

Las representaciones mentales y la enseñanza de la matemática

Fecha de recepción: Marzo, 1997

María Rita Otero, María Cecilia Papini
e Inés Elichiribehety
Universidad Nacional del Centro
Frac. de Ciencias Exactas
Pinto 399, Buenos Aires
e-mail: rotero@exa.unicen.edu.ar

Resumen: *Este trabajo se propone analizar el tipo de representaciones mentales que emplean y generan un grupo de estudiantes de Matemática en la resolución de un problema. Se establecen categorías de análisis e indicadores que permiten encuadrar las representaciones de los alumnos según sean de tipo proposicional o modelo mental. Se discuten además las ventajas y desventajas de uno u otro tipo de representación con relación a la enseñanza-aprendizaje de la Matemática.*

Abstract: *The analysis of the kinds of mental representations used by Mathematics students in problem solving is proposed in this paper. The analysis categories and indicators to define the mental representations of students as propositions or mental models are established. The advantages and disadvantages of using one representation or the 'other in relation to the Mathematics teaching-learning process are also discussed.*

Introducción

En este trabajo se analizan desde la perspectiva de la teoría de los modelos mentales (de Kleeer y Brown, 1983; Johnson-Laird, P., 1983; Franco, C. et al, 1997; Greca, I.M. y Moreira, M.A. 1997, Krapas et al, 1997; Keneth Craik, 1943) las estrategias de resolución de un problema clásico, empleadas por tres grupos de sujetos. El problema puede resolverse a partir del planteo de una ecuación de primer grado con una incógnita.

Se intenta efectuar una clasificación entre sujetos que emplean un modelo mental y los que no lo hacen. Utilizando el análisis cualitativo, se definen las categorías e indicadores utilizados para detectar la presencia del modelo aludido. Antes de detallar la exploración realizada se hará una referencia al marco teórico empleado para el análisis.

Las representaciones mentales

Una de las cuestiones generales, más polémicas, más difíciles de la Psicología Cognitiva es la relativa a las representaciones mentales. Johnson-Laird (1983) diferencia tres tipos de representaciones mentales: proposiciones, imágenes y modelos mentales.

Para Johnson-Laird, una representación mental proposicional es una representación que puede ser expresada verbalmente, entender una proposición es saber como sería el mundo si esta fuese verdadera. Las representaciones mentales se interpretan y evalúan a través de los modelos mentales. Esto quiere decir que una proposición será evaluada como verdadera si encaja en los modelos del mundo, reales o imaginarios disponibles. Las representaciones proposicionales son indeterminadas, generales es decir equivalentes para diferentes estados de un mismo suceso, por ejemplo la representación que corresponde a la expresión "el libro está sobre la mesa", será independiente de que esté abierto o cerrado, boca arriba o hacia abajo, sobre una mesa alta o baja...etc.

Para este autor las imágenes se corresponden con visualizaciones del modelo. Son producto de la percepción o de la imaginación y representan aspectos perceptibles de los objetos del mundo real. Son altamente específicas, no se puede formar una imagen de un triángulo en general, sólo de triángulos específicos. Pero el modelo que subyace contendrá estructuralmente todas las relaciones necesarias para definir un triángulo y posibilitará decidir si alguna figura o alguna afirmación hecha sobre ellos es verdadera o falsa.

Los modelos, las imágenes, las representaciones proposicionales son representaciones mentales funcional y estructuralmente distinguibles entre si. De manera semejante a las imágenes los modelos incluyen varios grados de estructura analógica, pudiendo ser completamente analógicos o parcialmente analógicos y parcialmente proposicionales. La propiedad esencial de los modelos es que son determinados y concretos en el sentido de que representan entidades específicas, no tienen una determinada estructura sintáctica, pero si poseen una estructura que desempeña un papel representacional directo, pues es análoga al correspondiente estado de cosas del mundo, las imágenes comparten los atributos del modelo pero son apenas una visual y no poseen capacidades explicativas.

Los modelos mentales se recuerdan más fácilmente que las proposiciones, quizás porque son mas elaborados y estructurados; requiriendo mayor cantidad de procesamiento para ser contruidos. Al parecer las personas construyen modelos mentales de lo que escuchan y de lo que hablan porque el contenido explícito del discurso se basa en un esquema de un estado dado de hechos, en el cual el lector completa las relaciones entre los datos que faltan, este proceso de establecer inferencias es tan rápido y automático que no lo percibimos. Si el discurso lleva a una situación indeterminada, esto es si no es posible construir un modelo no ambiguo de la situación descrita por él, las personas tenderán a recordar su forma proposicional sin hacer representaciones.

Si las personas comprenden los significados de los enunciados y los evalúan de acuerdo con sus modelos mentales es difícil imaginar que cuando razonen dejen de lado esta comprensión y sólo trabajen con reglas formales semánticamente ciegas. La hipótesis presentada por la teoría de los modelos mentales para el razonamiento es que construimos un modelo basado en el significado de las premisas y en los conocimientos de tipo general que estén involucrados en su interpretación. Esta teoría puede explicar tanto la competencia lógica como los errores en el razonamiento.

La formulación moderna del concepto de Modelo Mental se debe a Keneth Craik (1943). Para él las personas traducen sucesos externos en modelos internos y razonan a partir de ellos, retraduciendo nuevamente esas representaciones en acciones y evaluaciones de hechos externos. *“Si el individuo tiene un modelo en pequeña escala de la realidad externa y de las posibles consecuencias en su cabeza, entonces puede intentar varias alternativas, concluir cuál es la mejor de ellas, prever las situaciones futuras antes de que ocurran, utilizar el conocimiento de eventos pasados para controlar el presente y el futuro y a cada paso actuar de una manera mas completa segura y competente frente a las emergencias con las que se enfrente”*.

Johnson-Laird tomará esta idea estableciendo que el punto central de la comprensión radica en la existencia de un modelo de trabajo en la mente de quien comprende. *“Entonces es posible argumentar que los modelos mentales desempeñan un papel central y unificador en la representación de objetos, estados de hechos, secuencias de eventos, de la manera en que el mundo es y en las acciones sociales y psicológicas de la vida diaria. Permiten a los individuos hacer inferencias, entender fenómenos, decir las actitudes a ser tomadas, controlar su ejecución y principalmente experimentar eventos”* (Johnson-Laird, 1983: 397).

Un modelo mental se definiría operacionalmente como una representación de un cuerpo de conocimientos que cumple las condiciones siguientes:

1. Su estructura corresponde a la estructura de la situación que representa. (Es isomórfico a la situación real o imaginaria que representa).
2. Puede estar constituido por elementos que corresponden únicamente a entidades perceptibles, en el caso en que pueden ser concebidos como una imagen perceptible o imaginaria, o en cambio pueden contener elementos correspondientes a entidades abstractas (por ejemplo relaciones de posición, derecha-izquierda) cuyos significados dependen fundamentalmente de los procedimientos de manipulación de los modelos.
3. Son arbitrarios, es decir específicos y no generales porque se refieren a entidades específicas. No podemos formar una imagen de un triángulo en general; sino tan sólo una referida a un triángulo específico. (Johnson Laird, 1987)
4. Derivan de un número pequeño de elementos y de operaciones recursivas sobre tales elementos.
5. Su poder representacional depende de procedimientos adicionales para construirlos y evaluarlos.
6. Están restringidos por la forma en que se percibe o concibe la estructura del mundo y por la necesidad de mantener el sistema libre de contradicciones.

Johnson-Laird en una tipología que califica de “informal”, distingue entre modelos físicos, necesarios para comprender el mundo físico y modelos conceptuales, que representan cosas más abstractas. En este trabajo empleamos la caracterización de modelo conceptual tipo cuatro o *conjunto teórico* de esa clasificación de Johnson Laird (1983, pág. 425), cuyas características enunciamos mas adelante.

Metología y descripción de la experiencia

Se presenta el siguiente problema:

Un hombre distribuyó una suma de dinero entre sus hijos de la siguiente manera: al mayor le dio 1000 pesos más $\frac{1}{10}$ de lo que le restaba, luego le dio 2000 al segundo más $\frac{1}{10}$ del restante, al tercero le dio 3000 más $\frac{1}{10}$ de lo que en ese momento quedaba y así siguiendo hasta llegar al último hijo. Hecho esto cada hijo recibió la misma cantidad de dinero. ¿Cuántos hijos tiene el hombre y cuánto dinero repartió?.

Se recoge información escrita en tres grupos de sujetos:

G1: Adolescentes de 15 a 17 años de edad que se presentan a una instancia local de la Olimpiada Matemática Argentina, $N_1=10$.

Este grupo lo integran sujetos a quienes les gusta Matemática, es decir manifiestan habilidad para resolver problemas en Matemática.

G2: Adolescentes de 17-18 años que asisten a una escuela pública de la ciudad de Tandil, $N_2 = 10$. La toma de datos se efectúa durante las horas de Matemática, en un módulo de 80 minutos.

G3: Alumnos del profesorado en Matemática y Física de la ciudad de Tandil de 22-23 años, que cursan tercero y cuarto año, $N_3 = 6$. Estos alumnos tienen buen dominio del álgebra, debido a su formación que excede ampliamente los requisitos de resolución del problema. Los datos se recogen durante una clase de Didáctica de la Matemática los alumnos trabajan el problema durante 120 minutos.

Definición de categorías de análisis

Se ha decidido denominar Modelo Mental a la categoría 1 que incluye individuos que han puesto en juego una estrategia aritmética, debido a que se pueden identificar con alguna claridad elementos inherentes a la definición de modelo mental. Mientras que no es posible identificar dichas características en las resoluciones algebraicas, porque la evidencia con la que se cuenta no permite inferir qué ocurrió entre la lectura e interpretación del problema y la puesta en ecuación, en esta instancia de la investigación. Luego, a partir de la representación en ecuación de este problema se observan sólo procedimientos de tipo mecánico que no involucrarían procesos interpretativos, sino más precisamente el uso de reglas de tipo sintácticas del lenguaje algebraico, y por lo tanto, no se incluyeron en la categoría de modelo mental (MM) tal como se definió.

1) **MM:** Modelo Mental.

Indicadores para la categoría:

RP: Se explicitan las relaciones del problema, que no son evidentes en la traducción algebraica, en lenguaje coloquial o simbólico.

AR: Se plantean los *aspectos recursivos* que subyacen al problema.

EEO: Se trabaja aritméticamente por *ensayo y error*, pero orientando la acción sobre la base de las relaciones establecidas.

2) **REA:** Representación exclusivamente algebraica.

Indicadores para la categoría:

TA: Se trabaja exclusivamente con *traducción algebraica*.

NC: No se efectúan *cálculos* previos al planteo.

RT: Las únicas *relaciones* planteadas son las que se expresan en la propia traducción.

Se emplea un método de análisis que proviene del campo de las ciencias sociales. Se reduce la información a unidades de significado que se pueden codificar, estableciendo relaciones entre dichas unidades (agrupamientos, jerarquización, etc.). Luego, se realiza el meta-análisis que es la comparación de las distintas entrevistas. Esto permite intentar "reconstruir las categorías subjetivas de los sujetos a investigar y con ello su visión del asunto". (Huber, G. L., 1991).

Análisis y presentación de datos

GRUPO 1: La tabla número I está mostrando los resultados del análisis correspondiente al grupo de adolescentes que se presentaron a una instancia intercolegial de la Olimpiada Matemática Argentina en el nivel tres, realizada en la ciudad de Tandil. Según se observa en la última columna de la tabla, el problema fue correctamente resuelto en cuatro casos de los cuales dos corresponden a Modelo Mental y dos a Representación Algebraica en "forma pura". Denominamos así a los casos en que están presentes los tres códigos que definen una u otra categoría.

Tabla I

GRUPO 1 N=10							Resultado correcto
	RP	AR	EEO	TA	NC	RT	RC
1	0	0	0	1	1	1	1
2	1	1	1	0	0	0	1
3	0	0	0	1	1	1	1
4	0	1	0	1	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	1	1	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0
9	1	1	1	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL	2	4	3	3	2	2	4

En el anexo presentamos a modo de ejemplo la resolución completa de José, como se observa este sujeto no utilizó ninguna ecuación, pero su descripción revela una comprensión profunda de las relaciones del problema. Trabaja por ensayo y error pero su búsqueda está guiada por las relaciones que ha establecido. Su descripción es particular, como lo evidencian sus referencias a personas concretas, sin embargo a partir de las diferencias que obtiene probando y en plena conciencia de que todos los hijos reciben lo mismo, generaliza la solución final. Desconocemos si la ausencia de la herramienta algebraica se debe a que no sabe utilizarla, pero su manera de resolver el problema es absolutamente distinta de aquellas que empiezan planteando la ecuación a partir de la traducción del texto del problema.

GRUPO 2: En este grupo, es donde aparece la mayor proporción de la categoría Modelo Mental, probablemente se deba a que el álgebra no es el recurso que los sujetos tienen más disponible de modo eficiente, como parte de su educación matemática en la escuela media, y por lo tanto deben buscar otras estrategias para resolver el problema.

Tabla II

GRUPO 2 N=10		MM			REA		Resultado correcto
	RP	AR	EEO	TA	NC	RT	RC
1	1	1	1	0	0	0	1
2	1	1	1	0	0	0	1
3	1	1	1	0	0	0	1
4	1	1	1	0	0	0	1
5	0	1	1	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0
8	0	1	1	0	0	0	0
9	0	1	1	0	0	0	0
10	1	1	0	1	0	0	0
TOTAL	6	9	8	1	0	0	4

La representación algebraica pura (REA) no aparece en ningún caso y la representación Modelo Mental (MM) se da en cuatro casos, mientras que en forma más débil aparece en cinco casos. Tomando ambos, el modelo mental se da en 9 casos aunque sea de modo incipiente. En 9 casos se plantea algún tipo de estrategia recursiva para resolver el problema y en 8 casos se trabaja aritméticamente por ensayo y error con la estrategia supuesta. Independientemente de que lleguen al resultado correcto, los alumnos efectúan una búsqueda orientada, sin la existencia de algún modelo, esta búsqueda sería imposible.

GRUPO 3: Este grupo es el que corresponde a los estudiantes de profesorado de tercer y cuarto año. Como puede verse al tener el instrumento algebraico disponible, los sujetos recurren al álgebra y sólo a ella en sus intentos de resolución. Resulta llamativo que esto sea así, porque entre las consignas de la actividad se solicitaba explícitamente en este caso que se propusieran estrategias alternativas. Sin embargo los estudiantes del profesorado no concibieron en las dos horas de trabajo otra estrategia que no fuera el planteo de la ecuación a partir de la traducción del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico.

Tabla III

GRUPO 3 N=6	MM		REA				Resolución correcta
	RP	AR	EEO	TA	NC	RT	RC
1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	0	0	1	1	1	1
3	0	0	0	1	1	1	0
4	0	0	0	1	1	1	0
5	0	0	0	1	1	1	1
6	0	0	0	1	1	1	0
TOTAL	0	0	0	6	6	6	2

El estilo de resolución que asumen los profesores representa prototípicamente lo que denominamos REA, no se efectúan cálculos previos, frente al enunciado el sujeto desarrolla la traducción del lenguaje coloquial en el que está planteado el problema al lenguaje simbólico del álgebra. Es notable que se planteen las situaciones del primer y segundo hijo, en el orden en que aparecen en el texto e inmediatamente se formula la ecuación. Si bien esta estrategia permite resolver correcta y acabadamente el problema, es claro por las conclusiones formuladas por los sujetos, que no se están contemplando otras relaciones del problema, aparte de las que surgen de la traducción. La pregunta que nos hacemos es: ¿esta estrategia algebraica, que es instrumentalmente muy poderosa, es al mismo tiempo la que activa la comprensión de las relaciones en juego, o las enmascara?

En la tabla cuatro se presentan las categorías Modelo Mental y Representación exclusivamente algebraica, según su aparición porcentual en cada uno de los grupos. Como puede verse, lo que hemos llamado Modelo mental, se presenta en el 90% de los casos en el grupo de alumnos de escuela media, y en ningún caso en el grupo de profesores, mientras que en el grupo de participantes de la Olimpiada la aparición es del 40%, todos estos porcentajes se han calculado sobre el total de las observaciones. Hemos efectuado los cálculos de este modo porque estamos relevando la estrategia utilizada por el sujeto al resolver el problema, aunque no llegue al resultado correcto. Es importante señalar que ninguna de las dos estrategias garantiza el resultado por sí misma.

Tabla IV

	MM	REP
OLIMP	40	20
ALUMNO	90	0
EST. DE PROFESORADO	0	100

Conclusiones

Si asumimos que las personas no pueden captar el mundo en forma directa, sino por medio de representaciones y que esas representaciones son interpretadas a la luz de modelos mentales, análogos estructurales del mundo utilizados por el individuo para comprender, entonces parece correcto establecer que aquellos individuos que ponen en funcionamiento alguna estrategia de resolución para el problema están haciendo uso de un modelo mental que les permite interpretarlo y realizar algunas anticipaciones que posibilitan la resolución.

Quizás puede pensarse que quien resuelve algebraicamente puede realizar una traducción "literal" o término a término del problema sin comprometer ninguna interpretación del mismo. Sin embargo eso no parece posible, al menos, para este problema en particular, pues existen objetos y relaciones, por ejemplo "1/10 de lo que queda", que no tienen posibilidad de traducción directa, "lo que queda" debe construirse en función de otras variables y relaciones entre ellas (dinero total de la herencia menos dinero que se le entregó a los hijos anteriores menos el monto fijo que le toca al hijo en cuestión) por lo tanto se está poniendo en juego la comprensión de algunos de los objetos y relaciones entre estos objetos del problema.

Por lo tanto, es posible que en ambos tipos de procedimientos se estén poniendo en juego modelos mentales, pero como ya se ha explicitado anteriormente no se cuenta con suficiente evidencia como para caracterizar el modelo que subyace a las representaciones de tipo algebraicas. Si así fuera, queda por resolver cuáles son las diferencias.

Si se analizan las resoluciones de los alumnos de la categoría Modelo Mental se pueden encontrar elementos en común que nos permitirían inferir que estos alumnos estarían poniendo en funcionamiento un modelo mental. En principio, si se observan dichas resoluciones escritas se puede encontrar la "historia" del procedimiento, es decir, el camino por el que transitó el individuo, que le permitió arribar al resultado final, y además, encontrar relaciones del problema deducibles de las que consideró en principio que hacen evolucionar dicho procedimiento y funcionan también como un modo de control. Esto no significa que el sujeto haya recurrido a razonamientos deductivos para obtener dichas relaciones, pero al tratarse de un sistema lógico cerrado, las premisas y las conclusiones pueden alternar de lugar.

En consecuencia, no parece arriesgado ni erróneo aceptar estas evidencias escritas como representaciones de algunos de los "procesos mentales" que está ejecutando el individuo y como manifestaciones de la puesta en marcha de un modelo mental.

Obviamente, no se puede asumir que aquello que está plasmado en el papel será todo lo que pasó por la mente de la persona que resolvió el problema. Asumiendo que las resoluciones escritas muestran parte de los procesos mentales de quien resuelve, se puede encontrar en ellas elementos de las definiciones teóricas de modelo mental presentadas en el comienzo del trabajo:

1) Cada desarrollo aritmético retiene los objetos y las relaciones relevantes del problema que corresponden a entidades abstractas, se puede decir que conserva la estructura del problema.

Objetos del problema: Dinero total de la herencia, cantidad de hijos, dinero que va aumentando de a 1000 para cada hijo, dinero que va quedando sin repartir, décima parte de lo que va quedando sin repartir.

Relaciones del problema: Todos los hermanos cobran lo mismo, cada hermano cobra una parte que aumenta de a 1000 más una parte que disminuye de a mil, esa parte que disminuye es la décima parte del dinero que va quedando, la suma del dinero de todos los hermanos es igual al dinero total de la herencia.

2) Los procedimientos son arbitrarios, pues cada uno representa a un caso particular en donde, por ejemplo, se fija arbitrariamente el monto total que se hereda y en consecuencia surge una sola posibilidad de cantidad de dinero para cada hijo y de número de hijos. En uno de los casos hasta se particularizó el nombre del padre y de los hermanos (ver primer resolución del Anexo, José). Pero, las ejecuciones no son arbitrarias y conservan estrictamente la estructura del modelo.

3) Se ejecutan repetidamente o recursivamente las mismas operaciones sobre los elementos explicitados inicialmente. Por ejemplo, una vez elegido el monto total a heredar se le aplican las relaciones traducidas en operaciones matemáticas, si no se llega a un resultado satisfactorio se vuelve a empezar, fijando nuevamente otro monto total de dinero y aplicándole las mismas operaciones otra vez. Cuando se dice que el resultado no es satisfactorio significa que no cumple con las condiciones que esa persona rescató del problema, por ejemplo que la cantidad de dinero para cada uno de los hijos no sea la misma, dicho de otro modo el individuo evalúa o controla que no existan contradicciones con aquellas ideas que él mismo asumió (ver Anexo: primer resolución, procedimiento (3), procedimiento de Rogelio).

4) Se pueden detectar algunos objetos y relaciones del problema que funcionaron como obstáculos. Por ejemplo, en aquellas resoluciones donde no se pudo interpretar correctamente el significado de "1/10 de lo que queda", los alumnos colocan en su lugar alguna otra idea que sí pueden manipular: en lugar de 1/10 del dinero que queda por repartir colocan 0,1; o 1/10 de las sucesivas sumas fijas (1/10 de 1000, de 2000, de 3000, etc.); o 1/10 del total del dinero a repartir sin quitarle las sucesivas asignaciones (ver Anexo: procedimiento de Mara, resolución 6). Parece correcto afirmar que cada individuo percibe y concibe las relaciones del problema de acuerdo a las restricciones de su propio sistema cognitivo, cuidando evitar contradicciones solamente respecto de aquello que ha asumido.

Luego de este análisis, surge la necesidad de tratar de caracterizar un poco más este modelo mental que permite interpretar, en principio, y luego resolver el problema planteado. De la "tipología informal" que propone Johnson-Laird (1983, pág. 425) para modelos mentales se puede establecer que los modelos puestos en juego por los alumnos para la resolución del problema no serían físicos sino conceptuales, pues no representan el mundo físico sino objetos más abstractos y relaciones entre ellos (números, variables

numéricas y operaciones matemáticas entre ellos). En particular, se trataría de modelos de tipo 4 o conjunto teórico, definidos por el autor como aquellos que contienen un número finito de elementos que representan directamente conjuntos o propiedades abstractas de los conjuntos y un número finito de relaciones entre dichos elementos.

¿Se pueden establecer algunas diferencias entre el modelo de la resolución aritmética (categoría MM) y la estrategia utilizada en la solución algebraica (categoría REA)? En principio, parece haber una diferencia en la cantidad de objetos y relaciones explicitados en cada caso. Es decir, la estrategia de resolución aritmética de la categoría modelo mental necesita al mismo tiempo la mayor parte de los objetos y relaciones del problema para operar con ellos, de algún modo "obligaría" a sostener todos esos objetos en la memoria de trabajo ayudándose con el papel y el lápiz como soporte de la tarea mental. Mientras que en la resolución algebraica, sólo hace falta plasmar de una vez y en una misma expresión las relaciones y objetos relevantes del enunciado, a partir de ahí se pone en funcionamiento una especie de "utilitario" que retiene toda la información que hay que retener y libera a la memoria del individuo de esa tarea pesada. Por lo tanto, se comprende que este procedimiento no requiere que se escriban en el papel más relaciones que las "imprescindibles" y que obviamente no son todas.

Es importante reconocer que existen diferencias importantes en el grado de arbitrariedad de los procedimientos, es decir, la formulación de tipo algebraica posee mayor generalidad, cada término puede representar un número infinito de posibilidades, mientras que los procedimientos de la categoría MM representan un solo caso que particulariza un conjunto de posibles casos, conservando todas las características estructurales del problema, en esto precisamente consiste su arbitrariedad.

A partir del análisis de las tablas, se observa que los alumnos de los grupos I y II utilizan mayoritariamente procedimientos aritméticos mientras que los del grupo III utilizan en su totalidad instrumentos algebraicos aunque, en algunos casos, no los conduzca a la resolución correcta pues parecen haber perdido mucha información. Esta observación nos puede conducir a formular dos preguntas útiles para guiar futuras indagaciones y para pensar en posibles consecuencias trasladables al nivel escolar:

1. *¿Cuáles pueden ser las causas de estas diferencias entre los grupos I y II respecto del grupo III?*

Se podría pensar que existe una condición de posibilidad de tipo psicológica, de desarrollo o maduración, que provoque la diferencia de procedimientos entre los grupos. Sin embargo, la diferencia de edades no parece ser tan importante como para concluir en ese sentido.

Quizás la causa sea psicológica pero no relativa al desarrollo, sino más precisamente de tipo cognitivo, que tenga que ver con el modo de operar de la mente. Es decir, si la mente trabaja con modelos arbitrarios, particulares, no sería espontáneo un procedimiento de generalización como es el algebraico, sería más razonable pensar que surgiría por "exigencias" o requerimiento del entorno social. Se debe tener en cuenta que los alumnos del grupo III poseen una trayectoria universitaria que les ha exigido, casi exclusivamente, procedimientos algebraicos.

Además, es posible encontrar una explicación desde la caracterización que realiza Norman (en Moreira, 1997) pues sostiene que los modelos mentales son "parsimoniosos", quiere decir que las personas optan por realizar mayor cantidad de operaciones mentales (por ejemplo conservar muchos objetos en la memoria de trabajo), aunque resulte antieconómico desde un punto de vista energético, con tal de evitar la complejidad mental de trabajar con objetos tan abstractos (símbolos de segundo orden o símbolos de símbolos) como los algebraicos.

2. ¿Quiénes "saben" más acerca del problema?

Para responder a esta pregunta se debe establecer qué es "saber" acerca del problema. Si saber más sobre el problema significa poder explicitar la mayor cantidad de relaciones, entonces, se puede inferir que los individuos con resoluciones aritméticas saben más pues han explicitado, con seguridad, mayor cantidad de relaciones correctas. Por ejemplo, encuentran que la primer parte sube en mil para cada hijo, pero como los totales por hijo son iguales debe compensarse con una disminución de a mil en esa décima parte que se le añade, relación que no aparece en los procedimientos algebraicos (ver Anexo: resolución de Gabriela).

Los individuos algebraicos han explicitado en forma espontánea pocas relaciones, pero, si son competentes en el uso del álgebra, poseen una superior potencialidad de descubrirlas, pues la herramienta algebraica permite llegar a generalizaciones del problema que parecen ser, sino imposibles, sumamente difíciles desde un procedimiento aritmético. Por ejemplo, llegar a establecer cuáles son las relaciones entre la suma a heredar, la cantidad de hijos, la fracción de lo que queda y el monto fijo que se le da a cada hijo, todos en forma variable o representados por letras. Los algebraicos competentes pueden saber más, sólo hace falta la decisión personal o el requerimiento externo de encontrar más, pues al sólo efecto de resolver el problema no resulta necesario.

Se puede pensar que cuando se propone un problema matemático a alumnos de escuela media estos ponen en funcionamiento sus modelos mentales para resolverlos. Estos modelos en algunos casos, posibilitan el descubrimiento de mayor cantidad de relaciones pero insumen un gran gasto energético y ponen un techo a la posibilidad de generalización. Las estrategias algebraicas ocultan las relaciones del problema, pero liberan a la memoria del peso de retener tanta información posibilitando llegar a generalizaciones que de otro modo no se podrían obtener.

Por otro lado, la economía energética del proceso algebraico no parece ser una buena razón para generar cambios en los modelos de los alumnos pues éste no es un criterio usado por la mente. Esta afirmación no pretende conducir a la decisión de no enseñar álgebra en la escuela, sino muy por el contrario se propone buscar otros caminos que faciliten el acceso de los alumnos a este saber matemático de tanta relevancia, no sólo para la matemática sino también para otras disciplinas que la utilizan como instrumento de modelización.

Además, parece surgir de este análisis la idea de revalorizar los procedimientos de tipo aritmético, considerados generalmente de status inferior en la matemática, pues no solamente posibilitan la explicitación de gran cantidad de relaciones correctas del problema sino también "hablan" del modo de pensar de los alumnos, un dato de absoluta importancia para aquellos docentes que procuran generar verdaderos aprendizajes.

Bibliografía

- Craik, K. (1943) *The Nature of explanation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Cooper, L. A. y Shepard, R. N. (1973): Chronometric studies of the rotation of mental images. En Chase, W. G. (Ed): *Visual Information Processing*. Academic Press.
- de Kleer y Brown, (1983). Assumptions and Ambiguities in Mechanistic Mental Models. In Gentner, D. And Stevens, A. (Eds) *Mentals Models*. Hillsdale, New Jersey : Erlbaum. 155-190.
- de Vega, M. (1984). *Introducción a la Psicología Cognitiva*. Alianza Editorial. Madrid.
- Eysenk M. and Keane, M. (1991). *Cognitive Psychology: a student(s) handbook*. Hove, U. K., Lawrence Erlbaum. Associates Ltd. 557 p.
- Franco, C.; Colinviaux, D.; Krapas-Teixeira, S. y Queiroz, G. (1997a). A Teoria Piagetiana e os Modelos Mentais. En Luci Banks-Leite (org). *A Teoria Piagetiana e os Modelos Mentais*. Cortez, São Paulo, pp. 187-206.
- Krapas, S.; Queiroz, G.; Colinviaux, D. y Franco, C. (1997). Modelo: Terminologia e Sentidos na Literatura de Pesquisa em Ensino de Ciências. *Encontro Linguagem, Cultura e Cognição: Reflexões para o Ensino de Ciências*. Belo Horizonte, M.G.
- Greca, I.M. y Moreira, M.A. (1997). The kinds of mental representations -models, propositions and images - used by college physics students regarding the concept of field. *International Journal of Science Education*, Vol, 19, n. 6, pp. 711-724.
- Holton, G. (1972) : On trying to understand Scientific genius. *American Scholar*, 41,95-110.
- Hebb, D. (1968) Concerning Imagery. *Psychological Review*. Vol. 75, Nro. 6,466-467.
- Huber, G. L. (1991). *Análisis de datos cualitativos con ordenadores*, (Editorial Carlos Marcelo, Sevilla, España).
- Johnson-Laird, P.(1983). *Mental models*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Johnson-Laird, P. (1990) *Mental Models*. In Posner, M. (de.). *Foundations of Cognitive Science*. Cambridge : MIT Press. 469-499.
- Johnson-Laird, P. (1990) *El ordenador y la mente*. Barcelona : Ed. Paidós.
- Kosslyn, S. (1980). *Images and Mind*. Cambridge, Mass. : Harvard University Press.
- Moreira, M.A. (1997). *Modelos mentales. Encontro sobre Teoría e Pesquisa em Ensino de Ciência*. Universidad Federal do Rio Grande do Sul.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processes*. Holta, Rinehart and Winston, Inc. New York.
- Shepard, R. (1978) *The mental Image*. *American Psychologist*. 33, 125-137

Anexo

Resolución de José

“Si la diferencia de lo que le da a su respectivo hijo es de 1000 la diferencia entre la $\frac{1}{10}$ parte de lo que resta también será mil o sea Juan recibe 1000 y Daniel 2000 pero Juan además recibe 1000 más que Daniel por lo que le corresponde de $\frac{1}{10}$ del resto.

Para que el reparto sea justo, debo tener en cuenta que cuando se [...] $\frac{1}{10}$ del resto ese resto debería tener por los menos las últimas 4 cifras cero.

Tengo que probar con números terminados en 1000 porque al primero le doy 1000 entonces en el resto me quedan las últimas cuatro cifras con cero.

Probé con 31000 y me da una diferencia de 500.

Probé con 41000 y me da una diferencia de 400.

Por lo tanto con 51000 la diferencia será 300, 61000 será 200, con 71000 será 100, por lo tanto la cantidad de dinero a repartir es 81000.

Al pagarle al primero 1000 más $\frac{1}{10}$ del resto, le paga en total 9000. Así que si tiene 81000 y a cada hijo le corresponde 9000, tiene 9 hijos.”