ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 10 No. 2 Agosto 1998
pp. 23-45

Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum

Fecha de recepción: Septiembre, 1997

Fernando Hitt
Dpto. de Matemática Educativa, Cinvestav, CONACyT.
Av. IPN 2508, esq. Ticomán, Apdo. Postal 14-740,
07000, México, D.F. e-mail: fhitta@data.net.mx

Resumen: *La visualización matemática requiere de la habilidad para convertir un problema de un sistema semiótico de representación a otro. Investigaciones recientes sobre el papel que juegan los sistemas semióticos de representación en el aprendizaje de conceptos matemáticos, han puesto de manifiesto la importancia de la articulación entre diferentes representaciones de esos conceptos. En estos trabajos se puede observar que los alumnos de enseñanza media y primer año universitario no logran crear una articulación coherente entre varios sistemas de representación relacionados a conceptos propios de ese nivel. La comprensión del papel de los sistemas semióticos de representación nos ayudará a entender cómo los estudiantes construyen conceptos matemáticos. Como Duval lo señala (1993, 1995), para diferenciar un objeto matemático de su representación es necesario que el estudiante represente ese objeto matemático, al menos en dos diferentes representaciones. Las consideraciones visuales son, bajo estos supuestos, importantes en la resolución de problemas. La visualización matemática en este contexto tiene que ver con una visión global, integradora, holística, que articule, libre de contradicciones, representaciones de varios sistemas.*

Abstract: *Mathematics visualization demands the ability to convert a problem from a semiotic system of representation to another one. Recent research on the role of the semiotic system of representation in learning mathematical concepts highlights the importance of the articulation between different representations of those concepts. In those works we can observe that students at middle school level and first year at university do not construct a coherent articulation between representations related to concepts treated at those levels. Understanding the role of the semiotic system of representations will help us to comprehend how students construct mathematical concepts. Duval (1993, 1995) states that in orden to differentiate a mathematical object from his representation it is necessary that the student represents this mathematical object with at least two different representations. The visual considerations are, under these assumptions, important in mathematical problem solving. Mathematical visualization in this context has to deal with a global vision, integral, holistic, to articulate, free of contradictions, several systems of representation.*

Introducción

La construcción de la matemática en una ciencia deductiva libre de contradicciones provocó desde la época de oro de los griegos la evasión de consideraciones visuales. La construcción del edificio matemático ha tenido una tendencia anti-ilustrativa por más de veintitres siglos. Szabó (1960, p. 40) señala al respecto: "*Hipócrates de Quios en su Quadratura Lunularum, tuvo el cuidado de probar teóricamente aún desigualdades que podrían haberse hecho obvias mediante ilustración. Esta observación muestra que Hipócrates ya no confiaba en la evidencia de la simple visualización*".

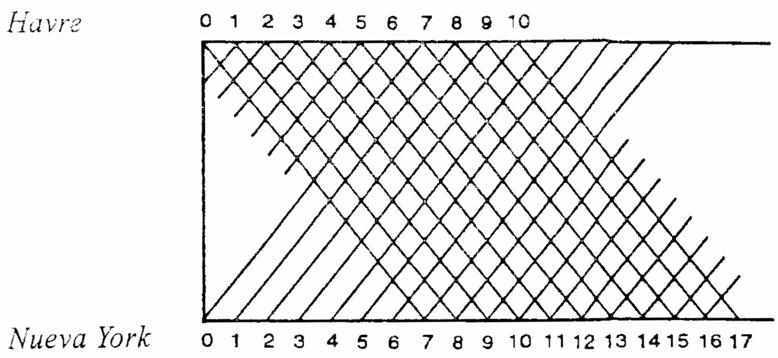
En este proceso de formalización de los objetos matemáticos se desecharon ideas intuitivas, representaciones figurales y sobre todo pérdida del contexto específico que les dio "vida". Por ejemplo, la definición de función en términos de relación entre variables (idea dinámica) por medio de una expresión analítica (Euler, 1748) se transformó en una conjuntista (estática): Una función es un conjunto de pares ordenados, no dos de los cuales tienen la misma primera componente.

El desarrollo de la matemática impone el rechazo de definiciones informales, por definiciones más precisas. Por ejemplo, Glaeser (1972) reporta que Duhamel en su libro de texto del siglo XIX, utilizaba la siguiente definición: "*Se dice límite de una cantidad variable, a una cantidad fija, a la cual (aquélla) se aproxima indefinidamente*", Glaeser señala que esta definición no se podía sostener por mucho tiempo ya que además de imprecisa, era errónea; por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ se acerca más y más a -10 en tanto n crece y -10 no es su límite. Todo esto justifica el refinamiento de la matemática en una ciencia deductiva libre de contradicciones. Pero, en términos del aprendizaje de las matemáticas y de su enseñanza ¿debemos seguir ese camino? ¿la presentación formal de la matemática sin alusiones visuales será suficiente para el aprendizaje de la misma?

Desde la perspectiva del aprendizaje de las matemáticas y de la resolución de problemas intentaremos probar en este documento que es necesario un acercamiento a través de consideraciones visuales, puntualizando también los problemas que se pueden generar por el uso de malas representaciones de los objetos matemáticos en juego.

Iniciemos con la anécdota narrada por Laisant (1909, p. 140-141):

> "*Hace mucho tiempo, durante un congreso científico, y al final de un desayuno donde se encontraban reunidos varios matemáticos conocidos, algunos de ellos ilustres, perteneciendo a diferentes nacionalidades, Edouard Lucas les anuncia de repente que les iba a proponer un problema muy difícil: Yo supongo -dijo él- (desafortunadamente no es más que una suposición) que cada día, al mediodía, parte un barco de Havre hacia Nueva York, y al mismo tiempo un barco de la misma compañía parte de Nueva York hacia Havre. El recorrido se realiza exactamente en siete días, ya sea en un sentido o en otro. ¿Cuántos barcos de la misma compañía que realizan un recorrido de regreso se encontrará el barco que sale hoy a mediodía en su recorrido hacia Nueva York?*
> *Algunos de los ilustres allí reunidos respondieron de inmediato: siete. La mayoría guardó silencio, sorprendidos. Ninguno dio la solución correcta que la figura siguiente la muestra con toda claridad.*



Esta anécdota, absolutamente auténtica, contiene dos enseñanzas. Ella muestra primeramente cuán necesario es ser indulgente y paciente con los alumnos que no entienden de primera intención cosas nuevas para ellos. Además, ella resalta la gran utilidad de las representaciones gráficas".

¿Por qué se cometieron tantos errores sin que haya habido una respuesta correcta? ¿Por qué la solución gráfica es apropiada para la resolución de este problema? Al leer el enunciado ¿qué tipo de algoritmo viene al pensamiento que nos permita resolver el problema? Tenemos un caso que nos indica que la intuición generada con respecto a ese problema no nos permite tener un acercamiento correcto. Además, es importante señalar que el acercamiento gráfico es sorprendentemente adecuado para resolver el problema.

Un aspecto que resalta de esta anécdota es la preocupación de algunos matemáticos (de fines del siglo pasado y principios de éste) sobre el uso de las representaciones geométricas en la enseñanza de las matemáticas. Otro ejemplo singular y profundo lo constituye el trabajo de Brodetsky, 1919 y 1920, sobre el tratamiento gráfico de las ecuaciones diferenciales, ampliamente analizado en Hernández (1995). Estas consideraciones visuales promovidas por algunos matemáticos no resistieron la acometida de la corriente llamada "matemática moderna".

El movimiento denominado Matemática Moderna (1960-1975), que fue promovido con el objetivo de que los alumnos profundizaran en el acercamiento formal de la matemática, causó una gran cantidad de problemas de aprendizaje misma que generó como reacción una corriente inversa que impulsaba una aproximación al aprendizaje de la matemática a través de "presentaciones cercanas a la realidad" (1975-1985). La propuesta de los investigadores de presentar a la matemática en "contextos reales" se interpretó de diferentes maneras, pero una que proliferó fue la de un uso excesivo de representaciones absurdas que generaban conocimientos equivocados. Adda (1987) menciona: "se quieren hacer las cosas más atractivas, más agradables, más familiares y lo que se consigue es alejarse cada vez más de los objetos matemáticos".

Aproximadamente desde 1985 ha habido una tendencia para equilibrar las dos corrientes que se generaron en el pasado; se ha intentado comprender mejor los fenómenos ligados al aprendizaje y el papel de las representaciones de los objetos matemáticos. Se le ha dado una importancia mayor a la generación de imágenes mentales adecuadas para el aprendizaje de la matemática, para el desarrollo de habilidades como la visualización matemática en la resolución de problemas. Ello ha promovido, por un lado, el estudio del papel de las representaciones de los objetos matemáticos, y por el otro, el desarrollo de una matemática en contexto para la enseñanza que apoye la adquisición de conocimientos matemáticos (ver p. e. Calculus in Context, Callahan y Hoffman, 1995).

La visualización matemática y su vinculación con los sistemas semióticos de representación

Sabemos que en general la enseñanza de la matemática ha sido primordialmente de corte algorítmico-algebraico. Los profesores de matemáticas enfatizan el trabajo sobre los procesos algebraicos restándole importancia a los procesos visuales. Los profesores evalúan el conocimiento de sus alumnos a través de exámenes que miden principalmente procesos algebraicos.

Por ejemplo, Eisenberg y Dreyfus (1990, p. 25) señalan que un profesor de cálculo frente al problema: *Sea f una función diferenciable tal que $f(-x) = -f(x)$. Entonces, para cualquier valor de **a** dado*

A) $f'(-a) = -f'(-a)$ B) $f'(-a) = f'(a)$ C) $f'(-a) = -f'(a)$

D) Ninguna de las anteriores

Proporcionó como respuesta: $f'(-a) = -f'(a)$ dado que: $f'(-a) = (f(-a))' = (-f'(a))' = -f'(a)$.

¿Cómo podemos saber si la demostración es correcta? ¿No debemos dudar de la respuesta dada por el profesor de cálculo? Si "resbalamos" al realizar un proceso algebraico,¿tendremos "apoyos para no caer"? En el sistema semiótico algebraico no parece que podamos tener esa ayuda; Sin embargo, si convertimos nuestro problema a un caso particular en el sistema semiótico gráfico, es factible que nos percatemos del error(figura 1):

Para $f(x) = x^3$

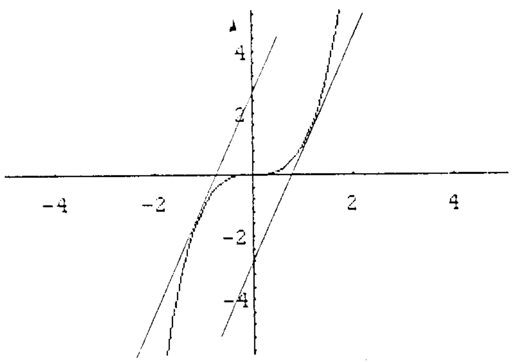


Figura 1.

Este no es un simple ejemplo en donde la afirmación no se cumple ¡Es un contra-ejemplo! Y por lo tanto debe haber un error en la demostración proporcionada por rl profesor. La construcción de la figura como contra-ejemplo es lo que se ha llamado "*visualizar*", Zimmermann & Cunningham (1990, p. 3) mencionan: *"De hecho, en la visualización matemática lo que interesa es precisamente la habilidad del estudiante para dibujar un diagrama apropiado (con lápiz y papel, o en algunos casos, con computadora) para representar un concepto matemático o problema y para usar el diagrama para el logro del entendimiento, y como una ayuda en la resolución de problemas".*

Analizando las igualdades propuestas por el profesor, se puede constatar que

$f'(-a) = (f(-a))'$ y $(-f'(a)) = -f'(a)$

¿Podemos afirmar que $(f(-a))' = -f'(a)$?

En el ejemplo tenemos para **a**=1; $f'(-1) > 0$, y $-f'(1) < 0$, por lo tanto $(f(-1))' \neq -f'(1)$.

Hemos recurrido al sistema de representación gráfica para poder construir un contra-ejemplo que nos ha mostrado que la afirmación no es verdadera, y por tanto la demostración era errónea; además, nos ha ayudado a encontrar el lugar exacto donde se cometió el error.

Resistencia al uso de consideraciones visuales

Sabemos de los trabajos de Vinner (1989), Eisenberg y Dreyfus (1990), que existe de parte de los alumnos una resistencia al uso de consideraciones visuales. Ellos señalan que hay un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, una de las causas posibles es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algoritmicamente; otra, es que los profesores de matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual.

Vinner (1989) reporta que sus alumnos (nivel universitario) tuvieron una tendencia a la evasión de consideraciones visuales aún después de un curso de cálculo con énfasis en representaciones gráficas y demostraciones visuales.

Si las respuestas de corte algebraico hubieran sido correctas al test que les aplicó Vinner, el problema hubiera sido menor. Simplemente esos alumnos tienen un pensamiento analítico más que visual. Pero, los resultados muestran que esos alumnos no lo hicieron correctamente, por lo tanto, "se ve" la necesidad de promover con mayor profundidad la articulación de representaciones en apoyo a la resolución de problemas.

En uno de los problemas Vinner solicitó la demostración del teorema del valor medio; ya fuese en forma algebraica o visual (entendiéndose por visual: *"Tome la secante AB y desplácela paralelamente a sí misma hasta que sea tangente a la curva. Denote por a a la primera coordenada del punto común a la curva y la tangente. La pendiente de AB es* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *y por lo tanto es la pendiente de la tangente en a, que es* $f'(x)$*"*). Estos alumnos dentro de su curso de cálculo trabajaron con la figura 2 izquierda.

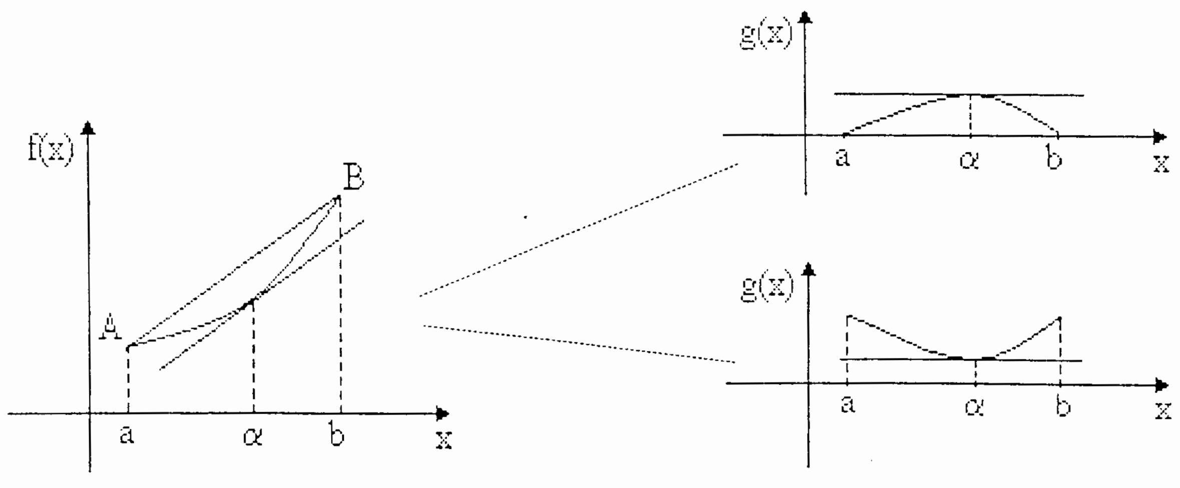


Figura 2.

Reflexionando exclusivamente sobre características del sistema simiótico algebraico ligadas al teorema, debemos recordar la función auxiliar (el truco) para aplicarle el teorema de Rolle. ¿Usted recuerda la función auxiliar? Si no la recuerda ¿podría utilizar otro camino para reconstruirla, utilizando ideas geométricas?

Analizando las gráficas podemos inferir que la función auxiliar se pude construir de dos maneras con la ayuda de una función lineal que representa en un primer caso a la recta que pasa por los puntos (a, f(a) y (b, f(b)). Esta tiene que ver con la construcción de la figura superior derecha para aplicarle el Teorema de Rolle. Para tal construcción se tiene que la función auxiliar es g(x) = y(x) − f(x). En el segundo caso (figura inferior derecha), podemos construir la función auxiliar con la recta que tiene pendiente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, y que pasa por el punto (a, 0). Estas construcciones geométricas son de suma importancia, dado que recordando una de ellas, lo que sigue son procesos algebraicos rutinarios. Así, las funciones auxiliares son:

Primer caso	Segundo caso
$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) - f(x)$	$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

¿Qué es más fácil? ¿Recordar de memoria la expresión algebraica de la función auxiliar g(x) o reconstruirla a través de una interpretación geométrica?

¿Podemos entender las definiciones de objetos matemáticos sin complementos visuales?

Veamos una definición del libro *A fresh look at geometry* de V. W. Bryant.

"Sea X un conjunto no vacío y para cada a, b ∊ X, denotemos ab como un subconjunto de X. Por ejemplo, X podría ser el plano Euclideano considerado como un conjunto de puntos y ab podría denotar el segmento de línea que une a y b. Ahora, si A, B ⊂ X y a ∊ X, entonces definimos AB, aB y Ba por:

$$AB = \bigcup_{a\in A,\ b\in B} ab, \qquad aB = \{a\}B, \qquad Ba = B\{a\}.\text{"}$$

¿Qué imágenes mentales asociaremos a estas definiciones?

¿Sería conveniente proporcionar estas definiciones sin figuras adicionales?

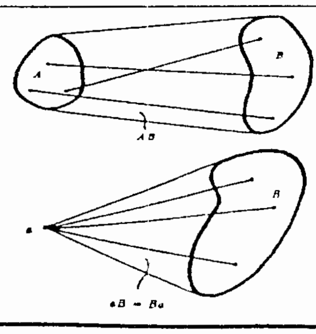
Representación conjuntista	Representación figural
$AB = \bigcup_{a\in A,\ b\in B} ab$ $aB = \{a\}\ B$ $Ba = B\{a\}$	

Figura 3.

Con esto queremos hacer notar la importancia que existe de la complementariedad de las representaciones de varios sistemas en la designación de un objeto matemático. En este sentido, Pluvinage (en prensa) nos muestra las diferencias ontológicas entre tres "objetos" que se utilizan en la enseñanza (figura 4): *¿Cómo puede el aprendizaje lograr que el estudiante no confunda un objeto matemático con una de sus representaciones y construya el conjunto objeto-representaciones?*

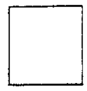
		**cos (x)**
Conejo	*cuadrado*	*coseno*
Objetos usuales o físicos	*Objetos culturales*	*Objetos matemáticos*

Figura 4.

Otro aspecto importante por resaltar es la distinción entre percibir y visualizar, Zimmermann & Cunningham (1990, p. 3) señalan: *"Visualizar un diagrama significa simplemente formar una imagen mental del mismo, pero visualizar un problema significa entenderlo en términos de un diagrama o una imagen visual. La visualización matemática es el proceso de formación de imágenes (mentalmente, o con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología) y el uso de tales imágenes en forma efectiva para el descubrimiento matemático y el entendimiento".*

Por ejemplo, cómo podemos interpretar los trabajos de Selden, Mason y Selden (1989, 1994) en los cuales aseguran que sus alumnos de una escuela de ingeniería después de llevar un curso de cálculo, no pueden, aún siendo buenos alumnos, resolver problemas no-rutinarios. Ellos señalan: *"Esto sugiere que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo son insuficientes en la preparación de buenos estudiantes para aplicar el cálculo creativamente".* El fracaso de estos estudiantes de ingeniería se debe a la carencia de articulación entre representaciones (ver Hitt, 1997) provocando que el alumno "camine a ciegas" en el sistema algebraico desarrollando algoritmos sin una idea clara del objetivo final perseguido. La resolución de los problemas no rutinarios propuestos por Selden et al., tenía que ver con la visualización matemática, con la articulación coherente de varios sistemas de representación ligados al contexto de los problemas. Presmeg (1986, p. 298) ha realizado investigaciones en donde los alumnos universitarios catalogados por los profesores como "estrellas" tienen un pensamiento numérico más que visual. Presmeg (idem) señala que: *"El Curriculum escolar de matemáticas, en el que el logro es medido a través de los resultados de los exámenes, favorece al pensador no visual y en la mayoría de los salones de clase la enseñanza enfatiza los métodos no visuales."*

Esto pudiera interpretarse como que los profesores de matemáticas no detectan a los buenos alumnos que tienen habilidades para visualizar matemáticamente problemas no-rutinarios porque simplemente estos profesores no han tomado en cuenta esta habilidad matemática en sus procesos de evaluación.

¿Existe algún peligro en el aprendizaje de las matemáticas por el uso de representaciones figurales que apelen a ideas intuitivas?

Un aspecto que es importante señalar, dado que los entusiastas que promueven el uso de consideraciones visuales regularmente lo omiten en sus comunicaciones, es que la percepción en algunos estudiantes produce comportamientos no deseados por los profesores de matemáticas. Veamos algunos ejemplos.

Consideremos las figuras que presentamos a continuación. Es obvio que debe haber un error en la demostración visual de que 64=65. Otro problema es la búsqueda del error.

Pero, ¿existirán otros casos en donde una mala interpretación de una figura nos lleve a errores?

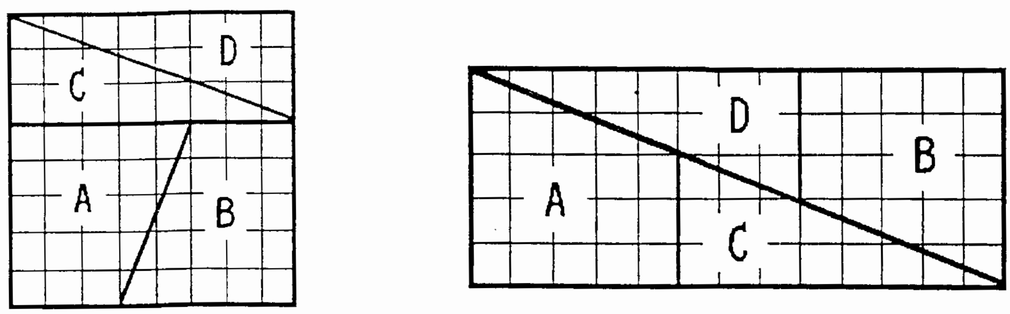
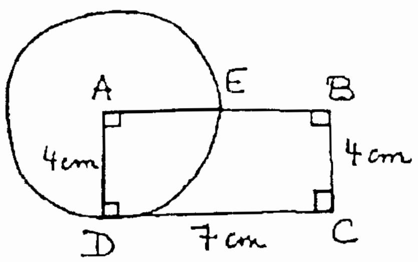


Figura 5. Demostración visual de 64 = 65.

Veamos un ejemplo sobre diferentes formas de razonamiento matemático expuesto por Pluvinage (en prensa): *"El siguiente ejemplo que experimentamos en marzo de 1997...*



En este esbozo hecho a mano están dibujados:
- *un rectángulo ABCD*
- *un círculo de centro en A pasando por D*

El círculo corta al lado AB en el punto E.
¿Qué longitud tiene el segmento EB?
Aclara cómo obtuviste tu respuesta:...

Dentro de las respuestas, destacamos tres tipos bien definidos, que son los siguientes:

- *3 cm: matemática = respuesta que refiere al modelo matemático*
- *1.9 o 2 cm: física = respuesta que proviene de la medición (uso de regla graduada)*
- *3.5 cm o 4 cm: perceptiva = respuesta dictada por la percepción visual.*

Los resultados que se obtuvieron con alumnos de 11 años (collège en Francia) son:

Respuestas matemáticas 18%
Respuestas físicas 28%
Respuestas perceptivas 52%
Otras respuestas 2%

El porcentaje de alumnos que siguió el razonamiento matemático correcto es muy bajo. La figura fue una atracción hacia el fracaso.

Las imágenes icónicas juegan un papel muy importante en el desarrollo de habilidades matemáticas, conforme van creciendo estas habilidades los individuos van teniendo menos uso de esas imágenes. Posiblemente se deba a nuestra propia forma de privilegiar un sistema semiótico en detrimento de otros más visuales. Generalmente las imágenes visuales son utilizadas para ejemplificar o contextualizar algún enunciado matemático. Lo que es cierto, es que los profesores no enfatizan el uso de consideraciones visuales en la resolución de problemas. El resultado encontrado por Pluvinage (idem) es revelador no solo en el sentido de que la percepción impulsa un tipo de razonamiento sino que, además, puede promover un tipo de razonamiento incorrecto.

Veamos un par de ejemplos sobre la construcción de rectángulos con ciertas propiedades. Si nos encontramos con el siguiente enunciado:

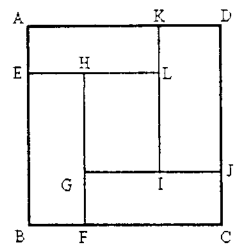
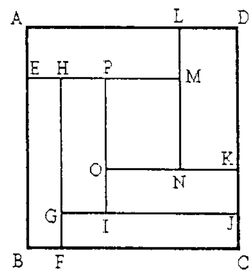
Enunciado	Figura
Sea ABCD un cuadrado de lados unitarios. Dividir el cuadrado en 5 rectángulos de diferentes dimensiones, pero de igual área. ¿El enunciado es verdadero? (ver Hitt, 1987-88, p. 250)	
Sea ABCD un cuadrado de lados unitarios. Dividir el cuadrado en 7 rectángulos de diferentes dimensiones, pero de igual área. ¿El enunciado es verdadero? (ver Glaeser, 1972, p. 40)	

Figura 6. El primer enunciado es falso y el segundo verdadero

El siguiente ejemplo es de un profesor de enseñanza media superior quien en una experimentación se le solicitó propusiera un tema y lo desarrollara para darlo en su clase de matemáticas. El profesor propuso el siguiente ejemplo para "el entendimiento" del Teorema Fundamental del Cálculo y la aplicación de:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + \int_x^b f(x)dx; \qquad \text{con } x \text{ e } (a,b).$$

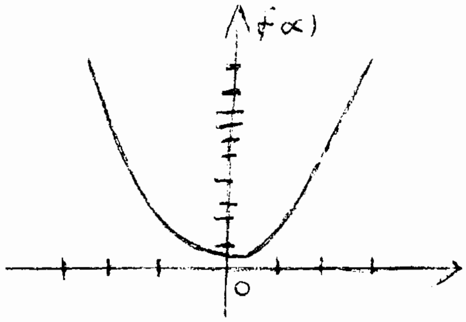
*Propuesta del profesor **(transcripción fiel)***

El estudiante aplicara el teorema fundamental del calculo (estableciendo la relacion entre la diferencial y la integral).
Podremos decir que la Integral es conocida como la primitiva de una Función establecida, siendo está función la Derivada.
Por lo tanto la Diferencial es una secuencia de la Integral.
Analizando ejemplos que se han empleado en temas anteriores. Introduciendo la relación entre la deribada y la Integral en problemas referidos al calculo de Areas de una parábola, calculo de la velocidad de un movil, etc.

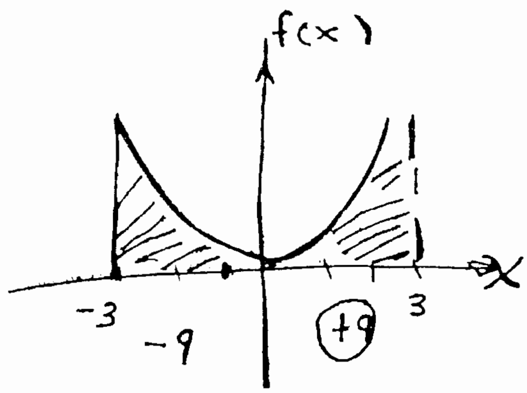
Ejemplo Sea $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ $dy/dx = 2x$ $dy = 2x\,dx$

Si graficamos la primera función de $-3 \le x \le 3$, $[-3, 3]$, *encontramos que*



Podremos observar que se trata de una parabola con vertice en el origen y simetrica, la derivada de está función es 2x por lo tanto la Integral será $f(x) = \int 2x\,dx$ *podremos observar que del Intervalo de* $[-3, 3]$ *se podrán formar los subintervalos de* $[-3, 0], [0, 3]$; *entonces:* $\int_{-3}^{3} 2x\,dx = \int_{-3}^{0} 2x\,dx + \int_{0}^{3} 2x\,dx.$
Por tal motivo estamos encontrando una serie de Áreas



$\int_{-3}^{3} 2x\,dx = x^2]_{-3}^{3} = [3^2] - [-3^2] = 9-9 = 0$ *Entonces*

$2\int_{-3}^{3} x\,dx = 2\int_{-3}^{0} x\,dx + 2\int_{0}^{3} x\,dx = x^2]_{-3}^{0} + x^2]_{0}^{3} = 0^2 - (-3)^2 + (3)^2 - (0)^2 = -9 + 9 = 0$

Esto es lo que deseábamos Demostrar. Encontrando un método para Determinar integrales más complejas.

El profesor grafica $f(x) = x^2$, señala que $f(x) = 2xdx$; De la segunda gráfica del profesor y del resultado de $2x\,dx = -9$, podemos inferir que él le está asignando área negativa al área achurada del lado izquierdo del eje vertical; y positiva a la del lado derecho. No se percata que está calculando el área correspondiente a la función de la función $2x$ en el intervalo de -3 a 3. Probablemente, la asignación establecida por el profesor le permite momentáneamente mantener un equilibrio entre su resultado numérico y su representación gráfica. Parece no darse cuenta de su situación contradictoria entre lo algebraico y su idea geométrica con respecto al Teorema fundamental del Cálculo. **El profesor es consistente con la idea intuitiva de "área bajo la curva" y fiel a la tradición, no comete errores en sus procesos algebraicos, pero no tiene una articulación coherente, es decir libre de contradicciones, con los aspectos geo-métricos del concepto en cuestión.** Posiblemente no ha reflexionado sobre imágenes como la proporcionada por la figura 7 (ver Mochón, 1994, p. 187).

El problema del profesor al que nos hemos referido, no es un caso único, en una ocasión otro profesor de enseñanza medida mencionó:

¡El software que usted está utilizando no es bueno ya que proporciona cero como resultado de $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx$*, y debería ser un número positivo!*

Otro ejemplo que muestra la fuerza de esa idea intuitiva de "área bajo la curva" pero que provoca problemas de aprendizaje, se refleja en lo que el autor (Legal, 1995, p. 14) criticando las "fallas" de un paquete señala: *"Por ejemplo, la integral de una cosenoide Cos (x), definida en el intervalo de 0 a 2*Pi, entrega un valor cero. Al margen de esta falla, Calcula es bastante estable en las cercanías de singularidades"*

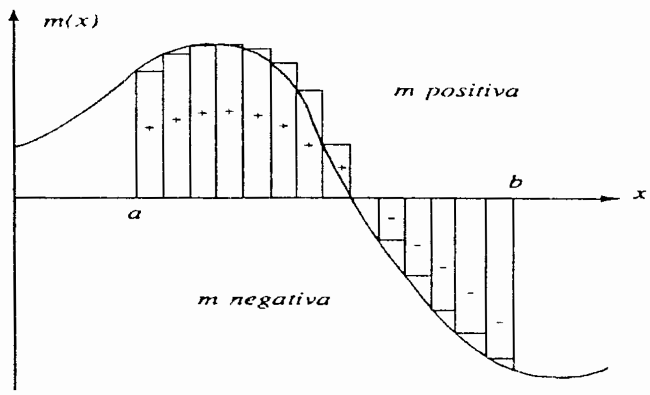


Figura 7. Las contribuciones $m(x)\,dx$ a la integral serán positivas cuando m sea positiva pero serán negativas cuando m sea negativa.

Lectura de gráficas, software de matemáticas y problemas cognitivos

Existen problemas ligados a la lectura incorrecta de gráficas provocados por la percepción visual de representaciones gráficas al usar calculadoras o computadoras, en donde se requiere mayor "soltura" en el manejo adecuado de la instrucción zoom.

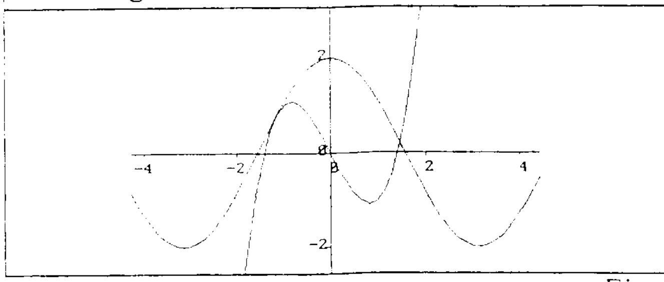
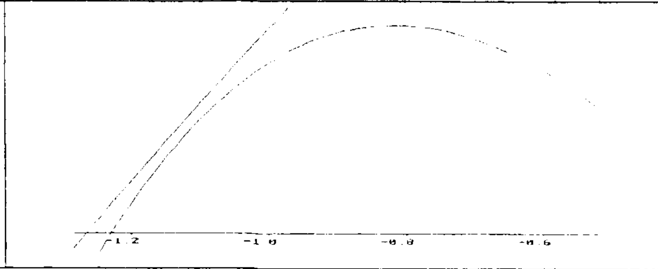
La gráfica muestra una intersección	Acercamiento con la instrucción zoom
	

Figura 8.

Otro problema es que algunas versiones de algunos paquetes de matemáticas proporcionan resultados falsos y los alumnos, como lo señalan Santillán et al. (1994, p. 121), pueden caer en un uso irreflexivo del mismo: *"se obtuvieron los siguientes resultados:*

Graficar $f(x) = \frac{1}{2}x^{1/3}$ *con computadora* *18.2% de respuestas correctas*

Graficar $f(x) = x^{1/3}$ *sin computadora* *100% de respuestas correctas*

¿Por qué sucedió lo anterior? No lo sabemos pero suponemos que al usar la computadora se deposita la confianza en ella irreflexivamente..."

Comportamientos como los anteriores pueden deberse a que la enseñanza se centra, por un lado, en mostrar exclusivamente ejemplos y, por el otro, en creer que la calculadora o computadora proporciona resultados que se deben admitir sin discusión. En relación al primer aspecto, los profesores de matemáticas utilizan ejemplos para "facilitar" el aprendizaje de conceptos; pero, para tener una visión global, integradora, holística, que articule representaciones de varios sistemas es absolutamente necesario utilizar lo que Tall (1989, p. 39) ha denominado como *organizador genérico: un ambiente (o micromundo) que permita al aprendiz a manipular ejemplos y (de ser posible) contra-ejemplos de un concepto matemático específico o de un sistema relativo de conceptos.*

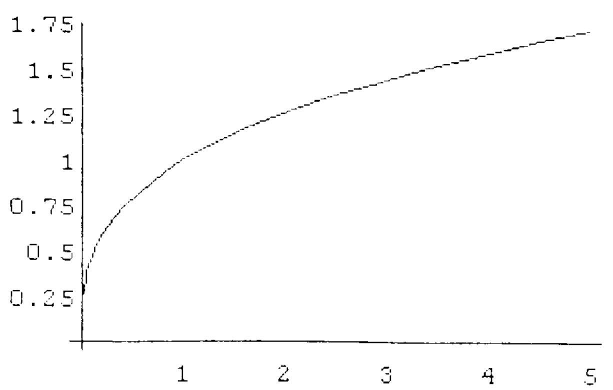
DERIVE (versión 2.6): cálculo de $\int_{-1}^{1} dx$	MATHEMATICA (versión 2.2): graficar $x^{1/3}$ en el intervalo $[-5, 5]$
1: $\frac{1}{x^2}$ 2: $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$ 3: -2	Plot[x^(1/3), {x, -5, 5}]; 

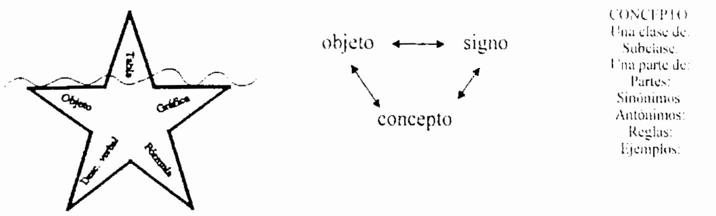
Figura 9. ¿Errores de programación sin trascendencia?

Finalmente, queremos señalar que a diferencia de los trabajadores de Eisenberg, Dreyfus y Vinner, **hemos mostrado que no basta con recurrir a las representaciones geométricas para resolver un problema, es necesario la articulación, libre de contraficciones, entre las diferentes representaciones semióticas utilizadas en la resolución del mismo.**

Aspectos teóricos y experimentales sobre el desarrollo de los sistemas semióticos de representación.

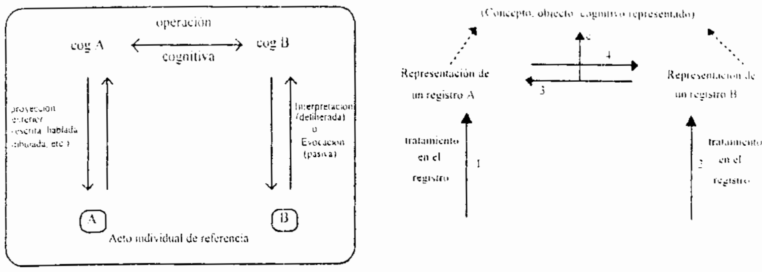
Investigaciones sobre visualización matemática y el papel de las imágenes mentales han puesto de manifiesto la importancia de las representaciones matemáticas para la formación adecuada de conceptos. En esta línea de investigación sobre el papel de las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas resaltas, entre otros, los trabajos de Janvier, 1987; Kaput, 1987 & 1991; Taghard, 1991; Duval, 1993 & 1995. Estos investigadores han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

Janvier (1987, pág. 69) da un ejemplo acerca de la adquisición del concepto de función usando una figura en forma de estrella, en la cual en cada una de las esquinas exhibe una representación de la función. Proporciona algunos elementos que muestran la importancia de las representaciones (en este caso de la función) y la necesidad de efectuar "un proceso de traducción" entre representaciones como una etapa importante en la construcción de un concepto. Argumentamos que la palabra "traducción" (con preservación de significado) no es una palabra apropiada para usarse en este contexto, puesto que, "la estrella especie de iceberg" de Janvier puede limitarnos para tener un mejor acercamiento al problema de los sistemas semióticos de representación. No sólo es importante centrarnos en la representación como un elemento aislado (una esquina de una estrella), sino también, necesitamos entender que éstas (las representaciones) son elementos de uh sistema semiótico (visto como un todo).



Janvier, 1987 Steinbring, 1991 Thagard, 1991

Figura 10.



Kaput, 1991 Duval 1993, 1995

Figura 11.

Kaput. se centró primeramente (1987). sobre un acercamiento teórico para explicar el uso de símbolos matemáticos. Pero en 1991, su propuesta fue más consistente con los principios del constructivismo, él planteó (1991, pág. 59): *"He intentado expresar [figura 11] relaciones entre la "notación A y referente B" donde cada uno (y quizá la correspondencia) es expresable en forma material -pero donde la relación y referencial actual existe sólo en términos de las operaciones mentales de los miembros de un dominio consensual particular"*. Es claro que Kaput subraya la presencia de operaciones mentales en su propuesta, y como veremos, algunas se trasladan con el trabajo de Duval, en el sentido de que las transformaciones (acciones) de una representación a otra, juegan un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos.

En el mismo sentido, Steinbring esfatiza (1991) la construcción de conceptos y su triángulo epistemológico (ver figura 10). Dice (idem, pág. 506) que: *"La idea de que el conocimiento estocástico tiene un carácter de sistema complejo sobre cualquier nivel de desarrollo, significa, entre otras cosas, que este conocimiento se crea como una forma ralacional o mecanismo de enlace entre aspectos formales, los de calcular por un lado, y contextos interpretativos por el otro (Rouchier & Steinbring, 1988). Esta forma relacional de significado matemático, deberá caracterizarse por el triángulo epistemológico del conocimiento matemático: que representa un diagrama relacional en el que el significado matemático no puede deducirse a partir de una de las esquinas, el formal o el objeto, sino que siempre requiere de un balance entre todas las esquinas del triángulo"*.

El subraya en ese trabajo la importancia de la articulación de aspectos formales de cálculo y de los contextos de interpretación en la construcción de conceptos; pero, desde mi punto de vista, hay una carencia de reflexión en la idea de sistemas de representación y las posibilidades de transformación de un elemento a otro en el mismo sistema. Algo impotante en el trabajo de Steinbring, es que se centra en las restricciones epistemológicas del conocimiento matemático en la interacción estudiante-maestro:

En el trabajo de Thagard (1991, pág. 112) él afirma que: *"Mi propuesta entonces es pensar acerca de los conceptos como estructuras complejas semejantes a marcos, pero (1) dando prioridad especial a la clase y a las relaciones parte-todo que establecen jerarquías; y (2) expresando información concreta en reglas que pueden ser más complejas que simples pistas. Esquemáticamente, un concepto puede ser pensado como una estructura semejante a un marco del siguiente tipo:..."* [ver figura 10].

Thagard establece que la literatura en psicología y computación sobre la formación de conceptos incluye dos principales corrientes: Aprender a partir de ejemplos y por medio de combinar los conceptos previamente existentes. Una vez que un concepto es construido su estructura está relacionada con aquellos aspectos mostrados en la figura 1. La presentación de Thagard oculta la importancia de los sistemas semióticos de representación en la construcción de conceptos; y no menciona la idea básica de la articulación entre representaciones y transformaciones dentro del mismo sistema. Un aspecto importante de su trabajo está relacionado con la idea de cambio conceptual, proponiendo a éste como un punto esencial en la construcción de conceptos.

En los estudios de Duval (1993, 1995) podemos observar que él ha hecho un trabajo teórico, coherente y unificador (Semiósis y Noesis) de los diferentes acercamientos que se han revisado en este documento. Duval (1993, pág. 40) caraacteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente: "un sistema semiótico puede ser un registro de representación. si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:

1) La presencia de una representación identificable...
2) El *tratamiento* de una representación que es la transformación de la representación *dentro del mismo registro donde ha sido formada...*
3) La *conversión* de una representación que es la *transformación* de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...

Sobre la construcción de conceptos Duval (idem, pág. 46) establece que: *"Toda representación es parcialmente sognitiva con respecto a lo que representa" y por tanto: "La comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".*

En el último párrafo citado de Duval, él señala la necesidad de otra descripción de la estructura de la representación semiótica y su ejecución (ver figura 10).

Al analizar el trabajo de estos autores relacionados con los sistemas semióticos de representación, un aspecto que no es claro es el lugar del error o la presencia de un obstáculo epistemológico en este contexto. Algunos de ellos mencionan que la construcción inadecuada de un concepto se pudiera deber a una carencia de articulación entre diferentes sistemas semióticos de representación, otros, también afirman que los errores se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un sistema, y como un problema mayor, cuando hay una elección inadecuada de un sistema semiótico al resolver un problema matemático.

Un obstáculo cognitivo se produce en este contexto cuando un sujeto frente a un problema evoca representaciones contradictorias al concepto en cuestión, posiblemente a causa de ideas intiutivas errpóneas, en muchos casos incluso necesarias, construidas en el proceso de formación de un concepto. Ejemplificamos lo anterior con lo siguiente. En varios estudios experimentales que hemos realizado (p. ej. ver Hitt, 1996) relativos al conocimiento de los profesores de matemáticas (nivel medio superior), encontramos obstáculos cognitivos en los que, por ejemplo, una tercera parte de la población de profesores consideran que varias curvas como la elipse, el círculo,... representaban una función sólo porque podían representarse con una expresión algebraica, mostrando que el concepto de función no estaba bien comprendido. Es decir, un tercio de la población consideró la relación entre: $x^2 + y^2 = r^2 \leftrightarrow$ como función; sin embargo, esta no corresponde al concepto de función (faltó que consideraran que un elemento del Dominio corresponde a uno y solamente uno en el rango). Estos profesores construyeron un "concepto difuso de función" (hay un tralape de dos ideas matemáticas inconsistentes al no diferenciar a los conceptos: de función y ecuación) y es claro que necesitan realizar un cambio conceptual para construir el concepto de función en un nivel mayor. El análisis histórico del desarrollo del concepto de función desde Bernoulli y Euler hasta nuestros días nos proporciona algunos elementos para entender por qué este concepto es poblemático (ver Hitt, 1994; Kleiner, 1989; Sierpinska, 1992). Entonces, pienso, analizando estos resultados de experimentación que se ha omitido la problemática del obstáculo cognitivo en la teoría de Duval.

Aclaremos esta posición sobre los obstáculos cognitivos e ideas intuitivas con un ejemplo. En una experimentación realizada con profesores de matemáticas de enseñanza media superior (ver Hitt, 1995), se les solicitó dibujar un recipiente el cual estuviera lleno de un líquido de tal manera que le podamos asociar la siguiente gráfica:

Dibujar un recipiente en relación a la figura | Respuesta del profesor

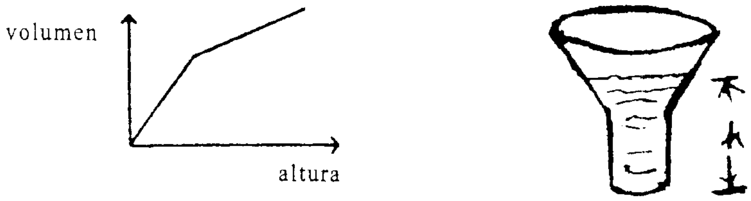


Figura 12.

Como lo señalamos en Hitt (1995), la primacía de la intuición global (en el sentido de Fischbein, 1987, p. 53) sobre el pensamiento analítico no le permitió al profesor realizar un razonamiento ad hoc para dar una respuesta satisfactoria. En otro cuestionario posterior (en el mismo estudio), el mismo profesor proporcionó la siguiente respuesta a la pregunta planteada: Dada el dibujo de un reciente, graficar el comportamiento del área de la superficie del líquido en el recipiente.

Notemos que hay un buen entendimiento de los sistemas semióticos en juego; sin embargo, en el primer caso (figura 12) hay un error en la conversión de un sistema al otro. ¿Por qué en el segundo caso (figura 13) se impuso el pensamiento analítico sobre la intuición? Este ejemplo muestra que la articulación entre representaciones no se da de manera natural.

Transcripción fiel de lo realizado por el profesor

Desarrollo algebraico | Representación gráfica

$$h = \frac{h_0 - 0}{r_1 - r_2} = \frac{h_0}{r_1 - r_2}(r - r_2)$$

$$h = m(r - r_2) = mr - mr_2$$

$$r = \frac{h + mr_2}{m} = \frac{1}{m}h + r_2$$

$$Área = S = \pi r^2 = p(\frac{1}{m}h + r^2)^2,\ h \in [0, h0]$$

$$h' = h_1 + h = h_1 + mr - mr_2$$

$$r = \frac{h' - h_1 + mr_2}{m} = \frac{1}{m}k' + \left(\frac{mr_2 - h_1}{m}\right)$$

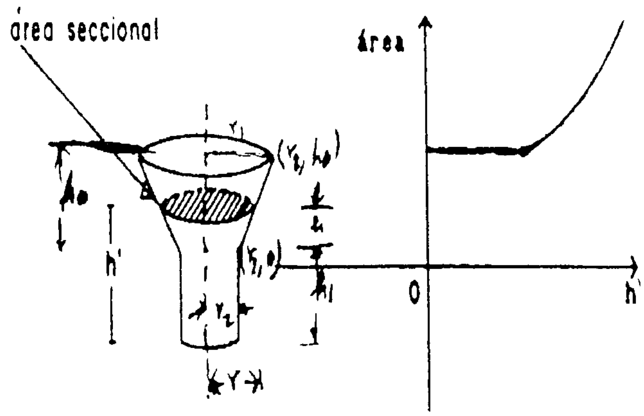


Figura 13.

El hecho de que el mismo profesor pueda en un caso resolver el ejercicio apelando al pensamiento analítico y en el otro no, nos muestra que el problema es mucho más complejo de lo que se piensa comunmente. Para resolver un problema ¿en qué momento debemos recurrir a representaciones diferentes que nos permitan entender mejor el problema y nos señale cierto camino en la resolución del mismo?

En todo lo que hemos señalado con anterioridad pareciera que la complementariedad de las representaciones por sí mismas impulsaran la estabilidad de un concepto. Pero, en realidad, al introducir otra representación del concepto, implica, por parte del estudiante o lector, la manipulación simultánea de varias representaciones. Si no se utilizan de manera coherente, en lugar de promover el aprendizaje de un concepto, lo que se está promoviendo es un obstáculo cognitivo.

Estos últimos análisis nos lleva al planteamiento de un diagrama resumenh de los aspectos tratados en los párrafos anteriores.

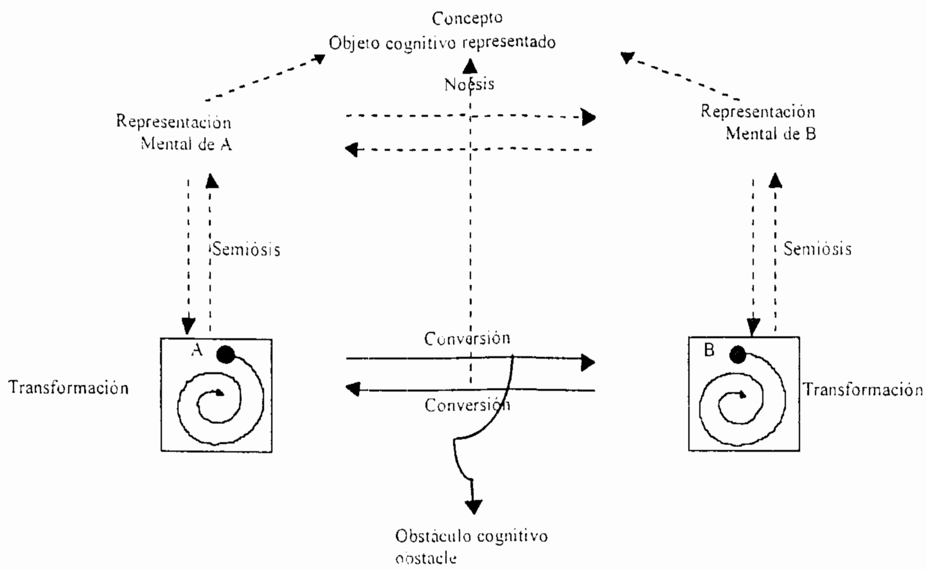


Figura 13.

Otro aspecto importante que los autroes mencionados esn este apartado han dejado de lado, es el señalado por Vergnaud (1987, p. 228) que dice: "No puedo imaginarme camino alguno relativoal problema de la representación y simbolización si no se toman en cuenta tres niveles de entidades y consecuentemente por lo menos dos problemas de correspondencia.

– *el referente*
} *problema 1*
– *el significado*
} *problema 2*
– *el significante*

El referente es el mundo tal como lo aprecia el individuo de acuerdo a su experiencia...

El nivel del significado está en el núcleo de la teoría de la representación, en el sentido de que es en ese nivel que los invariantes son reconocidos, inferencia realizada, acciones generadas y predicciones hechas...

El nivel del significante consiste de diferentes sistemas simbólicos..."

Añade además (idem, p. 231) que: "Una buena teoría de referentes para la educación matemática va acompañada con una buena teoría de la acción en situaciones". En esa dirección apuntan trabajos como los de Radford y Grenier (1996).

Todos estos aspectos aquí discutidos nos indican que para la construcción de conceptos matemáticos, por un lado, parece necesario:

- Una teoría del conocimiento que apoye a una teoría de la representación.
- Una teoría de la representación (como la señalada por Vergnaud), relacionada con una apistemología social del conocimiento matemático con aplicaciones a situaciones didácticas en el salón de clases (ver Radford y Granier, 1996).
- Un análisis de las ideas matemáticas, relacionadas al concepto, en la historia de las matemáticas para la detección de obstáculos epistemológicos (p.e. sobre el concepto de función, ver Hitt, 1994).

El curriculum, nuevas tecnologías y su vinculación con los sistemas de representación.

Con respecto al curriculum y la enseñanza de las matemáticas en el nivel medio, algunos investigadores consideran importante romper con esta tendencia anti-ilustrativa para promover el aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, Ben-Chaim et al. (1989), p. 55), señalan: "La naturaleza visual de las representaciones, permite a la mayoría de los estudiantes de este nivel entender una presentación informal de una prueba deductiva, mientras que un tratamiento algebraico podría estar muy lejos de su comprensión".

Uno de los ejemplos que señalan estos autores es el ya conocido sobre las demostraciones sin palabras. Dependiendo de cómo se visualice la figura siguiente, tenemos una representación del infinito potencial o del infinito actual.

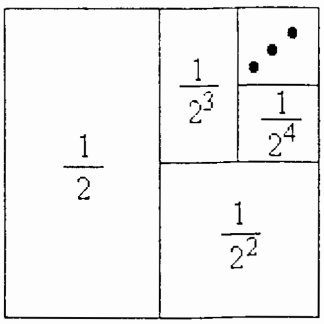


Figura 14. Se puede ver como $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$; o como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$

En esta misma dirección se realizan estudios para analizar el papel de ls supercalculadoras en la resolución de problemas. Dick (1992) señala: "Existen tres caminos en los cuales las oportunidades en la resolución de problemas se mejoran por el uso de la supercalculadora.

1. *Más tiempo para la instrucción*
2. *Más herramientas para la resolución de problemas*
3. *Percepción de los estudiantes de la resolución de problemas"*

Como lo hemos señalado en el apartado anterior, en los últimos diez años ha habido un desarrollo muy fuerte de la teoría ligada a la aprehensión de los objetos matemáticos a través del tratamiento y conversión de las representaciones de estos objetos. La influencia de estas ideas ha promovido cambios curriculares en algunos países, por ejemplo, en Israel y USA, han impulsado el curriculum basado en la Triple Representación de conceptos matemáticos: el algebraico, numérico y gráfico. Schwartz, Dreyfus & Bruckheimer (1990, p. 249 y 251) señalan: "El curriculum basado en el Modelo de la Representación Triple (TRM) integra actividades abiertas con una visión "convencional" al concepto de función y sesiones con "computadora" con actividades normales en el aula..."

"... el curriculum TRM (unidad introductoria) trata con una gran variedad de funciones, promueve la recolección de datos en contextos reales, y está basado en la resolución de problemas incluyendo transferencia entre representaciones. El curriculum tiene la siguiente estructura

1. *Entendimiento intuitivo del concepto de función*
2. *Representación gráfica de una función*
3. *Representación algebraica de una función*
4. *Transferencia entre las tres representaciones*
5. *Resolución de problemas promoviendo la transferencia entre las representaciones algebraica, tabular y gráfica".*

Duval (1988), entre otros, señala que la conversión del sistema algebraico al gráfico es más fácil que el inverso; es decir, del gráfico al algebraico. Para la adquisicón de esta habiulidad de conversión Ruthven (1990, p. 436) diseñó una experimentación (ver ejemplo, de la figura 15) utilizando calculadoras graficadoras, y señala al respecto: "Aunque este limitado estudio se refiere a una herramienta muy específica [la calculadora graficadora] y a un aspecto matemático muy específico [reconocimiento de funciones], proporciona una fuerte evidencia de tal influencia, tanto en el avance matemático de los estudiantes como en los métodos matemáticos que emplean".

Usted tiene que encontrar una expresión para y en términos de x que describa la gráfica.

Respuesta: y =

Razonamiento:

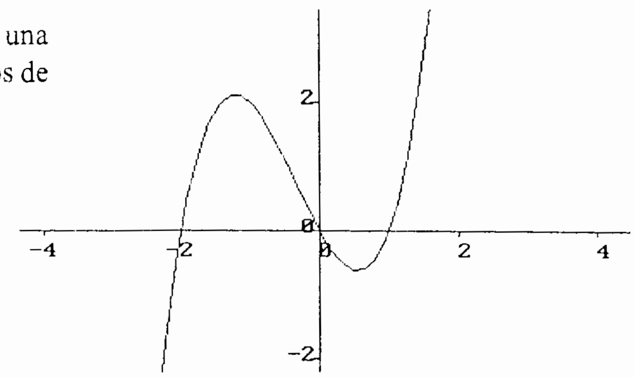


Figura 15. Uno de los ejercicios en el estudio de Ruthven.

Veamos un ejemplo de un problema no-rutinario planteado por Selden et al. (1989, 1994). sabemos de sus resultados que los estudiantes de primer año de ingeniería después de realizr un curso de cálculo no pudieron resolver el problema expuesto en la figura 16.

El uso de nuevas tecnologías para el aula como calculadoras graficadoras y/o microcomputadoras permite un mayor acceso a la representación múltiple de conceptos matemáticos, promoviendo la articulación entre direrentes representaciones de los conceptos, y así, facilitando el acceso a un nivel más importante en el aprendizaje de las matemáticas. Esta tendencia ha dado lugar a la producción de libros como el de Finney et al. (1994), Hitt y Torres (1994), Hitt y Filloy (1995), Filloy et al. (1997); software como el de Abreu y Oliveró (1994, 1995), Monsoy (1995), Mejía y Cortés (1997), etc. Sin embargo, sigue pendiente la problemática para entender cómo los estudiantes podrán resolver problemas no rutinarios. Al respecto Hitt (1997, p. 193) señala: "Personalmente lo que entiendo por un problema no-rutinario es uno donde al leer el enunciado no viene inmediatamente a la mente un algotirmo predeterminado, o una idea a desarrollar para resolverlo. Entonces, si la lectura del enunciado no indica qué tipo de algoritmo o camino seguir, es necesasrio interpretarlo y eventualmente recurrir a una representación semiótica diferente".

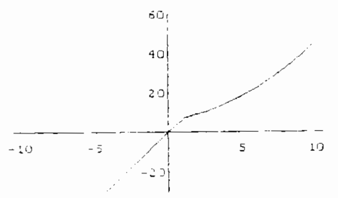
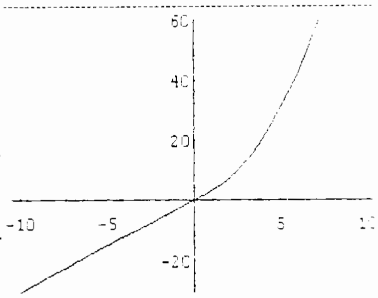
Sistema Algebraico	Idea intuitiva	Sistema Gráfico
Sea $f(x)=ax$, si $x=1$; y $f(x) = bx^2 + x + 1$, si $x > 1$. Encuentra **a** y **b** de modo que f sea derivable en 1.	semirecta con una parte de una parábola; bajo una **"unión suave"**	
$\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ $a = 2b + 1$ para $x = 1$, $a = b + 2$ por tanto, $b = 1$, $a = 3$		

Figura 16. Problema no rutinario utilizado en los estudios de Selden et al. (1989, 1994).

Reflexiones finales

Hemos mostrado que en trabajos recientes de investigación se puede observar que los alumnos de enseñanza media no logran crear una articulación coherente entre varios sistemas de representación relacionados a conceptos propios de ese nivel. Los estudiantes manipulan coherentemente las transformaciones de representaciones en un mismo sistema semiótico, sobre todo en el algebraico, pero muestran una carencia de articulación cuando se trata de convertir una representación de un sistema a otro, por ejemplo, del gráfico al algebraico.

Es importante promover el uso de varios sistemas de representación, y el uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Con ello, la construcción de un concepto se dará a través de la coordinación, libre de contradicciones, de diferentes sistemas semióticos de representación relacionados con el concepto en cuestión.

El impulso que ha tenido las nuevas tecnologías obligan a la realización de un análisis curricular. Una gran mayoría de profesores de matemáticas rechazan el uso de calculadoras graficadoras y computadoras porque tienen la creencia que su uso inhibirá las habilidades operatorias de los estudiantes.

El diseño de nuevos materiales es imperativo en donde sea notorio el uso reflexivo y creativo de la tecnología existente. El profesor de matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren su efectividad en el aula, en donde la visualización matemática promueva la elección correcta de un sistema semiótico de representación, relacionado con el concepto inmerso en la situación problémica, y donde la aplicación de aspectos sobre los sistemas semióticos de representación sea clara. La visualización matemática promoverá entonces una visión global, integradora, holística, que articule representaciones de varios sistemas.

Bibliografía

ADDA J. (1989) *Elementos de Didáctica de las Matemáticas*. Arreguín G., Olvera M. compiladores, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

BEN-CHAIM D., LAPPAN G. & HOUANG R. (1989) The Role of Visualization in the Middle School Mathematics Curriculum. *Focus on Lerarning Problems in Mathematics*, Winter Edition, Vol. 11, N. 1, p. 49-60.

BRODETSKY S. (1919-20) The Graphical Treatment of Differential Equations. *The Mathematical Gazette*, Vol. IX, No. 142, pp. 377-382, pp. 3-8, pp. 35-38 (1919); Vol. X, No. 146, pp. 49-59 (1920).

CALLAHN J. & HOFFMAN K. (1995) *Calculus in Context: The five College Calculus Project*. W. H. Freeman an Company, New York, 1995, USA.

DICK T. (1992) Supercalculators. Implications for the calculus curriculum, instruction and assessment. In *Calculators in Mathematics Education* (Sey & Hirsch Editors). Yearbook 1992, NCTM, USA.

DUVAL R. (19988) Graphiques et Equations: L´articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Science Cognitives 1* (1988) 235-253. Traducción en Antología en Educación Matemática (compiladores R. cambray, E. Sánchez y G. Zubieta). DME-Cinvestav, 1992, México, p. 125-139.

DUVAL R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993) 37-65. Traducción DME-Cinvestav, 1997, México.

DUVAL R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Peter Lang, Suisse.

EISENBERG T. & DREYFUS T. (1990) On the Reluctance to Visualize in Mathematics. *Visualization in Teaching and Mathematics* (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MAA Series. USA.

FINNEY R., THOMAS G., DEMANA F. & WAITS B. (1994) *Calculus. Graphical, Numerical, Algebraic*. De. Addison-Wesley.

FILLOY E., HITT., MEJÍA H. Y CORTÉS C. (1997) *Geometría Analítica*. Software: Rectas y Cuadrat-X. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

FISCHBEIN E. (1987) *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. D. Reidel Publishing Company. Kluwer Academic Publishers Group.

GLAESER G. (1972) La Transmission des connaissances mathématiques hier, aujord´hui, demain. *L´Enseignement Mathematique* (Revue Internationale), serie II, Tomo XVIII, fascículo 3-4.

GLAESER G. (1976) *Pédagogie de l'exercice et du probléme*. Editions CEDIC, France.

HERNÁNDEZ A. (1995) *Obstáculos en la articulación de los Marcos Numérico, Gráfico y Algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Tesis de Doctorado, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

HITT F., (1987-88) *Evaluación*. PNFAPM y Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

HITT F. Y TORRES A. (1994) *Visualizando las funciones con la PC*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1994, México.

HITT F. Y FILLOY E. (1995) *Visualizando las Cónicas con la PC*. Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, México.

HITT F. (1996) Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En *Investigaciones en Educación Matemática Vol. I* (Editor F. Hitt), Grupo Editorial Iberoamérica, 1996, México.

HITT F. (1997) Sistemas semióticos de representación. *Avance y Perspectiva*, Vol. 16, mayo-junio, Cinvestav, México.

JANVIER C. (1987) Representation and Understanding: The notion of Function as an example. C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates., p. 67-71.

KAPUT J. (1987) Representation Systems and Mathematics. In C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates., p. 19-26.

KAPUT J. (1991) Notations and representations as Madiators of Constructive Processes. In Von Glaseersfeld E. (ed.). *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, pp. 53-74.

KLEINER I. (1989) Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal*, 20, pp. 280-300.

MOCHÓN S. (1994) *Quiero entender el cálculo*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

PIMM D. (1990) Book Review: C. Janvier (ed.), Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics, Lawrence Erlbaum Associates. *Educational Studies in Mathematics* 21, p. 91-99.

PLUVINAGE F. Los objetos matemáticos en la adquisición del razonamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa* Volumen II (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica (En proceso).

PRESMEG N. (1986) Visualisation and Mathematical Giftedness. *Educational Studies in Mathematics* 17(1986), pp. 297-311.

RADFORD L. ET GRENIER M. (1996) Entre les choses, les symboles et les ideés... une sequence d'enseignement d'introduction à l'algèbre. *Revue des sciences de l'education*, Vol. XXII, No. 2, p. 253-276.

RUTHVEN K. (1990) The influence of graphic calculator use on traslation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 21, pp. 431-450.

SANTILLÁN M., TURRIZA J. Y LARA N. (1994) Sobre el uso crítico de los paquetes de graficación. *Memorias del V Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. (Hitt F., Filloy E. y Peraza E. Editores) Cuadernos de Investigación No. 31, Año VII, 1994, pp. 115-123.

SELDEN J., MASON A. & SENDEN A. (1989) Can Avarage Calculus Students Solve Nonrutinier Problems?. *Journal of Mathematical Behavior*, 8 (1989) 45-50. Traducción en Antología en Educación Matemática (compiladores R. Cambray, E. Sánchez y G. Zubieta). DME-Cinvestav, 1992, México, p. 77-83.

SELDEN J., MASON A. & SELDEN A. (1994) Even good calculus students can't solve nonroutine problems?. In *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning* (J. Kaput & De Dubinsky), MAA Notes Number 33, 1994, p. 19-26.

SCHWARTZ B. DREYFUS T. & BRUKHEIMER M. (1990) A models of the function concept in a three-fold representacion. *Computers Education,* Vol. 14, No. 3, pp. 249-262, U.K.

SIERPINSKA A. (1992) On understanding the notion of function. *In the concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (G. Harel & E. Dubinsky eds.). Mathematical Association of America: Washington. DC pp. 25-58.

STEINBRING H. (1991) The Concept of Chance in Everyday Teaching: Aspects of a Social Epistemology in Mathematical Knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 22, p. 503-522.

SZABÓ Á. (1960) The transformation of mathematics into deductive science and the bennings of its foundation on definitions and axioms. *Scripta Mathematica,* Vo. XXVII, No. 1, p. 27-49, No. II, p. 113-139

THAGARD P. (1991) Concepts and conceptual change. In J.H. Fetzer (ed.) *Epistemology and Cognition,* Kluwer Academic Publischers, pp. 101-120.

VERGNAUD G. (1987) Conclusion. In C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics,* Lawrence Earlbaum Associates., p. 227-232.

VINNER S. (1989) The Avoidance of Visual Considerations in Calculus Students. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* Vol. 11, pp. 149-156. Traducción en Antología en Educación Matemática, compiladores: Cambray R., Sánchez E. y Zubieta G., Dpto. Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

ZIMMERMANN W. & CUNNINGHAM S. (1990) What is Mathematical Visualization?. In *Visualization in Teaching and Mathematics* (Zimmermann) W. & Cunningham S. Editors), MAA Series. USA.