
Perturbaciones relativas e integración de conceptos y estrategias

Fecha de recepción: Noviembre, 1996

ARTÍCULOS
DE
INVESTIGACIÓN

Rubén Darío Martínez, Mercedes A. Astiz, Perla A. Medina,
Yolanda H. Montero y María E. Pedrosa.

Departamento de Matemática, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de Mar de Plata
Funes 3350 - (7600) Mar de Plata, Argentina
e-mail: rdmarti@mdp.edu.ar

Educación Matemática
Vol. 10 No. 3 Diciembre
1998 pp. 65-89

Resumen: *La resolución de problemas está comprometida no solamente con las pruebas deductivas, sino también con argumentaciones inductivas y generalizaciones a partir de la observación de casos.*

En este artículo describimos una experiencia interesada en desarrollar perspectivas innovadoras en la resolución de problemas, construyendo conexiones entre inducción y deducción.

Un problema fundamental del cálculo numérico es la solución de sistemas de ecuaciones lineales $Ax = b$. En este estudio nueve parejas de estudiantes, de las clases de Cálculo Numérico, estuvieron comprometidos con el siguiente problema: si los datos en b son perturbados por la cantidad δb , ¿cómo pueden explicarse las perturbaciones en la solución x ?

Abstract: *Problem solving is not concerned only with deductive proofs, but inductive arguments and generalizing from observed cases belong to it.*

In this paper we describe an experience concerned with the development of innovative perspectives on problem solving, forging connections between induction and deduction.

One fundamental problem of numerical calculus is solving the linear system of equations $Ax = b$. In this study nine pairs of students, of Numerical Calculus classes, were engaged with the following problem: if the data in b are perturbed by the quantity δb , how you can explain the perturbations in the solution x ?

Introducción

Para una buena formación de profesores y licenciados en matemática es importante destacar la unidad de esa ciencia en su conjunto, resaltando, en la labor cotidiana, la importancia que tienen la vinculación e integración de diferentes materias en la conformación del conocimiento estructural del estudiante. Otro punto importante para la mencionada formación, es que el alumno llegue a dominar diferentes metodologías para la resolución de problemas; en particular, el manejo del método inductivo es una poderosa herramienta para el quehacer matemático. Sin embargo, a pesar de que estas afirmaciones son ampliamente compartidas, no siempre son llevadas a la práctica.

Varias son las razones que provocan esa situación. Creemos que la sobrecarga de tareas y el limitado tiempo de clases que afecta a la mayoría de los docentes son algunas de las causas que originan esta situación. Obligados por la necesidad, la tendencia general de los maestros y profesores es tomar los problemas directamente de los libros de texto; sin embargo, el autor del texto difícilmente proponga problemas que para su resolución se necesiten conocimientos que no hayan sido desarrollados en su obra, o que no tenga la certeza de que el alumno los haya incorporado en cursos anteriores. Por otra parte, la rigidez de los horarios de clase dificulta la ejercitación de métodos exploratorios e inductivos, los cuales normalmente requieren una mayor dedicación.

De lo expuesto se sigue que es muy difícil sustituir la participación de los docentes en la elaboración de problemas que integren distintos saberes y en la selección de aquellos que sean apropiados para la ejercitación de métodos inductivos, ya que son ellos los únicos que conocen cuales son los tiempos disponibles y los conocimientos y recursos que manejan sus alumnos.

En estas notas trataremos algunas experiencias realizadas en el ámbito universitario con el objeto de implementar acciones que, desde la práctica, contribuyan, en alguna medida, a la integración de conocimientos y estrategias a través de actividades concretas.

Para finalizar esta introducción, es oportuno aclarar que la palabra 'problema' es entendida como un término relativo a una relación entre una tarea matemática y la persona que debe resolverla. Ella será utilizada en situaciones en las cuales el individuo no tiene acceso inmediato al conocimiento requerido para la solución de dicha tarea [1].

Los alumnos

Las experiencias relatadas en este artículo se desarrollaron con alumnos de profesorado y licenciatura en matemática, en dos cursos de Cálculo Numérico de años calendario diferentes; esta asignatura normalmente se cursa al final de segundo año o a comienzos de tercero.

Entre las características generales que presentan nuestros alumnos a esa altura de sus estudios, merecen puntualizarse las siguientes:

- a) ya han estudiado con cierta extensión el cálculo matemático, el álgebra lineal y la geometría afín y euclídea;
- b) han conseguido superar las falacias de razonamiento más comunes y, por lo tanto, manejan razonablemente el método lógico- deductivo;
- c) tienen tendencia a considerar cada asignatura desconectada de las restantes materias que han estudiado;
- d) han incorporado, en forma intuitiva y no sistemática, algunas metodologías de resolución, muy generales y elementales, como por ejemplo: resolver casos particulares, buscar algún patrón a partir de esos casos, reducir las variables del problema para ganar entendimiento, etc., aunque es de hacer notar que gran parte de estas acciones suelen estar orientadas a la búsqueda de contraejemplos y, en consecuencia:
- e) tienen escasa experiencia en la utilización del método inductivo para la resolución de problemas.

En particular, en Cálculo Numérico, también habíamos observado lo siguiente:

- f) pese a que el tema podía ser el mismo, se producía una integración muy
-

pobre entre lo que habían aprendido desde el punto de vista teórico, en asignaturas previas, con los métodos de cálculo que llevaban a la práctica esos mismos temas [2] y, en consecuencia:

g) suelen ignorar lo aprendido teóricamente y consideran las resoluciones numéricas como pertenecientes a un nuevo contexto con muy poca, si alguna, conexión con el anterior.

Por último queremos señalar que en el momento en que se les asignan las actividades descritas en estas notas, los alumnos ya saben implementar algoritmos sencillos, como así también tienen soltura en el manejo elemental de asistentes de cálculo como Derive [3] o Mathematica [4], de modo tal que la computadora se convierte en un auxiliar eficaz para la experimentación. Los cálculos que se exponen en este artículo fueron hechos con esos asistentes.

El problema

Tipo de tarea:

Proyecto, entendido como una actividad que se desarrolla para dar respuesta a una situación problemática no trivial.

Modalidad de trabajo:

Trabajo en grupos de dos alumnos; total de grupos: nueve.

Tiempo de trabajo:

Cinco semanas, en promedio.

Objetivos:

- a) incitar a los alumnos a ejercitar habilidades de planificación para la realización de experimentaciones, con el fin de generar materiales para la reflexión y la ganancia de entendimiento;
- b) inducir al análisis de perspectivas teóricas más amplias, impulsando la integración de conocimientos de diferentes áreas;
- c) favorecer sucesivos ajustes de los razonamientos para ir atendiendo los requerimientos específicos del problema.

Fundamentos para la elección del tema:

Para lograr los objetivos que nos habíamos propuesto, se debía seleccionar un tema que cumpliera las siguientes condiciones:

- a) que fuera suficientemente rico desde el punto de vista matemático,
- b) que hubiera sido estudiado por el alumno desde el punto de vista teórico,
- c) que fuera un tema importante dentro del cálculo numérico como para poder establecer fuertes conexiones entre la teoría y el cálculo, y
- d) que permitiera un acceso experimental.

El tema seleccionado:

El problema seleccionado que se describe en esta exposición se sitúa en el tema: "resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales con solución única"; sobre este tema el alumno ya ha estudiado métodos directos de resolución gaussiana, estrategias de pivoteo, nociones de escalamiento, normas vectoriales y matriciales, condición de una matriz, cotas para los errores absoluto y relativo, etc., como los que pueden encontrarse en [5] y [6].

Nos interesará investigar de qué forma las perturbaciones en el vector de términos independientes afectan al vector solución, cuando resolvemos un sistema de ecuaciones lineales no singular.

Notaciones y operaciones utilizadas:

- | | | |
|-------|------------------------------------|--|
| (1a) | $Ax = b$ | Sistema de ecuaciones lineales |
| (1b) | A | Matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones |
| (1c) | x | Vector de la solución (incógnita) |
| (1d) | b | Vector de términos independientes |
| (1e) | $A(x + \delta x) = (b + \delta b)$ | Sistema de ecuaciones lineales perturbado |
| (1f) | $b + \delta b$ | Vector independiente perturbado |
| (1g) | $x + \delta x$ | Vector de la solución perturbado |

De (1a) y (1e) se deduce que δx y δb estan vinculados por

(1h) $A \cdot \delta x = \delta b$

(1i) $\langle x, y \rangle = x^t \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$ Producto escalar, donde e son las coordenadas de los vectores e , respectivamente y t denota trasposición.

(1j) $\frac{\|(x + \delta x) - x\|}{\|x\|} = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ Norma vectorial

De (1c) y (1g) se deduce

(1k) $\frac{\|(x + \delta x) - x\|}{\|x\|} = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ Perturbación relativa

Comentario técnico: como se puede observar, trabajaremos con la norma euclídea. Además, puesto que la norma euclídea se deriva del producto escalar usual, también hemos introducido este producto interior. Lo hacemos con el objeto de facilitar

una interpretación geométrica intuitiva del problema. Si es necesario, ello nos permitirá hablar de longitud y de perpendicularidad en el sentido corriente. Retornemos ahora al planteo del problema.

Algunas observaciones:

Dado un sistema de ecuaciones lineales no singular, (1a), arbitrario, es posible observar que si afectamos al vector de términos independientes b por una perturbación aleatoria δb , la solución se ve modificada por una perturbación. La perturbación relativa de la solución la podemos medir mediante el cociente (1k).

En segundo término también puede observarse, a través de cálculos, que si mantenemos fijas la matriz de coeficientes, la norma del vector independiente b y la norma de su perturbación δb , pero modificamos arbitrariamente las componentes de b y de δb , en general, se modifica la perturbación relativa (1k).

El enunciado del Problema:

“Dado un sistema de ecuaciones lineales no singular, $Ax = b$, desarrollar una explicación, coherente y detallada, que dé cuenta de los comportamientos observados en las perturbaciones relativas de la solución calculada, cuando cambia aleatoriamente el vector independiente manteniendo fija su norma y cuando ese vector es afectado por una perturbación aleatoria de norma dada. Resolver el problema para dimensión tres y luego generalizar la explicación para dimensión arbitraria”.

Metodología de trabajo

La resolución del problema planteado se realizó en varios pasos, cada uno de los cuales tiene cierta dificultad. El grado de dificultad concreta depende de dos variables: la propia complejidad del punto a resolver y las distintas capacidades de los alumnos.

Puesto que la actitud docente estuvo orientada a permitir que los estudiantes descubrieran por su cuenta tantas cosas como fuera posible, la asistencia proporcionada durante el proceso de resolución fue muy variable, dependiendo de la dificultad a atender y del grupo de alumnos en particular.

La metodología utilizada fue la de ‘aprendizaje por descubrimiento guiado’. Como podrá apreciarse en el desarrollo del artículo, algunas veces se estuvo más cerca del ‘aprendizaje por recepción’ y en otras del ‘aprendizaje autónomo’, según la asistencia que se brindara en cada caso.

Se trabajó individualmente con cada grupo (siguiendo los avances y dificultades de cada uno) y en debates colectivos cuando la situación lo requería (por ejemplo para tratar alguna dificultad común o para reflexionar sobre algún logro alcanzado).

Si bien la exposición se ha simplificado, hemos destacado los matices más importantes, los aportes de los alumnos y las situaciones donde la participación docente fue esencial. Esperamos que el artículo ofrezca una buena descripción de la evolución que hubo desde el planteo del problema hasta su resolución.

El proceso de experimentación

Un Primer Paso

Como se indicó más arriba, los alumnos ya tienen alguna experiencia en la construcción de algoritmos sencillos y, además, ya se han visto en situaciones en las cuales hay que hacer una búsqueda sistemática de datos. Por lo tanto, en este punto, la intervención del docente se limitó a coordinar lo que iban a hacer los grupos para que los datos que recogiera cada uno de ellos fueran homogéneos.

Los experimentos planificados por los alumnos respondieron al siguiente esquema:

- a) Generar al azar una matriz de coeficientes A y dejarla fija para lo que sigue.
- b) Generar al azar un vector independiente b . Resolver el sistema y obtener la solución x .
- c) Someter al vector independiente anterior a una perturbación δb aleatoria y calcular δx .
- d) Calcular la perturbación relativa $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ que sufrió la solución como consecuencia de haber perturbado el vector independiente.
- e) Repetir veinte veces la secuencia b) a d).

Estos cálculos, secuencia a) a e), se realizaron en varias oportunidades (al menos una cada grupo) con el propósito de reunir material para la observación y el análisis.

Para facilitar la comparación de los resultados se convino lo siguiente:

- i) Todos los vectores independientes generados al azar debían tener la misma longitud (en este caso, uno), y
- ii) Todas las perturbaciones generadas al azar también debían tener la misma longitud (en este caso, un centésimo).

Ejemplo 1

El que sigue es un ejemplo de tales experiencias. Se puede observar la matriz del sistema de ecuaciones y, a continuación, la **Tabla 1**, cuyo contenido es el siguiente:

- i) En la primera columna figura el número de entrada.
- ii) En la segunda columna, un vector independiente, aleatorio, de longitud uno (con ese valor se calcula la solución).
- iii) En la tercera columna, una perturbación, aleatoria, de longitud un centésimo (con ese valor se calcula la perturbación de la solución).
- iv) En la última columna se indica el valor de la perturbación relativa para la entrada correspondiente.

$$A = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.47 & -0.81 \\ -0.22 & 0.20 & 0.86 \\ 0.92 & 0.30 & 0.99 \end{bmatrix}$$

Tabla 1

Entrada	Vector Independiente b	Perturbación δb	Perturbación Relativa $\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$
1	(-0.07, 0.38, -0.92)	(-0.0060, 0.0066, -0.0045)	0.0088
2	(-0.18, 0.51, 0.84)	(0.0033, 0.0064, -0.0070)	0.0279
3	(0.36, 0.71, 0.60)	(-0.0020, 0.0087, -0.0044)	0.0104
4	(-0.99, -0.09, 0.07)	(-0.0076, 0.0065, -0.0009)	0.0055
5	(-0.99, 0.13, -0.10)	(-0.0040, 0.0091, -0.0005)	0.0103
6	(-0.78, -0.58, 0.23)	(-0.0051, 0.0063, 0.0059)	0.0030
7	(0.52, 0.51, 0.68)	(0.0027, -0.0067, -0.0069)	0.0054
8	(0.49, -0.87, 0.02)	(0.0013, 0.0059, 0.0079)	0.0091
9	(-0.17, 0.83, -0.53)	(-0.0091, 0.0036, 0.0018)	0.0061
10	(-0.63, 0.18, 0.76)	(-0.0070, -0.0072, 0.0003)	0.0225
11	(0.04, -0.67, 0.74)	(-0.0065, -0.0008, 0.0076)	0.0086
12	(0.62, -0.71, 0.33)	(-0.0015, -0.0036, -0.0092)	0.0078
13	(0.08, -0.88, 0.48)	(0.0032, -0.0016, 0.0093)	0.0051
14	(0.42, -0.54, 0.73)	(0.0071, 0.0064, 0.0029)	0.0173
15	(0.64, 0.77, -0.08)	(-0.0094, 0.0027, 0.0021)	0.0050
16	(-0.93, 0.18, -0.33)	(-0.0092, -0.0021, 0.0033)	0.0150
17	(-0.74, -0.64, -0.21)	(0.0001, -0.0037, 0.0093)	0.0062
18	(-0.59, -0.13, -0.80)	(-0.0021, -0.0055, 0.0081)	0.0155
19	(0.57, -0.79, 0.24)	(0.0032, 0.0090, -0.0031)	0.0188
20	(-0.55, 0.69, -0.47)	(-0.0011, -0.0031, 0.0094)	0.0112

Del análisis de las primeras experimentaciones aparecían varias preguntas: ¿Es posible deducir alguna relación entre, el vector de términos independientes, la perturbación de ese vector y la perturbación relativa de la solución?. Evidentemente se observan notorias diferencias de comportamiento, pero: ¿ habrá alguna ley que las explique?

Un Segundo Paso

En los primeros análisis no se encontraban explicaciones que vincularan las variaciones en b y δb , con la variación de las perturbaciones relativas en las soluciones.

El primer comentario de los alumnos era que la aleatoriedad de los resultados se debía a la aleatoriedad de los vectores utilizados y que, por lo tanto, la única ley que explicaba esas diferencias era el azar.

En este punto los alumnos difícilmente hubieran avanzado por su cuenta. Aquí la intervención orientadora del profesor fue importante.

Lo primero que observó el docente fue que todos los vectores independientes, por una parte, y todas sus perturbaciones, por la otra, tienen igual longitud. Entonces, si las perturbaciones relativas dividen dos longitudes, ¿por qué hay tantas diferencias entre ellas?

Después de pensar bien el asunto los alumnos replican que esas diferencias ocurren porque las perturbaciones relativas dividen las longitudes de las soluciones, no las de los vectores independientes. Lo que ahora se veía claro es que, al pasar de un vector independiente a su solución, las longitudes de estos vectores eran diferentes y que esos cambios de longitud eran, en general, distintos para cada vector.

El punto ahora quedaba circunscripto a analizar que pasaba con las transformaciones.

En esta situación el docente plantea ¿estaremos analizando el problema desde una óptica muy general?.

Aquí hay acuerdo general en particularizar el problema. La discusión se centra entonces en cómo hacerlo. Las alternativas eran: buscar matrices con propiedades especiales o modificar la dimensión del problema.

En los métodos directos de resolución que se acababan de estudiar, las matrices simétricas tienen propiedades muy interesantes que, en muchos casos, simplifican los algoritmos. Por lo tanto, estas matrices particulares aparecieron rápidamente en el debate y hubo consenso entre los alumnos para estudiar este caso.

Es interesante notar que a ninguno se le ocurrió particularizar el problema reduciendo la dimensión. Esto ocurre porque los alumnos están acostumbrados a trabajar con dimensión n y seguramente pasar de dimensión tres a dimensión dos les parecía irrelevante.

En virtud de lo expuesto, el paso siguiente, que en principio tampoco arrojó demasiada luz sobre el problema, consistió en realizar experimentaciones sobre matrices simétricas.

Ejemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} 0.16 & -0.36 & 0.86 \\ -0.36 & 0.01 & 0.92 \\ 0.86 & 0.92 & -0.31 \end{bmatrix}$$

Tabla 2

Entrada	Vector Independiente b	Perturbación δb	Perturbación Relativa $ \delta b / b $
1	(-0.90, -0.29, -0.32)	(-0.0079, -0.0049, -0.0038)	0.0083
2	(0.17, 0.73, 0.66)	(0.0063, 0.0060, 0.0049)	0.0075
3	(-0.78, -0.53, 0.33)	(-0.0095, -0.0002, 0.0031)	0.0190
4	(-0.54, 0.52, 0.66)	(0.0030, -0.0024, 0.0092)	0.0060
5	(0.33, -0.94, -0.08)	(-0.0064, -0.0036, 0.0068)	0.0040

6	(-0.70, -0.07, -0.71)	(0.0039, -0.0019, 0.0090)	0.0090
7	(0.20, 0.46, 0.86)	(0.0011, -0.0008, 0.0099)	0.0079
8	(-0.61, 0.12, 0.78)	(-0.0096, -0.0014, -0.0023)	0.0107
9	(0.43, 0.63, -0.64)	(0.0054, -0.0069, -0.0049)	0.0298
10	(-0.38, 0.53, 0.76)	(0.0008, 0.0088, -0.0046)	0.0080
11	(-0.56, -0.62, -0.55)	(-0.0057, -0.0075, -0.0034)	0.0099
12	(0.59, -0.42, -0.69)	(0.0025, 0.0055, -0.0080)	0.0042
13	(0.24, -0.24, 0.94)	(-0.0063, -0.0032, 0.0071)	0.0082
14	(-0.69, -0.69, -0.21)	(-0.0024, 0.0095, -0.0022)	0.0200
15	(-0.71, -0.21, -0.67)	(-0.0026, 0.0072, 0.0065)	0.0147
16	(-0.89, 0.43, 0.13)	(-0.0067, 0.0074, 0.0004)	0.0105
17	(0.14, -0.98, -0.11)	(-0.0068, -0.0068, 0.0027)	0.0041
18	(-0.70, 0.64, -0.31)	(0.0070, -0.0053, 0.0048)	0.0092
19	(-0.39, -0.89, 0.24)	(0.0001, 0.0078, 0.0063)	0.0150
20	(0.18, -0.66, -0.73)	(0.0060, 0.0047, 0.0065)	0.0113

Más arriba se exhibe un ejemplo, Ejemplo 2, sobre estas experimentaciones, de características similares al mostrado en el punto anterior. Como en ese caso, se indica la matriz de coeficientes del sistema y la **Tabla 2**, cuya configuración es idéntica a la de la **Tabla 1**.

Como puede suponerse, del análisis de estos experimentos no se sacó nada nuevo.

La conjetura

Reduciendo el Problema

En estas circunstancias el docente vuelve a atraer la atención de los alumnos con la pregunta: ¿podrá sernos útil representar graficamente el problema ?

Los alumnos coinciden que sería muy útil, los gráficos siempre ayudan. Para todos estaba claro que para poder representar algo en el plano había que trabajar en dos dimensiones. En lo que no había coincidencia era qué representar; algunos proponían dejar fija una perturbación y representar en el plano distintos vectores independientes para luego intentar relacionarlos con la tabla de diferencias relativas, mientras que otros opinaban que lo que debía hacerse era dejar fijo un vector independiente y representar diferentes perturbaciones aleatorias. Se permitió que cada grupo siguiera el camino que más le gustaba pues, en esencia, ambos son equivalentes. En esta exposición desarrollaremos la primera variante.

Un ejemplo de los cálculos efectuados con esta versión simplificada del problema lo presentamos más abajo como Ejemplo 3, cuyo formato es el mismo que el de los ejemplos anteriores:

Ejemplo 3

$$A = \begin{bmatrix} 0.65 & -0.23 \\ -0.23 & 0.41 \end{bmatrix}$$

Tabla 3

Entrada	Vector Independiente <i>b</i>	Perturbación <i>db</i>	Perturbación Relativa $\frac{\ dx\ }{\ x\ }$
1	(-0.55, -0.83)	(0.0072, -0.0069)	0.0040
2	(-0.42, -0.91)	(0.0072, -0.0069)	0.0040
3	(0.32, -0.95)	(0.0072, -0.0069)	0.0058
4	(-0.94, -0.35)	(0.0072, -0.0069)	0.0049
5	(1.00, 0.04)	(0.0072, -0.0069)	0.0064
6	(-0.94, -0.35)	(0.0072, -0.0069)	0.0049
7	(0.73, 0.69)	(0.0072, -0.0069)	0.0041
8	(-0.66, 0.75)	(0.0072, -0.0069)	0.0090
9	(-0.82, 0.58)	(0.0072, -0.0069)	0.0114
10	(0.98, -0.19)	(0.0072, -0.0069)	0.0084
11	(0.95, -0.33)	(0.0072, -0.0069)	0.0101
12	(-0.61, -0.80)	(0.0072, -0.0069)	0.0040
13	(0.41, -0.91)	(0.0072, -0.0069)	0.0063
14	(0.60, 0.80)	(0.0072, -0.0069)	0.0040
15	(0.88, -0.47)	(0.0072, -0.0069)	0.0115
16	(0.90, 0.44)	(0.0072, -0.0069)	0.0046
17	(-0.87, 0.49)	(0.0072, -0.0069)	0.0116
18	(0.30, -0.95)	(0.0072, -0.0069)	0.0056
19	(-0.76, 0.65)	(0.0072, -0.0069)	0.0106
20	(-0.05, -1.00)	(0.0072, -0.0069)	0.0045

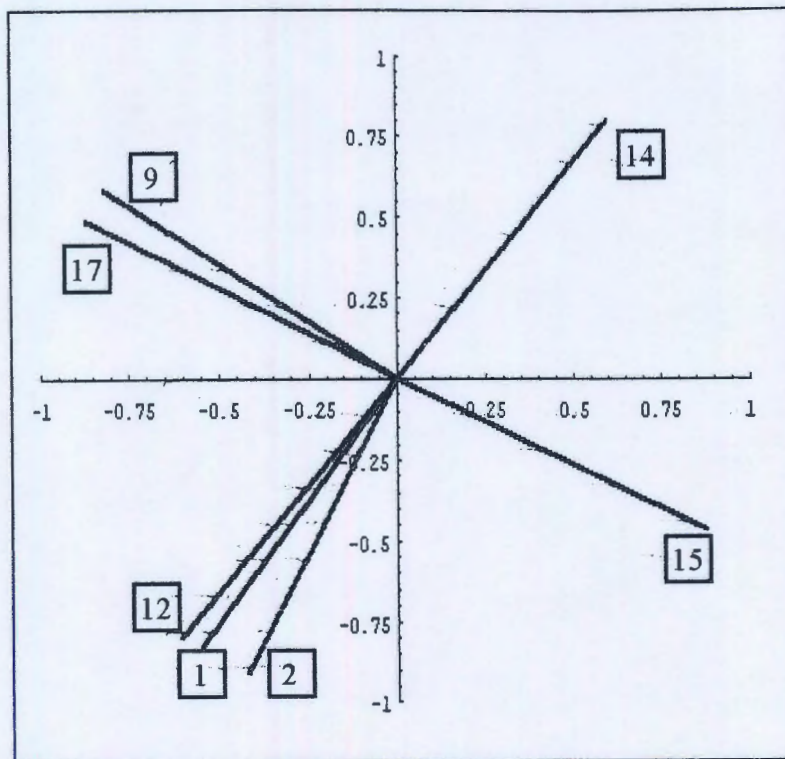
Analizando Resultados

Con el fin de facilitar las comparaciones los alumnos procedieron a rotular cada vector con el valor de la perturbación relativa correspondiente.

En discusión con cada grupo, los alumnos observaron que las perturbaciones máximas y mínimas parecían estar en determinadas direcciones y que las perturbaciones variaban en forma continua a medida que el vector iba rotando en el plano.

En el Gráfico 1 pueden observarse los vectores correspondientes a las perturbaciones relativas extremas; en efecto en él se tomaron en cuenta las tres entradas de mayor perturbación relativa (entradas 17, 15 y 9), cuatro de la menor (entradas 1, 2, 12 y 14) y se graficaron los correspondientes vectores independientes (observar que aquí no fueron rotulados con el valor de la perturbación relativa, sino con el número de entrada de la tabla).

Gráfico 1



Pese a que todos los grupos tenían gráficos similares, algunos, no muy convencidos propusieron hacer una experiencia confirmatoria. Ya que parecía existir una dependencia entre la magnitud de la perturbación relativa y la dirección del vector independiente, ¿por qué no repetir los cálculos en forma sistemática, tomando vectores independientes a intervalos regulares en todos los sentidos posibles?

Una muestra de tales cálculos es el que se expone a continuación en la Tabla 4.

La primera columna de esta tabla indica el ángulo, en grados sexagesimales, que forma el vector independiente con el eje de las abscisas y el incremento entre dos entradas consecutivas es de 10 grados. El contenido del resto de las columnas es idéntico al de los ejemplos anteriores.

Un paso más adelante: la conjetura

El análisis de esa tabla resultó confirmatorio. Ahí puede observarse que las perturbaciones, lejos de ser aleatorias, presentan una regularidad que depende de la dirección del vector independiente (única variable de esta experimentación).

Ejemplo 4

Tabla 4

Angulo en Grados	Vector Independiente b	Perturbación δb	Perturbación Relativa $\frac{\ \delta x\ }{\ x\ }$
0	(1.00, 0.00)	(0.0072, -0.0069)	0.00668
10	(0.98, 0.17)	(0.0072, -0.0069)	0.00562
20	(0.94, 0.34)	(0.0072, -0.0069)	0.00492
30	(0.87, 0.50)	(0.0072, -0.0069)	0.00446
40	(0.77, 0.64)	(0.0072, -0.0069)	0.00417
50	(0.64, 0.77)	(0.0072, -0.0069)	0.00402
60	(0.50, 0.87)	(0.0072, -0.0069)	0.00398
70	(0.34, 0.94)	(0.0072, -0.0069)	0.00405
80	(0.17, 0.98)	(0.0072, -0.0069)	0.00423
90	(0.00, 1.00)	(0.0072, -0.0069)	0.00456
100	(-0.17, 0.98)	(0.0072, -0.0069)	0.00507
110	(-0.34, 0.94)	(0.0072, -0.0069)	0.00584
120	(-0.50, 0.87)	(0.0072, -0.0069)	0.00701
130	(-0.64, 0.77)	(0.0072, -0.0069)	0.00871
140	(-0.77, 0.64)	(0.0072, -0.0069)	0.01071
150	(-0.87, 0.50)	(0.0072, -0.0069)	0.01159
160	(-0.94, 0.34)	(0.0072, -0.0069)	0.01024
170	(-0.98, 0.17)	(0.0072, -0.0069)	0.00824
180	(-1.00, 0.00)	(0.0072, -0.0069)	0.00668
190	(-0.98, -0.17)	(0.0072, -0.0069)	0.00562
200	(-0.94, -0.34)	(0.0072, -0.0069)	0.00492
210	(-0.87, -0.50)	(0.0072, -0.0069)	0.00446
220	(-0.77, -0.64)	(0.0072, -0.0069)	0.00417
230	(-0.64, -0.77)	(0.0072, -0.0069)	0.00402
240	(-0.50, -0.87)	(0.0072, -0.0069)	0.00398
250	(-0.34, -0.94)	(0.0072, -0.0069)	0.00405
260	(-0.17, -0.98)	(0.0072, -0.0069)	0.00423
270	(0.00, -1.00)	(0.0072, -0.0069)	0.00456
280	(0.17, -0.98)	(0.0072, -0.0069)	0.00507
290	(0.34, -0.94)	(0.0072, -0.0069)	0.00584
300	(0.50, -0.87)	(0.0072, -0.0069)	0.00701
310	(0.64, -0.77)	(0.0072, -0.0069)	0.00871
320	(0.77, -0.64)	(0.0072, -0.0069)	0.01071
330	(0.87, -0.50)	(0.0072, -0.0069)	0.01159
340	(0.94, -0.34)	(0.0072, -0.0069)	0.01024
350	(0.98, -0.17)	(0.0072, -0.0069)	0.00824

Si bien esta tabla se construyó sobre un conjunto discreto de puntos, es posible inferir que los valores mínimos de la perturbación relativa se alcanzan cuando el vector independiente tiene una dirección cercana a la de la recta que pasa por el origen con una pendiente de 60 grados, mientras que un análisis idéntico para los valores máximos de dicha perturbación indica que en este caso la dirección del vector independiente es próxima a la de la recta que pasa por el origen con pendiente de 150 grados.

En base a estos cálculos los alumnos conjeturaron que las direcciones de máxima y de mínima perturbación relativa parecían ser perpendiculares. Algunos grupos lo dedujeron esto por su cuenta, mientras que en otros fue necesaria una breve observación del docente.

¿De qué servían estos descubrimientos?. Aquí fue necesario dedicarle algún tiempo a comentar algunas estrategias útiles para resolver problemas complejos; esto lo hacemos en el próximo apartado.

El proceso de reconceptualización

El Paso Crucial

Cuando un alumno se encuentra trabajando sobre un problema complejo intenta ajustar las circunstancias a sus experiencias previas; es decir, evoca ciertos marcos conceptuales que en otras situaciones aparentemente similares han sido útiles. No es de extrañarse que esto lo obligue a recharacterizar el problema y a efectuar una profunda reconceptualización del mismo [2]. Este proceso algunas veces el alumno lo puede hacer en forma autónoma, mientras que en otras necesita ser orientado por la intervención docente.

Ampliando el Campo de Razonamiento

En nuestro caso, el proceso de reconceptualización se produjo a partir de un conjunto muy simple de interrogantes planteados por el docente, los cuales condujeron a tres conclusiones, cada una de las cuales engloba a la anterior:

a) Al resolver un sistema de ecuaciones no singular $Ax = b$ ¿qué estamos calculando? ¿cuál es la conexión entre x y b ?

La respuesta es casi trivial: x y b están vinculados por la matriz A o por su inversa A^{-1} , según el tránsito se establezca desde x a b o desde b a x . Además, cuando se resuelve un sistema, y son datos y es la incógnita; por lo tanto, como el tránsito ocurre de los datos a la incógnita, la operación que se realiza es:

$$(2) \quad x = A^{-1} \cdot b$$

Por lo tanto se deduce que tanto la matriz A , como su inversa A^{-1} , definen una transformación en un espacio vectorial real.

Primera conclusión: estoy ubicado en un espacio vectorial.

b) Ahora bien, hemos estado tomando módulo, norma o longitud de los vectores para calcular las perturbaciones relativas, por lo tanto tenemos una:

Segunda conclusión: estoy en un espacio vectorial normado.

c) Sigamos adelante. Las observaciones realizadas a partir de las experimentaciones numéricas nos permitieron conjeturar que las direcciones en las cuales se encuentran las mayores y menores perturbaciones relativas serían perpendiculares. Pero, por lo que sabemos de geometría, para que tenga sentido hablar de perpendicularidad debemos introducir un producto interior. Por ello, arribamos a la:

Tercera conclusión: estamos trabajando con transformaciones lineales de un espacio vectorial euclídeo.

La Búsqueda en el Contexto Adecuado

Una vez ubicados en contexto el docente hizo una exposición explicando, con algunos ejemplos sencillos, cómo a veces la solución no se encuentra sumergiéndose de inmediato en los detalles de cálculo, sino en tomar una perspectiva más amplia que permita enfocar el problema dentro del contexto teórico en el cual se encuentra planteado. Esto es lo que algunos autores [7] llaman trabajar el problema “desde afuera”; es decir, recorrer varias regiones del conocimiento con el propósito de extraer alguna información útil.

Ya que nuestras conjeturas habían aparecido trabajando con matrices simétricas, ¿por qué no seguir analizando este tipo de matrices?, ¿por qué no buscar en la teoría de transformaciones lineales en espacios euclídeos algún resultado que permitiera seguir avanzando?

La visión del problema comienza a modificarse cualitativamente.

La consigna entonces era: buscar en los apuntes y textos utilizados en álgebra y geometría, como por ejemplo [8], resultados para matrices simétricas en espacios euclídeos que pudieran dar alguna respuesta a las conjeturas a las cuales se había arribado.

Esta búsqueda la hicieron los alumnos. Los resultados que trajeron no eran muchos. En trabajo grupal se fueron analizando cada uno de ellos y discutiendo cuál podría ser de utilidad. Un enunciado que llamó la atención fue el siguiente:

Teorema 1: *Si es una matriz real simétrica en un espacio euclídeo, entonces existe una base ortonormal del espacio formada por autovectores de M.*

Este resultado llamó la atención por lo siguiente: ya que esa base es ortogonal, ¿estarían las direcciones de esos autovectores, relacionadas con las direcciones aproximadas de máxima y de mínima que aparecían en las experimentaciones numéricas?

En este punto hubo acuerdo general que esto justificaba hacer algunos cálculos: ¿por qué no determinar los autovectores de la matriz A^{-1} de los Ejemplos 3 y 4?

Efectuando dichos cálculos se obtienen los siguientes autovectores:

$$v_1 = (0.5184, 0.8552) \text{ y } v_2 = (-0.8552, 0.5184)$$

Si ahora se determinan sus direcciones (ángulo que forman con el eje de abscisas), observamos que la dirección de v_1 es de $58^\circ 46' 34''$, mientras que la de v_2 es de $46' 34''$. Evidentemente, la comparación de estas direcciones con los análisis de la Tabla 4, alientan la búsqueda de la respuesta afirmativa a la pregunta anterior. En efecto, si se observan la Tabla 3, la Tabla 4 y el Gráfico 1, es posible conjeturar que las perturbaciones relativas mínimas se obtienen cuando el vector independiente está en la dirección de y y que las perturbaciones relativas máximas se alcanzan cuando el vector independiente está en la dirección de v_1 . El asunto es que ahora esto había que probarlo.

Hacia la solución parcial del problema

Se había alcanzado un punto cualitativamente importante: un conjunto de experimentaciones numéricas nos había acercado a un resultado teórico que daba pistas posibles para avanzar en la respuesta al problema.

Fijando el Contexto Teórico

El Teorema 1 trata de matrices simétricas y autovectores, por lo tanto se buscaron resultados que pudieran ser de utilidad en ese contexto para tenerlos a mano. Entre ellos destacamos dos propiedades; una es la siguiente:

Propiedad 1: *si una matriz es simétrica entonces todos sus autovalores son reales, si además es no singular, son todos no nulos.*

Puesto que la consigna establecía que el problema debía resolverse para dimensión tres y luego generalizar, era natural trabajar, en un primer momento, en esa dimensión. Pasemos ahora a fijar notaciones.

Sean λ_1, λ_2 y λ_3 y los autovalores, no necesariamente distintos, de la matriz simétrica A^{-1} .

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer entonces:

$$(3) \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| > 0$$

Sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal del espacio formada por autovectores de A^{-1} , cuya existencia esta garantizada por el Teorema 1.

Recordemos que la relación entre matriz, autovalor y autovector es la siguiente:

$$(4) \quad A^{-1} \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i \quad i = 1, 2, 3.$$

y que por ser la base ortormal son válidas las siguientes igualdades:

$$(5a) \quad \|v_i\| = \sqrt{\langle v_i, v_i \rangle} = 1 \quad i = 1, 2, 3.$$

$$(5b) \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{si } i \neq j.$$

Vinculando el Problema a la Teoría

Los puntos que siguen son bastante técnicos; es decir, lo que tenían que resolver los alumnos era semejante a muchos problemas teóricos que aparecen en los trabajos prácticos de álgebra y geometría. En estos casos la intervención del docente no va mucho más allá de hacer alguna sugerencia orientadora.

El asunto estaba en vincular los datos de $x = A^{-1} \cdot b$ con el Teorema 1. En síntesis lo que se debía hacer era expresar todos los vectores en términos de la base de autovectores.

i) Expresar al vector b como combinación lineal de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$(6) \quad b = \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 + \mu_3 \cdot v_3$$

donde μ_i son las coordenadas de b en esa base.

ii) Reemplazar (6) en (2), de donde resulta:

$$(7) \quad x = A^{-1} \cdot b = A^{-1} \cdot (\mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 + \mu_3 \cdot v_3)$$

iii) Distribuir A^{-1} en (7) y aplicar la relación (4); de ello se sigue:

$$(8a) \quad x = \mu_1 \cdot A^{-1} \cdot v_1 + \mu_2 \cdot A^{-1} \cdot v_2 + \mu_3 \cdot A^{-1} \cdot v_3$$

$$(8b) \quad x = \mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2 + \mu_3 \cdot \lambda_3 \cdot v_3$$

Esta última vinculación sería una de las claves para la resolución del problema.

Volviendo a la Perturbación Relativa

Recordamos que la perturbación la medimos mediante la relación (1k):

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

Comencemos por trabajar $\|x\|$. El tomar norma al cuadrado es un recurso al cual los alumnos están muy habituados, pues con ello se elimina la molesta presencia de la raíz cuadrada.

Tomando norma al cuadrado en (8b) resulta, de acuerdo a (1j) y (1i):

$$(9) \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle \mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2 + \mu_3 \cdot \lambda_3 \cdot v_3, \mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot \lambda_2 \cdot v_2 + \mu_3 \cdot \lambda_3 \cdot v_3 \rangle$$

Si calculamos el producto interior y recordamos la ortonormalidad de la base, (5a) y (5b), (9) se transforma en:

$$(10a) \quad \|x\|^2 = \mu_1^2 \cdot \lambda_1^2 + \mu_2^2 \cdot \lambda_2^2 + \mu_3^2 \cdot \lambda_3^2$$

$$(10b) \quad \|x\|^2 = \sqrt{\mu_1^2 \cdot \lambda_1^2 + \mu_2^2 \cdot \lambda_2^2 + \mu_3^2 \cdot \lambda_3^2}$$

Este es un hallazgo muy importante: se ha logrado escribir la norma de x en términos de las coordenadas μ_i de b en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ y de los autovalores λ_i de A^{-1} .

Este resultado ahora se puede extender a δx . En efecto, si observamos las expresiones (1a) y (1h), se deduce que la vinculación existente entre x y b es la misma que la que existe entre δx y δb , por lo tanto podemos escribir:

$$(11a) \quad \|\delta x\|^2 = v_1^2 \cdot \lambda_1^2 \cdot v_2^2 + \lambda_2^2 \cdot v_3^2 + \lambda_3^2$$

$$(11b) \quad \|x\|^2 = \sqrt{v_1^2 \cdot \lambda_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \cdot \lambda_3^2}$$

donde los coeficientes v_i son las coordenadas de en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, es decir:

$$(11c) \quad \delta b = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 + v_3 \cdot v_3$$

Las Variaciones de la Perturbación Relativa

A través de los ejemplos previos se había constatado que, aún manteniendo constantes la matriz de coeficientes y las normas de los vectores b y δb , las perturbaciones relativas tomaban distintos valores cuando cambiaban las coordenadas de b y/o de δb . Esas variaciones evidentemente estaban acotadas por los rangos de variabilidad que podían tener la norma de x y la norma de δx . En efecto, un análisis sencillo de (1k) da cuenta de que la perturbación relativa será máxima cuando $\|\delta x\|$ alcance su máximo y $\|x\|$ su mínimo, y será mínima si $\|\delta x\|$ se hace mínima y $\|x\|$ máxima.

Ahora bien: ¿cuál será el rango de variación de $\|x\|$? y ¿cuál el de $\|\delta x\|$?

De la analogía de las expresiones (10a) y (11a) era posible deducir que bastaba trabajar con una de ellas y extender los resultados a la restante. El paso siguiente consistió, entonces, en buscar el rango de variación de $\|x\|$ a partir de (10a), aprovechando nuestro conocimiento sobre los autovalores de A^{-1} , indicado en las desigualdades de la expresión (3).

De dichas desigualdades y de la expresión (10a) se deducen:

$$(12a) \quad \|x\|^2 = \mu_1^2 \cdot \lambda_1^2 + \mu_2^2 \cdot \lambda_2^2 + \mu_3^2 \cdot \lambda_3^2 \leq \mu_1^2 \cdot \lambda_1^2 + \mu_2^2 \cdot \lambda_1^2 + \mu_3^2 \cdot \lambda_3^2$$

$$(12b) \quad \|x\|^2 = \mu_1^2 \cdot \lambda_1^2 + \mu_2^2 \cdot \lambda_2^2 + \mu_3^2 \cdot \lambda_3^2 \geq \mu_1^2 \cdot \lambda_3^2 + \mu_2^2 \cdot \lambda_3^2 + \mu_3^2 \cdot \lambda_2^2$$

y tomando factor común λ_1 en (12a) y λ_3 en (12b) se obtiene:

$$(13a) \quad \|x\|^2 \leq \lambda_1^2 \cdot (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)$$

$$(13b) \quad \|x\|^2 \leq \lambda_3^2 \cdot (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)$$

pero la cantidad encerrada entre paréntesis es la suma de los cuadrados de las coordenadas del vector b expresado en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$. En otras palabras y recordando (6), (5a) y (5b) se tiene:

$$(14) \quad \|b\|^2 \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$$

y por lo tanto, reemplazando y unificando expresiones, se llega a:

$$(15a) \quad \lambda_3^2 \cdot \|b\|^2 \leq \|x\|^2 \leq \lambda_1^2 \cdot \|b\|^2$$

$$(15b) \quad |\lambda_3| \cdot \|b\| \leq \|x\| \leq |\lambda_1| \cdot \|b\|$$

y por la analogía apuntada más arriba podemos afirmar:

$$(16a) \quad \lambda_3^2 \cdot \|\delta b\|^2 \leq \|\delta x\|^2 \leq \lambda_1^2 \cdot \|\delta b\|^2$$

$$(16b) \quad |\lambda_3| \cdot \|\delta b\| \leq \|\delta x\| \leq |\lambda_1| \cdot \|\delta b\|$$

Buscando los máximos y mínimos de la perturbación

Como se había indicado en el párrafo previo, las expresiones (10a) y (11a) son análogas; por ello, es posible trabajar con $\|x\|$ y, a posteriori, extender los resultados a $\|\delta x\|$.

Las expresiones (3), (6), (12a) y (12b) permiten analizar las distintas variantes bajo las cuales puede alcanzar su máximo o su mínimo.

Es claro que se pueden presentar cuatro variantes, según qué valores tomen los autovalores de A^{-1} . Ellas son: a) $|\lambda_1| > |\lambda_2| = |\lambda_3|$, b) $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$, c) $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$, y d) $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|$.

Veamos cada una de ellas:

$$a) \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| = |\lambda_3|$$

i) En este caso se deduce que el máximo se alcanza cuando $\mu_2 = \mu_3 = 0$ y por lo tanto se sigue que debe ser un múltiplo de v_1 , autovector asociado a λ_1 .

ii) Del mismo modo es posible deducir que el mínimo se logra cuando $\mu_1 = 0$ y por lo tanto se deduce b que debe ser una combinación lineal de los autovalores v_2 y v_3 . En otras palabras, el vector b debe estar en el subespacio asociado al autovalor doble λ_3 .

$$b) \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$$

Este análisis guarda una marcada simetría con el anterior. En síntesis:

i) el máximo de $\|x\|$ se alcanza cuando $\mu_3 = 0$ y por lo tanto b está en el subespacio correspondiente al autovalor doble λ_1 .

ii) el mínimo de $\|x\|$ se obtiene cuando $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y por ende b debe ser un múltiplo de v_3 , subespacio asociado a λ_3 .

$$c) \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$$

Para esta variante los análisis son los que siguen:

i) el máximo de $\|x\|$ se alcanza bajo las mismas condiciones que en la variante a).

ii) el mínimo de $\|x\|$ se logra bajo las mismas condiciones que en el caso b).

$$d) |\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|$$

Se sigue que en este caso el autovalor es triple, y, por lo tanto, las desigualdades (15) y (16) se transforman en igualdades. Por lo tanto, cualesquiera sean las componentes de b en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ la será la misma.

Por lo apuntado al principio de este párrafo, es inmediato que todos estos análisis siguen siendo válidos si reemplazamos $\|x\|$ por $\|\delta x\|$.

Luego de este detallado trabajo, se alcanzaba este resultado unificador preliminar:

Dados un sistema de ecuaciones lineales, no singular y simétrico, $Ax = b$, y una norma para el vector independiente b ; para que el vector solución tenga norma máxima es necesario y suficiente que el vector de términos independientes pertenezca al subespacio generado por autovectores correspondientes al autovalor de la matriz A^{-1} de valor máximo. Bajo las mismas condiciones, para que el vector solución tenga norma mínima es necesario y suficiente que el vector independiente pertenezca al subespacio generado por autovectores correspondientes al autovalor de A^{-1} de valor mínimo.

El problema resuelto para matrices simétricas

El trabajo había logrado alcanzar el importante resultado enunciado en el final del párrafo previo. Esto resolvía el problema planteado en forma completa, para el caso en que la matriz del sistema de ecuaciones lineales fuera simétrica.

Al llegar a este punto para los alumnos el problema para matrices simétricas estaba resuelto. Es entonces donde aparece la intervención docente haciendo notar que había que recurrir a la inversa A^{-1} de la matriz de coeficientes. ¿Era ello imprescindible?. ¿Por qué no buscar mayor simplicidad?. ¿No sería posible manejarnos directamente con la matriz?.

Después de algunas reflexiones estaba claro para todo el mundo que la solución estaba en establecer una conexión entre los autovalores y autovectores de A con los correspondientes de A^{-1} . Dicha conexión es muy sencilla; entre los resultados útiles tenemos esta segunda propiedad a la cual hicimos mención más arriba:

Propiedad 2: *si es una matriz simétrica no singular, los autovalores de su inversa A^{-1} son los inversos multiplicativos de los autovalores de A . Además, si v es autovector de A también lo es de A^{-1} y recíprocamente. De ello se sigue que si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de autovectores de A^{-1} , también es una base de autovectores de A y, de acuerdo a lo expuesto, el subespacio generado por los autovectores del autovalor de A de mayor (menor) módulo es el mismo que el generado por los autovectores del autovalor de A de menor (mayor) módulo y recíprocamente.*

¡Esto permitía poner todos los resultados en términos de la matriz A !

Lo que sigue es simple. Se trata de hacer reemplazos adecuados.

En efecto si β son los autovalores de A podemos asumir sin pérdida de generalidad:

$$(17) \quad |\beta_1| \geq |\beta_2| \geq |\beta_3| > 0$$

y recordando que son los autovalores de A^{-1} , la Propiedad 2 afirma que:

$$(18) \quad \lambda_1 = 1/\beta_3, \lambda_2 = 1/\beta_2 \text{ y } \lambda_3 = 1/\beta_1$$

Por lo tanto, si queremos expresar todos nuestros razonamientos anteriores en términos de los autovalores de la matriz A , basta con reemplazar en cada expresión donde sea pertinente, λ_i por $1/\beta_j$, según las equivalencias (18), recordando, además, que v_1 será un autovector correspondiente a β_3 , que v_2 será un autovector correspondiente a β_2 y que v_3 será un autovector correspondiente a β_1 .

Volviendo al problema: sabemos que si perturbamos el vector de términos independientes b , ello traerá como consecuencia una perturbación en el vector solución x , y que la perturbación relativa de la solución la podemos medir por el cociente de normas (1k):

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

Ahora, generalizando, estamos en condiciones de afirmar que:

a) Perturbación relativa: *el valor que toma la perturbación relativa es explicado por las expresiones del vector independiente b , según la ecuación (6), y de su perturbación δb , de acuerdo a la ecuación (11c), en términos de la base ortonormal de autovectores $\{v_1, v_2, v_3\}$ de la matriz de coeficientes A , y por la incidencia o peso relativo que tiene cada uno de esos autovectores en esas expresiones.*

En particular podemos remarcar dos casos límites:

b) Perturbación relativa máxima: *de acuerdo a (1k), buscaremos maximizar el numerador y minimizar el denominador; por lo tanto, para que la perturbación relativa alcance su máximo δb debe estar en el subespacio asociado al valor propio de menor módulo de la matriz A (valor propio de mayor módulo de la matriz A^{-1}) y el vector b debe estar en el subespacio asociado al valor propio de mayor módulo de dicha matriz (valor propio de menor módulo de la matriz A^{-1}).*

c) Perturbación relativa mínima: *similar al punto anterior pero intercambiando la pertenencia a subespacios de δb y de b .*

Ejemplo 5

A modo de ejemplo, tomemos la Tabla 2, del Ejemplo 2.

En dicha Tabla puede observarse el valor relativamente alto que toma la perturbación relativa de la entrada 9. Expliquemos ahora las razones de ese valor tan alto, a la luz de las deducciones anteriores.

En primer término, calculando los autovalores de la matriz A , resulta:

$$\beta_1 = -1.5547, \beta_2 = 0.96734 \text{ y } \beta_3 = 0.44736$$

Calculando los autovectores v_1 (corresponde a β_3), v_2 (corresponde a β_2) y v_3 (corresponde a β_1), se obtiene:

$$v_1 = (0.703455, -0.708086, -0.061354)$$

$$v_2 = (-0.535779, -0.471591, -0.700386)$$

$$v_3 = (-0.467092, -0.525511, 0.711099)$$

Calculemos ahora las coordenadas de $\delta b = (0.0054, -0.0069, -0.0049)$ y de $b = (0.43, 0.63, -0.64)$ en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, para determinar al peso relativo de cada autovector. Los valores que se obtienen son los siguientes:

$$\text{Coordenadas de } \delta b: \underline{v_1 = 0.008985}, v_2 = 0.003793 \text{ y } v_3 = -0.002380$$

$$\text{Coordenadas de } b: \mu_1 = -0.104439, \mu_2 = -0.079200 \text{ y } \underline{\mu_3 = -0.987033}$$

Analizando estos coeficientes es posible deducir el peso relativo dominante que tiene el autovector v_1 , asociado al autovalor de A de menor módulo, en la expresión de δb (coeficiente v_1) y el peso relativo dominante que tiene el autovector v_3 , asociado al autovalor de A de mayor módulo, en la expresión de b (coeficiente μ_3).

De estas dominancias y de las afirmaciones precedentes se deducen las razones que explican el valor relativamente alto que toma la perturbación relativa analizada.

La solución general del problema

Con lo realizado hasta el momento se habían alcanzado objetivos muy importantes. En efecto, se habían logrado integrar, en una rica experiencia, metodologías de trabajo inductivas y deductivas; se había vivenciado cómo se complementan y cómo cada una de ellas puede servir de soporte a la restante. Además, se había tendido un puente de ida y vuelta entre cálculo y teoría, vinculación que disolvía ambos aspectos en una única unidad conceptual, enriqueciéndolos mutuamente.

Los objetivos más importantes estaban cumplidos; el resto del trabajo iba a desarrollarse sobre carriles más conocidos. Como el trabajo con matrices generales no aporta nada sustancialmente nuevo, nos limitaremos a señalar que el resultado alcanzado para matrices generales es el mismo que para las matrices simétricas, con la diferencia que en lugar de trabajar con los autovalores y autovectores de la matriz de coeficientes hay que trabajar con los valores y vectores propios de la matriz $M = A \cdot A^t$.

Conclusiones

La asignación de problemas complejos en forma de pequeños proyectos o trabajos de seminario, como el desarrollado en este artículo, nos ha permitido incursionar en aspectos de la formación matemática que de otra forma no resultan fáciles de alcanzar, con sus implicancias sobre el aprendizaje. Es importante señalar que hubo una respuesta gratificante por parte de los grupos de alumnos que han participado de este tipo de actividades y que la gran mayoría completó satisfactoriamente su trabajo (quince alumnos sobre un total de dieciocho).

El hecho de tener que trabajar sobre un problema durante varias semanas permitió que los estudiantes experimentaran un proceso creativo, compuesto de avances y retrocesos, de intuiciones ciertas y conjeturas equivocadas, de reflexiones individuales y conjuntas, mucho más cercano a la actividad de un matemático que el que pueden ofrecer los ejercicios y problemas convencionales. En particular, esto es muy importante porque la mayoría de nuestros alumnos pertenecen al profesorado y las tendencias modernas de enseñanza matemática enfatizan los procesos de aprendizaje antes que sus productos [9].

Hemos podido constatar que la necesidad de tener que volver a analizar e interpretar temas estudiados en otro momento, genera en el alumno una revalorización de dichos temas y una percepción diferente de los mismos, mucho más amplia y de mayor riqueza conceptual. En efecto, conceptos y creencias que en su momento se veían dispersos ahora aparecen relacionados y con matices antes desconocidos.

La utilización del método inductivo como metodología de acercamiento para la resolución de un problema complejo constituyó una novedad para la mayoría, dado que en su experiencia previa el mismo sólo había sido utilizado para buscar regularidades en ejercicios de inducción completa, o temas similares.

Tal vez una de las mayores dificultades que enfrentan los alumnos, para encarar una tarea como la asignada, es el desconocimiento de metodologías apropiadas. Por ello, el papel del docente fue, esencialmente, el de facilitador. Se puso énfasis en orientar al estudiante y en 'enseñarle a hacer' más que en indicarle el camino a seguir.

Por último, es importante remarcar las siguientes condiciones que ayudaron al éxito de la experiencia: a) los alumnos ya conocían el tema, tanto desde el punto de vista teórico como del numérico; b) la motivación de los estudiantes; c) una alta relación docente/ alumno. Sin embargo, creemos que lo que se han expuesto en este artículo son ideas de trabajo y que, como decíamos en la Introducción, cada docente sabrá evaluar en su lugar de trabajo si es posible implementarlas y, en caso afirmativo, de qué modo hacerlo. También para los docentes la mejor manera de aprender algo es haciéndolo uno mismo. A modo de cierre, queremos hacer explícita nuestra adhesión a una frase de Polya: "...en estos asuntos, un grano de experiencia tiene más valor que libras de descripción" [7].

Bibliografía

- [1] Schoenfeld, A.H., "Mathematical Problem Solving", Academic Press, San Diego, California, 1985.
- [2] Martínez, R.D., Astiz, M.S, Medina, P.A. y Montero, Y.H., "Experiencia Didáctica sobre la Resolución Numérica de Sistemas de Ecuaciones Lineales", XVI Reunión de Educación Matemática, Unión Matemática Argentina. Neuquén, 1993.
- [3] Soft Warehouse Inc., "Derive: A Mathematical Assistant for your Personal Computer, V. 3.0, User Manual". Honolulu, Hawaii, 1994.
- [4] Wolfran S., "Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer", 2nd. Edition, Addison-Wesley. Redwood City, Calif., 1992.
- [5] Gerald, C.F., "Applied Numerical Analysis", 2nd. Edition, Addison-Wesley. Reading, Mass., 1978.
- [6] Plybon, B.F., "An Introduction to Applied Numerical Analysis", PWS-Kent, Boston, Mass., 1992.

- [7] Polya, G., "Mathematical Discovery", Combined Edition, J. Wiley & Sons. New York, 1981.
- [8] Larotonda, A.R., "Algebra Lineal y Geometría", Eudeba, Buenos Aires, 1973.
- [9] Kieran, C., "Doing and Seeing Things Differently", en Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25 (6), p. 583-607, 1994.

Apéndice

En este Apéndice ponemos a disposición del lector interesado los cálculos matemáticos necesarios para alcanzar la solución general del problema, limitándonos a los aspectos técnicos del asunto.

Replantando la ecuación (9) se tiene:

$$(19) \quad \|x\|^2 = \|A^{-1} \cdot b\|^2 = \langle A^{-1} \cdot b, A^{-1} \cdot b \rangle = (A^{-1} \cdot b)^t \cdot (A^{-1} \cdot b)$$

distribuyendo el operador de trasposición y asociando, se llega a:

$$(20) \quad \|x\|^2 = b^t \cdot (A^{-1})^t \cdot A^{-1} \cdot b = b^t((A^{-1})^t \cdot A^{-1}) \cdot b$$

Aplicando propiedades distributivas de la inversión e introduciendo un nuevo símbolo matricial M , se tiene:

$$(21) \quad M = A \cdot A^t \text{ y por lo tanto } M \text{ resulta simétrica, además:}$$

$$(22) \quad M^{-1} = (A^t) \cdot A^{-1}$$

introduciendo esta notación en la expresión (20) y teniendo en cuenta (19), se obtiene:

$$(23) \quad \|x\|^2 = b^t \cdot M^{-1} \cdot b$$

Sea entonces una base ortonormal de autovectores de la matriz simétrica M^{-1} , sean ρ_1, ρ_2 y ρ_3 sus autovalores, y sea

$$(24) \quad M^{-1} \cdot w_i = \rho_i \cdot w_i \quad i = 1, 2, 3$$

la relación de vinculación entre ellos. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad:

$$(25) \quad |\rho_1| \geq |\rho_2| \geq |\rho_3| > 0$$

Para desarrollar el producto interior (23) escribamos y como combinación lineal de la base :

$$(26a) \quad b = \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 + \mu_3 \cdot w_3$$

$$(26b) \quad M^{-1} \cdot b = \mu_1 \cdot M^{-1} \cdot w_1 + \mu_2 \cdot M^{-1} \cdot w_2 + \mu_3 \cdot M^{-1} \cdot w_3$$

y teniendo en cuenta la relación (24) se obtiene:

$$(26c) \quad M^{-1} \cdot b = \mu_1 \cdot \rho_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot \rho_2 \cdot w_2 + \mu_3 \cdot \rho_3 \cdot w_3$$

reemplazando (26a) y (26c) en (23):

$$(27) \quad \|x\|^2 = \langle \mu_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot w_2 + \mu_3 \cdot w_3, \mu_1 \cdot \rho_1 \cdot w_1 + \mu_2 \cdot \rho_2 \cdot w_2 + \mu_3 \cdot \rho_3 \cdot w_3 \rangle$$

desarrollando el producto interior y teniendo en cuenta la ortonormalidad de la base $\{w_1, w_2, w_3\}$, se llega a:

$$(28) \quad \|x\|^2 = \mu_1^2 \cdot \rho_1 + \mu_2^2 \cdot \rho_2 + \mu_3^2 \cdot \rho_3$$

Por razones ya expuestas cuando se analizaron las matrices simétricas, podemos extender estos resultados a δx ; es decir:

$$(29a) \quad \|\delta x\|^2 = v_1^2 \cdot \rho_1 + v_2^2 \cdot \rho_2 + v_3^2 \cdot \rho_3$$

donde los coeficientes son las coordenadas de δb en la base, es decir:

$$(29b) \quad \delta b = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

Del análisis de la expresión (23) se deduce:

$$(30) \quad \forall b \neq 0 \text{ resulta } 0 < \|x\|^2 = b^t \cdot M^{-1} \cdot b$$

De donde resulta que la matriz M^{-1} es simétrica definida positiva y, en consecuencia, todos sus autovalores son reales y estrictamente positivos. Por lo tanto, los valores absolutos que aparecen en la expresión (25) son superfluos, es decir, podemos afirmar que:

$$(31) \quad \rho_1 \geq \rho_2 \geq \rho_3 > 0$$

Ahora pueden repetirse los análisis realizados para matrices simétricas.

De (28), (29a) y (31) se deducen:

$$(32a) \quad \rho_3 \cdot (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) \leq \|x\|^2 \leq \rho_1 \cdot (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)$$

$$(32b) \quad \rho_3 \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \leq \|\delta x\|^2 \leq \rho_1 \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

y recordando que μ_i y v_i son las coordenadas de b y de δb en la base $\{w_1, w_2, w_3\}$, respectivamente, se deducen:

$$(33a) \quad \rho_3 \cdot \|b\|^2 \leq \|x\|^2 \leq \rho_1 \cdot \|b\|^2$$

$$(33b) \quad \sqrt{\rho_3} \cdot \|\delta b\| \leq \|\delta x\| \leq \sqrt{\rho_1} \cdot \|\delta b\|$$

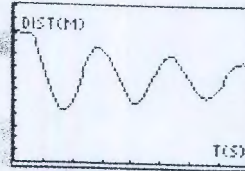
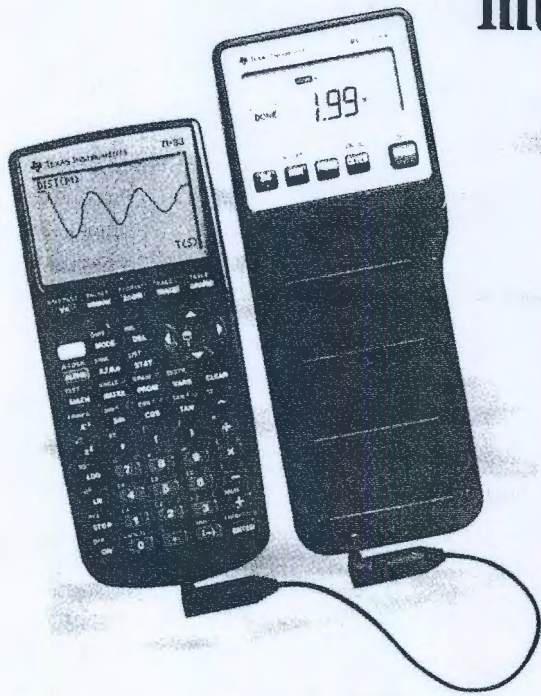
como así también:

$$(34a) \quad \rho_3 \cdot \|\delta b\|^2 \leq \|\delta x\|^2 \leq \rho_1 \cdot \|\delta b\|^2$$

$$(34b) \quad \sqrt{\rho_3} \cdot \|\delta b\| \leq \|\delta x\| \leq \sqrt{\rho_1} \cdot \|\delta b\|$$

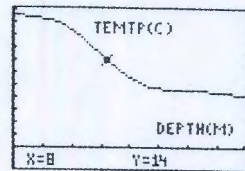
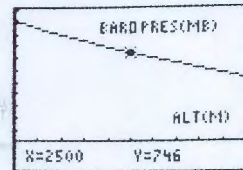
Repetiendo los mismos análisis que para las matrices simétricas se llega a la resolución general del problema.

Ayude a sus alumnos a explorar el mundo que los rodea.



Distancia (M) en comparación al Tiempo (S).

Presión barométrica (MB) en comparación a la Altitud (M). ▼

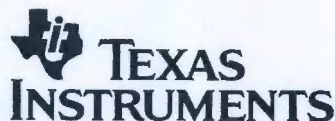


Temperatura (C) en comparación a la Profundidad (M).

El sistema CBL™

Déle vida a las matemáticas y la ciencia con el sistema Calculator-Based Laboratory™, la manera fácil, portátil y económica de reunir datos del mundo real.

El sistema CBL. Una forma más de utilizar los productos de graficación de TI para ayudar a sus alumnos a entender mejor las matemáticas y la ciencia.



- ▶ Mida la temperatura, la luz y la tensión.
- ▶ Con sondas opcionales, mida el movimiento, la fuerza, el pH y mucho más.
- ▶ Transfiera datos directamente a una calculadora de graficación TI para su análisis (TI-82, TI-83, TI-85, TI-86, TI-92).
- ▶ Libros de actividades para matemáticas y física.

00-1-800-842-2737
(00-1-800-TI-CARES)

ti-cares@ti.com

www.ti.com/calc

IH061997A

TM-Marca comercial de Texas Instruments Incorporated.

©1998 TI