ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 10 No. 1 Abril 1998
pp. 7-25

Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria

Fecha de recepción: Enero, 1997

Luis Serrano, Carmen Batanero, J. Jesús Ortíz y M. Jesús Cañizares
Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada
Campus Universitario de Cartuja, 18071, Granada, España
batanero@goliat. ugr.es

Resumen: *En este trabajo se analizan las respuestas de 277 estudiantes de enseñanza secundaria a 8 ítems usados en estudios clásicos de razonamiento probabilístico (representatividad, sesgo de equiprobabilidad y enfoque en el resultado aislado). El estudio tuvo como fin comparar el razonamiento probabilístico en dos niveles de estudiantes de secundaria (14 y 18 años). Como resultado, observamos pocas diferencias, después que el segundo grupo recibió instrucción formal en probabilidad. Finalmente, usamos el análisis multivariante para evaluar la dependencia entre los tipos de heurísticas y sesgos detectados.*

Abstract: *In this paper the responses of 277 secondary students to 8 test items used in classical studies of probabilistic reasoning (representativeness, equiprobability bias and outcome approach) are analyzed. The study was designed to compare the probabilistic reasoning of two levels of secondary students (14 and 18 year-old students). These groups are compared revealing few differences in their responses, in spite of the second group having had formal instruction in probability. We finally use multivariate analysis to evaluate the dependence among the different heuristics and biases found.*

Introducción

En la actualidad, se están desarrollando nuevos currículos de enseñanza primaria y secundaria, tanto en España como en otros países desarrollados, que reflejan un cambio en las creencias sobre como se debe enseñar la probabilidad. Mientras que, hasta la fecha, la probabilidad se ha incluido de forma limitada a partir de los 14-15 años, típicamente como parte de un curso de matemáticas, enfatizando los métodos de cálculo combinatorio, los currículum actuales proponen adelantar la materia al comienzo de la educación secundaria obligatoria e incluso en algunos casos a la enseñanza primaria. Sugieren, asimismo, utilizar actividades de enseñanza donde el estudiante primero haga predicciones sobre las posibilidades de obtener diferentes resultados en experimentos aleatorios sencillos con recursos tales como ruletas, dados o monedas, luego obtenga datos empíricos de estos experimentos y finalmente compare las probabilidades experimentales generadas con sus predicciones originales (M.E.C., 1992, N.C.T.M., 1989).

Esta metodología ha sido recomendada por Glayman y Varga (1975), Godino *et al.* (1987), y Alhgren y Garfield (1991), entre otros autores, como un camino para ayudar a los estudiantes a construir concepciones e intuiciones correctas sobre los sucesos aleatorios, ya que diversos investigadores han llamado la atención sobre el pobre razonamiento estocástico en sujetos adultos (Kahneman *et al.*, 1982).

Sin embargo, en sus investigaciones sobre razonamiento probabilístico, Konold (1995) sugiere que la simple realización de predicciones y su comparación con los datos obtenidos experimentalmente, no son suficientes para que los estudiantes cambien sus concepciones, ya que los datos raramente revelan con suficiente claridad todos los resultados y propiedades matemáticas que queremos mostrar a los alumnos, la atención de los estudiantes es limitada y la variabilidad de los datos normalmente se ignora. Puesto que los estudiantes tienen con frecuencia ideas incorrectas sobre la probabilidad y la aleatoriedad, Garfield (1995) indica que la enseñanza efectiva debe apoyarse en el conocimiento previo sobre estas concepciones de los estudiantes, ya que, cuando se enseña algo nuevo, los estudiantes construyen este nuevo conocimiento conectando la nueva información con la que ellos habían asumido previamente como correcta. El conocimiento de las concepciones y formas de razonamiento de los alumnos es, en consecuencia, un punto clave para asegurar el éxito de las nuevas propuestas curriculares.

En este trabajo, completando lo expuesto en Batanero et al. (1996), describimos los resultados de una evaluación del razonamiento probabilístico en dos grupos de estudiantes de secundaria; uno formado por alumnos de 14 años, que aún no habían iniciado el estudio de la probabilidad y el otro por alumnos de 18 años, al finalizar su formación secundaria, durante la cual tuvieron una breve educación de tipo formal y tradicional en probabilidad. El objetivo principal de nuestra investigación fue analizar el grado en el que estos estudiantes muestran razonamiento normativo o muestran errores y sesgos en la solución de problemas probabilísticos, contribuyendo así a completar la investigación en este intervalo de edad, sobre el que los antecedentes previos son escasos (Shaughnessy, 1992). Nos interesamos también por las diferencias en las respuestas en los dos grupos de alumnos, para identificar los puntos en lo que la mayor edad y la enseñanza recibida contribuyeron a una mejora del razonamiento probabilístico, aquellos otros que han permanecido estables al final de la educación secundaria y por último los sesgos que, como sugieren Fischbein *et al.* (1996), pudieran desarrollarse precisamente durante la adolescencia. Finalmente, utilizamos el análisis multivariante para estudiar la posible dependencia entre los distintos tipos de sesgos y heurísticas incorrectas detectadas.

Antecedentes

La investigación sobre el razonamiento probabilístico ha tenido un papel muy importante en el campo de la psicología para describir y explicar las discrepancias observadas entre la forma en que los sujetos toman decisiones en ambiente de incertidumbre y la conducta que se esperaría en una persona que utilizase los modelos normativos probabilísticos en estas mismas situaciones. Según Pérez Echeverría (1990), los trabajos recientes se han basado en las teorías cognitivas y del procesamiento de la información. El interés por las heurísticas, descritas como "*mecanismos por los que reducimos la incertidumbre que produce nuestra limitación para enfrentarnos a la complejidad de estímulos ambientales*" (pg. 51) es característico de este enfoque.

Aunque son numerosos los tipos de razonamiento incorrecto identificados en este campo, son tres los principales sesgos en los que centraremos nuestro estudio, por su relación con el nuevo enfoque en la enseñanza de la probabilidad: la *heurística de la representatividad* (Kahneman *et al.* 1982), el *sesgo de equiprobabilidad* (Lecoutre, 1992) y el *enfoque en el resultado aislado o "outcome approach"* (Konold, 1989, 1991). En esta sección describiremos brevemente sus características.

Heurística de la representatividad

La heurística de representatividad, descrita por Kahneman *et al.* (1982) consiste en evaluar la probabilidad de un suceso en base a la representatividad del mismo respecto a la población de la que proviene. En este tipo de razonamiento se prescinde del tamaño de la muestra y, con ello, del estudio de la variabilidad del muestreo, produciéndose una confianza indebida en las pequeñas muestras. Se supone que cada serie de repeticiones del experimento, aunque sea limitada, ha de reproducir todas las características de la población.

La representatividad se suele usar para predecir sucesos, ya que, normalmente, los acontecimientos más probables son más representativos que los menos probables, o bien se sobreestima la correlación entre una causa y su efecto (Kahneman *et al.* 1982). Pero su uso inapropiado da lugar a diferentes sesgos en los juicios probabilísticos. Estos errores no son sólo típicos en estudiantes, sino que personas con alta preparación estadística llegan a cometerlos. Entre los sesgos más comunes que surgen de la utilización de esta heurística, hemos investigado en nuestro trabajo los dos siguientes:

i-Insensibilidad al tamaño de la muestra:

En muchas situaciones de estimación, el valor esperado del estadístico de la muestra es igual al valor del parámetro en la población. Este valor esperado no depende del tamaño de la muestra, aunque la varianza del estadístico, que es una variable aleatoria, es una función inversamente proporcional al tamaño de la muestra, lo que influye en las probabilidades de obtener diferentes valores del estadístico muestral. Con frecuencia se olvida esta última propiedad, por lo que se hace una extensión indebida de la ley de los grandes números, esperando la convergencia de los valores de los estadísticos a los parámetros poblacionales en una serie corta de ensayos. Parece como si se creyese en una *"Ley de los pequeños números"*, por la que las pequeñas muestras serían representativas en todas sus características estadísticas de las poblaciones de donde proceden. Este error puede tener importantes consecuencias de cara a la investigación experimental, ya que los científicos que creen en la «ley de los pequeños números» sobreestiman la potencia de sus métodos estadísticos, estiman a la baja la amplitud de sus intervalos de confianza y tienen unas expectativas injustificadas en la replicabilidad de experimentos realizados con pequeñas muestras. Desde el punto de vista de la educación secundaria, esta creencia haría que los alumnos no considerasen la importancia del número de ensayos en sus estimaciones frecuenciales de la probabilidad.

ii- Concepciones erróneas sobre las secuencias aleatorias:

En un proceso aleatorio, se espera que una parte de la trayectoria represente fielmente el proceso. Por ello, las secuencias de resultado que aparecen relativamente ordenadas no se consideran aleatorias. Un ejemplo claro se da entre los jugadores de la lotería, que mayoritariamente creen que los números han de salir sin un orden, error que también ha sido descrito en investigaciones con escolares (Fischbein y Gazit, 1984). En este sentido, un error típico es la llamada *falacia del jugador*, por la que, si en una serie de juegos se produce una racha de un mismo resultado, se espera intuitivamente que aumente la probabilidad del resultado contrario en el próximo experimento.

El sesgo de equiprobabilidad

En los experimentos de Lecoutre (1985, 1992), Lecoutre y Durand (1988) y Lecoutre y Cordier (1990), se describe la creencia de los sujetos en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a cualquier experimento aleatorio, incluso en aquellos en que no es aplicable el principio de indiferencia o donde no hay una simetría física. Para comprobar esta creencia, usan en sus experimentos un problema en el que se pregunta si al lanzar dos dados hay la misma probabilidad de obtener un 5 y un 6 que la de obtener dos veces un 5. A pesar de variar el contexto, el formato de la pregunta, la edad y la formación de los sujetos, los resultados siempre coinciden y demuestran la estabilidad de la creencia en que los dos resultados son equiprobables. Lecoutre y sus colaboradores defienden que ello no es debido a la falta de razonamiento combinatorio, sino a que los modelos combinatorios no se asocian fácilmente con las situaciones en que interviene «el azar». Los sujetos que muestran el sesgo de equiprobabilidad consideran que el resultado del experimento «depende del azar» y en consecuencia todos los posibles resultados son equiprobables. Desde el punto de vista de la enseñanza este sesgo supondría una extensión indebida de la regla de Laplace y la no discriminación de las situaciones en las que es o no es aplicable el principio de indiferencia.

Enfoque en el resultado aislado

Konold (1991) estudió un patrón de errores que considera más fundamental que las heurísticas descritas anteriormente. En lugar de explorar cómo los sujetos realizan los juicios de probabilidad, se interesó por cómo interpretan las preguntas sobre la probabilidad o el valor de una probabilidad. Como resultado de sus entrevistas a estudiantes universitarios, llegó a la conclusión de que éstos interpretaban una pregunta sobre la probabilidad de forma no probabilística.

Por ello, una pregunta en la que se pide explícitamente la probabilidad de un suceso se interpreta como tener que predecir si el suceso en cuestión ocurrirá o no en el siguiente experimento. Por ejemplo, al interpretar una predicción meteorológica en la que se dan unas probabilidades de lluvia de un 70%, muchos sujetos indican que lloverá el día en cuestión. Si el día en cuestión no llueve, pensarán que el meteorólogo se equivocó en sus predicciones. Si llueve un 70% de días para los que se pronosticó un 70% de probabilidades de lluvia, pensarán que el meteorólogo es poco fiable (Serrano y col, 1996). Esta conducta es razonablemente consistente con la primitiva acepción de la palabra probable (Hacking, 1975), en la que un acontecimiento es probable si es verosímil que suceda.

Las personas que presentan esta concepción, evalúan las probabilidades comparándolas con los valores 0%, 50% y 100%. Si una probabilidad se acerca a los extremos 0% o 100%, el suceso se considerará como imposible o seguro, respectivamente. Sólo si se acerca al 50% se considerará verdaderamente aleatorio. Los estudiantes que muestran este tipo de comportamiento, tiende a buscar explicaciones causales en lugar de aleatorias a la ocurrencia de resultados inesperados y a la variabilidad de los fenómenos aleatorios. Asimismo se ignora la información de tipo frecuencial, prefiriendo basar los juicios en consideraciones subjetivas sobre el fenómeno dado.

La investigación de Konold (1989) sugiere que los alumnos que muestran el "enfoque en el resultado aislado" consideran que cada una de las repeticiones de un experimento aleatorio no tiene por qué guardar relación con las anteriores o posteriores; por lo que podrían tener dificultad en comprender un enfoque frecuencial de la probabilidad en la enseñanza.

Este es un breve resumen de la gran variedad de las investigaciones sobre errores en razonamiento probabilístico con niños o adultos. Por ejemplo, Ojeda (1994) muestra la dificultad de los alumnos con la probabilidad condicional y las investigaciones de Fischbein *et al.* (1991) identifican errores en la resolución de problemas de probabilidad debidos a la dificultad de los estudiantes en separar la estructura matemática del contexto de una situación estocástica. Estas investigaciones sugieren de nuevo la importancia de la investigación previa sobre las creencias de los alumnos para abordar con éxito una nueva reforma curricular en el campo de la probabilidad.

Descripción del estudio

Metodología

En la primavera de 1995 se pasó un cuestionario a 277 alumnos de secundaria. Aproximadamente la mitad de los alumnos (n = 147) comenzaban su primer año de Bachillerato (con 14 – 15 años) y no habían recibido previamente ninguna instrucción sobre probabilidad. El resto de los estudiantes (n = 130) finalizaban el curso de orientación universitaria (17 – 18 años) y habían recibido instrucción sobre probabilidad en cursos anteriores, aproximadamente un mes en el primer curso de Bachillerato (14 – 15 años) y otro mes en el tercer curso de Bachillerato (16 – 17 años). La enseñanza recibida consistió en la introducción a la probabilidad simple y compuesta, probabilidad condicional y teorema de Bayes. La metodología de enseñanza estuvo principalmente basada en las explicaciones del profesor y la resolución de problemas de probabilidad, especialmente usando la combinatoria.

Cuestionario

El cuestionario (que se presenta en el apéndice) incluye 8 ítems que se usaron con ligeras variaciones en investigaciones previas (Green, 1982; Lecoutre y Durand, 1988; Garfield y Del Mas, 1991; Fischbein *et al.*, 1991; Lecoutre, 1992; Konold *et al.*, 1993). Los ítems trataban de evaluar la proporción de estudiantes que tenían algunos errores o usaban heurísticas incorrectas detectadas en las investigaciones citadas. Adicionalmente, se pidió a los alumnos razonar las respuestas en algunos de los ítems para profundizar en sus concepciones sobre los fenómenos aleatorios, ya que algunas de las investigaciones citadas no analizaron las justificaciones dadas por los alumnos a sus respuestas.

Mientras que muchas investigaciones se concentran en analizar un sesgo particular, nosotros hemos preferido estudiar sobre los mismos alumnos la existencia de varios de estos errores. Por un lado, pensamos que un porcentaje de las respuestas que han sido atribuidas a un tipo de sesgo particular pudieran tener una explicación diferente cuando se comparan los resultados a varios ítems sobre el mismo alumno, así como la justificación de sus respuestas. Por otro lado, estamos también interesados en estudiar la posible interrelación de estos errores, ya que una independencia estadística de los mismos indicaría que el profesor debe dar un tratamiento diferenciado en la enseñanza a cada uno de estos errores, mientras que la existencia de una interrelación indicaría que los sesgos irían desapareciendo simultáneamente con el mayor nivel de razonamiento probabilístico del alumno. A continuación clasificamos los ítems del cuestionario, según los tipos de razonamiento evaluados.

Representatividad

El Item 1 evalúa si los estudiantes usan la heurística de la representatividad en sus juicios sobre la probabilidad de obtener diferentes secuencias en el lanzamiento de una moneda. Si bien, desde un punto de vista normativo, todas las secuencias tienen la misma probabilidad, la secuencia b) puede parecer más representativa que las otras. El ítem 4 examina las intuiciones de los estudiantes sobre probabilidad binomial, aunque esperamos que los estudiantes que usan la heurística de la representatividad en sus razonamientos puedan elegir la respuesta correcta c) (si bien por razonamiento incorrecto).

Enfoque en el resultado aislado

Konold *et al.* (1993) sugieren que algunos estudiantes pueden dar respuesta correcta a los ítems 1 y 2 usando el razonamiento del enfoque en el resultado aislado. Los estudiantes que comprenden la idea de la independencia y consideran los resultados equiprobables elegirían simultáneamente las respuesta correcta a los ítems 1 y 2. Una respuesta correcta en el ítem 1 y incorrecta en el ítem 2 indicaría el empleo del "enfoque en el resultado aislado", mientras que una respuesta incorrecta a los dos ítems indicaría el uso de la heurística de la representatividad. Por lo tanto, es importante contrastar conjuntamente las respuestas a los ítems 1 y 2, así como las razones que apoyan las respuestas.

Variabilidad de las pequeñas muestras: ley de los pequeños números

El ítem 3 es una adaptación del usado por Kahneman *et al.*. (1982) para comprobar si los estudiantes aprecian la variabilidad en las muestras pequeñas. Este es un caso especial de la heurística de la representatividad referida a la ley de los pequeños números, porque la gente tiende a juzgar las muestras pequeñas como igual representativas de la población que muestras grandes.

Equiprobabilidad

Algunos de los ítems de Lecoutre (1992) se utilizan para comprobar si los estudiantes tienden a usar en sus razonamientos el sesgo de equiprobabilidad. En los ítems 5 a 8 se necesita el dominio de la combinatoria para elegir el resultado más probable. Las respuestas incorrectas: d) en el item 4, a) en el ítem 5, d) en el ítem 6 y 7, y e) en el ítem 8 corresponderían al sesgo de equiprobabilidad.

Resultados

Presentamos en la Tabla 1 los porcentajes de respuestas de los dos grupos de alumnos a cada ítem, junto con los valores p correspondientes al contraste chi cuadrado, que se usó para comparar la distribución de respuestas a cada ítem en los dos grupos de alumnos. Es notable la dificultad general del cuestionario, incluso para los estudiantes que habían estudiado probabilidad, ya que la respuesta correcta no superó en ningún caso el 66 por ciento de los estudiantes. El ítem más difícil para estos estudiantes fue el 5, seguido del 6 y el 3.

Tabla 1: Porcentajes de respuestas en los dos grupos de estudiantes

Item	Respuesta correcta		Principal distractor		Otras respuestas		valor p
	14 años (n = 147)	18 años (n = 130)	14 años (n = 147)	18 años (n = 130)	14 años (n = 147)	18 años (n = 130)	
1	46.3	65.4	b 35.4	b 23.1	18.3	11.5	0.05
2	39.4	53.8	d 23.8	d 20.0	36.8	26.2	0.03
3	23.8	26.9	c 63.3	6 60.0	12.9	13.1	n.s
4	35.4	43.8	d 45.6	d 41.5	19.0	14.7	0.03
5	15.6	19.2	d 62.6	d 52.3	21.8	28.5	0.04
6	22.4	23.1	e 46.6	e 43.1	32.0	33.8	n.s.
7	40.1	50.8	d 36.7	d 36.2	23.2	13.0	n.s.
8	36.7	30.0	e 39.5	e 56.2	23.8	13.8	0.01

Diferencia en los dos grupos de estudiantes

Los estudiantes mayores tuvieron mayor porcentaje de respuestas correctas en los ítems 1, 2, 4 y 5. Sin embargo, no hubo diferencias significativas en las respuestas en los dos grupos de estudiantes en los ítems 3, 6 y 7. Los estudiantes más jóvenes tuvieron un porcentaje más alto de respuestas correctas en el ítem 8. Como consecuencia, deducimos un ligero progreso en el razonamiento probabilístico con la edad e instrucción recibida en el segundo grupo de estudiantes y un mantenimiento o incluso empeoramiento del sesgo de equiprobabilidad con la mayor edad e instrucción. Las concepciones sobre las secuencias aleatorias y las probabilidades binomiales parecen haber sido favorecidas por la enseñanza y maduración de los alumnos.

Errores detectados

Aunque el 55,2 % de los estudiantes respondieron correctamente al ítem 1, ello no indica que la mayor parte de los alumnos utilicen un razonamiento normativo en este ítem. Para mostrarlo, analizaremos conjuntamente las respuestas a ítems seleccionados.

Un gran porcentaje de alumnos (42 %) dio una respuesta correcta simultáneamente a los dos primeros ítems sobre lanzamiento de monedas. Estos alumnos considerarían todas las secuencias presentadas como igualmente probables, teniendo una concepción correcta sobre las secuencias de resultados en una serie corta de ensayos. Por otro lado, el 24 % de los alumnos que dieron la respuesta correcta en el ítem 1, dieron una respuesta incorrecta en el ítem 2, un resultado también señalado por Konold *et al.*. (1993) en sus estudios previos, lo que en opinión de estos autores, indicaría en estos alumnos el enfoque en el resultado aislado. De cualquier manera, el porcentaje de los estudiantes que cambió su respuesta de correcta en el ítem 1 a incorrecta en el 2 fue más alto en la investigación de Konold *et al.* (1993) que en nuestro estudio.

El porcentaje de estudiantes que dio simultáneamente una respuesta correcta a los ítems 1, 2 y 4 sólo fue 9 %, lo que sugiere que, incluso aunque los estudiantes consideran equiprobables los resultados del experimento aleatorio compuesto, su capacidad combinatoria no es suficiente para utilizarla en la evaluación de probabilidades binomiales.

La respuesta correcta al ítem 4 puede obtenerse también mediante un razonamiento incorrecto basado en la heurística de la representatividad, pues esta respuesta correcta sería también la más representativa. Para evaluar el porcentaje de estudiantes que razona consistentemente según la heurística de la representatividad hemos estudiado el porcentaje que elige la respuesta incorrecta b) en los ítems 1 y 2 y dan una respuesta correcta en el ítem 4. Este porcentaje fue del 22 %, que correspondería a los alumnos que, en nuestra opinión, usan en su razonamiento la heurística de la representatividad.

Basándonos en la respuesta al ítem 3, encontramos en bastantes estudiantes (62.7 %) la creencia en la estabilidad de las frecuencias, incluso en pequeñas muestras, y la consideración de que ambos hospitales tienen la misma probabilidad que el 80 % o más niños en un día concreto. Esto sugiere que la "ley de los pequeños números", aspecto de la heurística de la representatividad, sería un sesgo muy extendido entre nuestros estudiantes.

La dificultad de los estudiantes en los ítems 5 y 6 no indica necesariamente el sesgo de equiprobabilidad, porque un gran grupo de estudiantes (57 % en el ítem 5 y 44 % en el ítem 6) eligen la respuesta "es imposible saberlo», que posiblemente indicaría el enfoque en el resultado aislado, mientras sólo 18 % en el ítem 5 y 26 % en el ítem 6 eligen la respuesta a), que sería la esperada en los estudiantes con sesgo de equiprobabilidad. Puesto que en las investigaciones de Lecoutre no se incluye la opción "es imposible saberlo", pensamos que parte de los resultados que esta autora atribuye al sesgo de equiprobabilidad, podrían deberse en realidad a un razonamiento según el "enfoque en el resultado". De todas formas un gran número de estudiantes parecen mos-trar el sesgo equiprobabilidad en sus respuestas a los ítems 5 (18,1 %), 6 (26%), 7 (36,5%) y 8 (47,6 %).

Finalmente indicamos que sólo 13 estudiantes (4,7 %) dieron respuesta correcta a todos los ítems, mostrando un razonamiento combinatorio suficiente y un razonamiento probabilístico adecuado. Ello señala la gran dificultad de las tareas probabilísticas, incluso al finalizar el aprendizaje de la probabilidad en la secundaria, por lo que los alumnos que ingresan en los cursos de estadística en los primeros años de universidad pudieran tener una serie de creencias erróneas sobre probabilidad que dificultaría notablemente su comprensión de la inferencia estadística.

Análisis de Argumentos

Para completar nuestro estudio y profundizar en los tipos de razonamiento de los alumnos, se les pidió justificar respuesta en los cinco primeros ítems. Puesto que los ítems 6 a 8 evalúan el mismo conocimiento que el 5, no se consideró necesario pedir al alumno una justificación en los mismos. A continuación describimos brevemente la tipología de razonamientos de los alumnos.

Ítems 1 y 2: Los argumentos de los alumnos en estos ítems se han clasificado de la forma siguiente:

a) *Debe haber aproximadamente igual número de caras y cruces o hay la misma probabilidad de caras y cruces.* En este apartado hemos incluido los alumnos que manifiestan explícitamente su expectativa en la conservación de la frecuencia relativa de caras y cruces, en relación a la probabilidad teórica, incluso en una secuencia corta, como en los siguientes ejemplos: *"Si la moneda está equilibrada, existe la misma probabilidad de que salga cara o cruz", "Al lanzar una moneda tienes un 50% de cara y un 50 % de cruz y por lo tanto tienen todas las mismas posibilidades".* Aunque algunos alumnos asignan correctamente probabilidades empleando argumentos frecuenciales o el principio de indiferencia, otros dan este argumento para justificar una opción incorrecta, lo que sería una respuesta típica de la heurística de la representatividad.

b) *Debe haber frecuentes alternancias entre caras y cruces.* Estos alumnos se apoyan en una propiedad diferente al considerar, no la tendencia global señalada por la frecuencia, sino la variabilidad, indicada por la alternancia de resultados. Por ejemplo: *"Es más probable una alternancia entre caras y cruces que el que salgan dos cruces o caras seguidas o tres", "Como la probabilidad de que salga cara o cruz es del 50 %, en teoría debería salir una vez sí y otra no cara".* La propiedad que estos alumnos fallan en aplicar es la "pérdida de memoria" de una sucesión de Bernoulli, así como la idea de independencia de los ensayos sucesivos. Es también una respuesta típica de la heurística de la representatividad.

c) *Es cuestión de suerte, puede ocurrir cualquiera de las secuencias.* Los estudiantes justifican la equiprobabilidad de los resultados, no por un razonamiento combinatorio, sino por su creencia en la impredecibilidad de lo aleatorio, o su creencia en la "suerte": *"Según la suerte que tengamos y según la moneda como la tires".* Un grupo importante de estos alumnos podrían estar razonando de acuerdo con el "enfoque en el resultado aislado" descrito por Konold (1989, 1991): *"Sólo lanzando la moneda se puede saber la sucesión que sale y que será casi seguramente distinta de la siguiente, todo depende de la suerte",* aunque otros podrían estar razonando correctamente, dependiendo de la opción elegida: *"En cinco tiradas pueden salir cinco cruces o cinco caras y también cualquier otra variante".*

d) *Hay un patrón regular.* Se alude explícitamente al hecho de que una secuencia aleatoria no debe tener un patrón reconocible: *"Es demasiada casualidad que se lleve un orden en la lista de los resultados", "Es muy difícil que se alternen con tanta regularidad".*

e) *Por experiencia propia.* Los alumnos argumentan su experiencia sobre sucesiones obtenidas en juegos de azar, aunque no saben dar una razón para su elección: *"Lo sé, porque he jugado mucho a ésto", "Varias veces he hecho esta prueba y casi siempre me ha salido ese resultado".*

f) *Más probable dos caras consecutivas o bien dos cruces consecutivas.* En este caso, la razón es contrapuesta a la b), ya que esperan la existencia de algunas rachas y no la constante alternancia de resultados. "*No creo que se alternen las caras y las cruces cada vez que se lancen*" (alumno de 18 años).

g) *Es más probable que salgan caras (cruces).* Algunos alumnos conceden una mayor probabilidad a uno de los sucesos, debido a que las monedas, en general, no son perfectamente simétricas: *"Creo que al tirar una moneda sale siempre más veces la cara que la cruz", "Es raro que no salgan más las caras que las cruces", "Siempre salen más las cruces".*

h) *Es más aleatoria, sin regularidad fija.* Se utiliza el argumento contrario al d): *"Lo veo más probable, porque no sigue el mismo orden".*

Por último, un número apreciable de alumnos indica que no sabe justificar su respuesta, o simplemente la deja en blanco. En la tabla 2 se presentan los resultados. En general los alumnos argumentan que, debido al carácter aleatorio, puede obtenerse cualquier resultado (categoría c). También tiene una frecuencia importante el considerar que no debe haber rachas en la secuencia (categoría b) y el caso de los alumnos que no proporcionan ningún argumento. En el segundo ítem la categoría b) fue tan frecuente como la c), apareciendo también con frecuencia apreciable la categoría d) (regularidad del patrón). Vemos en consecuencia que el preguntar por el suceso menos probable no sólo hace cambiar la respuesta, sino también el argumento de los alumnos.

Tabla 2: Porcentajes de argumentos de los alumnos en los ítems 1 y 2

	Item 1		Item 2	
Argumento	Respuesta incorrecta (n = 124)	Respuesta correcta (n = 153)	Respuesta incorrecta (n = 150)	Respuesta correcta (n = 127)
*a	(4.8)	(3.3)	(4.7)	(1.6)
b	(30.6)	(0.0)	(72.7)	(0.8)
*c	(0.8)	(90.2)	(1.3)	(85.8)
d	(0.0)	(0.0)	(12.7)	(11.8)
e	(10.5)	(0.7)	(1.3)	(0.0)
f	(18.5)	(0.0)	(0.6)	(0.0)
g	(4.9)	(0.0)	(1.3)	(0.0)
h	(4.9)	(0.0)	(5.4)	(0.0)
No contesta	(25.0)	(5.8)	(0.0)	(0.0)

También se ha apreciado una dependencia del argumento con el tipo de respuesta. El argumento c (impredecibilidad debida a la aleatoriedad) ha estado unido a la opción correcta, tanto en el ítem 1 como en el 2. En el caso de elegir una sucesión como más probable (item 1) se han utilizado preferentemente las categorías b) e) y f). En el caso de considerar alguna secuencia como menos probable (ítem 2), se han utilizado los argumentos b) y d).

Ítems 3 y 4: Se han considerado los siguientes argumentos:

a) *La muestra pequeña es más variable.* Son los alumnos que piensan que, debido al carácter aleatorio del experimento, la variabilidad de la frecuencia relativa disminuye con el número de ensayos, apreciando el fenómeno de la convergencia: *"Porque puede haber una racha de nacimientos de varones en un número pequeño, pero es demasiada casualidad que en cien casos se den ochenta", "Al aumentar la población se estabiliza la proporción".*

b) *Por igual proporción.* Se argumenta que las dos muestras tienen igual proporción y por ello sus probabilidades son iguales. Es la respuesta típicamente descrita en los estudios sobre representatividad. (Bentz y Borovcnik, 1982 b; Kahneman *et al.*, 1982; Pérez Echeverría, 1990): *"Porque es el mismo porcentaje", "Es lo mismo 8 de 10 que 80 de 100".*

c) *Hay mayor proporción en muestras más grandes.* Se aplica ahora la representatividad, no en función del parecido entre el valor del estadístico muestral y el parámetro proporcional, sino al parecido entre dos características de la muestra —la proporción y su tamaño: *"La muestra sobre cien sujetos, ofrece un margen mayor y es más difícil acertar en el pronóstico", "Teniendo mayores posibilidades de que ocurra el fenómeno en grandes muestras".*

d) *Igual probabilidad.* Similar al argumento b) pero usando el término probabilidad: *"En los dos casos la probabilidad es del 80 %", "A efecto de probabilidad es el mismo resultado".*

e) *Deben nacer más niñas.* No se admiten los datos del problema, alegando que la proporción de niñas debiera ser mayor. Es una manifestación de la heurística de la representatividad con un nuevo matiz, los datos del enunciado son incorrectos, puesto que esa proporción no puede ocurrir, ni siquiera en una muestra pequeña: *"Lo normal es que nazcan más niñas que niños".*

f) *No se saben cuantos serán varones o hembras.* Los sucesos aleatorios son impredecibles, incluso en términos probabilísticos. No puede responderse a la pregunta, puesto que no podemos siquiera predecir la probabilidad de los distintos resultados. *"No hay ninguna regla para predecir si serán varones o hembras", "Depende del azar y no se sabe lo que sucederá".*

g) *Nacen más niños que niñas.* Similar al e) pero dando mayor probabilidad al nacimiento de varones: *"Suelen nacer mayormente más niños", "En estos tiempos suelen nacer más varones".*

Tabla 3: Porcentajes de argumentos de los alumnos en los ítems 3 y 4

	Item 3		Item 4	
Argumento	Respuesta incorrecta (n = 204)	Respuesta correcta (n = 73)	Respuesta incorrecta (n = 168)	Respuesta correcta (n = 109)
a	-*(0.5)	*(74.3)	(0.0)	(0.0)
b	(35.3)	(0.0)	(0.0)	(0.0)
c	(8.2)	(2.9)	(11.3)	(4.5)
d	(8.7)	(0.0)	*(1.2)	*(76.1)
e	(5.3)	(1:14)	(0.0)	(0.0)
f	(11.6)	(0.0)	(45.2)	(14.7)
g	(4.3)	(15.7)	(11.3)	(4.5)
No contesta	(26.0)	(5.7)	(30.9)	(4.7)

Por último, se incluyen los alumnos que no contestan o indican que no entienden la pregunta o que no saben explicar su respuesta.

Las respuestas más frecuentes en el ítem 3 estuvieron relacionadas con la consideración sólo de la igualdad de proporciones en ambas muestras (categoría b). Es importante el grupo de alumnos que da una respuesta confusa o no contesta, lo que indica que el alumno actúa por intuición, pues no es capaz de argumentar su respuesta. Los argumentos correctos, a) en el tercer ítem y d) en el cuarto, se emplean en mayor proporción asociados a la opción correcta, mientras que los b) y f) respectivamente, están asociados a la incorrecta.

Ítem 5: Hemos analizado también los argumentos en este ítem, clasificándolos en los siguientes tipos:

a) Es impredecible o depende de la suerte. Análogo al comentado en casos anteriores: *"No lo sabemos, los juegos son al azar"; "Depende de la fuerza, la posición, etc..., en que tires los dados y es imposible saber todo con exactitud"; "Por mucho que haga pruebas y lance los dados, jamás podré asegurar lo que saldrá".*

b) Es equiprobable. Puesto que los resultados elementales son equiprobables, también se consideran equiprobables los resultados de los experimentos compuestos. Se observa aquí una falta de discriminación entre los sucesos simples y compuestos del espacio muestral producto: *"Porque la posibilidad de que en un dado salga un cinco y en el otro un seis es la misma que si en un dado sale un cinco y en el otro cinco"; "Hay las mismas posibilidades de obtener dos veces el mismo número que de obtener dos números distintos".*

c) Razonamiento de tipo combinatorio. Estos tipos de argumentos son poco utilizados por los alumnos y las respuestas más usuales que emplean están relacionadas con el concepto laplaciano de probabilidad, más que con el razonamiento combinatorio y siendo todos los que emplean este tipo de argumento los alumnos mayores: *"Elige la opción b) porque la probabilidad de que salga un 5 y un 6 es de un 33 % y la de que salgan dos 5 es de 8,5 %"; "Porque dos veces un 5 requiere 1/36 de posibilidades, mientras que un 5 y un 6 tiene 1/18".*

d) Es más difícil que se repita el número: *«Al ser dados distintos, hay más posibilidades de que salga un 5 y un 6 que dos veces el 5, ya que si en un dado solo hay un 5, en los demás se puede sacar cualquier número mientras que es muy raro que salga un 5 en cada uno de los dados».*

e) Por experiencia. Aunque a veces completan sus justificaciones de otros argumentos diciendo que les suele pasar así a ellos, este argumento tiene entidad propia como para justificar las opciones dadas y sus respuestas tipo suelen ser: *"Porque cuando juego al parchís, me suele pasar eso, aunque no siempre";*

La mayor parte de los alumnos se apoya en que el resultado es impredecible (categoría a), es decir el «enfoque en el resultado aislado». Aunque esto es cierto para cada caso particular, sí podremos predecir las frecuencias de los diversos resultados a la larga. Es también bastante frecuente el argumento d) de representatividad. También se apoyan en la equiprobabilidad de los resultados o sesgo de la equiprobabilidad (categoría b). Sólo 5 alumnos usan un argumento de tipo combinatorio (categoría c). Al comparar el argumento empleado según la opción elegida fuese correcta o incorrecta (tabla 4), vemos que el argumento de impredecibilidad (categoría a) está exclusivamente ligado a la opción incorrecta y el d (más difícil el mismo número) a la correcta.

Tabla 4: Porcentajes de argumentos de los alumnos en el ítem 5

Argumento	Respuesta incorrecta (n = 229)	Respuesta correcta (n = 48)
a	(62.9)	(0.0)
b	(16.6)	(0.0)
*c	(0.9)	(6.2)
d	(4.4)	(66.7)
e	(3.5)	(4.2)
Nocontesta	(11.8)	(22.9)

Correspondencias entre los diversos sesgos detectados

Una vez analizados individualmente los ítems, se llevó a cabo un análisis de correspondencias múltiples de las respuestas correctas e incorrectas a cada uno de los apartados, para lo cual se cruzaron entre sí las respuestas correctas e incorrectas en los diferentes ítems. Para comentar los resultados, índicaremos mediante C1 la respuesta correcta al ítem 1 y mediante I1 la respuesta incorrecta al ítem 1 Idéntica interpretación tiene el resto de los códigos. Hemos empleado como variable suplementaria el curso de los alumnos (con dos categorías BUP, alumnos de 14 años y COU, alumnos de 18 años).

Tabla 5. Resultado del análisis de correspondencias

	MASA	QLT	INR	FACTOR	COR2 EJE 1	CTR	FACTOR	COR2 EJE 2	CTR	FACTOR	COR2 EJE 3	CTR
C1	0.064	0.981	0.014	0.001	0.000	0.000	-0.469	0.979	0.308	-0.015	0.001	0.001
I1	0.061	0.978	0.013	-0.015	0.000	0.000	0.448	0.974	0.267	0.002	0.000	0.000
C2	0.058	0.964	0.016	-0.335	0.412	0.089	0.387	0.549	0.189	-0.018	0.001	0.001
I2	0.067	0.937	0.011	0.284	0.492	0.074	-0.270	0.444	0.107	0.004	0.000	0.000
C8	0.041	0.906	0.014	0.400	0.474	0.089	0.105	0.033	0.010	0.281	0.234	0.176
I8	0.084	0.930	0.007	-0.179	0.394	0.037	-0.073	0.066	0.010	-0.087	0.094	0.035
C3	0.032	0.990	0.011	0.227	0.144	0.023	0.095	0.025	0.006	0.379	0.401	0.252
I3	0.093	0.987	0.005	-0.081	.0.128	0.008	-0.063	0.077	0.008	-0.140	0.395	0.100
C4	0.049	0.706	0.013	0.408	0.627	0.112	0.050	0.009	0.003	0.108	0.044	0.031
I4	0.076	0.722	0.009	0.262	0.557	0.072	0.120	0.117	0.024	-0.056	0.025	0.013
C5	0.022	0.939	0.016	0.657	0.569	0.128	0.125	0.021	0.007	-0.249	0.082	0.074
I5	0.103	0.934	0.004	-0.141	0.554	0.028	-0.053	0.079	0.006	0.044	0.054	0.011
C6	0.028	0.871	0.018	0.695	0.762	0.188	0.205	0.067	0.026	-0.136	0.029	0.029
I6	0.097	0.883	0.006	-0.207	0.716	0.057	-0.089	0.134	0.027	0.031	0.016	0.005
C7	0.056	0.968	0.010	0.259	0.377	0.052	0.045	0.011	0.003	-0.227	0.290	0.159
I7	0.069	0.968	0.008	-0.216	0.377	0.044	-0.078	0.049	0.009	0.174	0.245	0.114

En la Tabla 5 presentamos los resultados del análisis de correspondencias para las distintas categorías, donde podemos observar que la calidad de representación es en general muy alta. A continuación realizamos la interpretación de los tres factores identificados.

Primer factor: Indice de dificultad y razonamiento combinatorio

En la parte positiva del eje, predominan principalmente las respuestas correctas y en la parte negativa en las incorrectas. En consecuencia, este factor marca el índice de dificultad de las preguntas que se ordenan aproximadamente a lo largo del eje según dicho índice. Los ítems que contribuyen a este factor, tanto en su parte positiva (categorías correctas), como en su parte negativa (categorías incorrectas) son aquellos en los que el alumno debe comparar probabilidades de sucesos compuestos en un experimento producto de dos o tres experimentos simples y donde los errores son debidos, principalmente a falta de razonamiento combinatorio. En la parte positiva: C6 ($x = 0.695$; $r^2 = 0.762$); C5($x = 0.657$; $r^2 = 0.569$); C8($x = 0.400$; $r^2 = 0.474$); C4 ($x = 0.408$; $r^2 = 0.627$) y C7($x = 0.259$; $r^2 = 0.377$). En la parte negativa: I5 ($x = -0.141$; $r^2 = .554$); I8($x = -0.179$; $r^2 = 0.394$); I6($x = -0.207$; $r^2 = 0.716$); I7($x = -0.216$; $r^2 = 0.377$) y I4($x = -0.262$; $r^2 = 0.557$). Hay tres ítems que tienen un comportamiento diferente:

– Los ítems 1 y 2 no están afectados por este factor. Probablemente ello es debido a la confusión señalada en Shaughnessy y Batanero (1995) entre el suceso simple (por ejemplo CCCXX) y el compuesto (obtener exactamente tres caras) en los ensayos binomiales. De este modo obtenemos: I2 (x = 0.284; r^2 = 0.492) y C2 (x = -0.335; r^2 = 0.412). El ítem 1 aparece en el origen de coordenadas.

– El ítem 3, que, debido al gran tamaño de la muestra, hace que los alumnos no puedan aplicar la enumeración para comparar las posibilidades de los distintos sucesos. Este ítem no tiene una correlación alta con este eje.

Como consecuencia, observamos que un primer factor que contribuye al empleo de heurísticas es la falta de capacidad de enumeración sistemática. Por el contrario, la aplicación de un razonamiento de tipo combinatorio contribuye a la respuesta correcta. Este razonamiento combinatorio se opuso a la vez al sesgo de equiprobabilidad y al «enfoque en el resultado aislado», que fueron las principales causas de razonamiento incorrecto en los ítems 8; 5; 6; 7 y 4 (que son los que más han contribuido a este factor), como se vio en el análisis de los argumentos de los alumnos.

Segundo factor: Introducción de elementos subjetivos en la asignación de probabilidades

En este caso, este factor está definido por los ítems 1 y 2, como se observa en las fuertes contribuciones y correlaciones tanto de las respuestas correctas como de las incorrectas en los dos ítems. Observamos en consecuencia el comportamiento diferenciado de estos ítems, en los cuales las probabilidades que se comparan se refieren a sucesos simples en el experimento compuesto.

Todos los casos para los que se pide comparar la probabilidad son equiprobables. En caso de dar una respuesta errónea, el alumno introduce algún elemento subjetivo en la asignación de probabilidades. Esto se ha confirmado en el análisis de los argumentos de los alumnos que hemos presentado en la sección anterior. Entre estos elementos, destacamos la búsqueda de la representatividad local, las frecuentes alternancias y el rechazo de regularidad en el patrón global. Por otro lado, hacemos notar que los ítems 1 y 2 aparecen contrapuestos: (C1; x = -469; r^2 = 0,979); (C2; x = 0,387; r^2 = 0,549); (I1; x = 0,448; r^2 = 0,974); (I2; x = -0,27; r^2 = 0,444). Ello quiere decir que los elementos subjetivos introducidos en la asignación de probabilidades no han sido los mismos para elegir el suceso más probable y el menos probable, lo que coincide con lo expuesto en Konold *et al.* (1993), quienes encontraron un cambio entre el tipo de respuestas dadas por los mismos alumnos a los ítems 1 y 2.

Tercer Factor: Variabilidad como función inversa del tamaño muestral.

Finalmente, el tercer factor está casi exclusivamente marcado por el ítem 3, en el cual los alumnos han de comparar la variabilidad del valor medio en función del tamaño muestral: (C3; x = 0,379; r^2 = 0.401) e (I3; x = -0,140; r^2 = 0,395). Debido a que éste es elevado, los alumnos no pueden aplicar la enumeración para obtener la solución del problema. Aparece una ligera asociación con otros ítems, aunque la correlación es muy débil. Así, la respuesta positiva al ítem 8: (C8; x = 0.281; r^2 = 0,234) parece influir en la respuesta positiva al ítem 3. El razonamiento combinatorio contribuye a apreciar la disminución de la variabilidad muestral en función del tamaño de la muestra. El ítem 7 aparece en sentido contrapuesto: (C7; x = 0,227; r^2 = 0,290) e (I7; x = 0,17; r^2 = 0,245) debido a que los alumnos no han aplicado los mismos criterios para elegir el suceso menos probable y el más probable, de acuerdo con lo expuesto por Konold *et al.* (1993). Finalmente, destacamos que la variable curso no ha tenido influencia en ninguno de los factores, por lo que deducimos que la edad de los alumnos no supone diferencias en la estructura de las respuestas de los alumnos en este apartado del cuestionario.

Como resumen, destacamos la dificultad generalizada de los ítems en los que hemos apreciado el empleo de diversas heurísticas y la existencia de sesgos. Destaca particularmente el "enfoque en el resultado aislado" y, en menor medida, la representatividad y equiprobabilidad. Estos sesgos parecen ser debidos a la falta de capacidad combinatoria de algunos estudiantes. El análisis de correspondencias revela también la independencia entre estos tipos de razonamiento incorrecto, lo que sugiere la necesidad del diseño de situaciones didácticas específicas para la superación de cada uno de ellos por parte de los estudiantes.

Conclusiones

Todos los ítems en nuestro estudio piden a los estudiantes comparar la probabilidad de diferentEs sucesos asociados con experimentos aleatorios que emplean más de una prueba. Estos ítems se tomaron de diferentes estudios sobre respuestas incorrectas de los estudiantes usados en el desarrollo de teorías sobre modelos de razonamiento probabilístico. Nuestros resultados apoyan las investigaciones previas, sugiriendo que los estudiantes tienen gran dificultad en el uso de razonamiento probabilístico y aparecen el empleo de diversas heurísticas para la resolución de problemas probabilísticos, aún después de instrucciones formales en matemáticas. También plantean nuevas cuestiones sobre el papel del conocimiento previo de los estudiantes y el tipo de instrucción adecuada en probabilidad.

Como señalan Godino y Batanero (1994), la existencia de concepciones erróneas y dificultades no puede ser explicada sólo mediante modelos que describen los procesos mentales, sino razonando la complejidad de los objetos matemáticos y el proceso de enseñanza en la escuela, que es necesariamente incompleto. Por nuestra parte, creemos que todas estas manifestaciones de los sujetos indican que el significado personal respecto a las sucesiones de resultados aleatorios y a los modelos matemáticos que se deducen de ellas contienen elementos que se diferencian del correspondiente significado en la institución matemática. Estas diferencias de significado son lógicas en los estudiantes que no han comenzado la enseñanza de la probabilidad.

Aunque en la vida ordinaria nos enfrentamos con multitud de problemas probabilísticos y toma de decisiones en ambiente de incertidumbre, estos problemas no abarcan la variedad de matices del campo de problemas asociados a las sucesiones aleatorias. Ello es debido, entre otras razones, a que existen pocas situaciones problemáticas en la vida diaria que requieren la recogida de datos frecuenciales sobre fenómenos aleatorios, por parte de los propios ciudadanos y su utilización para hacer predicciones sobre su comportamiento futuro. Aunque este tipo de datos aparezca en la prensa o medios de comunicación, la obtención de predicciones a partir de los mismos no es un problema que concierna al propio sujeto, sino que se deja a los especialistas. En consecuencia, puesto que parte del significado de los objetos matemáticos está ligado a las situaciones problemáticas y a convenios culturalmente asumidos, los sujetos que no han recibido enseñanza de la probabilidad construyen

:n ocasiones conjuntos de prácticas incorrectas para la solución de otros problemas nás complejos, que son nuevos para ellos.

Más aún, incluso después de la enseñanza pueden persistir estas prácticas ncorrectas, posiblemente porque se ha presentado a los alumnos una muestra no epresentativa del campo de problemas ligado a las sucesiones aleatorias y de las prácticas natemáticas convenidas. Asimismo, en ésta son mucho más frecuentes los problenas sobre probabilidades de tipo laplaciano que sobre probabilidades de tipo frecuen:ial. Posiblemente, el nuevo enfoque recomendado de la enseñanza pudiera contribuir a mejorar este tipo de error en la interpretación de la probabilidades frecuenciales, siempre que se enfatice el estudio de la variabilidad en el proceso estocástico subyacente frente a los sucesos aislados. Gradualmente, sería posible acercar el significado personal que los alumnos construyen sobre los experimentos y secuencias aleatorias al correspondiente significado matemático. Consecuentemente, recomendamos nuevas investigaciones sobre el razonamiento probabilístico, como un paso esencial para que el profesor seleccione las situaciones didácticas y realice el proceso de evaluación.

Referencias

AHLGREN, A. y GARFIELD, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds), *Chance Encounters: Probability in Education* (pp. 107-134). Dordrecht: Kluwer.

BATANERO, C., GARFIELD, J. B., y SERRANO, L. (1996). Heuristics and biases in secondary school students' reasoning about probability. En L. Puig A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX PME Conference* (v2., pp. 51-59). Universidad de Valencia.

FISCHBEIN, E. y GAZIT (1984). Does the teaching of probability improve probabilitic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15(1), 1-24.

FISCHBEIN, E., SAINATI, M. y SCIOLI, M. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

FISCHBEIN, E. y SCHNARCH, D. (1996), Intuitions and schemata in probabilitic thinking. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX PME Conference* (v2., pp. 353-360). Universidad de Valencia.

GARFIELD, J. B. y DEL MASS, R. (1991). Students conceptions of probability. In D. Vere-Jones (Ed): *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, (pp. 340-349). Voorburg: ISI.

GARFIELD, J. B. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review*, 63(1), 23-54.

GLAYMAN, M. y VARGA, T. (1975). *Las probabilidades en la escuela*. Barcelona: Teide.

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. y CAÑIZARES, M. J. (1987). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

GREEN, D. R. (1982). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Eds): *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (pp. 766-783). University of Sheffield.

HACKING, I. (1975). *The emergence of probability*. London: Cambridge University Press.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, D., y TVERSKY, A. (1982). *Judgment under*

Uncertainty: Heuristics and Biases. Cambridge University Press.

KONOLD, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59-98.

KONOLD, C. (1991). Understanding students' beliefs about probability. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

KONOLD, C. (1995). Confessions of a coin flipper and wouldbe instructor. *The American Statistician*, 49 (2), 203-209.

KONOLD, C., POLLATSEK, A., WELL, A., LOHMEIER, J. y LIPSON, A, (1993). Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), 392-414.

LECOUTRE, M. P. (1985). Effect d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur le judgements probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 193- 213.

LECOUTRE, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.

LECOUTRE, M. P. y CORDIER, J. (1990). Effet du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP*, 372, 9-22.

LECOUTRE, M. P. y DURAND, J. L. (1988). Jugéments probabilistes et modéles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 357-368.

M.E.C. (1992). *Matemática. Secundaria Obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standars for school Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

OJEDA, A.M. (1984). *Understanding fundamental ideas of probability at Pre-University levels*. Ph. D. King's College. University of London.

PÉREZ ECHEVERRIA, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Universidad Autónoma.

SERRANO, L., BATANERO, C., ORTÍZ , J.J. (1996). *Interpretación de enunciados de probabilidad en tèrminos frecuenciales por alumnos de bachillerato*. SUMA, 22, 43-49.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992). Research in probability and statistics. Reflections and directions. In: D. Grows (Ed). *Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 177-197). London: Mac Millan.

SHAUGHNESSY, J. M. y BATANERO, C. (1995). Una aproximación visual a la enseñanza de las probabilidades binomiales. *UNO*, 5, 103 - 112.

APENDICE: Cuestionario

Item 1

¿Cuál de las siguientes sucesiones es más probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?

a) CCCXX b) XCCXC c) XCXXX d) CXCXC

e) Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

Item 2

¿Cuál de las siguientes sucesiones es menos probable que resulte al lanzar una moneda equilibrada 5 veces?.

a) CCCXX b) XCCXC c) XCXXX d) CXCXC

e) Las cuatro sucesiones son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

Item 3

En el hospital de cierta ciudad se registra el número de niños y niñas recién nacidos ¿Cuál de los siguientes casos te parece más probable?:

a) Que en los próximos 10 nacimientos 8 o más recien nacidos sean varones.

b) Que en los próximos 100 nacimientos 80 o más recién nacidos sean varones.

c) Las dos cosas anteriores a) y b) son igual de probables.

¿Por qué has dado esta respuesta?

Item 4

Si observamos los siguientes 10 nacimientos, ¿Qué te parece más probable?

a) La fracción de varones será mayor o igual a 7/10.

b) La fracción de varones será menor o igual a 3/10.

c) La fracción de varones estará comprendida entre 4/10 y 6/10.

d) Las tres opciones anteriores a), b), c) son igual de probables.

Indica por qué das esta respuesta.

Item 5

Cuando lanzamos dos dados simultáneamente:

a) Hay las mismas posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el número 5.

b) Hay más posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el número 5.

c) Hay menos posibilidades de obtener un 5 y un 6 que de obtener dos veces el número 5.

d) Es imposible saberlo.

Razona tu respuesta.

Item 6

Cuando lanzamos simultáneamente tres dados, ¿cuál de éstos resultados es más fácil que ocurra?

a) Obtener un 5, un 3 y un 6

b) Obtener dos veces el 5 y una vez el 3

c) Obtener tres veces el número 5
d) Todos estos resultados son igualmente probables
e) Es imposible saberlo

Item 7
¿Es alguna de las afirmaciones del ítem 6 menos probable que las otras?

Item 8
Una ruleta está dividida en cinco áreas iguales, numeradas del 1 al 5. ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable que ocurra al girar la ruleta tres veces?
a) 2, 1, 5, en este orden exactamente.
b) 2, 1, 5, en cualquier orden.
c) 1, 1, 5, en cualquier orden.
d) Las opciones a) y b) son igual de probables.
e) Las opciones a) b) y c) son igual de probables.