complejificación de las actividades matemáticas en el aula, puede asumir el manejo de la calculadora como aprendizaje de relaciones matemáticas y formas de producirlas; en contraste con la segunda opción, privilegiar el tiempo, lo conduce a aceptarla tal vez como herramienta útil para realizar procedimientos tediosos o para realizar gráficas.

Bibliografía

Brousseau, G. (1983) *Ingénierie didactique*. 2eme Ecole de didactique des maths. Citado por Doaudy.

C harnay , R. (1988) *Aprender (por medio) de la resolución de problemas.* En Grand. N. Revista de matemáticas, ciencias y tecnología para los maestros de primaria y pre-primaria, Nº. 42, enero de 1988. Documento CRDP. Grenoble, Francia.

Chevallard , Y. et **Johsua , M.** (1985) *La transposition didactique*, du savoir savant au savoir ensegné, Grenoble :La penseé sauvage.

Douady , R .(1995) *La didáctica de las Matemáticas en la actualidad*. En: Modulo de Educación Matemática Ibagué, Tolima : Universidad del Tolima.

Ministerio de Educación Nacional (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas*. Serie Lineamientos Curriculares. Bogotá, Colombia.

Moreno, L. y Sacristán , A (2002, en prensa) *Abstracciones contextualizadas: Conjeturas y generalizaciones en un Micromundo Computacional.* México: Fondo de Cultura Económica.

Moreno, L. y Waldegg, G. (2002.) *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas.* En: Memorias Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá : Ministerio de Educación Nacional

Morton, F. (1995) *Fenomenography: A perspective in investigation for searching diferent understandings about reality.* In Sherman and Webb (Eds) Qualitative research in education. Forms and Methods. London :The Falmer Press.

Resolución de problemas geométricos en el ambiente de geometría Cabri por profesores de matemáticas en formación

Octavio Augusto Pabón Ramírez

Grupo de Educación Matemática, Instituto de Educación y Pedagogía

Universidad del Valle, Cali

Resumen. El presente artículo muestra algunas de las estrategias consideradas por un grupo de profesores de matemáticas en formación, ante un problema geométrico no rutinario abordado en el ambiente Cabri incorporado a la calculadora TI92. De esta manera, se intenta constatar algunos rasgos particulares del trabajo de los resolutores “expertos” (alumnos universitarios de los primeros semestres de la licenciatura en matemáticas) y los resolutores “novicios” (alumnos de secundaria), en cuanto a las estrategias de solución de problemas

geométricos, en particular tomando como referente la mediación instrumental de las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTIC).

Introducción

Las investigaciones en educación matemática realizadas a lo largo de la última década, han contribuido a despejar algunos de los interrogantes planteados con relación al enfoque de resolución de problemas matemáticos en el ámbito escolar. Esto ha permitido caracterizar, entre otras cosas, métodos de resolución, tipos de problemas, tipos de resolutores y heurísticas desplegados por los alumnos en la clase de matemáticas. Sin embargo, sólo recientemente se ha integrado a estas investigaciones el análisis del impacto de las *Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación* (NTIC) sobre el desempeño matemático en la resolución de problemas por parte de alumnos de secundaria y profesores de matemáticas en formación. La importancia de este tipo de indagaciones se reconoce en muchas propuestas curriculares, incluyendo a la colombiana que haciéndose eco de esta perspectiva, señala:

... *con el énfasis que se le está dando a la matemática escolar centrada en la resolución de problemas y la intención de realizar conexiones matemáticas con otras áreas de las ciencias y entre ellas mismas, el uso del recurso tecnológico es fundamental para pasar de un currículo centrado en contenidos, a uno centrado en la resolución de problemas. El poder abordar situaciones problemáticas en contextos reales que permitan partir de la obtención de información o datos empíricos, para su posterior sistematización y análisis, es lo que verdaderamente posibilita el cambio. Igualmente, los problemas complejos pueden atacarse con diferentes herramientas matemáticas, lo que conlleva a la integración de las diferentes ramas: geometría, álgebra, estadística, de una manera natural.* (Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas**.** 1999).

En efecto, se reconoce que el trabajo en ambientes computacionales como los de geometría dinámica, permite entre otras cosas *investigar construcciones matemáticas y su significado, trabajar en problemas no rutinarios, formular y explorar conjeturas y determinar patrones generales de funciones recursivas* . Además, el trabajo en estos ambientes da lugar a un hecho extremadamente importante en términos didácticos: *la posibilidad de que los alumnos visualicen el problema desde varias representaciones* , lo cual puede permitir que identifiquen y exploren diversas *cualidades* asociadas al proceso de solución. (SANTOS TRIGO, 2000)

En este sentido, resulta interesante y necesario preguntarse sobre la *calidad matemática* de ciertos problemas que se han constituido de cierta manera en *paradigmáticos* en la investigación en didáctica de las matemáticas, como en el aula de clases. En particular, en el presente artículo se aborda a través del desempeño matemático de profesores en formación, un problema estudiado por algunos de los investigadores más influyentes en el desarrollo del enfoque de resolución de problemas (POLYA, 1945, Schoenfeld, 1985) y que recientemente se ha convertido en objeto de indagación didáctica en ambientes de geometría dinámica (SANTOS TRIGO, op. cit)

Marco teórico

En el escenario internacional, la investigación didáctica ha permitido desarrollar una conceptualización en torno a la implementación de las tecnologías computaciones en el ámbito escolar, que resulta ser bastante funcional para dar cuenta del trabajo en el aula. Las ideas relacionadas con los sistemas conceptuales que se proponen como organizadores del trabajo y que están estrechamente relacionadas con la teoría y la práctica del trabajo con las calculadoras, comprenden: *la mediación instrumental, las representaciones semióticas, los procesos de abstracción y generalización en contexto, las situaciones problemáticas y la evaluación de la práctica.* (MORENO, 2000).

Una de las categorías que se privilegia en este artículo es *la mediación instrumental* (en palabras sencillas, cómo el software Cabri Géomètre incorporado en la calculadora TI92 cambia o modifica las estrategias intelectuales del alumno y cómo moviliza las formas de conocimiento mismo que se van desarrollando a partir de la herramienta). El diseño de *situaciones problemáticas (entendidas como detonadores de redes conceptuales),* es elemento de análisis imprescindible en la búsqueda de propuestas de intervención en el aula que potencien la *dimensión simbólica y la interactividad*, en las cuales se reconoce que el uso del computador produce un impacto en las experiencias matemáticas de los alumnos (BALACHEFF & KAPUT, 1996). Se trata entonces de indagar cómo se pueden diseñar actividades de aprendizaje en las cuales el uso de la tecnología ayude o enriquezca el estudio de las matemáticas (MORENO & SANTOS TRIGO, 1999) y den cuenta del papel del docente en una clase enriquecida por cuenta de la tecnología.

De otra parte, al indagar el importante asunto para la enseñanza de las matemáticas, de cómo la herramienta tecnológica *media* el conocimiento y cómo este proceso de mediación realmente cambia el conocimiento en sí mismo y su uso, es evidente que se deben proporcionar evidencias empíricas que permitan hacer visible la *emergencia de una nueva epistemología de la matemática* creada por el uso de esta tecnología. Ejemplos de esto lo constituyen las investigaciones que han señalado, entre otras cosas, que la modelación es más relevante en la era del computador de lo que fue antes e igualmente que la naturaleza de la prueba es también un asunto susceptible de transformación por el uso de la tecnología (GUTIERREZ, LABORDE, NOSSS & HARKOV, 1999).

En este panorama la *Resolución de Problemas* se constituye en un espacio privilegiado para dar cuenta de la evolución cognitiva de los alumnos, pues permite un acercamiento práctico y experimental al estudio del *desempeño matemático* de los alumnos cuando se enfrentan a la solución de problemas no rutinarios en ambientes computacionales como el Cabri. Se reconoce así, la posibilidad de contar con una amplia gama de representaciones ejecutables que permiten la manipulación “directa” de los objetos geométricos (por ejemplo, a través del *dragging*), contribuye a la aparición de una amplia variedad de *estrategias* que acercan a los alumnos a la solución de problemas en el ámbito escolar y extraescolar. Aunque tradicionalmente algunos de los problemas se han abordado en el ámbito escolar en el ambiente de lápiz y papel, desplegándose de esta manera sistemas de representación muy concretos (y por ende ciertas formas de sistematización del conocimiento matemático), en la actualidad se considera que un *objeto matemático* como tal no se agota en sus diferentes sistemas de representación, por lo cual cuando se aluden a la incorporación de las NTIC en la enseñanza de las matemáticas se parte del principio de que tal tipo de instrumentos de mediación favorece la interacción del alumno con otros sistemas de representación que tienen su propia naturaleza y posibilitan en el alumno otras alternativas de sistematización del conocimiento matemático.

Metodología

En la experiencia de aula participaron 15 estudiantes del tercer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, durante 6 sesiones de clase de una hora de duración, durante tres meses. En las sesiones iniciales se permitió a los profesores en formación que enfrentados al enunciado del problema desplegaran sus estrategias espontáneas de solución. Posteriormente se socializaron y discutieron estas estrategias. En las sesiones siguientes, con base en indicaciones y preguntas con relación al poder mediador del ambiente Cabri, se analizó una experiencia con el mismo problema descrita por Santos Trigo, la cual fue reproducida por los profesores en formación. Nuevamente se discutió el trabajo de los profesores. Finalmente, y ante una solicitud de realizar una búsqueda bibliográfica del problema (versiones diferentes o adaptaciones), se trabajó nuevamente en el ambiente Cabri y se socializaron los resultados enfatizando en la importancia de que los alumnos calificaran y eventualmente validaran sus estrategias.

El problema

Se reconoce por parte de algunos autores, que un ingrediente esencial de los cursos de resolución de problemas para docentes en ejercicio o en formación, es que éstos puedan tener una experiencia similar de resolución a la de sus alumnos. Un modelo que se considera adecuado para intentarlo, es plantear a los profesores, no los problemas que tendrán que plantear a sus estudiantes, sino *problemas cuya dificultad para ellos sea similar a la que aquellos problemas tendrán para sus alumnos*. (BROWN, 1985). De acuerdo con este principio, se propuso un problema que - en cuanto al grado de dificultad – no requería grandes recursos (conocimientos matemáticos y manejo de la calculadora), que era un problema enmarcado dentro de sistemas matemáticos con los que estaban familiarizados los profesores en formación (geométrico y métrico) y que tenía un alto potencial heurístico cuando se lo abordaba en el ambiente de geometría Cabri. En efecto, se trataba de un problema que mostraba la importancia del *acceso a recursos matemáticos básicos para trabajar y resolver problemas no rutinarios.*

El problema formulado, *inscribir un cuadrado en un triángulo cualquiera*, estuvo precedido de una serie de actividades relacionadas con la construcción de figuras geométricas y problemas relacionados con la invarianza del área y el perímetro. Este problema fue abordado por Polya (1945) y luego por Schoenfeld (1985) y recientemente por Santos Trigo (2000). Es con relación al trabajo del último autor quien lo abordó con apoyo de la tecnología, que se pueden señalar algunas diferencias significativas entre las heurísticas de los alumnos de secundaria (de México) a los que inicialmente se planteó el problema y las heurísticas desplegadas por los profesores en formación de la licenciatura en matemáticas (Universidad del Valle, Colombia), de las que se ocupa este artículo.

Así por ejemplo, los alumnos de secundaria (de México) al leer la formulación del problema: *inscribir un cuadrado en un triángulo dado. Dos vértices del cuadrado deben estar en la base del triángulo, los otros vértices del cuadrado en los otros dos lados del triángulo, uno en cada uno,* formularon preguntas generales que apuntaban a comprender el problema y establecer condiciones en términos de la cuantificación de propiedades como áreas, perímetros y pendientes. Igualmente sugirieron la adopción de la estrategia de relajar una de las condiciones originales del problema (útil de tomar en consideración cuando el problema envuelve varias condiciones) y explorar su comportamiento a través del análisis de casos particulares como planteaba Polya. El diseño de acuerdo con las condiciones del problema y el examen de los casos particulares a través del *dragging* del ambiente, los llevó a reconocer que los puntos p, q & r (vértices superiores derechos de tres de los cuadrados) eran colineales y que en la intersección de la línea pq con el lado del triángulo se encontraba el cuarto vértice del cuadrado inscrito (figura 1). Uno de los aspectos más significativos, es la pregunta que se formularon los alumnos de secundaria, de *si era posible inscribir un cuadrado en cualquier triángulo,* sobre todo si se tiene en cuenta que se abordó un caso particular. La posibilidad de aplicar estas ideas al tratamiento del caso general, se observó en el tratamiento, por parte de los alumnos, de la colinealidad de los puntos p, q & r, a través del criterio de distancia o condición de pendiente.

Algunos estudiantes apelaron a las funciones incorporadas en la calculadora, para lo cual sólo se requiere dibujar un cuadrado. Los alumnos dibujan un caso particular como antes y entonces preguntan por el lugar geométrico del cuarto vértice cuando se mueve o se cambia uno de los lados del cuadrado.

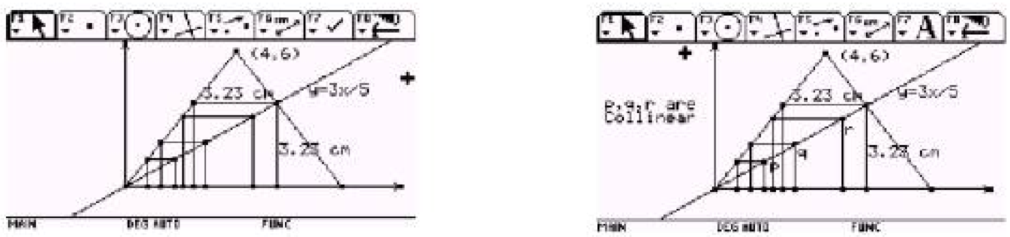

Figura 1

Resultados

Las estrategias espontáneas de solución por parte de los profesores en formación (Colombia), revelaron que en un primer acercamiento al problema, la mayoría de ellos apelaron a estrategias donde predominaba la *medición* (la medida se utiliza como evidencia visual para verificar el hecho), sin establecer relaciones funcionales. Predomina el uso de figuras prototípicas y no hay referencia significativa al poder mediador del ambiente. Así el problema es considerado como muy trivial. El *resultado* **-** entendido como lo que contesta a la pregunta del problema - es simplemente una construcción geométrica. No se percibe la necesidad de introducir elementos que "validen" la estrategia utilizada. (figura 2)

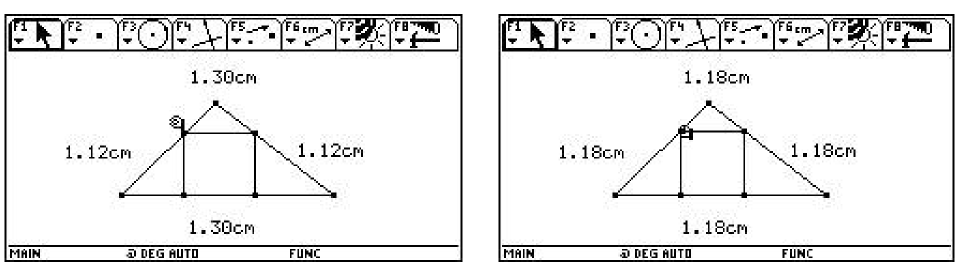

Figura 2

En una segunda sesión se revisó el tratamiento del problema de Santos Trigo, lo cual nos colocaba en los dominios de la *imitación* , que se configura cuando se sitúa a los alumnos en presencia de un modelo de *resolvente competente* y se enseña de alguna manera a analizar esa conducta competente y a compararla con conductas propias o ajenas.

Frente a esto se pudo observar que si bien los profesores en formación pudieron reproducir en el ambiente Cabri el diseño de los alumnos de secundaria mexicanos, no lograron capturar la esencia de la *sugerencia* de *relajar una de las condiciones del problema y examinar casos particulares.* Según ellos, no veían cómo esta estrategia permitía resolver el problema, pues analizar casos particulares no era lo mejor, ya que lo que se debía buscar era una solución *general*. Esta postura se revelaría dramáticamente en el tercer momento de encuentro con el problema, donde se hizo evidente que si bien *la mediación genera estrategias, estas tienen que ser validadas* .

En las ultimas sesiones se socializó la búsqueda realizada por los alumnos en torno al problema, quienes luego de revisar textos de matemáticas, manuales y páginas Web, pudieron darse cuenta que no se enfrentaban a un problema conocido y mucho menos rutinario de la clase de matemá ticas. Algunos de los tratamientos del problema que pudieron localizarse, estaban asociados a la caracterización de sus cualidades pero desde el punto de vista cognitivo. Sin embargo, se recalcó que lo que se buscaba eran abordajes que dieran cuenta de la posibilidad de acceder a recursos matemáticos y computacionales que ayudaran a aproximarse a la solución del problema.

De esta manera, se privilegió una actividad que correspondía básicamente a un "tratamiento matemático". La actividad seleccionada (DIAZ, 1994) explicaba cómo se podía *inscribir un cuadrado en un triángulo*. El problema que estaba acompañado de su "demostración" se describía en los siguientes términos: d*ado un triángulo cualquiera inscribir en él, con regla y compás, un cuadrado.* (figura 3)

Solución:

Tomando como lado la altura, trazamos un cuadrado. Uniendo los puntos *D* y *C* obtenemos el punto *E* por el que trazamos una perpendicular a la altura para obtener G. Trazando perpendiculares a *BC* por *E* y *G* se obtienen los demás vértices del cuadrado pedido.

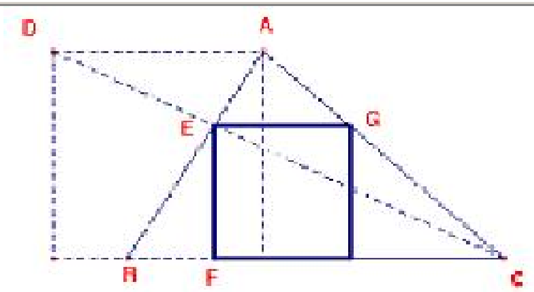

Figura 3

Una vez que esta construcción fue realizada en clase utilizando la calculadora, los alumnos no dudaron en señalar que este tratamiento era el que consideraban más potente, pues garantizaba que las condiciones del problema se cumplieran para "para cualquier triángulo" pues al arrastrar los vértices del triángulo original, el cuadrado continuaba inscrito. (figura 4)

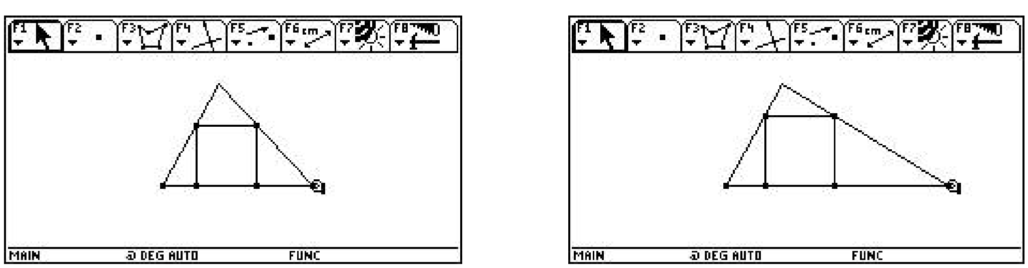

Figura 4

Solo a través del poder mediador del ambiente Cabri, sería posible convencerlos de que al realizar tal procedimiento ya no se trataba del mismo triángulo y el razonamiento era débil en términos de la *generalidad.* En efecto, la misma potencia del ambiente, en términos de posibilidades de representación, conduce a la aparición de lo que podríamos llamar un *conflicto cognitivo*. En efecto el arrastre de los vértices del triángulo "hacia fuera" reforzaba la credibilidad en este tipo de construcción, pero cuando el arrastre era "hacia adentro", aparecían hechos visuales tales como la misteriosa "*desaparición* " del cuadrado inscrito que no se podían atribuir solamente a las condiciones propias del ambiente. (Figura 5)

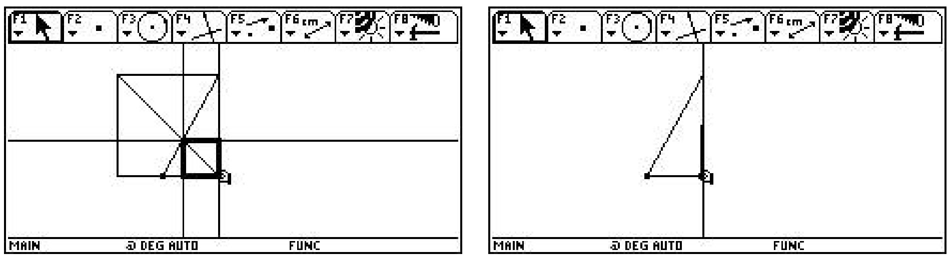

Figura 5

Se puede reconocer un sesgo particular: la validez de algunos procedimientos ya no descansa en las *estrategias* sino en la *credibilidad*. En este caso particular, el profesor en formación, frente a una estrategia que no es compatible con su sistema de creencias, prefiere la suya. Para una gran mayoría, la validez de la estrategia anterior, descansa en el hecho que se cuenta con una *demostración geométrica clásica*, que garantiza su validez y que resulta ser más potente para un trabajo en el aula en los niveles de escolaridad en que se puede proponer el problema ya que usualmente en las clases de geometría no se trabajan temáticas asociadas a la función lineal por ejemplo, contenido temático que se hace visible en la propuesta de Santos Trigo.

Adicionalmente, frente a la limitación de esta construcción, algunos profesores en formación, no descartan completamente la estrategia sino que más bien intentan "ajustarla" con estrategias previas, como aquellas que apelaban al recurso de la medida. En este sentido, se intenta "reforzar" la idea de la construcción geométrica, en este caso, una construcción exacta, añadiendo un elemento "probatorio". (Figura 6). En otros casos se recurre a la combinación de sus propias estrategias, con otras que incluso fueron descartadas inicialmente pero que "aparentan" ser consistentes desde el punto de vista de la argumentación matemática, Así por ejemplo, aparecen combinadas una construcción "estática" (la construcción geométrica exacta) con una "dinámica" (una variante del diseño de los estudiantes de secundaria mexicanos). Sin embargo, el criterio "visual" sigue siendo dominante cuando se trata de validar el procedimiento. Otras estrategias combinan los tres procedimientos presentados, pero lo hacen sin tener un propósito manifiesto para resolver el *problema*.

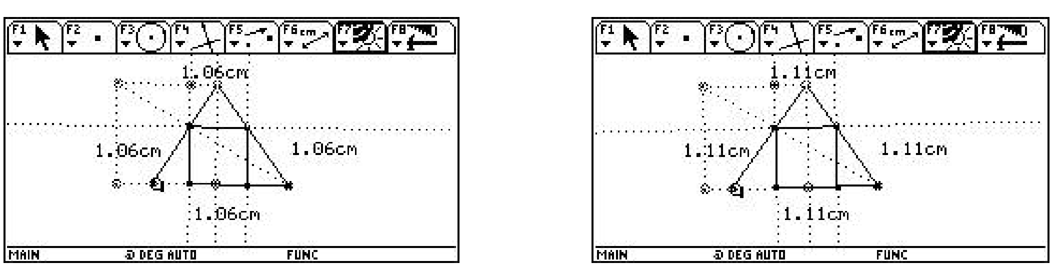

Figura 6

Confrontados los profesores en formación con su arsenal de recursos matemáticos, por ejemplo, los cursos de matemáticas universitarios (que incluyen la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral entre otros), se observó un excesivo virtuosismo en el tratamiento analítico y en la manipulación algebraica y algorítmica de los símbolos, que no se reflejó en un acercamiento productivo a la solución del problema. Se reconoció por parte de los profesores en formación, que era mucho más productivo, el abordaje en el ambiente Cabri, que incluso, lo que inicialmente fue considerado como una estrategia débil, como el uso de la medida, permitió hacer visible otra de las potencialidades que se reconocen en el ambiente: la de diseñar e implementar situaciones que permitan encontrar y explorar diferentes conjeturas. En efecto, como han señalado algunas investigaciones, el uso de la medida les ayuda a confirmar las propiedades geométricas que ellos descubren, y las mediciones les proporcionan fuerte evidencia para convencerlos de estas propiedades (KAKIHNA, 1996) Así, al preguntarse *si era posible inscribir un cuadrado en cualquier triángulo*, algunos profesores en formación, con base en sus diseños, concluyeron que la condición que debe cumplirse es que el triángulo sea acutángulo. Esto explicaría la desaparición "misteriosa" en algunos de los diseños al ser sometidos al *dragging*.

Observaciones finales

Las experiencias reseñadas previamente, son evidencia de problemas estructurales en la formación de docentes que no contempla un tratamiento exhaustivo del modelo de resolución de problemas. Así por ejemplo, no es extraño evidenciar la carencia de control (monitoreo) del proceso por parte de los maestros en formación. Esto se reflejó, inicialmente en el trabajo de los profesores en formación, en el limitado uso de la información disponible (el conocimiento matemático y computacional) y sobre todo en sus estrategias, que en el caso del problema propuesto, inicialmente estuvieron estrechamente vinculadas al "dibujo".

Es aquí donde la mediación instrumental del ambiente, en este caso del Cabri, contribuyó a que se reconociera la posibilidad de apelar a diversas *estrategias* al abordar un problema matemático. En esta misma dirección se advirtió que el poder mediador de la calculadora permite reconocer tempranamente posibilidades de intervención didáctica, como por ejemplo, la relacionada con los procesos de validación en la escuela. Un aspecto de gran trascendencia en las sesiones finales de la actividad propuesta, la utilización simultánea de todas las estrategias que habían aparecido desde el principio y que reconocieran que los problemas pueden tener múltiples soluciones igualmente validas

Referencias

Balacheff N. and **Kaput J.**. (1996) *Computer - Based Learning Environments in Mathematics.* EN: *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 469-509.

Brown S.I (1985): *Problem-solving and Teacher Education: The Humanism twixt Models and Muddles*, in Morris, R., Studies in Mathematics Education 4, 3-28. París: UNESCO.

G utierrez A., Laborde C., Noss R., Rakov S. (1999) *Tools and Technologies* **.** European Research in Mathematics Education *I*: Group 2. URL: www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html.

Hernández M. A. y **Estrada J.** (1999) *Representaciones matemáticas de estudiantes pre-universitarios en la resolución de un problema de optimización*. Educación Matemática. Vol.11, No. 2 Agosto de 1999, pp. 32-51

Kakihana K., Shimizu K., Nohda N. .(1996). *From Measurement to Conjecture in Geometry Problems. Student' Use of Measurements in the Computer Environment*. IN: *PME 20*ème,Vol. III. pp.161-168.

MEN (1999) *Nuevas Tecnologías y Currículo de Matemáticas,* Serie Liniamientos Curriculares.

Moreno L. y **Waldegg G.** (1999) *Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas.* Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México.

Moreno L. and **Santos Trigo L. M.** (1998) *An exploration of mathematical qualities of task via the use of technology* . CINVESTAV, México.

Polya G. (1978): *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

Santos Trigo L. M. (2000): *Students' Approaches to the Use of Technology in Mathematical Problem Solving*. IN: Representation and Mathematics Visualization *(1998 – 2001).*

Schoenfeld A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press

Siñeriz L. y **Santinelli R.**.(1998*). Estrategias espontáneas con uso de CABRI*. En: Educación Matemática. Vol. 10 No. 3, pp. 25-36.

Vadcard L. (1999).*La Validation en Geometrie au College avec Cabri – Géomètre. Mesures exploratoires et mesures probatoires.* Petit X, No. 50.

La Maloka: un caso de apropiación de nuevas tecnologías computacionales en la promoción del pensamiento variacional

Henry Urquina Llanos

Universidad de la Amazonía, Florencia

Resumen. Las representaciones ejecutables de la Calculadora Algebraica TI 92, posibilitan comprensión de la variación y el cambio a partir del abordaje de situaciones problemáticas situadas en el entorno socio cultural del estudiante, aproximando las matemáticas a otros campos de conocimiento. En este reporte se presentan algunos resultados logrados con un grupo estudiantes de grado noveno en el abordaje de una situación problemática vinculada con la construcción de una Maloka, empleando diversas formas de representación ejecutables.

Introducción

El vertiginoso desarrollo científico y tecnológico ha consolidado, como una de las tendencias de investigación en tecnología y medios tecnológicos a nivel mundial, el estudio sistemático de las interacciones simbólicas entre los medios y los procesos cognitivos de los sujetos (Cabero, 1992).