Estrategias espontáneas con uso de CABRI

Fecha de recepción: Agosto, 1998

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática Vol. 10 No. 3 Diciembre 1998 pp. 25-36

Liliana Siñeriz y Raquel Santinelli
Departamento de Matemática. Centro Regional Universitario
Universidad Nacional del Comahue
Unidad Postal Universitaria nacional del Comahue, 8400, Argentina
e-mail: algeom@pasqua.rn.ar/postmaster@crub.uncoma.edu.ar¡

Resumen: *Este trabajo se encuadra en la línea de investigaciones que estudian el proceso de resolución de problemas. Su objetivo es describir las características del proceso de resolución de problemas de construcción cuando se emplea el software CABRI GEOMETRE y analizarlas desde una perspectiva didáctica.*
Presentamos distintos procedimientos de resolución, realizados por alumnos de un segundo curso de nivel medio, para la construcción de un cuadrado dado el lado, enfocando las estrategias espontáneas de los alumnos, los recursos utilizados y las actividades metacognitivas de control efectuadas en dicho proceso.
Del análisis surgen algunas consideraciones de orden didáctico respecto al uso del software para obtener un mejor aprovechamiento de sus posibilidades.

Abstract: *This work is in the direction of research about the process of problem solving. The objective is to describe the features of the process of problem solving when CABRI GEOMETRE software is used, and analize them from a didactical point of view.*
Here we present different secondary school students' proceedures for square construction when the side is given, focusing on spontaneous strategies of the students, the resources they employed and metacognition activities.
From the analysis we deduce some didactical issues concerned with the best use of the software.

Introducción

Este trabajo se encuadra dentro del proyecto de investigación *Estrategias de resolución de problemas geométricos en un entorno informático*, el cual como su título lo sugiere, está en la línea de investigaciones que estudian el proceso de resolución de problemas. Uno de los objetivos de este proyecto es describir las características del proceso de resolución de problemas de construcción cuando se emplea el software CABRI GEOMETRE.

El contraste entre una construcción estática con regla y compás y una construcción realizada con CABRI, en la que es posible variar dinámicamente las condiciones de un problema, permite suponer una influencia de este instrumento en los procesos cognitivos y en el uso de estrategias de resolución.

Con el objeto de indagar en este campo, hemos propuesto a parejas de alumnos de segundo curso de nivel medio (14 años) de una escuela de San Carlos de Bariloche realizar, utilizando el software, construcciones geométricas que se resuelven con regla y compás. Los alumnos habían trabajado el curso anterior con todos los contenidos de geometría plana incluidos en primer año y recientemente habían incursionado en el uso del CABRI (comandos básicos y construcciones del menú). Los procedimientos realizados con CABRI fueron filmados y los productos finales guardados en disquette. Aquí presentaremos el análisis de uno de los problemas propuestos, enfocando algunos elementos que intervienen en el proceso de resolución de los problemas de construcción geométrica y las estrategias espontáneas de los alumnos.

A tal fin, se hace necesario explicitar el sentido que daremos a algunos términos que serán empleados en este trabajo.

Situándonos en la geometría euclídea sintética, llamaremos *construcciones exactas*, a aquellas construcciones geométricas independientes de la medida, basadas en propiedades de perpendicularidad y congruencia, en las que los únicos instrumentos permitidos son la regla y el compás - o sus equivalentes en el software: trazado de rectas y circunferencias. Por ejemplo pueden construirse exactamente, entre otros, perpendiculares, paralelas, puntos medios, distancias entre dos puntos y de un punto a una recta, triángulos, cuadriláteros, algunos polígonos, etc. Así también, todo punto de una parábola es construible con regla y compás, ya que puede ser determinado en base a propiedades de perpendicularidad y congruencia. Sin embargo, la parábola, como conjunto de infinitos puntos, no puede ser construída con dichos instrumentos.

En el campo de la resolución de problemas, llamaremos:

resultado al objeto matemático que responde a las condiciones requeridas por el problema y que proviene de una construcción exacta

solución al conjunto de pasos necesarios y suficientes que conducen al resultado.

resolución al conjunto de acciones que hace el resolutor durante el proceso, que pueden conducir o no al resultado.

Caracterizaremos y ejemplificaremos los elementos (identificados por Schoenfeld (1985)) que intervienen en el proceso de resolución de problemas que surgieron del análisis que nos ocupa.

Recursos: Conocimiento matemático (correcto o no) que posee el resolutor. Dentro de ellos vamos a considerar:

Intuiciones y conocimiento informal: Por ejemplo: las líneas o segmentos que aparecen en pantalla "sin escaleras" son horizontales o verticales.

Hechos: Por ejemplo: segmentos horizontales y verticales son perpendiculares entre sí; dos lados congruentes tienen la misma medida.

Comandos de CABRI: Por ejemplo: comandos de los menús CONSTRUCCIÓN y VARIOS.

Comprensión (conocimiento proposicional) sobre reglas aceptables para trabajar en el dominio: Por ejemplo: diferencia entre construcción aproximada y exacta; mediante un dibujo particular se puede representar una situación general.

Heurísticas (o Estrategias): Procedimientos, independientes del contenido, que transforman el problema dado en otro u otros que a juicio del resolutor facilitan la solución (nos basamos en la idea de "herramientas heurísticas" tal como es utilizada por Puig (1996)).

Por ejemplo:

- *Ensayo y error*. Consiste en distintos intentos de aproximar un resultado de manera más o menos organizada.
- *Variación parcial*. Consiste en hacer variar la incógnita, o los datos, o conjuntamente incógnita y datos, o condición.
- *Elementos auxiliares*. Consiste en trazar líneas o figuras que llevan a obtener nueva información para llegar al resultado.

Control: Decisiones globales que abarcan la selección e implementación de los recursos y heurísticas.

Por ejemplo: Hacer un plan; evaluar; tomar decisiones; realizar actos metacognitivos conscientes.

Las creencias y las prácticas son dos elementos del proceso de resolución también considerados por Schoenfeld (1990). Las *creencias* del resolutor (creencias sobre sí mismo; sobre el entorno; sobre el tema; sobre la resolución de problemas; sobre la matemática) son el conjunto de determinantes de su comportamiento individual, derivado de sus experiencias con la matemática; y las *prácticas* son el conjunto de experiencias que se dan en el entorno escolar (y más ampliamente en el entorno social) que conforman la percepción matemática del individuo.

A fin de acotar este análisis no incluiremos estos dos últimos elementos. Aunque acordamos que están presentes en dicho proceso, su consideración supera los límites de este trabajo.

A continuación, y de acuerdo a los referentes teóricos explicitados, nos abocaremos a la descripción y análisis de los procedimientos de resolución del problema P: *Construir un cuadrado dado el lado.*

Descripción

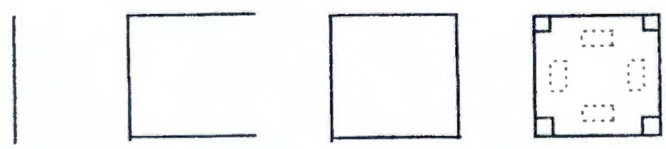
Cuando fue planteado este problema, en todos los procedimientos de resolución se aplicó como heurística el ***Ensayo y Error***; aprovechando la opción MEDIR del menú VARIOS. En las ilustraciones usaremos el símbolo junto a los segmentos y un arco en los ángulos, para indicar que han sido medidos. En un primer intento de solución, todos los resolutores consideraron la posición estándar (lados horizontales y verticales) de la figura. Reconocen que los segmentos horizontales o verticales son los que aparecen en pantalla "sin escaleras". Cuando se pidió que presentaran la construcción en posición oblicua, consideraron en general los mismos atributos relevantes tenidos en cuenta en la posición estándar. El procedimiento típico fue el siguiente:

Procedimiento 1: Se dibuja un cuadrilátero, y se logra un cuadrado aparente (producto de una construcción no exacta).

1a) moviendo a ojo los vértices.

1b) midiendo los lados.

1c) midiendo los lados y los ángulos.



Un alumno, que había utilizado el procedimiento a) en posición estándar, cuando partió de la posición oblicua midió un par de ángulos opuestos modificándolos hasta lograr que fueran rectos e infirió que los otros dos ángulos también lo eran.

Otro, que había utilizado el procedimiento b) en posición estándar, explicitó la perpendicularidad de lados contiguos.

Reformulación del problema:

Ante la ausencia de construcciones exactas se decidió hacer una reformulación del problema. Llamaremos P_E al problema reformulado, el cual pone de manifiesto el requerimiento de una construcción exacta.

P_E: *Construir un cuadrado de manera que al cambiar el dato -lado- siga siendo un cuadrado,* ó *Construir un cuadrado de manera tal que si nos situamos en un vértice correspondiente al lado dado y lo movemos, la figura siga siendo un cuadrado.*

En un procedimiento se persistió en *Ensayo y Error* utilizando los mismos recursos anteriores. En los restantes casos aparecieron como heurísticas: *Variación Parcial* y *Elementos Auxiliares* combinadas con *Ensayo y Error*.

En los siguientes procedimientos se empleó ***Variación Parcial*** y el problema se transformó en *Construir un rectángulo cualquiera* a fin de usar este resultado para resolver P_E.

Procedimiento 2: Se trazan dos rectas horizontales y dos verticales, usando:

a) recta básica, b) recta por dos puntos.

La congruencia de los lados se aproxima a ojo por *Ensayo y Error*.
Al construir la figura en posición oblicua se repite el procedimiento y se adiciona la medida de ángulos.

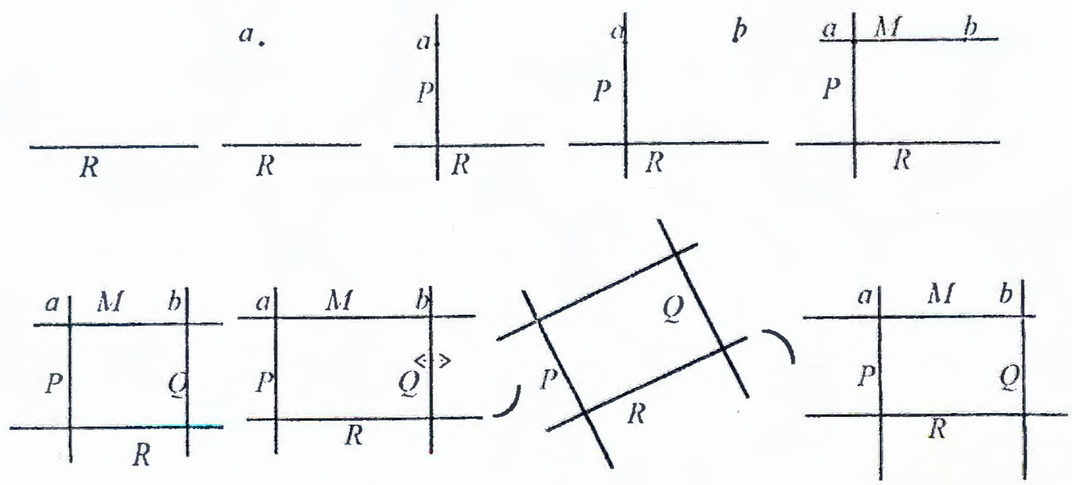
Recursos:

Intuiciones y conocimiento informal: Las líneas y segmentos que aparecen en pantalla "sin escaleras" son horizontales o verticales. Percepción global del cuadrado.
Hechos: El ángulo formado entre rectas horizontales y verticales es recto. En un rectángulo (cuadrado), los cuatro ángulos son rectos.
Comandos de CABRI: MEDIR del menú VARIOS.

Control:

El plan implícito es construir un rectángulo cualquiera asegurando los cuatro ángulos rectos. Al hacer verificaciones se observa, en el caso a) que se ha llegado a un rectángulo restringido a la posición estándar, ya que las rectas básicas se pueden desplazar paralelamente conservando su dirección horizontal o vertical; y en el caso b) que no se ha construído el rectángulo, ya que al mover los puntos que determinan a las rectas, éstas cambian sus posiciones relativas.

Procedimiento 3: Se traza una recta básica horizontal y luego, perpendiculares. La congruencia de los lados se aproxima a ojo por ensayo y error. Después de algunas exploraciones se obtiene un rectángulo de lado dado.



Recursos:

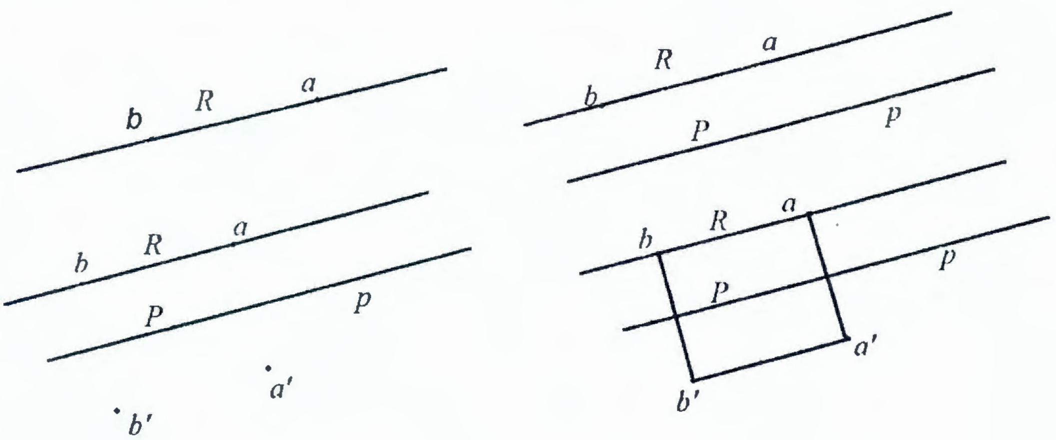
Hechos: En un rectángulo (cuadrado), los lados opuestos son paralelos y los contiguos son perpendiculares. En un cuadrado, todos los lados son congruentes

Comandos de CABRI: RECTA PERPENDICULAR del menú CONSTRUCCIÓN.

Control:

El plan implícito es obtener primero los ángulos rectos y luego la congruencia de los lados. Se mueven los vértices para verificar la conservación de paralelismo y perpendicularidad. Al mover la recta básica se observa que la figura sale de la posición estándar conservándose el rectángulo.

Procedimiento 4: Se traza una recta *R* no horizontal por los puntos *a* y *b*. Se traza una recta *P* paralela a *R* por un punto exterior *p*. Se hallan los simétricos *a'* y *b'* de *a* y *b* con respecto a *P*. Se definen y completan los lados del rectángulo *aa'bb'*. Se mueve *a* hasta que $\overline{ab}$ sea congruente con $\overline{bb'}$.



Recursos:

Hechos: En un cuadrado, todos los lados son congruentes. El cuadrado y el rectángulo tienen como ejes de simetría a las rectas que contienen a las bases medias.

Comandos de CABRI: RECTA PARALELA del menú CONSTRUCCIÓN. SIMÉTRICO DE UN PUNTO del menú CONSTRUCCIÓN.

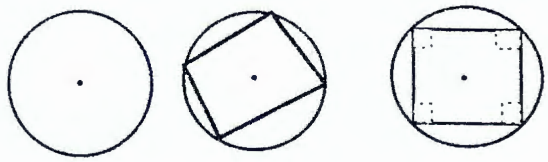
Control:

Se construye y se verifica que se ha obtenido un rectángulo; uno de los lados es el dato del problema inicial. Al tratar de conseguir a ojo la congruencia de lados, se sustituye el dato por el otro lado del rectángulo, con lo cual se modifica el problema.

En los siguientes procedimientos se emplearon ***Elementos Auxiliares***.

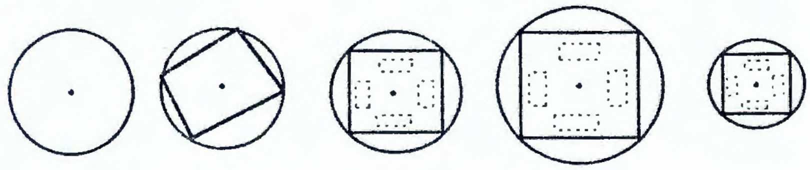
Procedimiento 5: El Elemento Auxiliar fue un círculo dado. El problema se transformó en *Inscribir un cuadrado en un círculo dado.* Se hace un círculo básico, se ubica el centro, luego se hace sobre el círculo un cuadrado aparente en posición estandar. Se hace notar que el dato es el lado del cuadrado, entonces aparecen dos alternativas:

a)



Se miden los ángulos para garantizar que sean rectos mientras se mueven los vértices para lograr a ojo lados congruentes

b)



Se miden los lados en posición estándar y se utiliza una opción del CABRI para agrandar el círculo "a saltos", tratando de obtener la longitud del lado dado.

Recursos:

Intuiciones y conocimiento informal: Las líneas y segmentos que aparecen en pantalla "sin escaleras" son horizontales o verticales. Percepción global del cuadrado.

Hechos: a) En un cuadrado, los cuatro ángulos son rectos. En un círculo se puede inscribir un cuadrado.

b) El ángulo formado entre rectas horizontales y verticales es recto. En un cuadrado, los ángulos son rectos y los lados son congruentes. En un círculo se puede inscribir un cuadrado.

Comandos de CABRI: CENTRO DE UN CÍRCULO del menú CONSTRUCCIÓN. MEDIR del menú VARIOS.

Control:

La idea es inscribir un cuadrado en un círculo. Se expresa: "hago el cuadrado arriba del círculo". Al hacer notar que el dato es el lado del cuadrado, en la alternativa b) se trata de adaptar el mismo plan al problema original, agrandando o reduciendo el círculo. Se da por resuelto el problema pero se expresa que hay ciertas longitudes del lado que no se pueden alcanzar a través de ese procedimiento. En la alternativa a) se da por logrado el rectángulo en base a la medida de ángulos, y se persiste en obtener un cuadrado aparente inscripto en el círculo.

En las primeras exploraciones que desembocaron en este último procedimiento, la idea subyacente fue la de "mover el cuadrado como un todo sin que se deforme", usando la posibilidad de trasladar un círculo básico por toda la pantalla. Esta interpretación del problema P_E puede enunciarse como P'_E: *Construir un cuadrado de lado dado de manera que al trasladarlo (moverlo), la figura siga siendo un cuadrado.* Esta interpretación vuelve a aparecer en el siguiente procedimiento.

Procedimiento 6: El *Elemento Auxiliar* es un punto arbitrario tomado como centro de simetría. El problema se transformó en *Hallar el simétrico de un cuadrado con respecto a un punto.* Se dibujan cuatro segmentos (verticales y horizontales), se miden y se construye de esta forma un cuadrado aparente. Luego se crea un punto exterior al mismo y se construyen los simétricos de los vértices respecto a este punto. Se unen y se forma el cuadrado simétrico del anterior. Se mueve el centro de simetría y se traslada el cuadrado simétrico por toda la pantalla.

Recursos:

Instituciones y conocimiento informal: Las líneas y segmentos que aparecen en pantalla "sin escaleras" son horizontales o verticales. Percepción global del cuadrado.

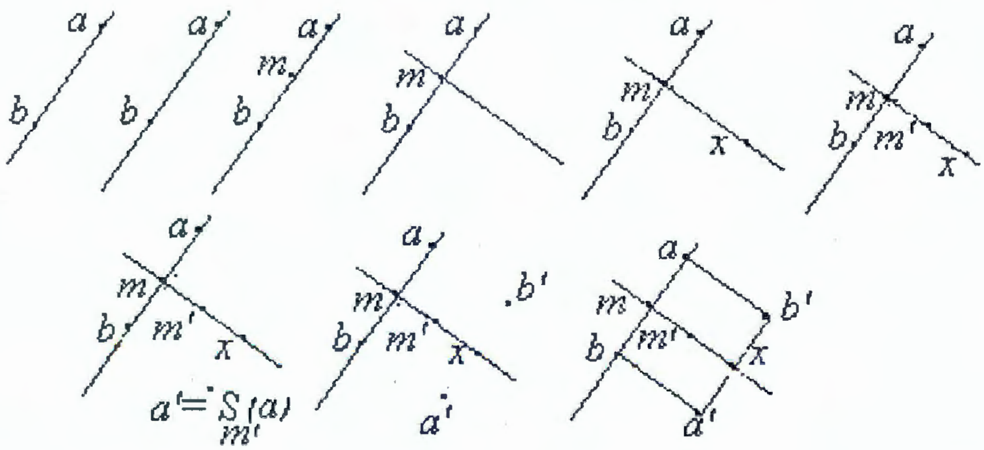
Hechos: El ángulo formado entre rectas horizontales y verticales es recto. En un cuadrado, los cuatro ángulos son rectos y los lados son congruentes. La imagen de un cuadrado por una simetría central es otro cuadrado congruente con el dado. Al variar la posición del centro de simetría varía la posición de la imagen simétrica.

Comandos de CABRI: MEDIR del menú VARIOS. SIMÉTRICO DE UN PUNTO del menú CONSTRUCCIÓN.

Control:

Se da por resuelto el problema sin tener en cuenta que se ha cambiado la consigna.

Procedimiento 7: El *Elemento Auxiliar* es la base media perpendicular al lado dado. El problema se transforma en *Dados un lado y la base media perpendicular al mismo, encontrar los otros dos vértices del cuadrado.* A raíz de exploraciones previas se abandona la posición estándar. Se traza un segmento oblicuo y se construye el segmento perpendicular al mismo por su punto medio. Se asegura la congruencia midiendo. Luego se toma el punto medio del último segmento y se realizan simetrías centrales con respecto a este punto para obtener los nuevos vértices.



Recursos:

Intuiciones y conocimiento informal: Percepción global del cuadrado.

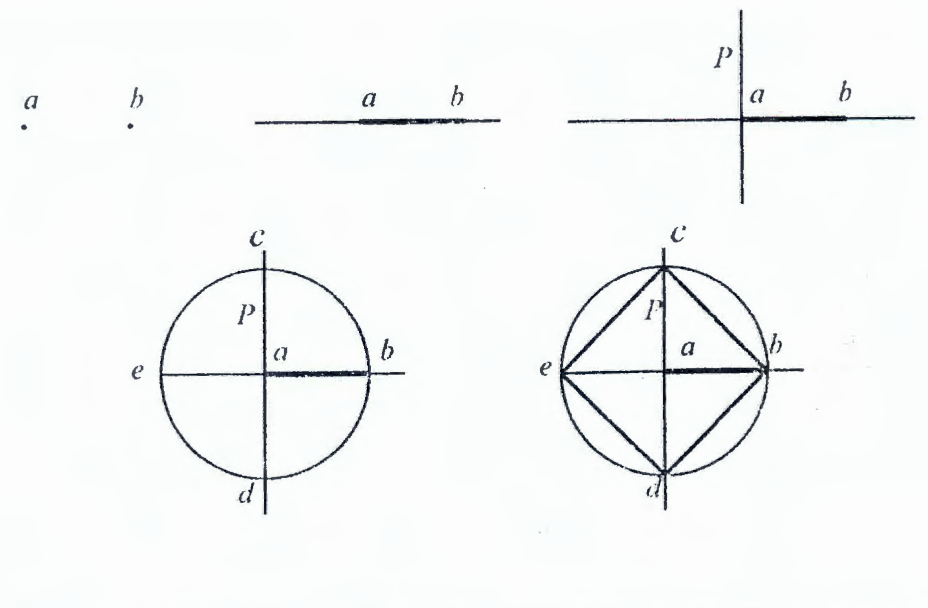
Hechos: Las bases medias del cuadrado son congruentes a los lados. Dos segmentos congruentes tienen la misma medida. El cuadrado tiene centro de simetría. Dicho centro coincide con el punto medio de las bases medias. Los vértices opuestos son mutuamente simétricos respecto al centro del cuadrado.

Comandos básicos y construcciones: MEDIR del menú VARIOS. RECTA PERPENDICULAR, PUNTO MEDIO y SIMÉTRICO DE UN PUNTO del menú CONSTRUCCIÓN.

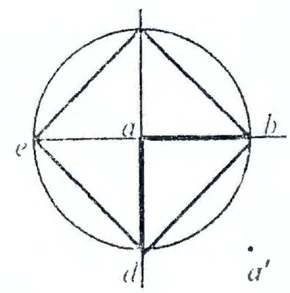
Control:

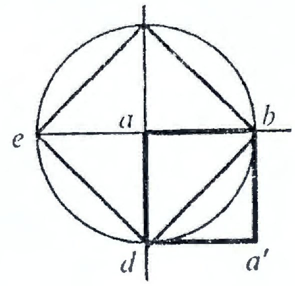
El plan implícito fue usar la base media, perpendicular al lado dado, como elemento auxiliar. En una primera exploración se obtienen los tres lados restantes mediante perpendiculares al lado dado y a la base media. Al verificar se observa que se ha obtenido un rectángulo. Por lo tanto, se elabora otro plan para el mismo problema, consistente en determinar el centro de simetría de la figura como el punto medio de la base media perpendicular. Luego, usando simetría central, se construyen los dos nuevos vértices, obteniendo un cuadrado aparente (ya que la congruencia de la base media con el lado dado se logra midiendo).

Procedimiento 8: Se desarrolla después de un diálogo en el que se introduce el uso de la circunferencia como compás, con alumnos que ya habían logrado construir de manera exacta un rectángulo con un lado dado. El *Elemento Auxiliar* es un círculo por dos puntos. Inicialmente el problema se transforma en *Inscribir un cuadrado en un círculo dado.* Se traza una recta *R* horizontal por los puntos *a* y *b*. Se toma como lado del cuadrado el segmento $\overline{ab}$. Por *a* se traza una recta *P* perpendicular a $\overline{ab}$. Se traza un círculo de centro *a* y radio $\overline{ab}$. Se ubican las intersecciones *c*, *e* y *d* del círculo con las rectas *R* y *P*. Se traza el cuadrado inscripto *bced*.



Se hizo notar que el problema pedía *la construcción de un cuadrado de lado dado* $\overline{ab}$. Entonces se resolvió hallando el simétrico a' de a respecto de la diagonal $\overline{db}$ obteniéndose el cuadrado $aba'd$.





Recursos:

Intuiciones y conocimiento informal: Percepción global del cuadrado.

Hechos: En un cuadrado los lados y los ángulos son congruentes. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares. Se puede inscribir un cuadrado en un círculo dado. El cuadrado es una figura simétrica. Las diagonales del cuadrado están contenidas en sendos ejes de simetría.

Comandos de CABRI: RECTA PERPENDICULAR y SIMÉTRICO DE UN PUNTO del menú CONSTRUCCIÓN

Control:

Se usa el círculo como compás pero se resuelve el problema *Inscribir un cuadrado en un círculo dado.* Cuando se señala que ha sido cambiado el dato del problema, se llega a la construcción exacta por consideraciones de simetría. Hay verificación de la consigna.

Análisis

Ante el planteo del problema en la forma *Construir un cuadrado dado el lado,* la estrategia espontánea a la cual se tiende es al *Ensayo y Error,* asociada a la facilidad que brinda el software de medir longitudes de lados y amplitud de ángulos. En dos de los casos se explicita que el uso de segmentos horizontales y verticales obedece a la consideración implícita de perpendicularidad y paralelismo. Sin embargo el uso generalizado de estas direcciones de los lados se relaciona con la percepción del cuadrado en posición estándar, ya que, como surge de los casos restantes, estas propiedades son tenidas en cuenta o ignoradas, independientemente de la posición.

A fin de orientar el procedimiento hacia una construcción exacta, se reformuló el problema explicitando las condiciones que debería cumplir el resultado. En ningún procedimiento se usó espontáneamente el comando CÍRCULO POR DOS PUNTOS del menú CREACIÓN ("compás CABRI") para obtener segmentos congruentes. Pareciera ser que no se percibe el círculo como el lugar de los puntos que equidistan de otro fijo, sino como una figura "redonda", que posee un centro y un radio, cuerdas, y entre ellas una de longitud máxima que se llama diámetro. Está claro desde la escuela primaria que el compás es un instrumento que permite dibujar círculos y transportar segmentos, pero la asociación del círculo con el transporte de segmentos es una abstracción matemática. Por tanto, parece razonable que no se piensen los segmentos como radios de círculos y que no haya un empleo espontáneo del "compás CABRI". La no disponibilidad de este recurso en la base de conocimientos de los alumnos entrevistados se hace explícita cuando uno de ellos dice que "no se puede resolver el problema con el CABRI, porque solamente se puede llegar de manera exacta al rectángulo".

Después de la reformulación aparecen como estrategias espontáneas *Variación Parcial y Elementos Auxiliares.* La primera surge al considerar el problema *Construir un rectángulo* como paso previo a la construcción del cuadrado. Por esta vía se llega a la construcción exacta de un rectángulo cualquiera y también a la construcción exacta de un rectángulo uno de cuyos lados es dado. Sin embargo, no se resuelve el problema P_E, ya que la congruencia se busca por ensayo y error, a ojo o midiendo.

La estrategia *Elementos Auxiliares* aparece ligada a una percepción global del cuadrado y a una interpretación de la consigna que altera la índole del problema, transformándolo en *Construir un cuadrado de lado dado de manera que al trasladarlo (moverlo), la figura siga siendo un cuadrado.* Esta transformación surge a partir de características propias del software y nos parece que no hubiera tenido lugar en un contexto tradicional.

El procedimiento que utiliza como *Elemento Auxiliar* la base media perpendicular al lado dado, hubiera permitido resolver el problema si la congruencia base media - lado dado se hubiera determinado con el "compás CABRI".

En el procedimiento en el que se induce el uso del "compás CABRI", éste no es utilizado para construir un segmento congruente a uno dado sino como un *Elemento Auxiliar* que transforma el problema. Cuando se retoma el problema inicial, el círculo dibujado y consideraciones de simetría permiten obtener la construcción exacta.

Examinando los recursos empleados en los diferentes procedimientos, se observa que distintas estrategias requieren la capacidad de recurrir a bases de conocimientos cada vez más discriminadas. Los recursos asociados con el empleo exclusivo de *Ensayo y Error* están relacionados principalmente con la posibilidad de usar medidas de longitudes y ángulos; como también con una percepción global del cuadrado, con la no discriminación o discriminación parcial de las características definitorias de la figura, y con la ausencia de propiedades que relacionen los elementos de la misma. En el empleo de *Variación Parcial* se discriminan las dos condiciones de congruencia en forma independiente, y aparecen las propiedades de perpendicularidad y paralelismo entre los lados. Finalmente, el empleo de *Elementos Auxiliares* denota un conocimiento más fino de la figura: aparecen elementos distintos a los lados y ángulos, tales como puntos medios de los lados, bases medias, diagonales, propiedades de los mismos; relaciones del cuadrado con el círculo, y la consideración de las propiedades de simetría de la figura.

Con respecto a las actividades metacognitivas de control, hay un plan implícito en los procedimientos que usan *Variación Parcial* y *Elementos Auxiliares;* tanto al emplear una como la otra, hay casos en los que no se considera el dato, o se trata el problema transformado abandonándose el inicial. En general, salvo excepciones, cuando se da por resuelto el problema no hay una evaluación consciente con respecto a permanecer dentro de las condiciones del problema original.

Conclusiones e implicaciones didácticas

En cuanto al proceso de resolución de problemas y en concordancia con investigaciones en este campo, el análisis pone de manifiesto la carencia de actividades metacognitivas espontáneas. Esto sugiere una vez más, la necesidad de orientar la enseñanza no sólo hacia una reflexión más detallada sobre los requerimientos del problema –qué quiere decir "de lado dado", cuáles son los datos y cuáles las incógnitas, etc.–, sino también a los procesos de evaluación, planificación y verificación. Esto se hace especialmente necesario en un entorno informático donde el usuario encuentra un campo propicio a la inmersión en procesos de exploración no reflexivos.

Por otra parte, el CABRI es una buena herramienta para facilitar la comprensión de las características de los problemas de construcción geométrica, ya que si bien induce al uso de estrategias de *Ensayo y Error*, hace evidente la diferencia entre construcción exacta y aproximada. Las construcciones aproximadas se basan en el tanteo y en la medida de longitudes y ángulos, mientras que en las exactas, nos independizamos de la medida y la congruencia requiere el uso del compás. El mismo software permite la validación inmediata de los resultados ya que se puede observar de una manera interactiva si al variar los datos se alteran o no las condiciones establecidas para la figura incógnita.

El uso del "compás CABRI" favorece, por cierto, una comprensión más profunda de la relación entre la congruencia de segmentos y el círculo como lugar geométrico. Si bien en el problema analizado el uso del "compás CABRI" es directo, en la mayoría de las construcciones exactas se requiere hacer previamente una construcción adicional a fin de transportar el radio; ésta podría ser incluída en el menú como una macro disponible para facilitar el empleo del mismo.

El tratamiento de las construcciones geométricas implica el uso de estrategias que requieren una base relativamente amplia de conocimientos. La generación de estos recursos puede lograrse mediante el uso didáctico del software. Para ello sería necesario realizar un diseño cuidadoso de secuencias de clase que orienten las actividades hacia la exploración, conjetura, descubrimiento y verificación de propiedades y relaciones entre los elementos de las figuras, que pongan de manifiesto sus atributos relevantes y no relevantes, y que propicien el empleo de diferentes caminos de solución enriqueciendo la competencia heurística de los alumnos.

Bibliografía

Gentile, E. (1987): "Construcciones con regla y compás" en *Revista de Educación Matemática*, 3 (2), pp 3-14. Córdoba (Argentina): Unión Matemática Argentina.

Pogorelov, A. V.(1974): *Geometría Elemental* , Moscú: MIR.

Polya, G. (1957): *Como plantear y resolver problemas,* México: Trillas.

Polya, G. (1966): *Mathematical Discovery*, New York: John Wiley and Sons.

Puig L. y Cerdán F. (1988): *Problemas Aritméticos Elementales* Madrid: Sintesis

Puig, L. (1996): *Elementos de resolución de problemas,* Granada: Comares, Col. Mathema.

Puig, L. (s.f.): *La heurística en la resolución de problemas*, preprint. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de Valencia.

Santos Trigo M.(1995): "Qualitative Features of tasks in mathematical problem solving assessment" en *Actas PME 19*, 2, Brasil.

Schoenfeld, A.H. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Orlando FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1990): "Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics", en Grows (ed.) *Handbook Of Research On Mathematics Teaching And Learning* (NCTM), pp. 334-366, New York: Mac Millan Publishing Company.

Schoenfeld A.H. (1985): "Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos" en *La enseñanza de la Matemática a Debate*, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Siñeriz, L. (1994): "Métodos y Heurísticas de Resolución de Problemas" en *Cuaderno Universitario Nº 22*, Bariloche (Argentina): Centro Regional Universitario, Universidad Nacional del Comahue.