

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

**Dorfler W.** (1993) *Computer Use and Views of the Mind* en Learning from Computers: mathematics Education and Technology, Keitel, C. & Ruthven, K. (eds), Springer-Verlag, Nato Asi Series, 121.

**Balacheff N. & Kaput J.** (1996) *Computer-Based Learning Environment in Mathematics*. En Bishop, A.J. et al, *International Handbook of Mathematical Education*, 469-501.

**Moreno L.** (2001) *Cognición, Mediación y Tecnología*. Avance y Perspectiva, vol. 20, pp. 65-68.

**Peitgen et al.** (1992) *Fractals for the Classroom*, vol. 1 (Introducción de B. Mandelbrot). Springer-Verlag & NCTM.

**Rabardel P.** (1995) *Les Hommes et les Technologies*. Armand Colin, Paris.

---

Descartes...el regreso

Jean-Marie Laborde

Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia

**Resumen.** Los computadores se han convertido en una herramienta tecnológica de uso cotidiano para el matemático, en cuanto le ayudan a modelar y a pensar. Ahora es posible comprobar fácilmente una conjetura para apoyar o rechazar hipótesis, por ejemplo, haciendo que el computador lleve a cabo cálculos que de otra forma serían irrealizables. Muy frecuentemente esto se hace interactuando con simulaciones numéricas y/o CAS (Computer Algebra Systems). En esta presentación se mostrará cómo Cabri, originalmente un ambiente computacional desarrollado para interactuar dinámicamente con objetos geométricos, es (o puede ser) usado en muchos casos, para realizar tareas que las personas hacían usando sistemas numéricos y/o algebraicos. Expondremos ejemplos ilustrativos donde, operando con objetos matemáticos bajo manipulación directa, Cabri se usa en una forma muy poderosa en álgebra, cálculo, cinemática, mecánica y/o física.

La geometría dinámica está basada en la geometría de Euclides, a la cual se agrega el concepto de movimiento y otros principios de diseño como el de continuidad, explicitación del infinito, reversibilidad o ergonomía cognoscitiva, clases de invarianza y muchos otros en los cuales no voy a profundizar.

Durante gran parte del desarrollo de la geometría hasta su edad de oro, que podemos considerar data del siglo diecisiete, se ve la geometría como una herramienta para el debate intelectual. Por ejemplo, los elementos de Euclides se constituyeron fundamentalmente en un juego mental sin una perspectiva hacia el aprendizaje o sin la pretensión de hacer de la geometría algo útil; era más una actividad para el espíritu. Sin embargo, aparece en este siglo, el aspecto práctico de la geometría. Para los arquitectos, constructores, físicos, e incluso para los pintores, la geometría tiene gran aplicación. Conocemos por ejemplo el desarrollo de la perspectiva que nació con los problemas planteados por la representación de la naturaleza a los que se enfrentaron los pintores de la época. Pero este desarrollo también tiene algunas limitaciones que frenaron su perfeccionamiento. Entre ellas, mencionaremos limitaciones de tipo teórico como la imposibilidad de ciertas construcciones e igualmente limitaciones de tipo práctico como la mediocridad de la calidad de los trazados.

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

Para ilustrar estas ideas, y a propósito de las construcciones imposibles con regla y compás, quisiera citar algunos ejemplos como el de la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, entre otros. Estas construcciones son imposibles si nos limitamos al uso de la regla y el compás, pero mostraré cómo es posible realizarlas, con la ayuda de *Cabri Géomètre*. Realizaremos por ejemplo, la construcción de la trisección del ángulo.

### Trisección del ángulo

Consideremos la figura 1 en la que se muestran los segmentos  $OA$  y  $OB$ . Deseamos construir dos semirrectas que dividan en tres ángulos congruentes al ángulo  $AOB$ . En el siglo XIX se demostró que con regla y compás era imposible trisecar el ángulo, pero con las herramientas del programa de geometría dinámica, se puede hacer muy bien.

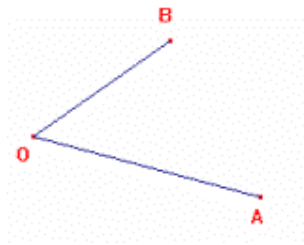


Figura 1

Tracemos la semirrecta  $OB$  y construyamos un círculo con centro  $O$  que pasa por  $A$ . Llamemos  $C$  al punto de corte de la circunferencia con la semirrecta  $OB$  (Figura 2).

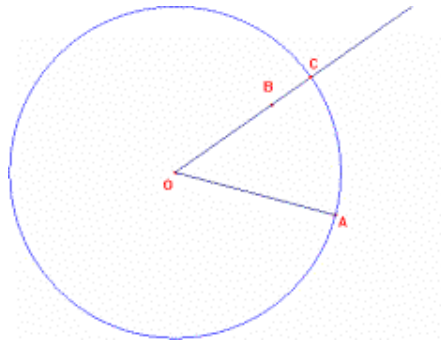


Figura 2

Si logramos dividir el arco  $AC$  en tres partes iguales, se podrá hacer la trisección del ángulo. Construyamos el arco  $AC$ . Para esto tracemos la mediatriz del segmento  $AC$ , determinemos su punto de intersección con la circunferencia y tracemos el arco  $AC$  que pasa por este punto de intersección. (Figura 3)

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

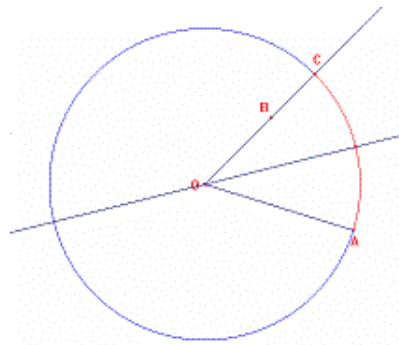


Figura 3

Ahora calculemos la longitud del arco  $AC$  y dividamos dicho valor por tres. Al transferir esta medida sobre el arco, se marca un punto que corresponde a la tercera parte de su longitud. Llamamos  $D$  a dicho punto y trazamos la semirrecta  $OD$ , que es la primera trisectriz. Para trazar la otra trisectriz se halla el simétrico de  $D$  con respecto a la mediatriz de  $AC$ . Llamemos  $E$  a dicho punto y tracemos la semirrecta  $OE$ . Dicha semirrecta es la segunda trisectriz [1] (Figura 4).

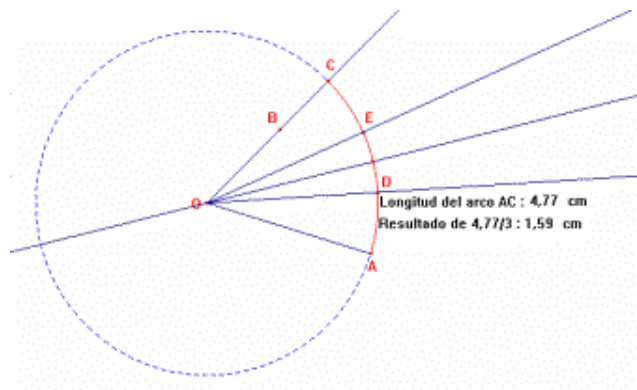
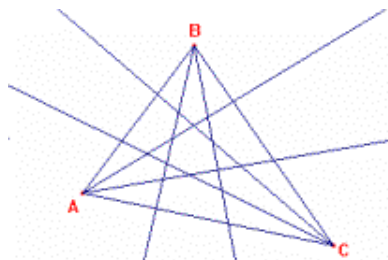


Figura 4

Para utilizar esta construcción en cualquier ángulo y poder experimentar con ella, se construye una macro. Como objetos iniciales tomamos el punto  $A$ , el punto  $O$  y el punto  $B$  y como objetos finales las semirrectas que trisecan el ángulo. Denominemos esta macro como *tris* y apliquémosla a cualquier triángulo.

Sabemos que las bisectrices concurren en un punto común, pero ¿qué ocurre con las trisectrices? Esta inquietud surge con base en la exploración de un matemático llamado Morley. El construyó las trisectrices de los ángulos de un triángulo (Figura 5).



# Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

Figura 5

Morley se interesó por el pequeño triángulo determinado por algunas de las intersecciones de las trisectrices (Figura 6). Al deformar el triángulo inicial, los ángulos internos del triángulo pequeño mantienen siempre la medida de  $60^\circ$ . Se necesitaron 15 años para que los matemáticos demostraran por primera vez este teorema, que hoy en día sigue siendo objeto de desarrollo algebraico en matemáticas.

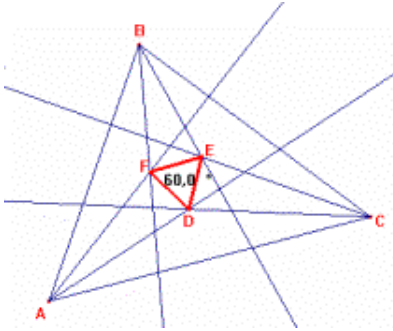


Figura 6

La trisección del ángulo es un ejemplo de construcción imposible de realizar con regla y compás, pero que podemos lograr con la geometría dinámica.

## Construcción de cónicas

A propósito de la limitación a la cual me refería anteriormente, relacionada con la mediocridad de la calidad de los trazos, voy a tomar como ejemplo un dibujo de Durero, quien es considerado uno de los primeros "dibujantes" que "construyó realmente" una cónica. Sabemos que desde los griegos se considera una cónica como la intersección de un cono con un plano. Entonces, dependiendo de la posición relativa de este plano, se obtienen curvas de formas diferentes, que los griegos denominaron elipse, hipérbola o parábola. Pero las obras griegas desaparecieron y desafortunadamente no tenemos los originales.

**Congreso Internacional:  
Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas**

---

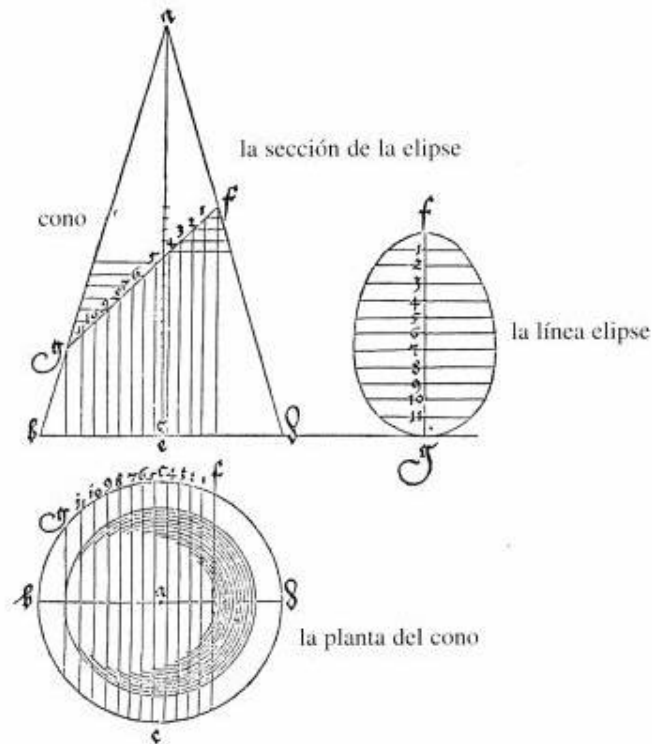


Figura 7

Dürero fue entonces uno de los primeros, llamémoslo pintor, matemático, geómetra, que encontró una construcción de este objeto. Dibujó lo que tenía en mente y construyó una forma más afilada en la parte alta que en la parte baja, es decir, terminó dibujando un huevo. El hizo todos estos trazos a mano. (Figura 7)

Con *Cabri Géomètre* podemos realizar este tipo de construcción. Obviamente la figura construida es dinámica, es decir, los puntos se pueden arrastrar o desplazar. Pedimos a *Cabri Géomètre* que dibuje una cónica pasando por cinco de los puntos. Se obtiene un objeto simétrico, con dos ejes de simetría: uno vertical, del cual Dürero estaba convencido, y uno horizontal que no aparece en su dibujo original [2] . (Figura 8)

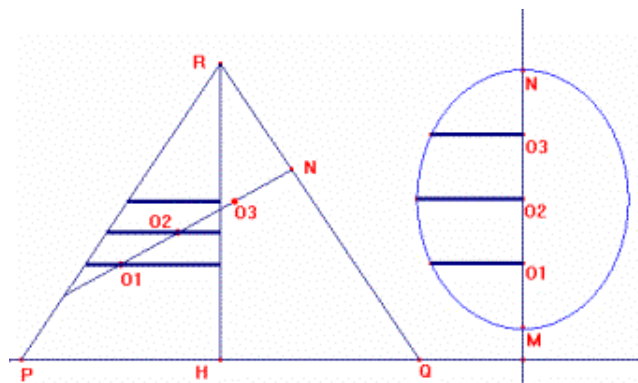


Figura 8

# Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

## Refracción

Consideremos ahora el ejemplo de la refracción. Los griegos ya se habían dado cuenta que al sumergir un objeto en el agua, se tiene la impresión de que el objeto se rompe. Si es un palo por ejemplo, uno tiene la impresión de que el palo se rompe en el punto en el que entra en contacto con el agua. (Figura 9)

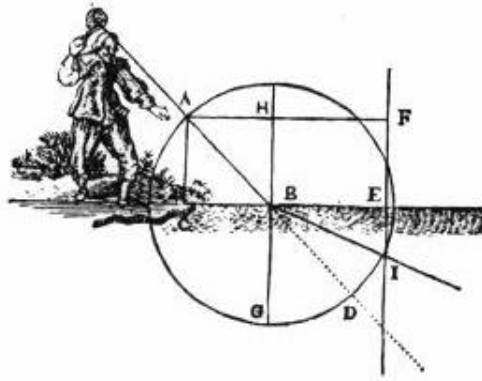


Figura 9

Este fenómeno intrigó muchísimo a los físicos y a los geómetras encontrándose entre los precursores de su estudio, personajes como Arquímedes, Ptolomeo, Ibn Al Sahl, Kepler y Galileo y entre los estudiosos modernos a Snell y Descartes. Los llamo modernos, porque en ese momento se estaba inventando en Holanda el lente astronómico y la refracción era un tema crucial. Uno de estos lentes fue transportado a Italia, gracias al cual Galileo, que no temía mirar al cielo a través de un tubo, se sorprendió al ver satélites como los de Júpiter. En ese momento logró concebir la confirmación de su idea, es decir, que la tierra giraba alrededor del sol y no lo contrario.

Veamos en Cabri Géomètre la modelación de la refracción esférica (Figura 10). Consideremos una superficie que separa el aire del agua (no es totalmente recta para indicarles precisamente que nos interesa el fenómeno de los lentes como los que se utilizan para construir los aparatos astronómicos) y un rayo luminoso (incidente) que llega al punto  $I$  y que cambia de dirección. Descartes imaginó una construcción geométrica como la siguiente para representar este fenómeno: se trazan dos circunferencias de radios  $n_1$  y  $n_2$  con centro en  $I$ . Se prolonga el rayo incidente hasta la intersección con la primera circunferencia y el punto de corte se proyecta sobre la segunda circunferencia. Al unir  $I$  con este último punto se obtiene el rayo refractado.

# Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

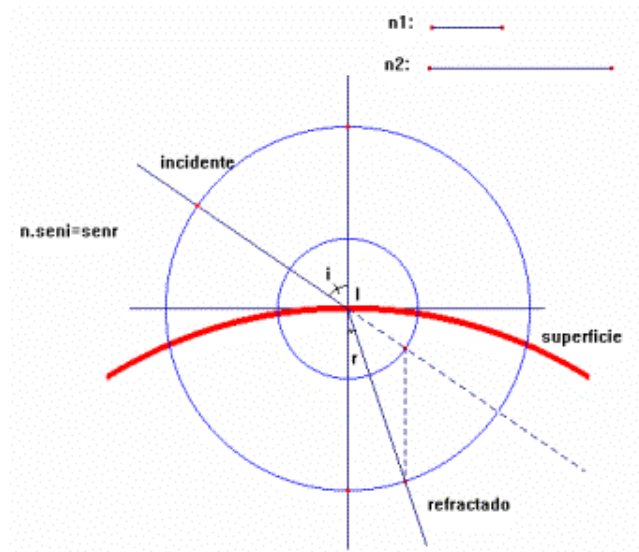


Figura 10

Descartes puso en práctica esta modelación para desarrollar los problemas de refracción en lentes esféricas.

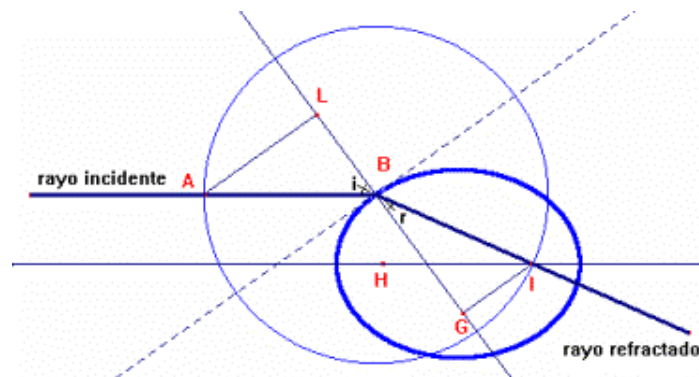


Figura 11

Quiso demostrar, sobre la base de su construcción, (Figura 11) que los segmentos  $AL$  y  $GI$  deben conservar la misma proporción sea cual sea el punto  $B$  (punto de contacto del rayo incidente con la superficie), probando así que para un lente elíptico todos los rayos incidentes que provienen del infinito y que son paralelos al eje focal, van a pasar por el punto  $I$  (foco de la elipse) [3] .

La siguiente es la construcción original de Descartes tomada de su libro *La Dióptrica* [1] [4] (Figura 12)

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

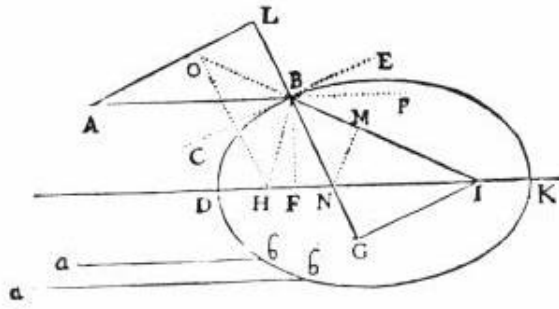


Figura 12

La construcción inicial propuesta por Descartes es un caso particular ya que si desplazamos el punto  $B$ , el punto  $O$ , que parecía pertenecer al segmento  $AL$  en la construcción, no necesariamente pertenece a éste. (Figura 13)

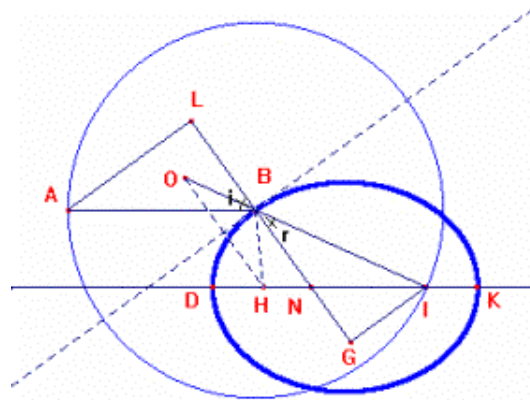


Figura 13

Reconstruiremos aquí la demostración de Descartes animándola en Cabri [5] . La demostración consiste en remplazar de manera continua los segmentos  $AL$  y  $GI$  por segmentos proporcionales hasta llegar a una razón de segmentos que no dependa de  $B$ . Cuando se arrastran los segmentos  $AL$  y  $GI$  desplazando a  $L$  y a  $G$  sobre la normal (recta  $LG$ ), no cambia su razón, porque estos barren los triángulos  $BLA$  y  $NGI$ , cuyos lados  $BA$ ,  $NI$  y  $AL$ ,  $IG$ , son respectivamente paralelos (Figura 14).



**Congreso Internacional:  
Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas**

---

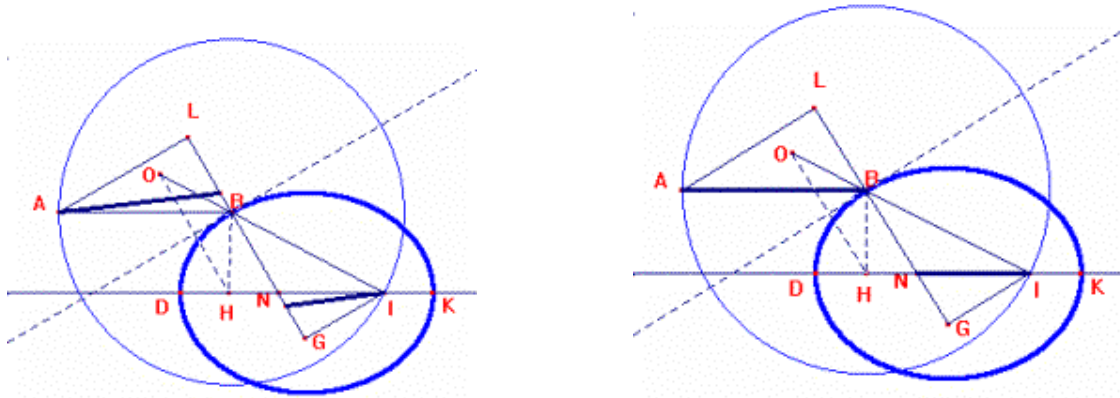


Figura 14.  $AL / IG = AB / IN$

Podemos rotar el segmento  $AB$  alrededor de  $B$  y superponerlo sobre  $BI$  (por construcción,  $BA$  es congruente con  $BI$ ). Si se prolongan los segmentos  $IB$  e  $IN$  hasta hacer coincidir sus vértices con  $O$  y con  $H$  respectivamente (Figura 15) la razón entre ellos se sigue conservando, gracias al teorema de Tales ( $OH$  es paralelo con  $BN$ ). De esta manera comparar  $AL$  con  $IG$  equivale a comparar  $IO$  con  $IH$ .

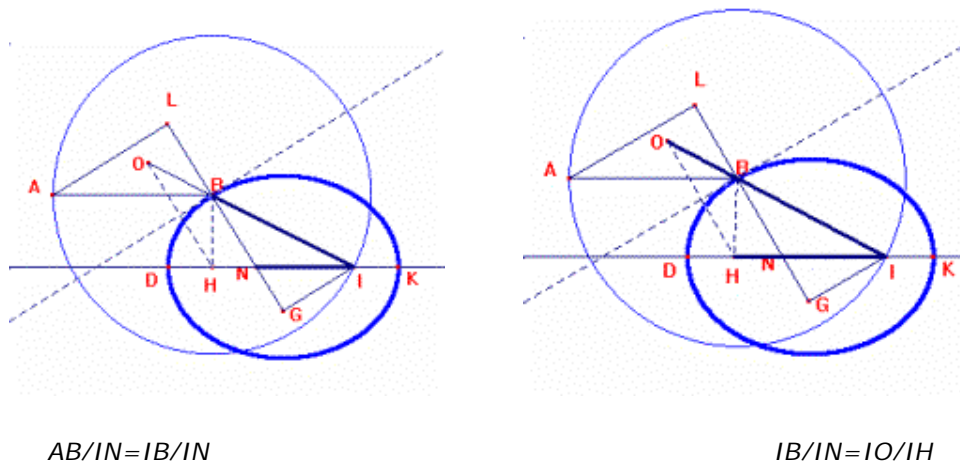


Figura 15.

Al construir el simétrico de  $OB$  con respecto a la tangente, coincide con el segmento  $HB$  (Figura 16). Por lo tanto la razón entre  $AL$  y  $GI$  es la misma que entre  $HB + BI$  y  $HI$ .

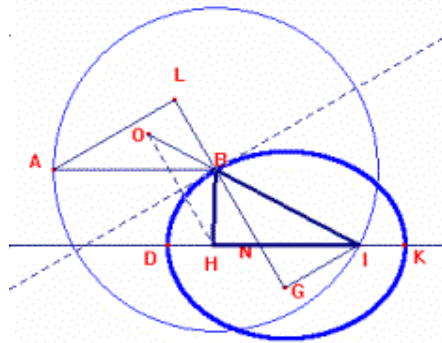


Figura 16.  $IO/IH = (IB + BH) / IH$

Como  $B$  está sobre una elipse,  $IB + BH$  e  $IH$ , son constantes (es decir, independientes del punto  $B$  sobre la elipse). De esta manera se ha reemplazado la razón entre los segmentos iniciales  $AL$  y  $GI$ , que aparentemente depende de  $B$ , por la razón  $(IB + BH) / IH$ , que depende de la elipse y de su diámetro, es decir, de su excentricidad.

### Trayectoria de los planetas

Consideremos otro problema muy importante para la historia de la humanidad referente a la trayectoria de los planetas. Newton estableció que el desplazamiento de un planeta de un punto  $M$  a un punto  $M_1$ , se lleva a cabo en un determinado período de tiempo, pero que cuando avanza de  $M$  a  $M_1$  el planeta es sometido a una fuerza de atracción hacia el sol, lo que implica que en lugar de ir en línea recta, llegará a un punto  $s_1$  determinado por la suma de los vectores correspondientes. Representemos esto en *Cabri Géomètre*. (Figura 17)

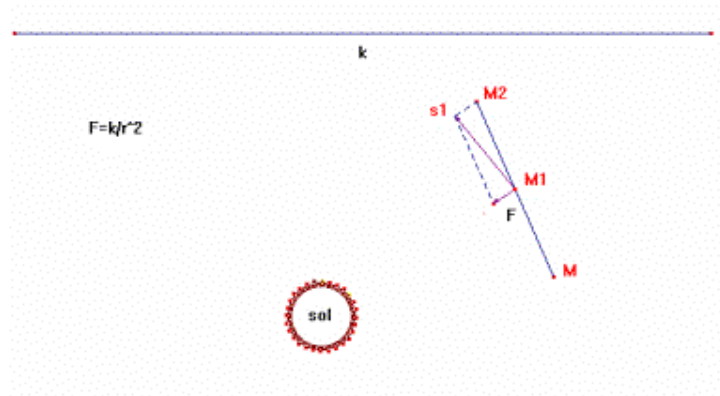


Figura 17

El punto  $M$  representa la posición de un planeta en un instante dado y  $M_1$  representa la posición del planeta un instante después.  $F$  representa la fuerza dirigida hacia el sol, la cual se calcula por medio de la fórmula  $F = k/r^2$  siendo  $r$  la distancia de  $M_1$  al sol. En consecuencia, un instante después, el planeta va a encontrarse, no en  $M_2$ , sino en  $s_1$ , punto correspondiente a la suma de los vectores. Para llegar a la fórmula, Newton hizo sus dibujos en una gran hoja de papel en el piso y experimentó fórmulas como  $F = k/r$ ,  $F = kr$  hasta llegar a  $F = k/r^2$ .

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

Veamos esta figura en la que se repite cinco veces la construcción, para tener una aproximación gráfica de la trayectoria del planeta [6] (Figura 18).

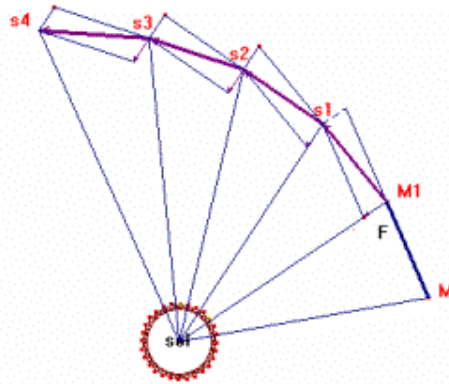


Figura 18

Aquí por ejemplo (Figura 19) repetí la construcción muchísimas veces. Si la velocidad inicial no es muy grande, la curva retorna sobre sí misma y se podría construir una cónica. Esto fue precisamente lo que hizo Newton. Encontró que la cónica se superpone de manera bastante precisa sobre su dibujo y dedujo entonces que la ley de la atracción universal expresada como  $k/r^2$ , era compatible con las observaciones de Kepler, quien afirmó que la trayectoria de los planetas se hacía sobre elipses. A su vez Newton, una vez más, reencontró esta coherencia de modelo sobre las bases de sus dibujos de naturaleza geométrica.

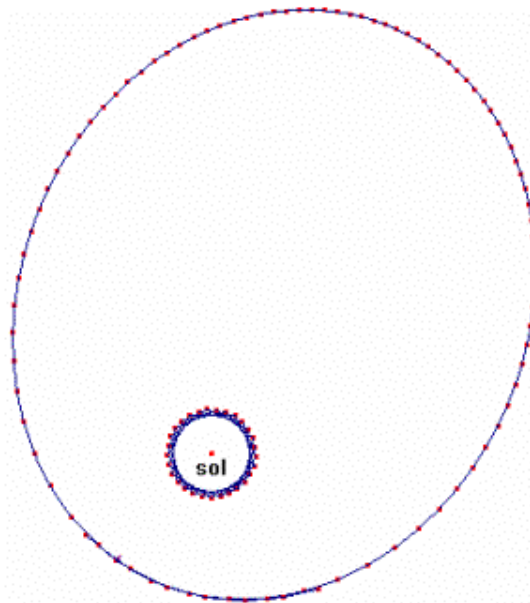


Figura 19

Podemos ir un poquito más allá de la primera ley de Kepler, analizando las áreas barridas por un planeta en lugar de su posición de un instante a otro. Consideremos los triángulos de la figura 20 y calculemos sus áreas.

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

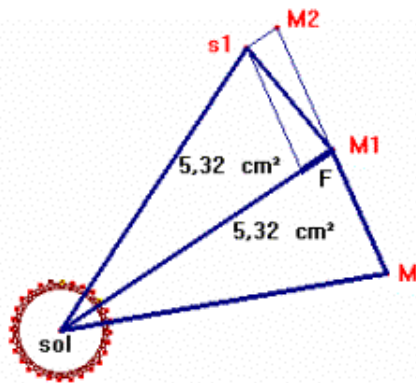


Figura 20

Si se arrastra el punto  $M$ , recorriendo la trayectoria  $M, M_1, s_1$ , se observa que las áreas de los triángulos siempre serán las mismas. Esto le reafirmó a Newton la tercera ley de Kepler la cual afirma que los planetas recorren áreas iguales en intervalos iguales de tiempo.

Veamos lo que se puede hacer con *Cabri Géomètre*. Haré una demostración similar a la realizada con la elipse de Descartes. Vamos a comparar el triángulo  $SMM_1$  con el triángulo  $SM_1s_1$  (Figura 21)

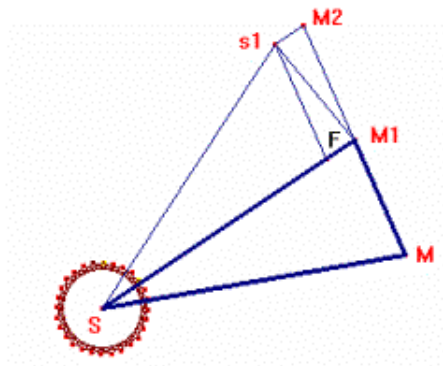


Figura 21

Desplacemos el triángulo  $SMM_1$  de forma que  $MM_1$  se deslice sobre la misma recta que la contiene (Figura 22). Los segmentos  $MM_1$  y  $M_1M_1'$  son congruentes ya que el planeta recorre la misma distancia en un mismo periodo de tiempo. Entonces el triángulo  $SMM_1$  y el triángulo  $SM_1M_1'$  tienen la misma área.

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

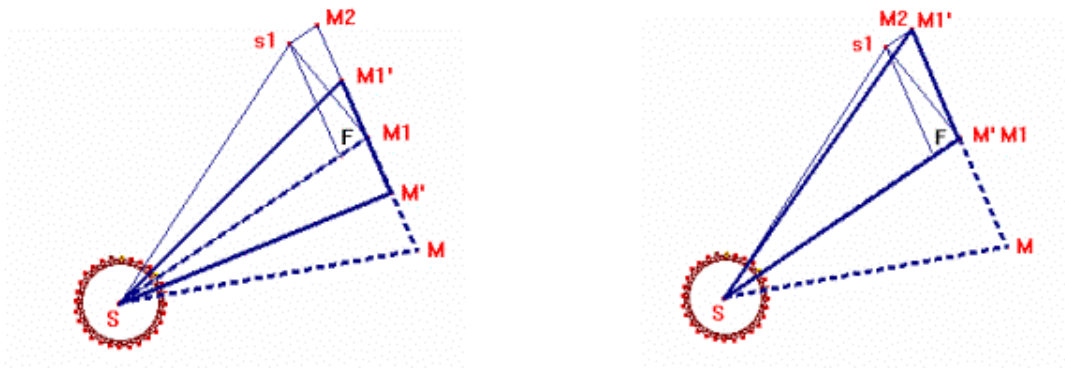


Figura 22

Finalmente se desplaza  $M_1'$  sobre el segmento  $M_2s_1$  que es paralelo a  $SM_1$ , es decir el vértice  $M'$  se mueve paralelamente al lado  $SM_1$  y por lo tanto su área no cambia. (Figura 23)

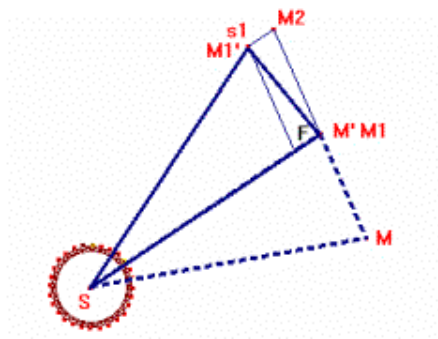


Figura 23

En consecuencia, el área de triángulo  $SMM_1$  es igual al área del triángulo  $SM_1s_1$ .

Esta es una demostración puramente geométrica de la ley de las áreas, la cual normalmente se hace en el marco de un curso de cálculo o de análisis.

### Un problema de densidad

Voy ahora a plantear un problema que es contemporáneo y que no siempre tiene una solución general: *¿ cómo coloca, en el plano, once círculos iguales de la forma más densa posible?*

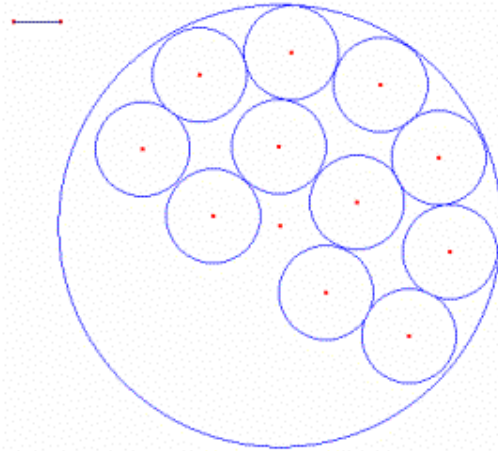


Figura 24

Supongan que tienen once monedas circulares del mismo valor y que quieren organizarlas de manera que ocupen el menor espacio posible. Una forma de hacerlo sería colocando once monedas, de manera que queden dentro de una circunferencia (Figura 24). La disposición más densa posible se logrará cuando el radio de la circunferencia que contiene las monedas sea el menor posible. Entonces, el problema consiste en realizar la construcción de esa disposición.

Un matemático llamado Kravitz, conjeturó que la disposición más densa posible de once piezas en un círculo, solo era factible cuando se realizaba de la forma representada en la figura 25. Esta es una conjetura de 1967, que fue probada en 1969 y que se puede *verificar* en Cabri.

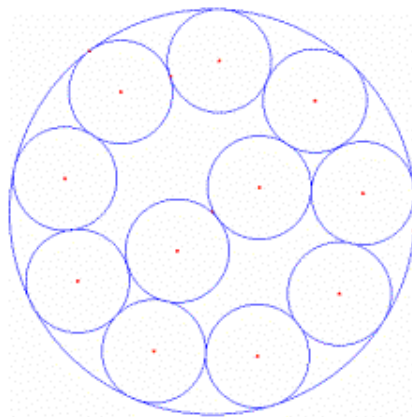


Figura 25

A mano es muy difícil realizar esta construcción pero veamos cómo se realiza con nuestro programa. Construimos nueve circunferencias de igual radio (pequeño) secuencialmente tangentes e interiormente tangentes a una circunferencia de radio bastante grande de manera que la longitud de éste se pueda controlar, y dos circunferencias más de centros  $B$  y  $B'$  como en la figura 26 [7] .

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

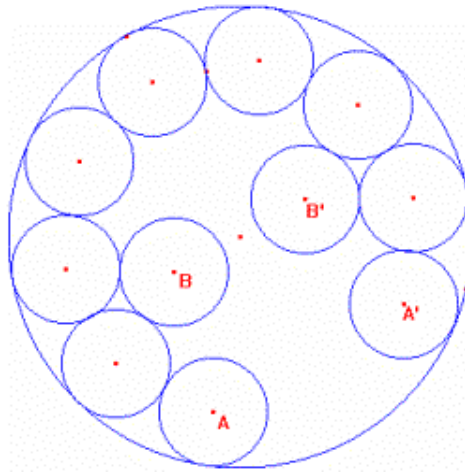


Figura 26

Lo que es extraordinario es que al disminuir el radio de la circunferencia grande paredera que ya no hay espacio entre las circunferencias con centros  $B$  y  $B'$  cuando todavía lo hay entre las de centros  $A$  y  $A'$ . La distancia entre los centros  $B$  y  $B'$  se acercará a 2 al disminuir el radio de la circunferencia grande, pues hemos tomado el radio de las circunferencias pequeñas como 1. ¿Qué pasará con la distancia entre los centros  $A$  y  $A'$ ? Veremos que a medida que la distancia entre  $B$  y  $B'$  se acerca a 2 sucede lo mismo con la distancia entre  $A$  y  $A'$ .

El mecanismo para lograr esto con precisión, se basa en un principio de *palancas*. Trazamos un segmento  $MN$  horizontal y un segmento  $PQ$  vertical que intercepte en  $R$  a  $MN$  cerca a  $N$  (Figura 27). Al mover  $M$  verticalmente el desplazamiento de  $R$  es muy pequeño.

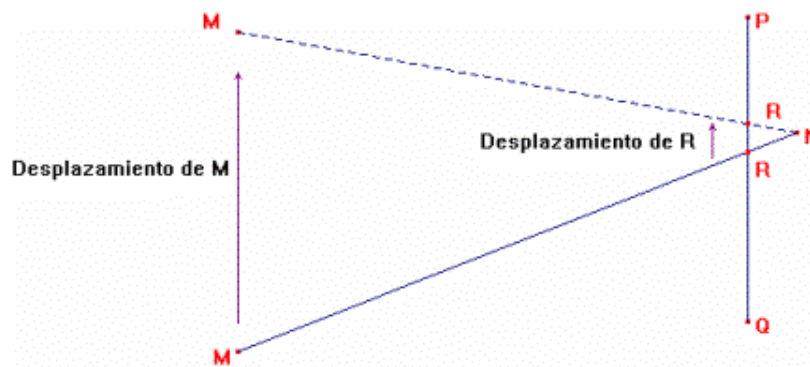


Figura 27

El desplazamiento de  $R$  será mucho menor entre más cerca esté  $N$  de  $R$  y más lejos esté  $M$  de  $R$ . Además, con una combinación de palancas se logran obtener desplazamientos casi imperceptibles de un punto, con lo que se incrementa la precisión (Figura 28).

# Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

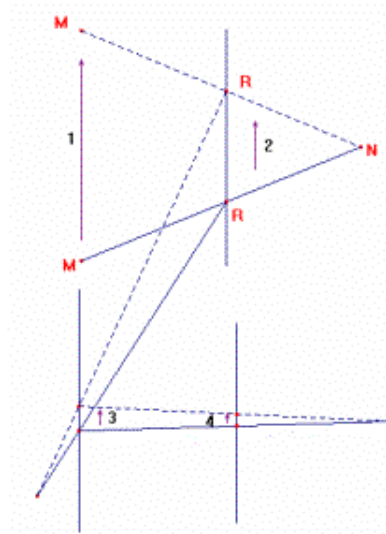


Figura 28

Integrando el sistema de palancas a la construcción, se puede obtener simultáneamente una distancia de 2cm entre los puntos A, A' y B, B', con una precisión de nueve cifras decimales. He podido cambiar la posición de los círculos y asegurarme como matemático de que este fenómeno extraordinario ocurre, es decir, que las cuatro monedas estarán una junto a la otra, algo bastante inesperado y sorprendente. Este es un tipo de modelación geométrica que se puede lograr gracias a la increíble precisión del sistema y que muchos denominan la certeza absoluta. (Figura 29)

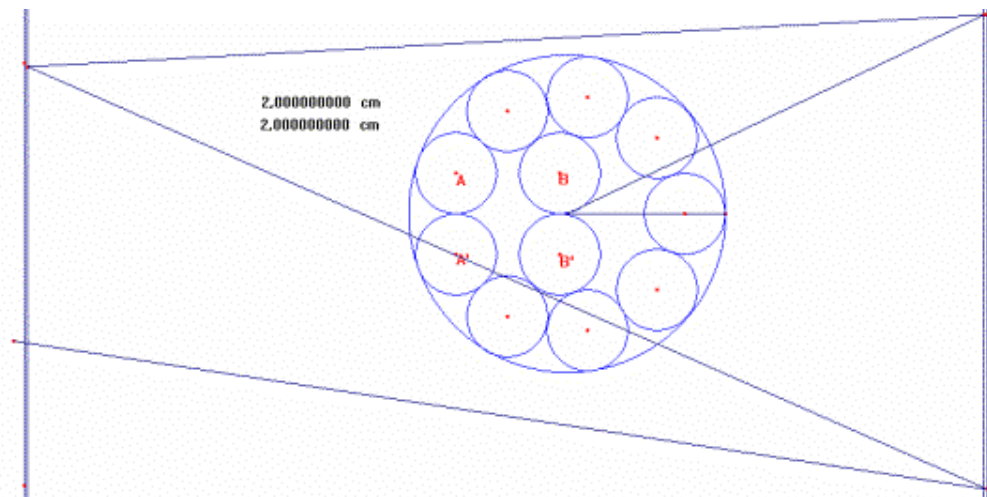


Figura 29

Como conclusión, retomaré las principales ideas expuestas en esta conferencia:

La edad de oro de la geometría estuvo determinada por los trabajos de grandes geómetras de la antigüedad como Tales, Pitágoras, Euclides y Descartes, entre otros.



# Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

El inicio de la decadencia, empieza con Descartes y su geometría analítica, es decir, con la preferencia que se da al enfoque simbólico y al formalismo algebraico, en oposición al enfoque visual e intuitivo. Esta decadencia es perceptible aun hoy en día en la evolución de los programas escolares de geometría en algunos países.

Hoy en día tenemos la posibilidad de vivir un renacimiento gracias al surgimiento de herramientas como la geometría dinámica con la que es posible dimensionar la potencia de la expresión geométrica en la historia. Ejemplos como la gravitación universal, la refracción, el movimiento de los planetas y muchos otros fenómenos, se constituyen en una posibilidad de desarrollo de los conocimientos en los campos de la física y la matemática y representan una inversión del movimiento iniciado por Descartes y por sus sucesores.

Es importante anotar que los fundamentos matemáticos en los que se basa el *Cabri Géomètre* y que hacen posible su aplicación, se soportan en la geometría analítica de Descartes, ya que se necesitan desarrollos algebraicos y algorítmicos para la informática. Esto me hace pensar que Descartes realmente ha regresado al origen del futuro de la geometría, es decir, que la geometría dinámica es el cálculo del futuro.

## Bibliografía

**Descartes R** (1981) *Discurso del Método, Dióptica, Meteoros, y Geometría*, Ediciones Alfaguara, Madrid.

**Durero A** (2000) *De la medida*, Edición de Jeanne Peiffer, Ediciones Akal, Madrid.

## Apéndice

*Construcción de la elipse de Durero*

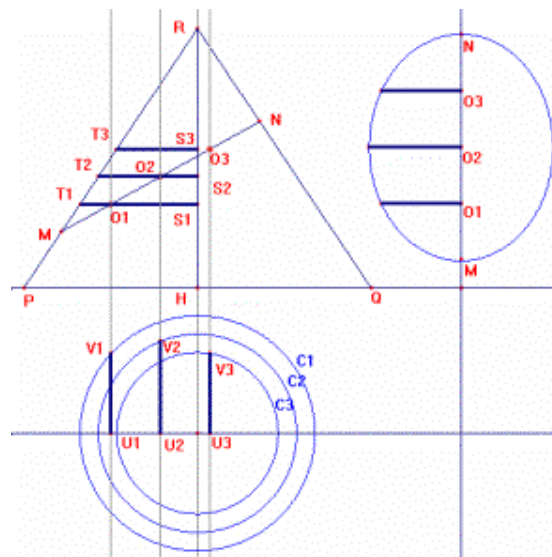


Figura 30

Construya una recta horizontal  $AB$  y un triángulo isósceles  $PQR$  con base  $PQ$  sobre  $AB$  (vista de frente del cono). Construya el segmento  $MN$  con vértices en los segmentos  $RP$  y  $RQ$  (plano de corte del cono). Tomando puntos medios sobre  $MN$  construya los puntos  $O_1$ ,  $O_2$  y  $O_3$  y los segmentos  $S_1T_1$ ,  $S_2T_2$  y  $S_3T_3$  perpendiculares al eje  $RH$  del cono que pasan por  $O_1$ ,  $O_2$  y  $O_3$