Ponencias

Jueves 8 (15:15 - 16:00)

La modelación como estrategia de verificación y generalización en la solución de un problema de optimización

Jorge Fiallo Leal

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga

Rosario Iglesias de Yañez

INEM "Custodio García Rovira", Bucaramanga

Juan de Dios Urbina Ortega

Centro Educativo Las Américas, Bucaramanga

Resumen. Este artículo reporta el trabajo de estudiantes de octavo y noveno grado, cuyas edades oscilan entre los 13 a 15 años, en la solución de un problema de optimización, en donde la modelación en Cabri Géomètre juega un papel protagónico, ya que les permitió llegar a conclusiones y generalizaciones como la relación existente entre los lados de un triángulo, la relación entre el área y el número de lados de los polígonos, entre otras, que no fueron posibles con lápiz y el papel. Se comentan las estrategias y procedimientos que siguieron los estudiantes y se destaca la importancia de la mediación instrumental a través de la modelación en Cabri en el proceso de verificación de la solución del problema.

Introducción

El incorporar la tecnología en la clase de matemáticas ofrece nuevas estrategias para la solución de situaciones problemáticas y se constituye en un nuevo entorno para la exploración y la sistematización. En especial, el acceso a la manipulación directa que ofrecen los sistemas de geometría dinámica como el Cabri Géomètre en donde sus características de capacidad de arrastre, la huella que deja la figura cuando se arrastra y la animación, permiten crear un ambiente experimental en el aula, dando la oportunidad de modelar, simular, observar, conjeturar, predecir y generalizar (MEN, 2000). *En los sistemas de geometría dinámica se conciben los objetos geométricos como el resultado de una modelación computacional de determinados conceptos geométricos, y las actividades diseñadas deben conducir al estudio de las propiedades invariantes que poseen determinadas construcciones geométricas y que el estudiante puede manipular* (González-López, 2000).

Teniendo en cuenta estas ideas, presentamos en este trabajo los resultados de las experiencias obtenidas con estudiantes de octavo grado del *Centro Educativo Las Américas* y de noveno grado del *INEM* quienes se enfrentaron a la solución del siguiente problema: encontrar un polígono (rectángulo, triángulo, ...) que teniendo un perímetro fijo de 120 metros encierre la mayor área.

En el transcurso del artículo se narra el desarrollo de la actividad, algunas soluciones dadas al problema y las conclusiones que nos permiten dar cuenta de cómo la calculadora se convierte en un mediador cognitivo para que el estudiante, utilizando especialmente la modelación en *Cabri*, verifique la solución del problema y plantee nuevas hipótesis y generalizaciones que lo conduzcan a potenciar su razonamiento matemático y a comprender significativamente conceptos que difícilmente pueden asimilar en este grado y en esta edad con los medios tradicionales del lápiz y el papel.

Marco de referencia

Los conceptos de número y figura son apenas dos ejemplos de las numerosas abstracciones de los objetos matemáticos, por eso la necesidad de representarlos para poder referirnos a ellos. Varios de los conceptos matemáticos se han tenido que representar de otra manera para poder "visualizarlos", y es por ello que a veces se utilizan diferentes sistemas de representación para referirlos; generalmente se habla de la representación gráfica, numérica o algebraica, pero, *las formas de representación de un objeto son inagotables, y cuanto más sistemas de representación se trabajen, se comprenderá mejor un concepto matemático en toda su dimensión (MEN, 1999)*.

Las nuevas tecnologías tales como las calculadoras algebraicas ofrecen nuevos espacios para otras representaciones, en las cuales el estudiante puede simular y modelar situaciones matemáticas difíciles de reproducir en las tecnologías tradicionales del lápiz y papel. *Por simulación estamos denominando una representación visual de un fenómeno o proceso con mayor o menor fidelidad perceptual, sin intervención del modelo formal del fenómeno o del proceso. Por su parte, una modelación es una representación formal de un proceso o de un fenómeno a través de expresiones cualitativas o cuantitativas de las relaciones entre variables que describen el proceso o fenómeno, expresiones que son susceptibles de manipular (Duarte, 1997)*

A través de la modelación en la calculadora el estudiante puede realizar actividades de exploración en las que es posible manipular directamente las representaciones de los objetos matemáticos y sus relaciones, y en las que él puede construir una visión más amplia y más potente del contenido matemático. La modelación de ciertas situaciones problemáticas en la calculadora se convierte en un elemento muy importante para su solución y para la construcción de conceptos matemáticos.

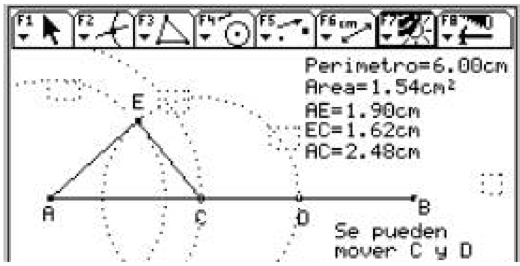
Metodología

A los estudiantes se les presentó la siguiente situación problemática, para que ellos trabajaran inicialmente sin el uso de la calculadora acudiendo a diferentes estrategias para resolverla. Para que no fuera un obstáculo el desconocimiento de las formulas del perímetro y del área de cada uno de los polígonos, éstas se dieron en el enunciado del problema.

Situación problemática

Dado un perímetro fijo de 120 metros, entre los siguientes polígonos: triángulo, triángulo equilátero, rectángulo, cuadrado, …, ¿cuál encierra la mayor área?

Algunos estudiantes abordaron el problema utilizando un cordel (pita) de 120 cm y clavaron estacas en la tierra para representar cada uno de los polígonos sugeridos; tomaron varias longitudes para cada lado en cada caso y almacenaron los datos en tablas. Para el caso de la circunferencia la mayoría tomó inicialmente como radio del círculo los 120 cm, pero posteriormente cayeron en cuenta que esta longitud correspondía al perímetro y que era necesario encontrar el radio utilizando la ecuación que se les había dado inicialmente; después de socializar la experiencia, la mayoría concluyó que el polígono que encierra la mayor área con un perímetro fijo es el círculo, pero no hubo un acuerdo general sobre cuál era el área más exacta y algunos aún pensaban que podía ser el cuadrado o un rectángulo; a raíz de estas inquietudes surgió la idea de trabajar la solución del problema utilizando la calculadora; los estudiantes argumentaron que a través de ésta podían tener más representaciones del mismo polígono, tomar una mayor cantidad de datos con más exactitud y precisión, además de utilizar otras cantidades no enteras, como lo habían visto y trabajado en la actividad de la



construcción de una caja sin tapa a partir de una hoja recortando en cada esquina un cuadrado.

Otros grupos solamente utilizaron lápiz y papel. La mayoría de ellos pensaba que el polígono de mayor área tenía que ser el cuadrado, descartando de entrada el rectángulo y el triángulo; posteriormente esta idea fue contrastada con los cálculos numéricos. En el desarrollo de la actividad, el cálculo del área del triángulo fue el que presentó mayor dificultad, puesto que no tenían la altura, por lo que fue necesario suministrarles la fórmula de Herón.

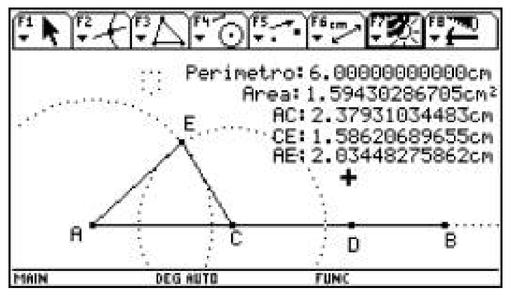
Una vez terminada esta actividad, se les entregó la calculadora para que con ella y en grupos de dos, resolvieran el problema. Se les indicó que por el tamaño reducido de la pantalla, tomaran 1 centímetro por cada 20 metros. Hicieron laproporción y tomaron 6 centímetros para el perímetro.

Soluciones de algunos grupos

La mayoría de los grupos, realizó construcciones similares a la siguiente:

1. Representaron el perímetro de 6 cm como el segmento *AB*. Tomaron dos puntos sobre éste y los llamaron *C* y *D*.

2. Construyeron las circunferencias C_1 con centro en *A* y radio *CD*, y C_2 con centro en *C* y radio *DB*. Hallaron el punto de intersección *E* entre C_1 y C_2. Con esta información construyeron el triángulo *ACE*.

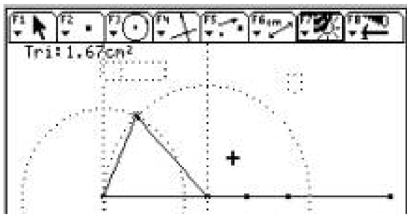


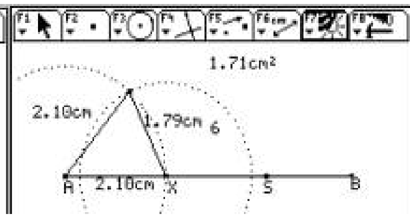
3. Calcularon el perímetro, la longitud de cada lado y el área del triángulo *ACE*. Se dieron cuenta de que al mover el punto *C* o el punto *D* sobre el segmento *AB*, se generaba una familia de triángulos de perímetro 6 cm y áreas diferentes, siendo la máxima cuando el triángulo es equilátero (1.73205080757 cm^2).

La siguiente construcción realizada por un estudiante refleja el progreso en la argumentación y justificación dada al problema.

Estudiante 1 (14 años): *Hago un segmento con 6 cm de longitud y lo llamo AB. Luego pongo dos puntos sobre él y los llamo C y D. ¿Por qué? Porque este es el perímetro que debe tener el triángulo. Los puntos son para partir en 3 el segmento.*

Con la distancia AC hago una circunferencia con centro en A y la llamo C_1*; tomo la distancia CD y hago una circunferencia con centro en C y la llamo* C_2*; tomo la distancia de DB, hago la circunferencia con centro en A y la llamo* C_3*. Hallo el punto de intersección entre* C_2 *y* C_3 *y lo llamo E. ¿Por qué?, uso circunferencias porque hay que transferir en sus radios la medida que deben tener los lados del triángulo y este no modifique su perímetro al mover C o D. El punto de intersección E, es porque esta intersección es el vértice tercero del triángulo junto con A y C. Oculto las circunferencias y trazo el polígono que pasa por los puntos A, C y E. Le hallo perímetro, área y longitud de sus lados. ¿Por qué?, porque necesito despejar para hacer el triángulo más fácil. Mido para verificar y buscar la mayor área y que el perímetro sea siempre 6 cm.*





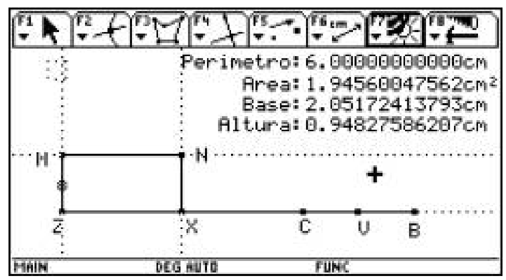
Al mover los puntos C y D, el perímetro es siempre 6 cm, la longitud de los lados cambia junto con el área, siendo la máxima cuando el triángulo es equilátero con 1.73 cm^2

A continuación, se muestran otras construcciones realizadas por los estudiantes.

Algunos grupos almacenaron los datos de variación de cada uno de los lados y el área, lo cual les permitió afirmar con mayor seguridad que el triángulo de mayor área con un perímetro fijo dado es el triángulo equilátero.

La construcción del triángulo no presentó mayor dificultad, debido a la experiencia previa con el cordel y al trabajo con regla y compás.

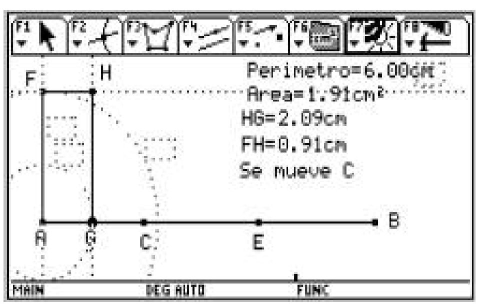
· Construcción del rectángulo:



1. Representaron el perímetro como el segmento *ZB*; escogieron un punto *C* del mismo. Hallaron el punto medio *X* del segmento *ZC* y el punto medio *V* del segmento *CB*, siendo *ZX* y *CV* las medidas de los lados del rectángulo.

2. Transfirieron la medida del segmento *CV* a la semirrecta que inicia en *Z* y es perpendicular a *ZB*. A este punto lo llamaron *M*.

3. Trazaron una perpendicular a la semirrecta *ZM* por *M*, y encontraron el punto *N* de intersección entre esta perpendicular y la perpendicular a *ZB* que pasa por *X*; con esta información construyeron el rectángulo *ZXNM*.



4. Calcularon el perímetro y verificaron que éste no variaba al desplazar el punto C a lo largo del segmento ZB, y que se generaba una familia de rectángulos de perímetro fijo. Calcularon el área, la longitud del lado ZX al que llamaron base y la longitud del lado XN al que llamaron altura y concluyeron que el cuadrado es el rectángulo de área máxima (2.25 cm^2). El hecho de cómo la construcción de un rectángulo los lleva a observar toda una familia de rectángulos pasando por el cuadrado, y ver que sólo hay uno cuya área es máxima, los llevó a concluir que sin la calculadora todas estas variaciones y conclusiones difícilmente hubieran sido observables.

El estudiante 1 realizó la siguiente construcción: *Hago un segmento con 6 cm de longitud y lo llamo AB. ¿Por qué? Porque 20 metros equivalen a 1 centímetro y 6 centímetros equivalen a 120 metros y porque luego éste debe ser el perímetro del rectángulo. Luego le pongo un punto que esté sobre él en cualquier parte, lo llamo C. ¿Por qué?, porque es para partir el segmento en dos. Pongo punto medio entre A y C y otro punto medio entre C y B llamándolos D y E respectivamente. ¿Por qué?, para partir en 4 el segmento siendo dos partes iguales y otras dos iguales.*

Con la distancia entre A y D hago una circunferencia con centro en A y la llamo C_1, luego tomo la distancia CE y hago C_2 con centro en A también. ¿Por qué?, porque es para transferir la medida en sus radios, de la medida de los lados del rectángulo próximo a construir.

Trazo una recta perpendicular al segmento AB que pase por el punto A y la llamo L_1, luego hallo el punto de intersección entre C_2 y L_1 y lo llamo F, luego entre el segmento y C_1 y lo llamo G. ¿Por qué?, así hallo el primer ángulo de 90° útil para el rectángulo y el punto F es porque así transfiero la altura que es el radio de C_2, el punto G para el ancho (radio de C_1).

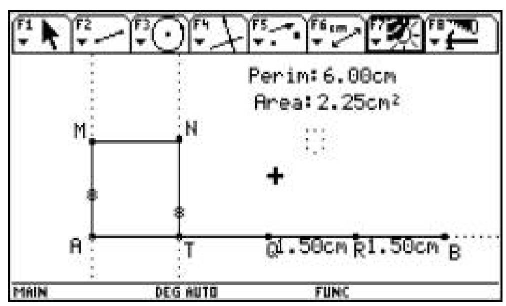
Trazo una recta perpendicular a L_1 que pase por F y la llamo L_2. Luego una recta paralela a L_1 que pase por G y la llamo L_3. Hallo el punto de intersección entre L_2 y L_3 y lo llamo H. ¿Por qué?, así con L_2 hallo el segundo ángulo de 90°, con L_3 el tercero y el cuarto, así completo el rectángulo. H es el vértice superior derecho.

Oculto C_1, C_2, L_1, L_2, L_3 y el punto D. Trazo el polígono que pase por los puntos A, F, H, G. Hallo su perímetro y mido sus lados. También el área. ¿Por qué?, las oculto porque necesito facilitar el trabajo. Mido el polígono para saber si está bien o no y buscar su máxima área.

Al mover el punto C, el perímetro no cambia. El rectángulo modifica su forma, cambian las longitudes de los lados y el área siendo la máxima cuando es un cuadrado con 2.25 cm^2.

Esta fue la construcción en la que mayor dificultad se encontró, especialmente con estudiantes de octavo grado, quienes inicialmente construyeron un rectángulo fijo; en este caso se necesitó de la orientación del profesor.

Algunos grupos construyeron primero el cuadrado de la siguiente manera:

1. Transfirieron la medida 6 cm a la semirrecta *AB*, hallaron el punto medio *Q* del segmento *AB* y los puntos medios *T* y *R* de cada segmento *AQ* y *QB*, respectivamente; trazaron perpendiculares por *A* y *T,* y semirrectas sobre estas perpendiculares con puntos iniciales en *A* y *T*. 2. Llamaron *M* y *N* a los puntos generados por la transferencia de las medidas *QR* y *RB* sobre las semirrectas. Representaron el polígono *ATNM* calculándole su perímetro y su área.	

En esta construcción encontraron que ningún punto del cuadrado se dejaba arrastrar, lo que les permitió afirmar que solamente se podía construir un único cuadrado de perímetro fijo 6 cm. Cabe anotar que tan pronto el estudiante realiza una construcción en *Cabri* busca mover algún objeto geométrico que le permita explorar y de esta manera encontrar invariantes.

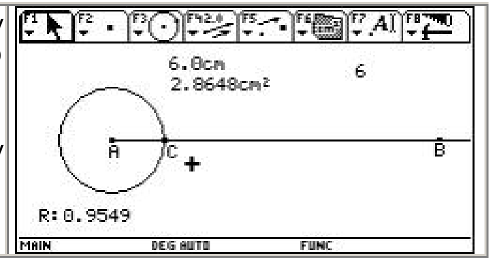
· Construcción de la circunferencia

Esta fue la construcción más fácil y rápida, puesto que en la actividad realizada con papel, lápiz y cordel, mediante el uso de la ecuación P = 2 p r habían realizado las operaciones necesarias para hallar la longitud del radio. Observaron que con el perímetro dado, solamente podían construir una única circunferencia, cuyo radio es de 0.95492965855 cm y área 2.8647889756 5 cm^2.

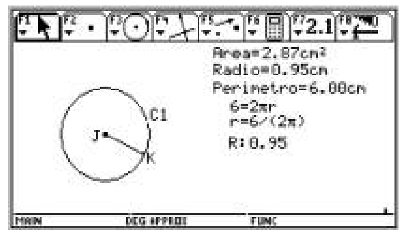
La mayoría de estudiantes realizó la siguiente construcción:

1. Con el editor numérico representaron los 6 cm y calcularon el radio tomando este número y dividiéndolo por 2 p .

2. Transfirieron este resultado a la semirrecta AB y construyeron la circunferencia con centro en A y radio AC.



Otras construcciones de los estudiantes se presentan a continuación:



Todos encontraron que el polígono de perímetro fijo 6 cm que tiene mayor área es la *circunferencia*.

Observaciones

Gracias al dinamismo y a la facilidad de exploración de *Cabri*, además de verificar la solución del problema, los estudiantes encontraron que:

§ en la construcción del triángulo existe una relación entre las medidas de los lados del triángulo, permitiendo así hablar de la desigualdad triangular.

§ la hipótesis inicial, según la cual, si el perímetro de un polígono no varía el área tampoco varía, era falsa.

§ con un perímetro fijo, entre los diversos polígonos el que siempre tiene mayor área es el regular.

§ con un perímetro fijo, al construir polígonos regulares, a mayor número de lados mayor área.

Otras conclusiones que resaltan la importancia del uso de la calculadora en la clase de matemáticas fueron expresadas por los estudiantes así:

§ Sin la modelación en la calculadora hubiera sido más difícil verificar y comprender mejor la solución del problema, porque tendríamos que haber hecho muchas construcciones, hubiéramos tenido menos precisión, gastado más tiempo y más papel y no habríamos llegado a otras conclusiones.

§ El proceso con lápiz y papel es más tedioso, y varias de las preguntas planteadas en toda la situación de la construcción no las habríamos podido responder o plantear porque no existe la posibilidad de movimiento y de interacción con el problema.

§ El trabajo con la calculadora ha contribuido a mejorar las relaciones personales entre los estudiantes y entre estos y el profesor, además de habernos ayudado a mejorar en otras áreas, puesto que ahora somos más lógicos, nos atrevemos a preguntar, nos ha ayudado a aprender a pensar y tenemos en general una visión diferente.

§ Manejamos con claridad más conceptos y utilizamos el lenguaje propio de las matemáticas; *ya no hablamos de una raya de un punto a otro, sino de un segmento entre dos puntos*, y hemos descubierto otras relaciones entre los objetos geométricos.

§ Aprendimos a trabajar con la tecnología y hemos aprendido a investigar de una manera más sencilla y práctica; podemos explorar lo que pensamos y no sólo esperamos instrucciones.

Esta experiencia muestra que, con la mediación instrumental y el uso de la modelación con *Cabri* o de un software de geometría dinámica, los estudiantes enfrentan una situación problemática con mayores posibilidades de contrastar hipótesis, de cambiar sus estrategias de trabajo, de relacionar ideas y conceptos, argumentar, plantear nuevas preguntas, dar más ejemplos y contraejemplos, mejorar su lenguaje, cambiar de un sistema de representación de un objeto matemático a otro y mejorar las relaciones interpersonales entre todos los miembros de la comunidad académica.

Bibliografía

Duarte Teodoro, Vitor , (1997) *Modelacao computacional em ciencias e matemática*, Revista Informática Educativa de Uniandes-Lidie Colombia Vol.10 N°2, pp. 171-182.

González-López, María J . (2000) *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de geometría dinámica.* En Gómez P. y Rico L. (Eds). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Ministerio de Educación Nacional , (2002) *Memorias proyecto de incorporación de tecnologías en la educación media de Colombia.* Seminario Nacional de formación de docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas, Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional . (1999) Proyecto: *Incorporación de las nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media oficial de Colombia*. Grupo de investigación pedagógica, Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional . (1999) Serie lineamientos curriculares: *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas* . Bogotá, Colombia.

La calculadora como re-diseñadora de la finalidad del trabajo del profesor

Jaime Humberto Romero Cruz & Martha Alba Bonilla Estévez
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá

Resumen. Aceptando como principios que “todo acto cognitivo está mediado por un instrumento que puede ser simbólico o físico” y que “los instrumentos son potenciadores de reorganización cognitiva y de las relaciones sociales”, abordamos las percepciones que manifiestan profesores en ejercicio y estudiantes para profesor de matemáticas acerca de las transformaciones de las situaciones didácticas,en un aula gestionada por resolución de problemas, dada la presencia de un instrumento como la Calculadora TI 92. Por ello nos