Argumentación y Formalización mediadas por Cabri-Géomètre

Luis Moreno Armella

Centro de Investigación y Estudios Avanzados

Departamento de Matemática Educativa, México

Resumen. La conferencia girará en torno a tres ideas: (i) organizaciones locales como territorios de argumentación y exploración, (ii) la descontextualización de la argumentación: hacia la demostración y (iii) el territorio digital: las macros como instrumentos de mediación (para demostrar)

Introducción

Cuando examinamos los textos que se siguen, en las facultades de matemáticas, por ejemplo, algo que llama la atención es la insistencia en el rigor. Aún aquellos textos que no pretenden alcanzar un nivel de rigor y formalización, lo confiesan como si se tratara de una falta. Suelen decir, si son textos de cálculo: *esto da una "idea intuitiva", pero en los cursos posteriores de análisis, el lector podrá estudiar la demostración rigurosa del teorema*. El mensaje es inequívoco: hay una matemática, un nivel de pensamiento matemático válido y lo demás son imitaciones. Pasos más o menos en falso que el lector, si tiene suerte, podrá corregir más adelante cuando "mejore" su educación.

¿Qué tanta pertinencia tiene esta posición? ¿Es esto a lo que debe aspirar la educación matemática? Las respuestas considerablemente diversas concitan siempre controversias.

Pude afirmarse, sin dudas, que en las matemáticas, *la demostración ejerce un control epistemológico* de primer orden. David Hilbert escribió en alguna ocasión:

En matemáticas,..., encontramos dos tendencias siempre presentes: por una parte, la tendencia hacia la abstracción que busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes al material de estudio...y la tendencia hacia ***el entendimiento intuitivo*** *que busca alcanzar una relación más inmediata con los objetos de estudio...y que enfatiza el significado concreto de sus relaciones.*

Hilbert comprendía muy bien estas relaciones dialécticas entre la formalización y la construcción del significado matemático. Y aunque insistió en reiteradas oportunidades en ello, casi siempre *ha sido leído* como un formalista. No hay dudas: cada texto conlleva un lector.

Hace ya casi ochenta años, el célebre matemático Maurice Frechet, (cuyo trabajo sobre la axiomatización ––en la topología–– lo pone a salvo de cualquier sospecha) sostuvo, en una conferencia titulada *La Desaxiomatización de la Ciencia* que:

La geometría debería ser despojada de su carácter lógico y formal, de tal modo que se pueda asociar a los conceptos esquemáticos, vacíos de la geometría axiomática, objetos de la realidad accesibles a la experiencia. (Frechet, 1925)

Como Frechet, la educación matemática ha hecho suyo este problema. Desde hace largo tiempo hemos visto aparecer libros que intentan ser un ejercicio sobre el pensamiento visual; otros se proponen iniciar a los estudiantes en el estilo abstracto de las matemáticas. Pero aún estos últimos textos, abren la ventana a otro paisaje matemático. Suelen afirmar que, contrariamente a lo que suele pensarse, las matemáticas no tratan de demostraciones y lógica exclusivamente, así como la literatura no trata tan sólo de la gramática. Las matemáticas están constituidas por ideas e intuiciones fascinantes sobre los números, sobre la geometría, y, *en última instancia, la intuición y la imaginación son tan valiosas como el rigor*.

Matemáticos célebres y educadores han sido pues, sensibles a la dialéctica intuición/rigor en el seno de las matemáticas. De hecho, todo esto lo podemos encontrar casi como en nuestros días, en las matemáticas griegas.

En aquella cultura, por lo menos en la forma tradicional de interpretarla, la coronación de las matemáticas está constituida por *Los Elementos* de Euclides. Debido al éxito tan apabullante de esta obra, solemos olvidar las tensiones que surgieron en el interior de la comunidad matemática griega en diferentes momentos históricos. Por ejempb, Arquímedes, –considerado como el mayor de los matemáticos griegos– formuló su punto de vista en los siguientes términos:

*Mediante el método mecánico logré entender ciertos resultados, **aunque posteriormente tuviesen que ser demostrados geométricamente...Pero es mucho más fácil poder dar una demostración de una situación, después de haberla comprendido mediante el mencionado método que intentar demostrarla sin ningún conocimiento previo**. Es debido a estas razones por las que, sobre teoremas sobre volumen de un cono y una pirámide...demostrados originalmente por Eudoxio, hay que dar un crédito considerable a Demócrito, quien **los enunció por primera vez aunque sin demostración alguna de ellos**.* (énfasis nuestro)

En este texto Arquímedes devela una intencionalidad: distinguir entre la demostración y los *experimentos matemáticos,* que nos permiten reconocer *hechos matemáticos* dentro de una teoría.

Se dice que Platón reaccionó con indignación al conocer el método mecánico de Eudoxio (precursor del método de Arquímedes) porque representaba “una corrupción de la geometría” (Peitgen et al. 1992). En efecto, en lugar de razonar a partir de los objetos inmateriales, producto del intelecto puro, (i.e.: de los objetos conceptuales de las matemáticas). Eudoxio se apoyaba en objetos materiales y en la percepción sensorial de los mismos.

Los ejemplos, sin duda, pueden multiplicarse. Me he querido referir a este pluralismo epistemológico de la matemática, para aportar mayor pertinencia a un tema de actualidad y de la mayor importancia para la educación matemática: *las relaciones entre la cognición y la lógica.*

Vamos a llevar el problema de las relaciones entre la cognición y la lógica al ámbito de *una didáctica que tome en cuenta la mediación de las herramientas informáticas.*

El papel de las herramientas informáticas en la didáctica de las matemáticas.

Nuestro propósito consiste en estudiar este problema desde perspectivas que han resultado fructíferas en la investigación didáctica. La primera de estas perspectivas se refiere a la *ejecutabilidad de las representaciones computacionales.*

A partir de dicha ejecutabilidad, se ha generado un nuevo realismo matemático (Balacheff & Kaput, 1996). En efecto, los “objetos” que aparecen sobre una pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material. Por ejemplo, podemos trazar una parábola (dibujada por el desplazamiento del punto Q) al desplazar el punto P sobre la recta d. (Figura 1)

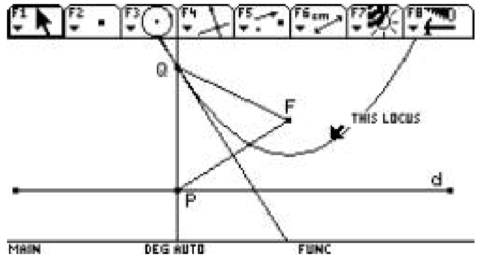

Figura 1

Una vez construida la cónica, su existencia ha dejado de ser virtual: el desarrollo constructivo no ha ocurrido en la imaginación del operador ––que trata de imaginar las consecuencias de una definición––, sino sobre la pantalla y bajo el control del universo interno matemático que vive en el interior del instrumento informático. Lo que tenemos sobre las pantallas son, en consecuencia, *modelos manipulables de objetos matemáticos.* Tal vez lo que tengamos sean *nuevos objetos matemáticos que tienen como característica la manipulabilidad* (ejecutabilidad de sus representaciones).

Estos modelos contribuyen a una mayor interrelación entre la *exploración* y la *sistematicidad* ya que ofrecen mayor capacidad de cálculo, mayor poder expresivo y flexibilidad en la transferencia entre sistemas de representación. La exploración respeta explícitamente las reglas sintácticas del medio ambiente. Los sistemas de representación permiten instalar aspectos de nuestro pensamiento en un medio estable y ejecutable, en el caso de las computadoras. Estos medios llegan a ser parte integral de nuestros recursos intelectuales y expresivos. Permiten, además, generar una forma de realidad virtual asociada a los objetos conceptuales de las matemáticas, y traerlos, virtualizados ya, a la pantalla en donde podemos manipularlos con amplitud.

Las herramientas computacionales modifican la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático. Esto significa, dicho de manera simplificada, que una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Ese es el caso de las construcciones que se realizan en u n entorno de geometría dinámica. La posibilidad de desplazar las figuras (dragging) conservando relaciones estructurales de las mismas, es una forma de manipulación, de ejecución de representaciones informáticas, que contribuye al realismo de estos objetos geométricos.

El territorio de la exploración y la argumentación

Las experiencias didácticas, a nivel internacional, con relación al uso de las herramientas informáticas en la educación, sugieren que la capacidad computacional de las herramientas informáticas *amplía el rango de los problemas que son susceptibles de ser abordados por los estudiantes*. Para sustanciar esta tesis, vamos a considerar un ejemplo: Dado un triángulo ¿es posible siempre inscribir en él un triángulo equilátero?

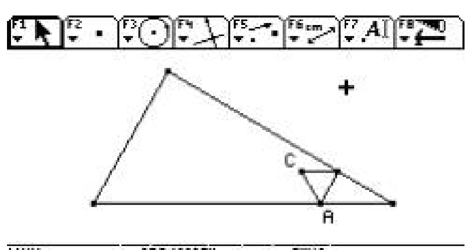

Figura 2

La construcción se hace de tal manera que cuando se desplaza el punto A (figura 2) sobre el lado correspondiente del triángulo los vértices restantes se mueven trazando siempre un triángulo equilátero. La línea de argumentación, producto de la ejecutabilidad de la representación, se basa en la determinación de la trayectoria seguida por el vértice C cuando desplazamos el vértice A.

¿Cómo argumentar que la trayectoria es una recta?

La respuesta a esta pregunta, en el *dominio de abstracción* en el cual estamos trabajando, exhibe los recursos que Cabri pone a disposición del estudiante. Por ejemplo, se construye otro triángulo equilátero DEF de tal suerte que el lado DE sea paralelo al lado AB del triángulo ABC (figura 3). Ahora bien, la exploración anterior sugiere que los puntos V, C y F son colineales. Mediante la propiedad "check property" se puede verificar que así es.

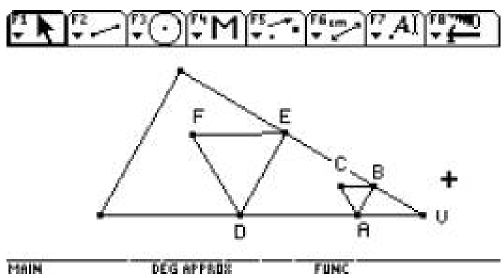

Figura 3

Las exploraciones sobre el objeto electrónico que tenemos sobre la pantalla generan experiencias que sugieren la presencia del universo interno; de un mecanismo que controla el comportamiento de los objetos electrónicos, e indica vías hacia la formalización del argumento.

Como este, muchos otros problemas geométricos pueden abordarse para movilizar los recursos de Cabri. En la pantalla viven objetos geométricos que hay que entender como objetos dinámicos, como estados transitorios dentro de un proceso evolutivo. Podemos decir que este es un *teorema situado.*

Ahora bien, la argumentación desarrollada dentro de un cierto contexto, como el que acabamos de considerar, permite acceder a un cierto nivel de formalización que empieza a desvincular el hecho matemático de dicho contexto, pues la argumentación se va modelando de acuerdo a las características del universo interno. Así se inicia la *descontextualización de la argumentación.*

El territorio digital: las macros como herramientas de reificación

Las macro-construcciones se encuentran entre los principales recursos estructurantes de Cabri. A partir de determinados objetos iniciales se construyen

ciertos objetos finales que constituyen el propósito de la construcción. A la macro le ponemos un nombre. Y cuando invocamos ese nombre activamos una construcción. Podemos decir entonces que una macro es una acción geométrica encapsulada, reificada. Una acción geométrica cristalizada. Es decir, una macro es como un signo. Invocar ese signo despliega al referente, en este caso, al objeto final.

Todas las instrucciones que se dan a la calculadora para definir una macro, provienen del universo interno y están mediadas por las construcciones "apriori" de Cabri (las que están en los menús), que también obedecen al universo interno. Tales instrucciones funcionan como un mecanismo de mediación entre quien explora y el universo interno. Por lo tanto, una macro genera objetos geométricos válidos dentro del universo Cabri.

Por ejemplo, si construimos un triángulo equilátero con regla y compás y encapsulamos la construcción en una macro, cuando invoquemos la macro (cuyo objeto inicial puede ser un segmento) obtendremos triángulos equiláteros genuinos dentro del universo Cabri. Podemos afirmar entonces, que las exploraciones y la justificación coexisten en el entorno Cabri, tal y como quiere la epistemología. De hecho, a medida que se desarrolla una actividad de exploración, se va modificando la manera de concebir al objeto de estudio, en gran medida debido al proceso de "parsing" (un análisis sintáctico, hecho posible por la ejecutabilidad de las representaciones informáticas) al que se le somete. Entonces la construcción del objeto, del concepto, y su manipulación formal (¿la discretización de la justificación?) son coextensivos. Vamos a ilustrar estas ideas con un teorema que suele atribuirse a Napoleón Bonaparte.

Dado un triángulo, se construyen sobre sus lados triángulos equiláteros usando como lados los lados respectivos del triángulo original. Posteriormente, se unen los baricentros de los triángulos equiláteros. El teorema afirma que ese nuevo triángulo siempre es equilátero.

Podemos ilustrar la situación con la figura 4:

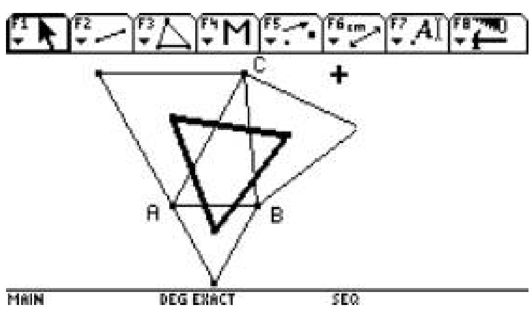

Figura 4

El triángulo de Napoleón está representado con trazos más gruesos. ¿Cómo pueden acercarse los estudiantes a este resultado? La medición juega un papel importante en las estrategias de validación a las que recurren los estudiantes. A partir de su experiencia previa con los recursos de Cabri, los estudiantes han medido los lados del triángulo de Napoleón y han *verificado* que cuando se desplazan los vértices del triángulo original, los lados del triángulo de Napoleón siguen teniendo la misma longitud (aunque esta longitud cambie). A partir de experiencias de este tipo, no resulta fácil convencer a los estudiantes de la necesidad de refinar la línea argumentativa. La medición parece aportar un nivel de evidencia suficiente. De manera que el problema didáctico de *cómo crear la necesidad de la demostración* recibe aquí un fuerte desafío. Nótese la diferencia entre el plenteamiento del problema en Cabri y cuando lo hacemos con papel y lápiz. En este último caso no podemos exhibir la concordancia de las medidas de los lados cuando el triángulo original se va modificando. De manera que la argumentación basada en la medición pierde mucho de su sentido. Resaltemos un hecho implícito en esta observación: la argumentación es sensible a los medios expresivos que suministra el entorno y también, de manera central, a la naturaleza del objeto manipulado.

Vamos a discutir ahora un acercamiento al problema que se apoya en las macros para construir el centroide del triángulo y para construir un triángulo equilátero. En la figura anterior los vértices del triángulo de Napoleón son los centroides de los triángulos equiláteros construidos sobre los lados. Ahora bien, si tomamos dos de ellos como objetos iniciales de la macro para construir triángulos equiláteros el tercer vértice parece coincide con el centroide. Esto se desprende del mensaje *which object?* , indicando con ello que en la posición que ocupa el centroide parece haber otro punto. (Figura 5)

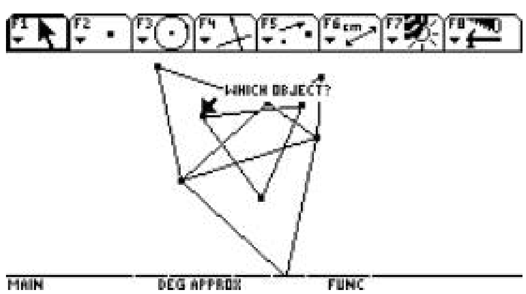

Figura 5

Al pulsar ENTER recibimos la respuesta que se obtiene en la figura 6:

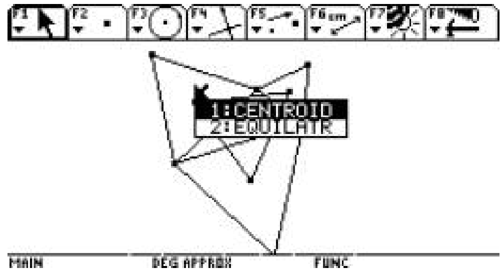

Figura 6

A parentemente, la misma posición está ocupada por dos puntos distintos: un centroide y un vértice del triángulo equilátero. Esta ambigüedad se mantiene, no importa cómo deformemos el triángulo original, dando lugar con ello, a una conjetura argumentada . Parece que estamos ante un hecho matemático sólido. Tal vez las dudas sobre este argumento provengan del hecho que Cabri, ante una situación de ambigüedad emita el mensaje: ¿cuál objeto? Por ejemplo, en una situación como la siguiente colocamos dos puntos en posiciones contiguas y señalamos. Lo que ocurre se observa en la pantalla de la figura 7.

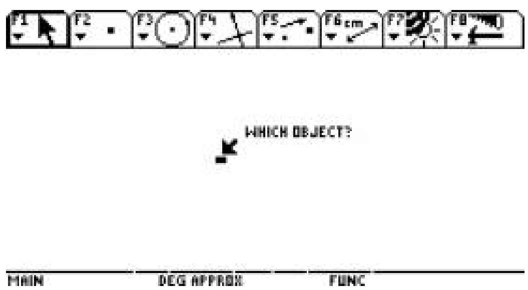

Figura 7

¿No sería algo como esto lo que está ocurriendo en el caso del punto *equilatr*, vértice de un triángulo equilátero y *centroid*, centroide de un triángulo que parecen ocupar una misma posición? hay razones para pensar que no pero, a juicio nuestro, lo más importante es que la situación presentada genera *la necesidad de establecer una demostración* . Esta necesidad no es algo menor: estamos hablando de una necesidad de carácter epistemológico, de algo que involucra la naturaleza misma de los objetos de la exploración.

Vamos a concluir con una síntesis de varias ideas centrales que han ido apareciendo a lo largo de la reflexión presentada en las páginas anteriores. Hemos considerado el proceso de argumentación desde la mediación de los instrumentos computacionales. Debe enfatizarse que nuestro interés reside en la construcción del conocimiento matemático *en la escuela*. Esto es importante porque implica considerar las características particulares de esta forma de (re)-construcción. Hay un territorio de la demostración que indica, meridianamente, que este problema de argumentar, de demostrar, no puede ser considerado al margen del problema de la contextualización del conocimiento. La medición nos permite acercarnos *perceptualmente* al problema de la argumentación. Este tratamiento es posible, porque estamos trabajando en un ambiente dinámico. Es el momento en que debe tomarse en cuenta *la transición a la teoría*.

Es *inevitable* que al introducir las calculadoras en la actividad de los estudiantes, se termine produciendo una *nueva actividad matemática* que, a su vez, genere una re-organización del conocimiento de los estudiantes. Debemos apresurarnos a decir que este paso es lento y complejo. Por esto, tiene sentido desde una perspectiva curricular, examinar a fondo el papel de la calculadora como instrumento de amplificación dentro de un curriculum establecido.

La re-organización no puede separarse de la amplificación. Son las dos caras de una moneda.

A este respecto Dörfler (1993, p. 165) ha señalado que:

> *Si la cognición se ve como una propiedad del individuo entonces la metáfora de la amplificación es altamente sugestiva... pues son nuestras capacidades cognitivas las que se amplían sin sufrir cambios cualitativos.*
>
> *Pero si vemos la cognición como un sistema funcional que comprende al individuo y todo su entorno físico y social... se abre la posibilidad de reconocer que las nuevas herramientas tienen un impacto transformador profundo en la cognición....*

La reflexión en torno a los procesos de amplificación y re-organización también puede darse desde la perspectiva de la transición de herramienta a instrumento matemático que sufren los computadores y las calculadoras (Rabardel, 1995).

Por otra parte, es posible que el uso sostenido de la herramienta desemboque en cambios a nivel de las estrategias de solución de problemas o, en cambios con respecto a la calidad de su argumentación. Cuando hablamos de las calculadoras, diremos que *la calculadora se ha tornado un instrumento matemático* cuando tiene efectos de re-organización conceptual. En ese caso estaremos ante los efectos estructurantes de la herramienta sobre la acción.

Algunos autores se han preocupado por caracterizar el origen de esa transformación. Es decir, se han interesado por la génesis instrumental de las herramientas computacionales (Rabardel, 1995). En dicha génesis se combinan dos procesos:

i) El sujeto se adapta a la herramienta.

ii) El sujeto adapta la herramienta a sí mismo.

Estos procesos ocurren mediante la producción de *esquemas de uso*, orientados a las acciones directamente vinculadas a la herramienta. Estas acciones del estudiante están condicionadas por la naturaleza de la herramienta misma. El uso sostenido de la herramienta estabiliza los esquemas de uso. Dichos esquemas permiten atribuir un significado a los objetos (matemáticos) en función de la orientación de la actividad y de las tareas a desarrollar. A partir de allí, el empleo de las herramientas (ahora instrumentos) queda controlado por los esquemas.

Referencias

Dorfler W. (1993) *Computer Use and Views of the Mind* en Learning from Computers: mathematics Education and Technology,Keitel, C. & Ruthven, K. (eds), Springer-Verlag, Nato Asi Series, 121.

Balacheff N.& Kaput J. (1996) *Computer-Based Learning Environment in Mathematics.* En Bishop, A.J. et al, *International Handbook of Mathematical Education* , 469-501.

Moreno L. (2001) *Cognición, Mediación y Tecnología*. Avance y Perspectiva, vol. 20, pp. 65-68.

Peitgen et al. (1992) *Fractals for the Classroom* , vol. 1 (Introducción de B. Mandelbrot). Springer-Verlag & NCTM.

Rabardel P. (1995) *Les Hommes et les Technologies* . Armand Colin, Paris.

Descartes...el regreso

Jean-Marie Laborde

Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia

Resumen. Los computadores se han convertido en una herramienta tecnológica de uso cotidiano para el matemático, en cuanto le ayudan a modelar y a pensar. Ahora es posible comprobar fácilmente una conjetura para apoyar o rechazar hipótesis, por ejemplo, haciendo que el computador lleve a cabo cálculos que de otra forma serían irrealizables. Muy frecuentemente esto se hace interactuando con simulaciones numéricas y/o CAS (Computer Algebra Systems). En esta presentación se mostrará cómo Cabri, originalmente un ambiente computacional desarrollado para interactuar dinámicamente con objetos geométricos, es (o puede ser) usado en muchos casos, para realizar tareas que las personas hacían usando sistemas numéricos y/o algebraicos. Expondremos ejemplos ilustrativos donde, operando con objetos matemáticos bajo manipulación directa, Cabri se usa en una forma muy poderosa en álgebra, cálculo, cinemática, mecánica y/o física.

La geometría dinámica está basada en la geometría de Euclides, a la cual se agrega el concepto de movimiento y otros principios de diseño como el de continuidad, explicitación del infinito, reversibilidad o ergonomía cognoscitiva, clases de invarianza y muchos otros en los cuales no voy a profundizar.

Durante gran parte del desarrollo de la geometría hasta su edad de oro , que podemos considerar data del siglo diecisiete, se ve la geometría como una herramienta para el debate intelectual. Por ejemplo, los elementos de Euclides se constituyeron fundamentalmente en un juego mental sin una perspectiva hacia el aprendizaje o sin la pretensión de hacer de la geometría algo útil; era más una actividad para el espíritu. Sin embargo, aparece en este siglo, el aspecto práctico de la geometría. Para los arquitectos, constructores, físicos, e incluso para los pintores, la geometría tiene gran aplicación. Conocemos por ejemplo el desarrollo de la perspectiva que nació con los problemas planteados por la representación de la naturaleza a los que se enfrentaron los pintores de la época. Pero este desarrollo también tiene algunas limitaciones que frenaron su perfeccionamiento. Entre ellas, mencionaremos limitaciones de tipo teórico como la imposibilidad de ciertas construcciones e igualmente limitaciones de tipo práctico como la mediocridad de la calidad de los trazados.