenzar fijando los segmentos dados tiene ventajas sobre la idea de fijar al rectángulo. Esto se debe a que el problema se reduce a encontrar el cuarto vértice del rectángulo que se ajuste a los datos.

Fijar las longitudes y variar el rectángulo. Una forma de representar el problema puede involucrar el dibujar un rayo vertical CE y desde E trazar el rayo EX. Ahora, elegimos los puntos F y G tales que FG = 2 y FE = 6.

Se construye la perpendicular a CE que pase por F; llamemos B a su intersección con CE. También dibujemos el rayo que corta a BF en A (figura 2).

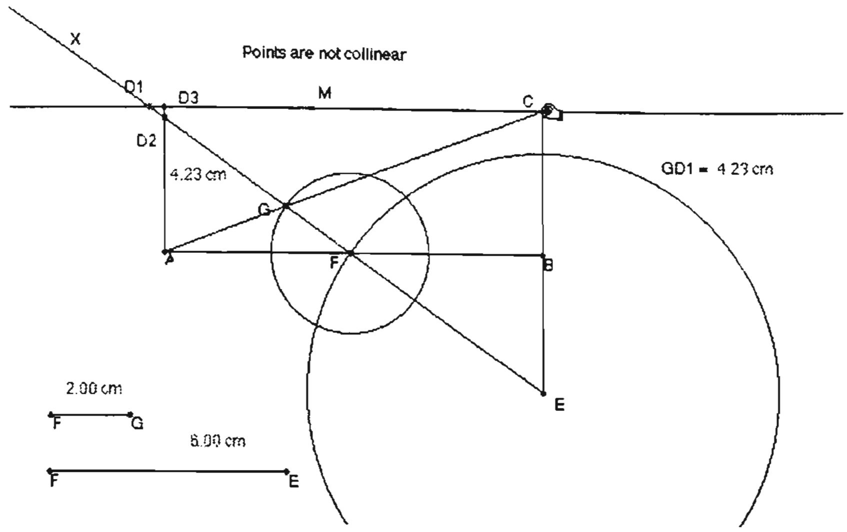

Figura 2. Una representación que lleva a mantener las longitudes dadas EF y FG. Conclusión: sólo se mueve el punto C.

Se observa que se han identificado tres vértices de un posible rectángulo en el cual AC es una diagonal. Para determinar el otro vértice, trazamos desde C una perpendicular a CE y el punto de intersección D1 que se forma con el rayo EX y el rayo perpendicular en C al segmento CE será el candidato a ser el vértice restante. Aquí es necesario probar que los vértices seleccionados pertenecen al rectángulo (figura 3).

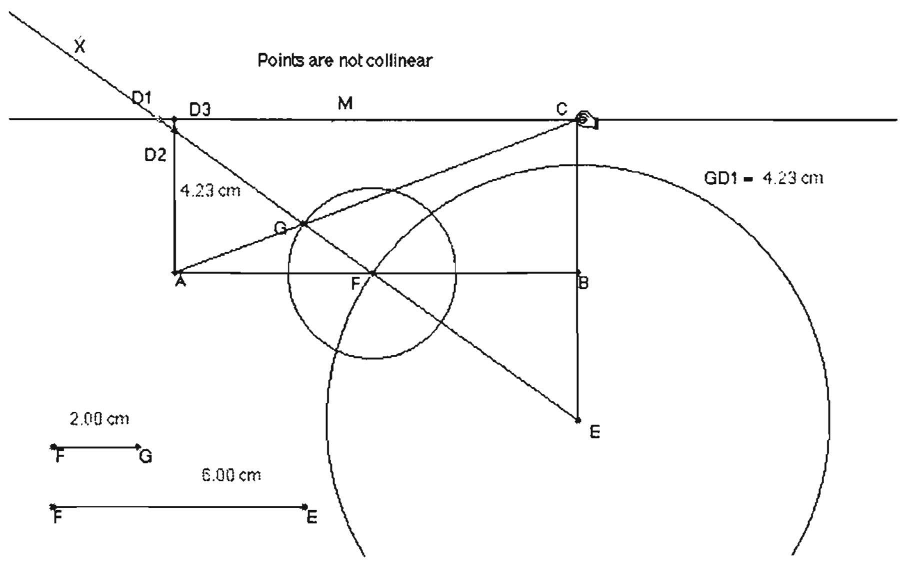

Figura 3. Variando la posición del punto C, buscando la colinealidad de D_2, M y C.

Ya que el rayo EX fue un rayo arbitrario, puede ocurrir que la intersección de la línea perpendicular a AB en A no necesariamente concurra en la del rayo CD_1 en D_1. Si D_2 es la intersección de EX y la perpendicular a AB en A, y D_3 es la intersección de esa perpendicular con el rayo CD_1, entonces, moviendo el vértice C podemos mantener G y F fijos y hacer que los tres puntos sean el mismo (D). En ese momento se puede medir la longitud de DG (figura 5).

Segundo ciclo: Explorando los datos a través de diferentes relaciones. Una importante propiedad de este software es que permite fijar un número de variables y explorar el cambio de forma de la figura por medio de la variación de algún elemento de la representación.

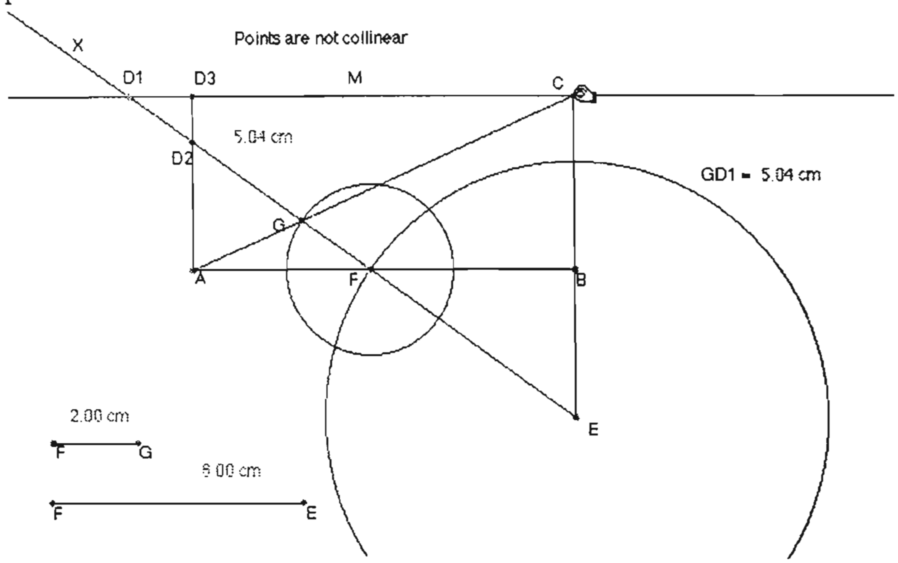

Figura 4. Variando la posición del punto C para analizar el comportamiento de D_2, M y C.

En la figura 4, se observa que uno puede variar la posición de C a lo largo de la línea CB y se ve entonces que G y F se reubican de acuerdo a este movimiento. La solución se dará cuando los tres puntos D_1, D_2 y D_3 sean el mismo punto.

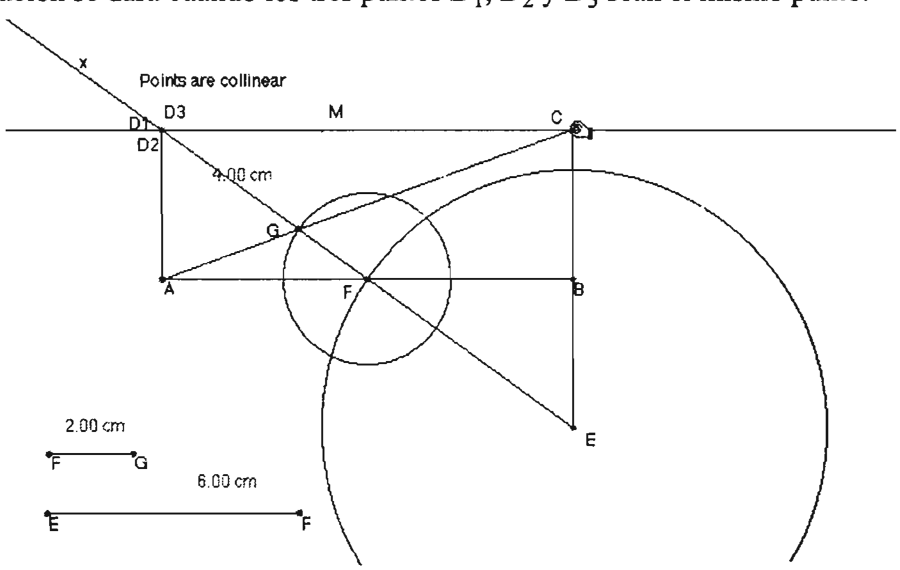

Figura 5. La colinealidad como criterio de solución del problema propuesto.

¿Cómo puede garantizarse que esto ocurrirá? Para responder a esta pregunta recurrimos a utilizar la propiedad de colinealidad de 3 puntos (alineación, que también es parte del menú del software). Dicho de otra forma, el software nos muestra cuando tres puntos cumplen esta condición. Cuando esta propiedad ocurra, entonces diremos que hemos encontrado el cuarto vértice del rectángulo y podremos medir la distancia buscada GD (figuras 4, 5 y 6).

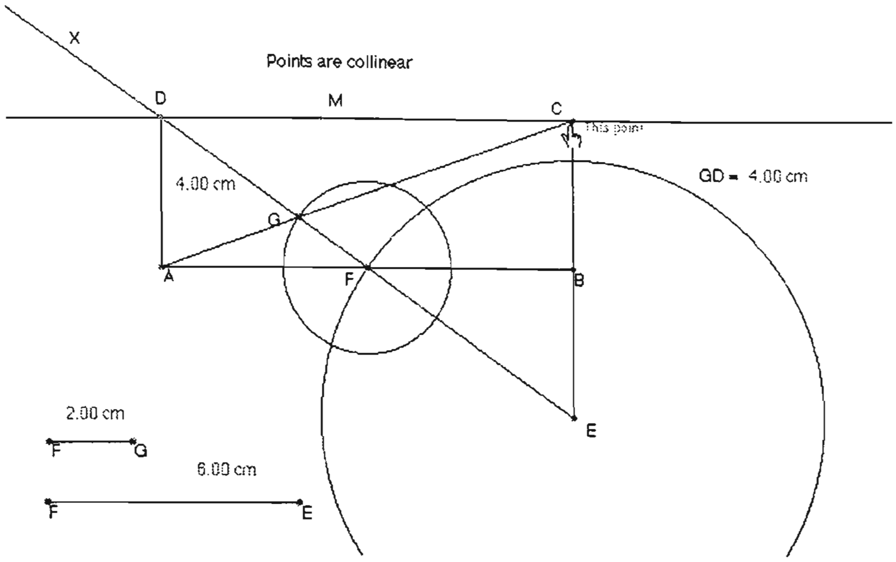

Figura 6. La longitud buscada DG = 4.

Exploraciones posteriores. Basados en esta segunda construcción, ahora podemos medir fácilmente los lados del rectángulo y cambiar los datos originales para explorar otras relaciones. ¿Determinan los datos en el problema un único rectángulo? ¿Qué ocurre si F está en el punto medio del segmento AB? ¿Cuál debería ser la medida de DG si GF = FE? Estas son algunas preguntas que pueden explorarse de forma natural con la ayuda del software.

¿Es posible dibujar muchos rectángulos con los datos dados (figura 7)? En efecto, si movemos el punto B alrededor de la circunferencia cuyo diámetro es FE (B_1 ejemplifica una posición de este punto móvil), y ubicamos al punto C_1 en la intersección del rayo EB_1 y la circunferencia cuyo diámetro es DE, obtenemos un nuevo ejemplo de rectángulo que satisface las condiciones del problema (considérese al rectángulo de vértices $A_1B_1C_1D$). Las medidas de los ángulos DC_1E y FBE_1 (ángulos rectos) son propiedades adicionales que ayudan a identificar el nuevo rectángulo.

Una visión retrospectiva. La solución de este problema reportada por el "Mathematics Teacher", p. 58, involucra un argumento sustentado en la semejanza de triángulos esencialmente (específicamente la semejanza del ΔEGC con ΔDGA y la de ΔAGF con ΔCGD, figura 1). Ahí trabajando con la proporcionalidad de los lados y combinando la información de ambas semejanzas, uno obtiene que: $EG/(DG) = DG/FG$; de esta expresión se tiene que: $(DG)^2 = (EG)(FG)$, lo cual lleva a la solución, a partir de la sustitución de los datos dados.

La solución encontrada usando Cabri-Géomètre básicamente depende del uso de propiedades del rectángulo (perpendicularidad de lados contiguos) y la aplicación del criterio de colinealidad de tres puntos. Se observa que dos criterios diferentes se pueden usar para justificar la misma solución del problema. Aquí, la construcción usada

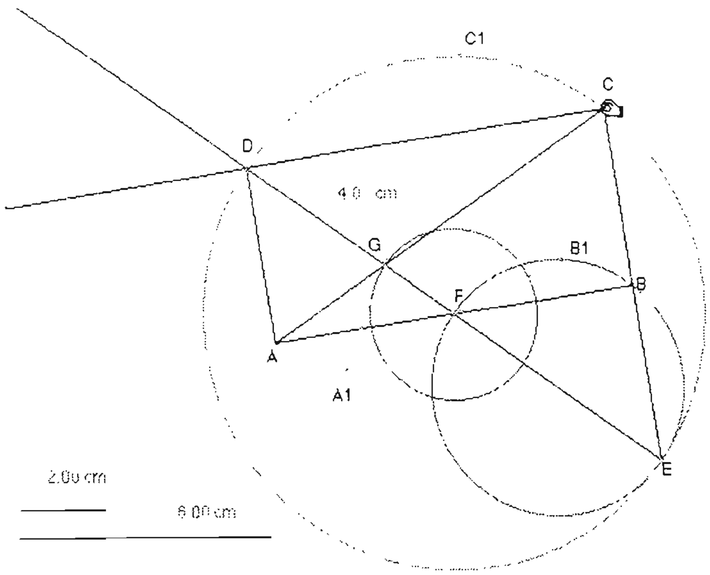

Figura 7. La respuesta a la pregunta propuesta a posteriori
¿los datos dados del problema determinan un único rectángulo?

para resolver el problema ofrece un entorno interesante para los estudiantes. El hecho de que en la construcción no se ocultan las componentes clave del problema, permite observar los cambios de forma dinámica y reconstruir el entorno paso a paso. Por ejemplo, la figura 7 ilustra como otras propiedades geométricas están presentes en la discusión de la solución mientras se exploran las dimensiones de los rectángulos solución. Una actividad importante es hacer una reflexión explícita con los estudiantes acerca de las ventajas y desventajas de la solución reportada con el uso de lápiz y papel y la solución lograda a través del software.

Problema 2. Dos círculos congruentes se cortarán de una tabla cuyas dimensiones son 9 cm × 12 cm. ¿Cuál es el radio máximo posible, aproximado hasta centésimos, de esos círculos? ¿Qué porcentaje, aproximada hasta centésimas, representa este corte del área del rectángulo? (Calendar, November 1997, #22) figura 1.

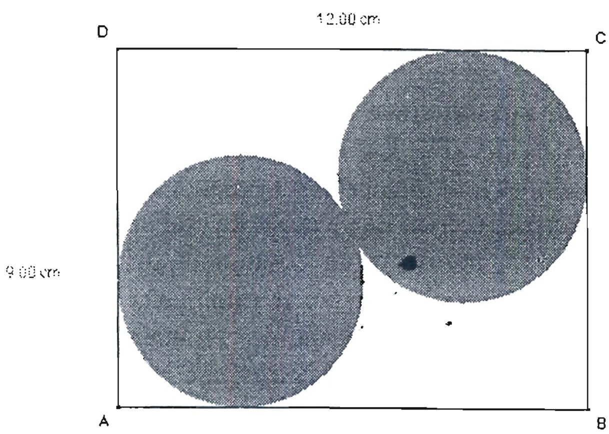

Figura 1. ¿Cuál es el radio máximo posible de los círculos en esta tabla?

Primer ciclo: Comprensión del problema. Para tener una idea de las variables claves que se necesitan atender para proponer un método de construcción, será importante explorar casos particulares relacionados con este problema. Por ejemplo, cuatro formas diferentes de dibujar la ubicación de estos círculos ayuda a explorar y verificar la variación de los radios en cada uno de los casos posibles:

(a) Los centros de los círculos pueden construirse sobre la mediatriz del lado AB

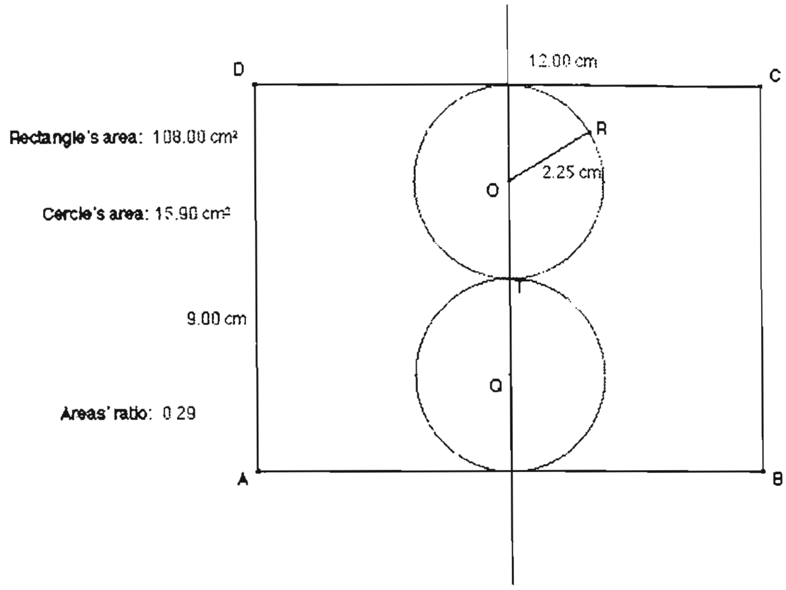

Figura 1a. Centros en la mediatriz de AB

(b) Los centros de los círculos pueden ubicarse sobre la mediatriz del lado BC,

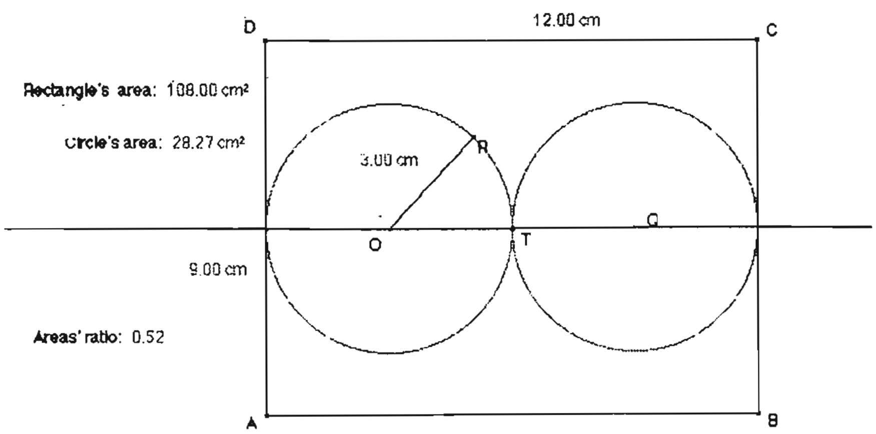

Figura 1b. Centros en la mediatriz de BC.

(c) Los centros de los círculos pueden aparecer sobre la diagonal AC del rectángulo

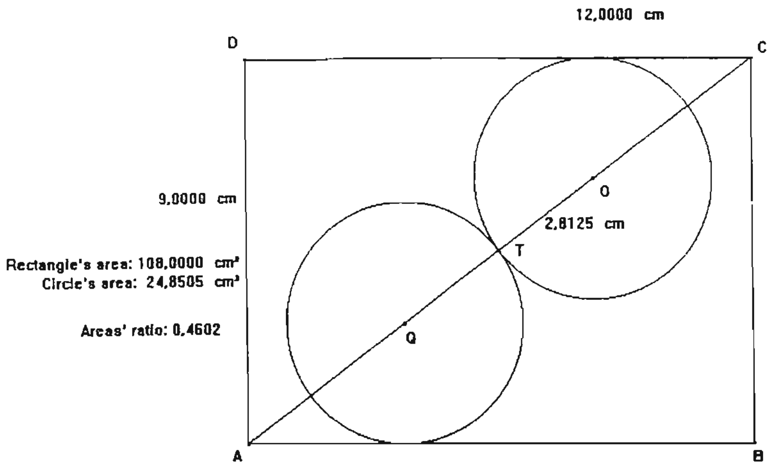

Figura 1c. Centros en la diagonal AC

(d) Los centros de los círculos pueden ubicarse sobre la bisectriz de los ángulos DAB y DCB, respectivamente.

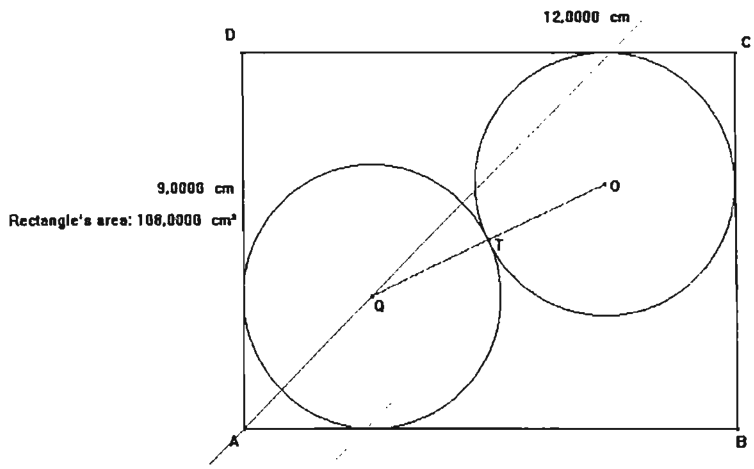

Figura 1d. Centros sobre las bisectrices de ángulos rectos.

De las figuras, se observa que el máximo radio de los círculos (1a) y (1b) es 2.25 y 3 respectivamente. En las construcciones también se observa que el centro de simetría del rectángulo T parece ser un punto importante en la figura. Una conjetura que surge de analizar los casos anteriores es que T funciona como punto tangente de los círculos buscados.

Segundo ciclo: Exploración de relaciones vía construcciones auxiliares. Dibujemos una línea EF que paseo por T (figura 2a). EF divide al rectángulo en dos figuras congruentes. La construcción de los círculos congruentes del problema se reducirá a encontrar el círculo de mayor área inscrito en una de las figuras congruentes, pues su simetría con respecto a T proporcionará el círculo restannte. Prolonguemos el aryo EF hasta que corte al rayo AD en G. Aquí identificamos el ΔAEG y nos preguntamos:

¿cómo podemos inscribir un círculo en este triángulo? Para responder a esto, dibujamos dos de sus bisectrices para determinar el centro de dicho círculo; en especial, una de ellas bisecta al ángulo recto GAE. Ahora, dibujamos un segmento desde el centro perpendicular a cualquiera de los lados del ΔAEG para encontrar el radio del círculo. Este círculo no necesariamente pasa por T. Se observa que el radio es menor que la distancia del centro del círculo al punto T (teorema de Pitágoras).

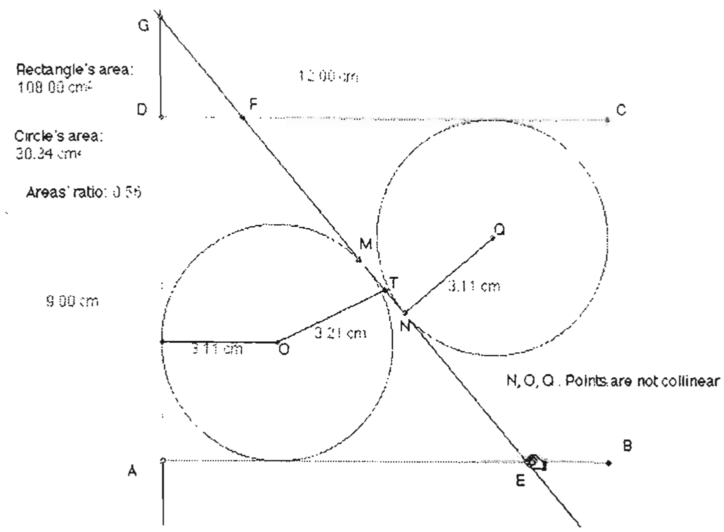

Figura 2a. División en cuadriláteros congruentes.
Un círculo inscrito en el triángulo GAE, el otro obtenido análogamente.

Ahora, si movemos la inclinación de la línea EF, observamos que el radio del círculo inscrito se incrementará para alcanzar el valor del segmento OT. Mediante una construcción similar en el otro cuadrilátero EBCF se llega a que el máximo valor posible se logrará cuando los dos centros de los círculos y T se encuentren en la misma línea. De nuevo como en el problema 1, la colinealidad es el criterio clave para justificar la solución (figura 2b).

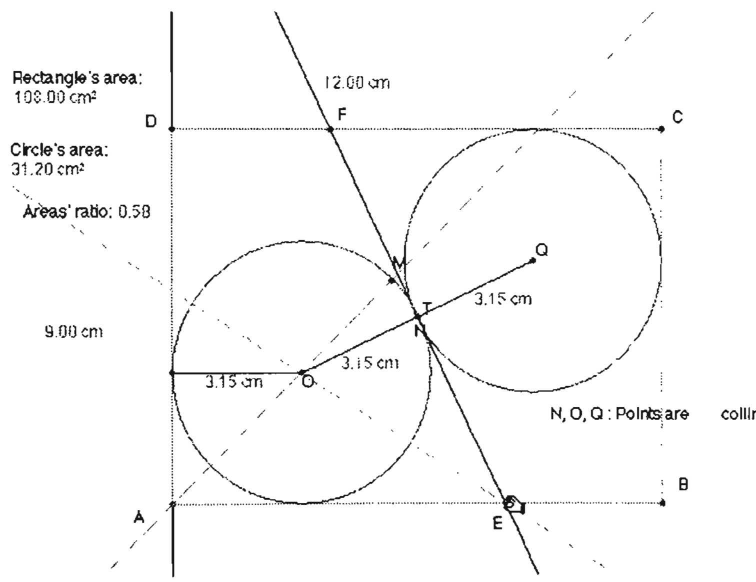

Figura 2b. Otra vez la colinealidad como criterio de solución.

Exploraciones posteriores. ¿Qué ocurre si uno desea construir sólo el círculo con mayor área en el rectángulo? ¿Qué ocurre con tres círculos? ¿Dónde localizar los centros? ¿Qué pasa si las dimensiones del rectángulo cambian? Son algunas preguntas que podrían ser exploradas con auxilio del software (figuras 3a y 3b).

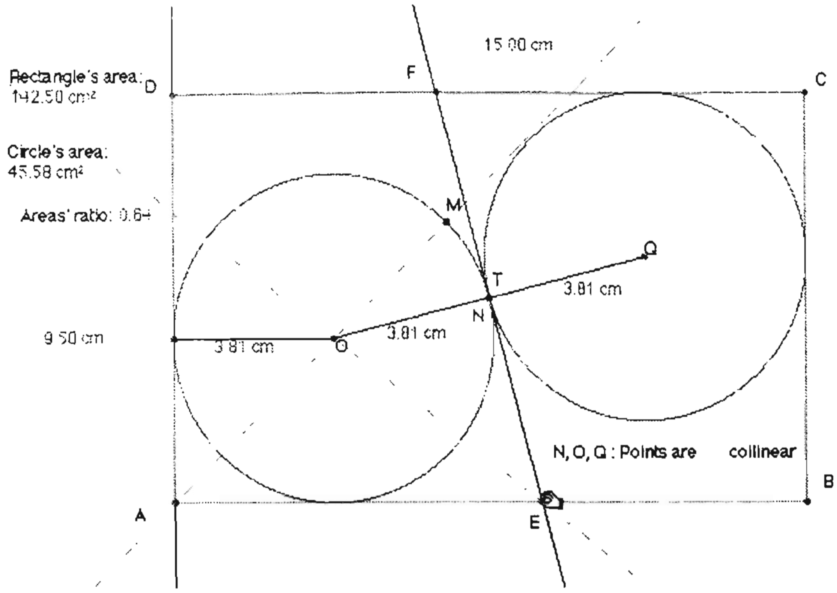

Figura 3a. Variando las dimensiones del rectángulo.

Una visión retrospectiva. El método de solución descrito en el "Calendar" (p. 647) parece dar por hecho que el lector reconoce que los centros de ambos círculos se localizan sobre las bisectrices de los ángulos DAB y BCD. Además, también da por obvio que el segmento que conecta a los centros pasa por el punto de tangencia de los círculos, aunque no supone que sea el centro de simetría del rectángulo. Aquí, el problema se reduce a encontrar una expresión cuya solución da el valor del radio. De hecho, la solución con lápiz y papel se reduce a una aplicación directa del teorema de Pitágoras a partir del diagrama dado inicialmente. La expresión es $(12\text{-}2r)^2 + (9\text{-}2r)^2 = 2r^2$. De aquí se obtiene la solución para r. La solución con el uso del software ilustra claramente cómo esas propiedades surgen naturalmente durante el proceso de solución (figuras 2a, 2b). Por ejemplo, la exploración de los casos particulares ayuda a identificar la importancia del centro de simetría del rectángulo en este problema, y la construcción auxiliar fue un paso importante para sugerir el trazo de bisectrices. De nuevo, los estudiantes deberían discutir las ventajas y desventajas mostradas por los dos métodos.

Conclusión. En este trabajo se ilustra la importancia de examinar problemas propuestos bajo la perspectiva de buscar diferentes conexiones o métodos de solución. Los ejercicios típicos que se utilizan en la clase, los problemas de los libros de textos o los que aparecen en las diversas revistas son una fuiente natural para que el estudiante los reformule o los utilice como plataforma para explorar diversas relaciones matemáticas. El uso de la computadora permite que desde la fase inicial de entendimiento hasta el reporte final de la solución del problema aparezcan representaciones que permitan identificar no solamente una variedad de recursos, sino que también otras conexiones. Bajo esta perspectiva, los ejemplos presentados aquí muestran que los criterios matemáticos empleados para justificar las soluciones hacen énfasis en recursos diferentes

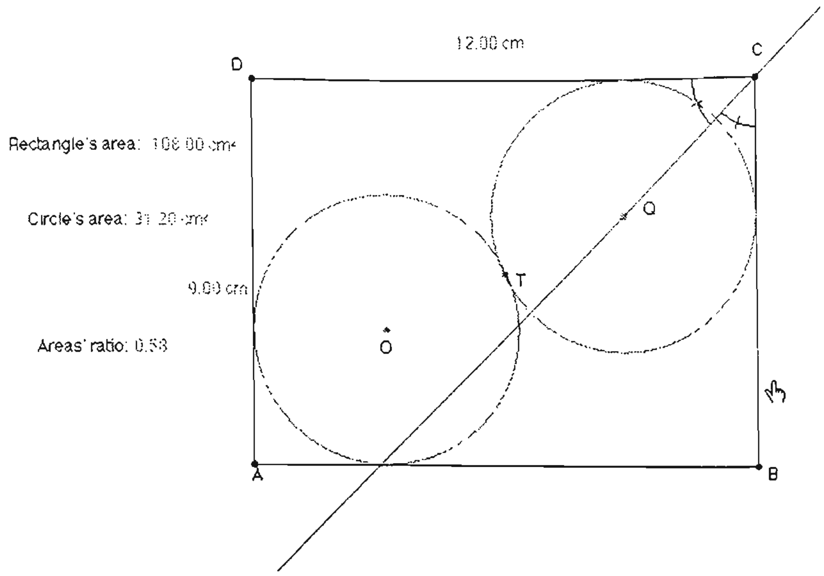

Figura 3b. El centro como intersección de una parábola y una bisectriz.

comparados con los métodos tradicionales reportados en las soluciones a los problemas propuestos. Además, el proceso de solución, vía software, proporciona un entorno natural para introducir, explorar, formular y profundizar otras preguntas relacionadas con cada problema. Durante la interacción con el problema los conceptos claves y las propiedades básicas de las figuras aparecen como un recurso importante para materializar las construcciones de los problemas. Por otro lado, ver diferentes representaciones dinámicas de los problemas ayuda a visualizar conexiones y generalizaciones del problema. Parece que Cabri-Géomètre puede ser el vehículo para resaltar en los estudiantes el proceso de solución de un problema dado y explorar otras nuevas preguntas relacionadas.

Bibliografía

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. En D. Grouws (Ed.), *Handbook on research in mathematics teaching and learning*, pp. 515-556. Macmillan: New York.

Goldenberg, P. (1996). "Habits of mind" as an organizer for the curriculum. *Journal of Education*, 178, 1. pp. 13-34.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. reston, Va.: NCTM, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and standards for school mathematics: Discussion draft*, 1998.

The Mathematics Teacher Calendar, Vol. 91, No. 1. January, 1998.

The Mathematics Teacher Calendar, Vol. 90, No. 8. November, 1997.

Santos, Manuel. An Exploration of Strategies Used by Students to Solve Problems with Multiple ways of Solution. *Journal of Mathematical Behavior* 15, 263-284, 1996.

Santos, Manuel. La transferencia del conocimiento y la formulación de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. Vol. 6, No. 3, pp. 11-30.

Santos, Manuel. *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1997a.