ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 10 No. 2 Agosto 1998
pp.58-70

La importancia de la recursividad en las matemáticas a nivel elemental

Fecha de recepción: Julio, 1997

Simón Mochón
Depto. de Matemática Educativa, Cinvestav,
Av. IPN 2508, esq. Ticomán, Apdo. Postal 14-740, 07000, México, D.F.
e-mail: smochon@mvax1.red.cinvestav.mx

Resumen: *El tema de recursividad está adquiriendo gran relevancia dentro de la enseñanza de las matemáticas y otras ciencias, debido a la introducción del uso de computadoras en el aula y a un nuevo enfoque de enseñanza basado en la modelación matemática. Debido a esto, creemos que es importante que sea incluido de manera substancial dentro del curriculum.*
Otro objetivo de este artículo es mostrar la importancia de introducir en el salón de clase contextos reales que den significado a las matemáticas y desarrollar sus representaciones numéricas y gráficas.
En este escrito describiremos e ilustraremos las relaciones recursivas de los tres grupos más importantes de funciones: las lineales, las cuadráticas y las exponenciales. Habrá cierto énfasis en sus formas simbólicas debido a que éstas presentan las ideas en forma general, además de que son muy poco conocidas.

Abstract: *The subject of recursion has gained considerable relevance in the teaching of mathematics and other sciences. This is due to the increasing use of computers in the classroom and to a relatively nes approach of teaching based on mathematical modeling. In this article we argue that this topic should be mention explicitly in the math curricula.*
Another objective of this paper is show the importance of working in the classroom with real contexts, since they give meaning to the mathematics, and to use as much as possible numerrical and graphical representations.
We also describe the rrecurrsive relationship of the three main groups of functions: linear, quadratic and exponential. This presentation will emphasize the symbolic representations due to the fact that expresses in more general terms these ideas.

Introducción

Actualmente, la modelación matemática como un enfoque de enseñanza de las matemáticas y de las ciencias ha ganado considerable fuerza en algunos países como por ejemplo Inglaterra (Mellar et al; 1994). Algunas de las ventajas de este acercamiento son que muestra al estudiante el carácter aplicativo y aproximativo de las matemáticas, además de que les da significado. En México, la modelación matemática se está empezando a introducir al ambiente educacional (para un tratamiento más completo de este tema referimos al lector a: Mochon, S. y Rojano, T., (1997); Mochon, S. (1998)).

Lo anterior se debe en gran parte al uso de herramientas computacionales en el salón de clase que hacen que este acercamiento resulte más accesible para los estudiantes. En particular, se ha demostrado que una de estas herramientas, la hoja electrónica de cálculo, es idónea para este tipo de actividades de modelaje ya que mantiene "viva" la situación real estudiada y da la oportunidad al estudiante de tener a su alcance tres tipos de representaciones matemáticas: la numérica, la gráfica y la simbólica (Rojano et al; 1996). Uno de los objetivos de este artículo es mostrar la importancia de trabajar en el aula con estas tres formas de representación.

El enfoque anterior tiene que producir un reajuste de las matemáticas que, por su relevancia, deben ser incluidas en el curriculum. Como veremos posteriormente una consecuencia de este acercamiento es que tenemos que darle más énfasis a procesos de tipo recursivo.

En la escuela el tema de funciones se enseña utilizando solamente ecuaciones de tipo explícito, es decir, relacionando directamente las variables. Sin embargo, dentro de la actividad de modelación matemática, aparecen más frecuentemente relaciones recursivas.

Los tres grupos más importantes de funciones para el modelaje de fenómenos reales son: las lineales (rectas), las cuadráticas (parábolas) y las exponenciales. ¿Cuáles son las relaciones recursivas para estos tres tipos de funciones? En este artículo las describiremos e ilustraremos su aplicación dentro del modelaje de sistemas reales.

Antes de comenzar con los temas centrales de este escrito conviene desmentir tres ideas comúnmente asociadas a las matemáticas, que se contraponen con la actividad demodelación matemática (para un tratamiento más completo de este tema referimos al lector a: Mochon, S. y Rojano, T., (1997); Mochon, S. (1998)).

1. "*Las matemáticas no se usan en la vida diaria*". No hay nada más falso que esto. Un poco de reflexión nos convencería de que las matemáticas se encuentran porr todas partes. Basta con pensar en dónde aparecen números: "velocidad máxima: 80 km/hr", "precio: $259.00", "Barata: 20% de descuento", "ganaron 37 a 24"...
2. "*Las matemáticas son abstractas*". Las matemáticas no son una lista de ejercicios de mecanización o una mera manipulación de símbolos sin significado. El principal objetivo de las matemáticas debería ser el resolver problemas reales.
3. "*Las matemáticas son exactas*". Otra idea totalmente falsa. Por ejemplo, los símbolos π y $\sqrt{2}$ se usan para exprresar dos magnitudes que no se pueden representar exactamente en nuestro sistema decimal. La mayoría de las ecuaciones como: $x^5 + 2x + 1 = 0$ o $3^x + x = 0$, no pueden ser resueltas exactamente. Desafortunadamente en el salón de clase no se da énfasis al carácter aproximativo de las matemáticas.

Tres representaciones matemáticas posibles

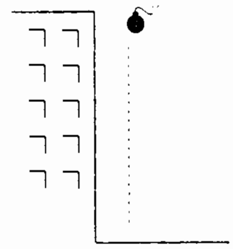
El objetivo de modelación matemática es el generar una representación matemática útil de una situación real. Existen tres tipos de representaciones conectadas entre sí. A continuación las ilustraremos dentro de dos situaciones reales.

Situación real: Pensemos en dos situaciones cotidianas: la compraventa de mercancía y la caída libre de un objeto:

A) Compraventa:

Mandarinas
$5.50 el kilo

B) Caída libre:

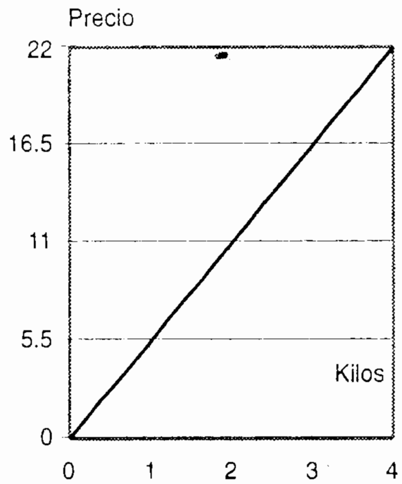


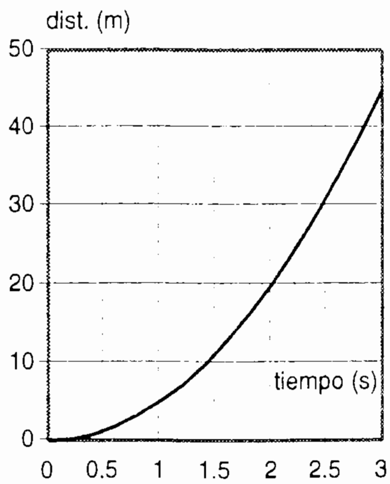
Representación numérica: Es una tabla de valores relacionando algunas variables del sistema. En las dos situaciones anteriores podríamos tener que:

Kilos	Precio
1	5.50
2	11.00
3	16.50
4	22.00

Tiempo	Distancia
0	0
1	5
2	20
3	45

Representación gráfica: Es una gráfica describiendo el comportamiento de la situación real. En los dos casos que estamos ilustrando:





Representación simbólica: Es un conjunto de ecuaciones que relacionan las variables del fenómeno. En nuestros ejemplos tenemos que:

K = Cantidad de kilos
P = Precio

$$P = 5.5\,K$$

t = tiempo en segundos
d = distancia en metros

$$d = 5\,t^2$$

En matemáticas se ha dado preferencia a la representación simbólica, dejando a un lado las otras dos representaciones. El uso de nuevas tecnologías en el aula (como por ejemplo, calculadoras gráficas y hojas electrónicas de cálculo) ha mostrado que las matemáticas deben estudiarse desde un punto de vista más amplio, dando un espacio también a representaciones numéricas y gráficas.

Modelos lineales

Muchas situaciones reales tienen o pueden ser aproximadas por un comportamiento lineal. Ejemplos de éstas son: la relación cantidad-precio en una situación de compraventa, la relación distancia-tiempo para un movimiento a velocidad constante o la relación volumen-temperatura de un gas a presión constante. En realidad, todas las situaciones de proporcionalidad directa pueden representarse por medio de un modelo lineal.

Estudiemos un ejemplo particular. Supongamos que un resorte de 5 cm de longitud se alarga un centímetro por cada 100 gramos de peso extra. Con esta información podemos generar la siguiente tabla de la longitud del resorte:

Peso (gr)	Longitud (cm)
0	5
100	6
200	7
300	8

¿Cómo podríamos expresar esta relación en forma simbólica? La descripción más cercana al planteamiento del problema y a la manera como fue generada la tabla sería la siguiente:

$$\Delta \ell = 1 \text{ cm} \qquad \text{para} \qquad \Delta P = 100 \text{ gr}^{*}$$

"El aumento en longitud es de 1 cm por cada 100 gramos de peso"

Ésta es una relación recursiva que describe el comportamiento del resorte. Otra forma de expresar esto mismo sería: "El aumento en longitud es de 0.01 cm por cada gramo de peso". Así, la ecuación explícita estaría dada por:

$$\ell = 5 + 0.01\, P$$

"La longitud es igual a 5 cm más 0.01 cm por cada gramo de peso"

La relación recursiva expresada en forma general nos dice que para funciones lineales:

$$\boxed{\Delta y = \textit{constante} \qquad \textit{para} \qquad \text{D}x = \textit{constante}}$$

"Los cambios de una variable son constantes al incrementar la otra en pasos fijos"

Conceptualmente la forma recursiva da una idea más clara del comportamiento de una recta: cambios iguales a intervalos iguales.

De este ejemplo podemos extraer dos sugerencias didácticas importantes: es conveniente trabajar en el salón de clase con a) contextos reales, ya que le dan significado a las matemáticas; y b) con ecuaciones recursivas, puesto que expresan mejor el comportamiento de sistemas reales y ayudan al desarrollo conceptual del estudiante.

*El símbolo D se usa para representar el cambio (aumento o disminución) de una variable.

Muchas de las descripciones de un problema se hacen a través de los cambios de sus variables y son por lo tanto del tipo recursivo. En el caso lineal podemos citar los siguientes ejemplos: "Un avión desciende a razón de 50 metros por segundo" o "Un coche quema 5 litros de gasolina por cada 60 kilómetros recorridos".

Debemos aclarar que no es necesario introducir, desde el principio, las representaciones simbólicas en el aula. Se puede usar inicialmente un lenguaje coloquial y concentrarse en las representaciones numérica y gráfica.

Sugerimos al lector que analice la siguiente situación, dando una tabla de valores, la gráfica, la relación recursiva y la fórmula explícita: "Una dieta garantiza la reducción de 3 kilogramos de peso al mes (usa tu propio peso como base)."

Modelos exponenciales

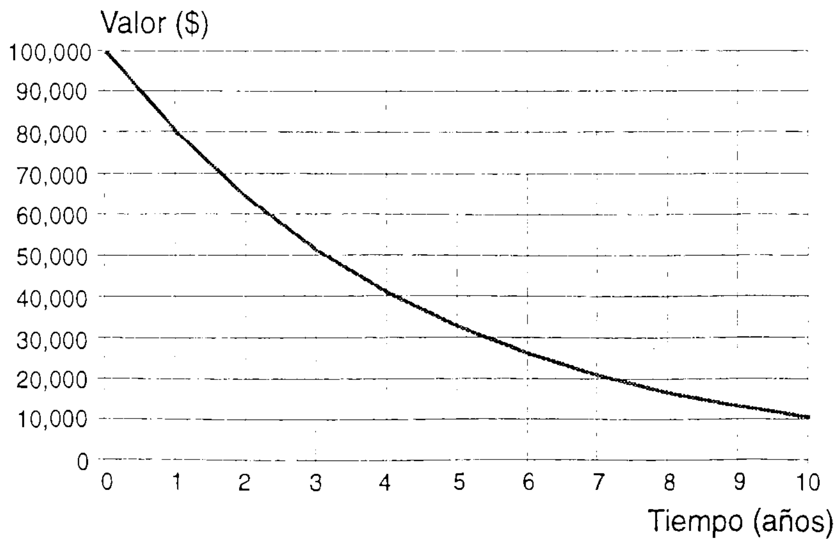
Al igual que para modelos lineales, muchos fenómenos como el crecimiento de poblaciones, el decaimiento radioactivo o situaciones económicas tienen un comportamiento exponencial. Además, los modelos exponenciales son valiosos porque, como veremos más adelante, son la base sobre la cual se pueden construir modelos más complejos.

Estudiemos un ejemplo particular para ilustrar este tipo de situaciones. Supongamos que un coche nuevo con un valor de $100,000 pierde el 20% de su valor presente cada año. Con esta información podemos generar la siguiente tabla de valores:

Año	Valor
0	100,000
1	80,000
2	64,000
3	51,200
4	40,960

Si continuamos este procedimiento y graficamos los resultados obtendremos:

A este tipo de curvas se les conoce como funciones exponenciales. Como podemos apreciar, el valor del coche decrece proporcionalmente a su valor anterior. Esto se puede expresar de la siguiente manera:



$$\Delta V = -0.2\ V \qquad por\ año$$

"La disminución del valor es del 20% anual de su valor actual"

En general podemos decir entonces que para funciones exponenciales:

$\Delta y = ky \qquad para \qquad \Delta x = constante$ "Los cambios de la variable son proporcionales a su valor presente(al incrementar la otra variable en pasos fijos)"

Esta propiedad tiene, como en el caso lineal, un carácter recursivo. Regresando al ejemplo del valor del coche, el cual estaba representado por la relación $\Delta V = -0.2\ V$, podemos expresar esta igualdad también de la siguiente manera:

$$V_{siguiente} - V_{actual} = -0.2\ V_{actual}$$

o despejando $V_{siguiente}$ tendremos que:

$$V_{siguiente} = 0.8\ V_{actual}$$

Esta ecuación nos dice que el valor del coche un año después será su valor actual multiplicado por 0.8. El procedimiento anterior puede seguirse para la relación exponencial general: $\Delta y = ky$ para obtener de manera similar que el valor actual de la variable y su valor siguiente están relacionados por una constante multiplicativa. En forma simbólica tenemos entonces que, para funciones exponenciales:

$$\boxed{y_{siguiente} = C\ y_{actual} \qquad para\ \Delta x = constante}$$

Así por ejemplo, si se observa que una población de bacterias se triplica cada hora, esto indica, por la propiedad anterior, que tiene un crecimiento exponencial. Otro ejemplo que refleja esta relación es la vida media de un elemento radioactivo, es decir, el tiempo que tarda en reducirse a la mitad de su masa actual. Otros ejemplos de comportamientos exponenciales son: "El interés de una cuenta bancaria es del 12% anual" o "El cambio en la temperatura es proporcional a la diferencia de temperaturas del objeto y su exterior".

La relación anterior da además un procedimiento sencillo para generar funciones exponenciales: multiplica repetidamente una cantidad por un valor fijo para obtener la siguiente. Las dos tablas siguientes son ejemplo de esto.

3
4.5
6.75
10.125
15.19
22.78

20
16
12.8
10.24
8.19
6.55

Dejamos al lector que descubra cómo fueron generados estos valores y proponer algunas situaciones reales que estén representadas por estas cantidades.

Modelos cuadráticos

Los modelos cuadráticos aparecen menos frecuentemente que los lineales y los exponenciales, pero son también de gran relevancia por el tipo de situaciones reales que representan. Por ejemplo, la gráfica de posición contra el tiempo de un tiro vertical tiene una forma parabólica. Aquí daremos una descripción recursiva de este fenómeno que nos llevará a descubrir más situaciones con este patrón de comportamiento.

Analicemos la situación siguiente. Desde el suelo se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad de 20 m/s. Tomaremos el valor de la aceleración de la gravedad como −10 m/s². Esto quiere decir que la velocidad v disminuirá 10 m/s en cada segundo. Esto se puede expresar simbólicamente de la siguiente manera:

$$\Delta v = -10\ m/s \qquad \text{para} \qquad \Delta t = 1\ s$$

Esta relación, como ya vimos, implica un comportamiento lineal para la velocidad. Supongamos que queremos calcular la velocidad cada décima de segundo. Las igualdades anteriores pueden convertirse entonces en la siguiente relación equivalente:

$$\Delta v = -1.m/s \qquad \text{para} \qquad \Delta t = 0.1\ s$$

Esto nos dice que la variación de la velocidad será de −1 m/s en cada décima de segundo. Así, la velocidad tendrá una variación como la mostrada en la tabla siguiente:

Tiempo (s):	Velocidad (m/s):
0	20
0.1	19
0.2	18
0.3	17
0.4	16

Es fácil verificar que a los 2 segundos la velocidad llegará al valor cero (la pelota está a su máxima altura) y que posteriormente sus valores serán negativos, indicando que la pelota comienza a descender (sugerimos trazar la gráfica de la velocidad contra el tiempo hasta los 4 segundos).

¿Cómo podemos obtener ahora la posición de este objeto? La velocidad se define como la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo. Esto puede expresarse en forma matemática como:

$$\Delta s = v \qquad \text{para} \qquad \Delta t = 1\ s$$

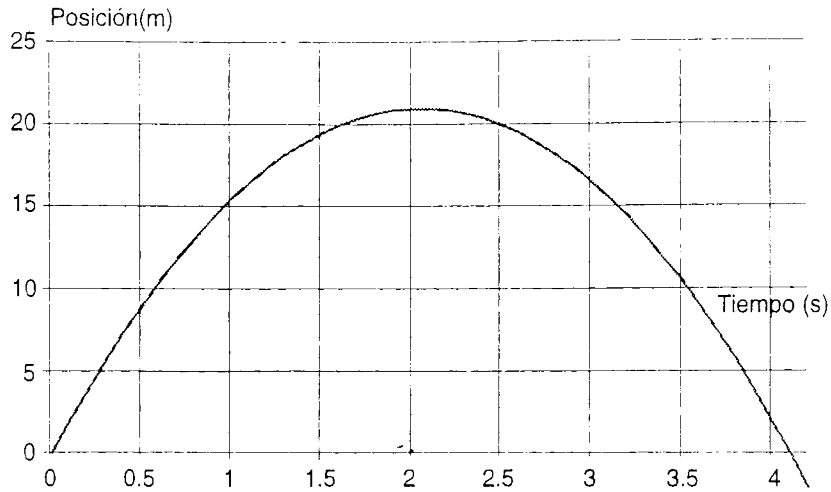
en donde Δs es el cambio de la posición y Δt el cambio en el tiempo. Como queremos realizar los cálculos como antes, cada décima de segundo, es decir: Δt = 0.1 s, la igualdad anterior implica que:

$$\Delta s = 0.1\ s \qquad \text{para} \qquad \Delta t = 0.1\ s$$

Usando que la velocidad inicial de la pelota era de 20 m/s, el cambio de posición en la primera décima de segundo será de Δs = 0.1 (20) = 2 metros. Esto nos dice que la pelota se eleva 2 metros. Para la siguiente décima de segundo, la velocidad se ha reducido a 19 m/s (ver tabla anterior), así que el cambio de posición será de Δs = 0.1 (19) = 1.9 m. Con esto, la posición final después de dos décimas de segundo será de 2 + 1.9 = 3.9 metros. La tabla siguiente muestra los valores de estos cálculos hasta los 0.5 segundos:

Tiempo (s):	Velocidad (m/s):	Cambio pos. (m):	Posición (m):
0	20	2*	0
0.1	19	1.9	2
0.2	18	1.8	3.9
0.3	17	1.7	5.7
0.4	16	1.6	7.4
0.5			9.0

Extendiendo estos resultados hasta que la pelota regrese al suelo y graficando la posición de la pelota como función del tiempo obtendremos:



Del ejemplo anterior se observa que un comportamiento parabólico surge cuando los cambios de la variable van siguiendo una variación lineal. Por lo tanto, podemos decir en general que para funciones cuadráticas:

$\Delta y = lineal$ *para* $\Delta x = constante$

"Los cambios de la variable siguen un comportamiento lineal (al incrementar la otra variable en pasos fijos)"

Con el ejemplo anterior, resulta evidente que cualquier movimiento con aceleración constante tendrá asociado una velocidad lineal y, por lo tanto, una posición del objeto de tipo cuadrático. Daremos a continuación otro tipo de situaciones en las que se observa este comportamiento.

Supongamos que le ofrecen a un empleado un salario inicial de 2,000 pesos, con aumentos de 100 pesos cada mes. La tabla siguiente muestra esto:

* En ésta cómo en las siguientes tablas que contienen columnas de cambios, existe una ambigüedad. Realmente un cambio está dado en todo un intervalo y no sólo en un punto. Por ejemplo, el 2 de esta tabla representa el cambio de posición entre los tiempos 0 y 0.1 s. Por simplicidad, lo colocamos en el tiempo cero, pero podría, igualmente valido, colocarse en la segunda columna. Lo importante es tener su significado claro. Seguiremos esta convención en el resto de este articulo.

Mes:	1	2	3	4	5
Salario mensual:	2,000	2,100	2,200	2,300	2,400

Así, el salario mensual tiene un comportamiento lineal. Pensemos ahora en la cantidad total de dinero pagada en cada mes, es decir, la suma de los salarios mensuales pagados hasta ese mes. La tabla siguiente muestra los primeros 5 valores:

Mes:	1	2	3	4	5
Total pagado:	2,000	4,100	6,300	8,600	11,000

La variable anterior tiene un comportamiento parabólico porque fue generada de una relación lineal (salario mensual) que representa sus cambios por mes. Es decir:

$$\Delta(\text{Total pagado}) = \text{Salario mensual lineal}$$

Otro ejemplo similar es el siguiente. Un papá ofrece a su hijo de 21 años una ayuda anual de 2,000 pesos, la cuál irá reduciendo a razón de 100 pesos cada año subsecuente. Como esta razón de ayuda por año es de carácter lineal, la cantidad total de dinero recibida por el hijo tendrá un comportamiento parabólico.

¿Para qué sirven tablas y gráficas?

En las secciones anteriores dimos las relaciones recursivas para funciones lineales, exponenciales y parabólicas. El propósito fue hacer ver que estas formas están más cercanas a la descripción natural de situaciones reales que las ecuaciones explícitas como $y = mx + b$, $y = A\,r^x$ o $y = ax^2 + bx + c$, las cuales resultan muy artificiales dentro del modelaje de estos fenómenos. Esto nos lleva a la conclusión de que sería conveniente introducir y aplicar estas relaciones recursivas en el salón de clase. Lo anterior no se debe mal interpretar presentando sólo las formas simbólicas. Por el contrario, éstas deben estar precedidas de un acercamiento numérico y gráfico exhaustivo.

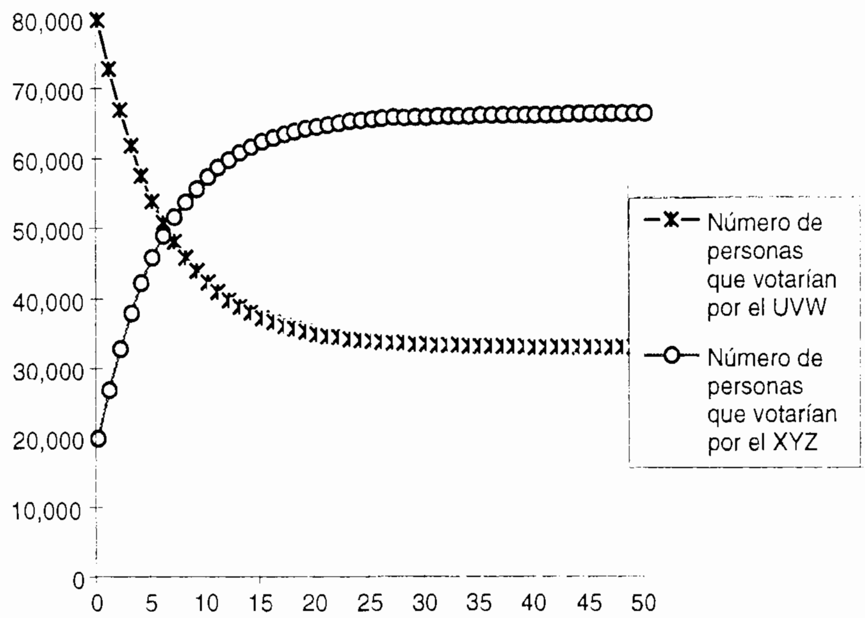
Aquí mostraremos que no es necesario representar una situación por medio de expresiones matemáticas para modelarla. Muchas veces una estructura en forma de tablas nos puede ayudar a desarrollar un modelo ya que organiza tanto las cantidades como las relaciones que intervienen en ella. Las gráficas son un complemento visual muy importante que nos da el comportamiento global de estas cantidades. Veremos con un ejemplo las ventajas que ofrecen estas dos representaciones.

En una ciudad de 100,000 habitantes hay 2 partidos políticos: el UVW y el XYZ. Un año antes de las elecciones, 80,000 personas manifiestan que votarían por el UVW y 20,000 por el XYZ. Al ir tomando encuestas se encuentra que regularmente cada semana, el partido UVW pierde el 10% de sus votantes mientras que el partido XYZ pierde sólo el 5%. ¿Qué podemos predecir al tiempo de las elecciones (52 semanas)?

En la primera semana el UVW perderá 8,000 votantes (10%) y el XYZ, 1,000 (5%). Así, el UVW tendrá 80,000 – 8,000 + 1,000 = 73,000 votantes y el XYZ, 27,000. Podemos repetir este procedimiento para las siguientes semanas, encontrando los resultados de la tabla siguiente.

Tiempo (semanas):	Número de personas que votarían por el UVW	Número de personas que se pasan del UVW al XYZ (10%)	Número de personas que se pasan del XYZ al UVW (5%)	Número de personas que votarían por el XYZ
Inicio:	80,000			20,000
1	73,000	8,000	1,000	27,000
2	67,050	7,300	1,350	32,950
3	61,993	6,705	1,648	38,007

Podemos continuar con estos cálculos y de ellos obtener la gráfica siguiente:



Obviamente una lista tan grande de números puede resultar difícil de analizar, pero la gráfica sintetiza muy bien los datos obtenidos. Se observa en ella que a partir de la séptima semana, el partido XYZ rebasa al UVW y que después de 30 semanas se estabiliza el número de votantes de cada partido (el doble para el partido XYZ).

El punto importante de este ejercicio es que en ningún momento se necesitaron las ecuaciones recursivas del fenómeno para generar resultados y obtener predicciones.

¿Cuáles son los beneficios de las fórmulas?

Cuando nos enfrentamos a situaciones complicadas, los procesos de cálculo pueden resultar largos y difíciles de seguir. Las fórmulas que representan estos procesos nos ayudan a poner estos procedimientos numéricos dentro de un marco simbólico sintético cuyo seguimiento es automático. Además resulta una estructura más fácil de generalizar. Daremos a continuación un ejemplo de esto.

Queremos simular aquí una batalla del viejo oeste entre indios, con sus arcos y flechas, y vaqueros, con sus rifles y pistolas. Pensemos que los vaqueros están resguardados atrás de sus carretas formando un círculo y los indios, montados en sus caballos, dan vueltas alrededor de ellas. Así, supongamos que la "efectividad" de los vaqueros es de, es decir, 1 de cada 5 vaqueros alcanza a herir un indio (por minuto). Tomemos la "efectividad" de los indios como $\frac{1}{20}$, es decir, uno de cada 20 indios logra herir un vaquero (por minuto).

Analicemos el caso en que inicialmente tenemos 100 vaqueros y 300 indios. ¿Quiénes deben ganar la batalla? El proceso de cálculo sería el siguiente. De los 100 vaqueros, 20 de ellos (la quinta parte) logrará herir un indio, así que de los 300 indios quedarán 280 al final del primer minuto. De igual manera, 15 (la veintava parte) de los 300 indios "darán en el blanco" quedando activos 85 vaqueros. La tabla siguiente organiza los datos y el proceso de cálculo:

Tiempo (minutos)	Vaqueros activos	Vaqueros heridos	Indios activos	Indios heridos
0 (inicio)	100	15	20	300
1	85	14	17	280
2	71			263

Es claro que es difícil recordar cómo se obtienen cada uno de los valores de la tabla. Esta dificultad se elimina escribiendo y aplicando las fórmulas de este proceso. Las ecuaciones que relacionan la cantidad de indios (I) y la cantidad de vaqueros (V), serían::

$$DI = -\frac{1}{5}V \qquad o \qquad I_{siguiente} = I_{actual} - \frac{1}{5}V_{actual}$$
$$DV = -\frac{1}{20}I \qquad o \qquad V_{siguiente} = V_{actual} - \frac{1}{20}I_{actual}$$

Con ellas podemos calcular más eficientemente estas cantidades. La tabla siguiente muestra los resultados:

Tiempo (s): (minutos)	Vaqueros activos	Indios activos
0 (inicio)	100	300
1	85	280
2	71	263
3	58	249
4	*45**	*237*
5	34	228
6	22	221
7	11	217
8	0	215

* Parecería como si algunos de estos resultados estuvieran incorrectos. Por ejemplo, este 45, se calcularía como: 58 – 0.05(249) = 45.55, el cual se redondea a 46. Sin embargo, hay que tomar en cuenta que el 249 que usamos en este cálculo no es exacto y que en la computadora tiene una representación decimal interna que se usa para hacer el cálculo.

¡Los indios ganan! Este resultado ilustra otra de las razones para construir un modelo. Intuitivamente esperaríamos que los vaqueros ganaran ya que su efectividad es 4 veces mayor, con la cantidad de indios de sólo 3 veces mayor. Un modelo nos ayuda a obtener resultados más confiables.

Un pequeño estudio

En un estudio informal, se pidió a veinte profesores de matemáticas de secundaria* que dieran una lista de situaciones reales cuya representación gráfica fuera: a) una recta, b) una parábola y c) una exponencial. A continuación damos una descripción de las respuestas dadas.

Para las situaciones de tipo lineal, diez de ellos mencionaron relaciones de movimiento como: "la velocidad de un móvil y la distancia que recorre" o "el movimiento uniforme de un móvil". Siete citaron situaciones de compraventa como: "cantidad de artículos y el costo". Otros cuatro dieron problemas de variación directa y algunas otras relaciones interesantes como: "dosis de un medicamento en relación al peso de la persona" o "el alargamiento de un resorte". Un gran número de respuestas no eran de carácter lineal como: "crecimiento de una población", "velocidades, áreas, volúmenes, etc.", o no tenían mucho sentido, como por ejemplo: "una aceleración".

Para situaciones de tipo parabólico, nueve de ellos no dieron ningún ejemplo. Siete de los que respondieron se refirieron al tiro parabólico: "lanzamiento de proyectiles" o "disparar una flecha con un arco", aún cuando es claro que estaban refiriéndose más a la trayectoria del objeto que a la gráfica misma. Los restantes dieron respuestas diversas como: "cantidad de automóviles que circulan a lo largo de un día" o "Luis tiene una cantidad y Juan tiene el cuadrado de ella". Se observa aquí una gran dificultad de los profesores para dar ejemplos de este tipo.

Para las relaciones exponenciales, siete no contestaron. Ocho de las respuestas fueron del tipo: "crecimiento de una población" o "reproducción de amibas". Otras respuestas fueron: "depreciación de un artículo", "Interés", "Inflación" y "partículas emitidas por un cuerpo radioactivo". Las demás, no tenían mucho sentido.

Se puede notar de lo anterior, la gran dificultad de los profesores para tan sólo mencionar situaciones reales que estén relacionadas con las matemáticas. Sería razonable esperar que veinte profesores dieran cada uno, dos o tres respuestas de cada tipo, es decir, aproximadamente cincuenta respuestas en cada situación. Éste obviamente no fue el caso, lo cual da una indicación de la forma tan abstracta como se presentan las matemáticas en el aula en el nivel secundaria. Un enfoque de modelación matemática requeriría que los profesores estuvieran más en contacto con las aplicaciones de las matemáticas que enseñan.

Conclusiones

Uno de los problemas de la enseñanza de las matemáticas es la escasa vinculación con sus aplicaciones, convirtiéndolas en una mera manipulación de símbolos sin sentido. El enfoque de enseñanza basado en modelación matemática no sólo complementa las matemáticas con sus aplicaciones para darle significado, sino que son éstas mismas las que generan los tópicos relevantes, justificando así su estudio.

* Estos profesores formaban un grupo que estaba tomando un curso de actualización en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV.

En particular, actualmente las ecuaciones que se estudian en el aula son del tipo explícito (relacionando las variables x e y). Sin embargo, estas no tienen la forma apropiada para usarse en describir el comportamiento de fenómenos reales. Para esto se necesitan de relaciones locales llamadas recursivas (definen el cambio Dy para un cambio Dx fijo).

De lo expuesto aquí podemos concluir que los procesos recursivos forman una parte importante de este acercamiento didáctico y por lo cuál deberían ser introducidos en el salón de clase.

En este artículo se dieron las relaciones recursivas para los tres grupos más importantes de funciones: las lineales, las exponenciales y las cuadráticas. La discusión estuvo centrada en las representaciones simbólicas para poder presentar las ideas de una manera general. Sin embargo, en el salón de clase, sobre todo a nivel elemental, se debe seguir un tratamiento numérico, acompañado del gráfico para visualizar mejor los resultados. Esto implica que se debe poner mucha más atención en el aula a la lectura e interpretación de gráficas que tengan un contexto real. Esto puede lograrse de manera natural, utilizando hojas electrónicas de cálculo para la construcción de los modelos (para mayor información al respecto, ver Rojano, et al; 1996).

La presentación de estos temas debe tocar primero las relaciones lineales que son las más sencillas, luego las exponenciales y por último las parabólicas por tener el tipo de relación recursiva más complicada. Cada una debe comenzar con la construcción de tablas de acuerdo a su proceso recursivo y posteriormente apoyarse en gráficas para un mejor análisis de la situación real. Se sugiere dejar al final la representación simbólica, la cual ya puede mezclar tanto ecuaciones del tipo recursivo como del tipo explícito, comparando sus ventajas y desventajas.

Al pasar a la representación simbólica, las descripciones de las relaciones recursivas deben estar dadas en un primer momento con un lenguaje coloquial. Por ejemplo, para las lineales podemos decir que "los cambios de 'y' resultan iguales si los cambios de 'x' son iguales". Sobre todo, se les debe dar significado ilustrándolas con situaciones reales relevantes como: "por cada docena extra de naranjas que compre, tendré que pagar cinco pesos más".

Pero, para que el acercamiento anterior tenga éxito, necesitamos cambiar nuestra concepción de la matemática como algo "inútil, abstracto y exacto".

Referencias bibliográficas

MELLAR, H.; BOOHAN, R.; BLISS, J.; OGBORN, J. and TOMPSETT, C. (Eds., 1994) *Learning with Artificial Words: Computer Based Modelling in the Curriculum*, The Falmer Press, London and Washington D. C.

MOCHON, S.. y ROJANO, T (1997) La Modelación a Nivel Secundaria: el Puente entre las Matemáticas y las Ciencias Investigaciones en *Matemática Educativa II* (XXXV Aniversario del CINVESTAV-IPN), Grupo Editorial Iberoamérica, México.

MOCHON, S. (1998) *Modelos Matemáticos*, Colección de Cuadernos Didácticos, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

ROJANO, T., SUTHERLAND, R., JINICH, E., MOCHON, S. y MOLYNEUX, S., (1996) Las Prácticas Matemáticas en las Materias Científicas de la Enseñanza Media: El Papel de la Modelación, Investigaciones en *Matemática Educativa*, (XX Aniversario del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN), Grupo Editorial Iberoamérica, México.