Construcción de un producto notable a través de representaciones gráficas

Riaño Vargas, Angie - Rodríguez, Yenifer - Sánchez, Julián

angie010712@hotmail.com - jenyroma@yahoo.es - julis9210@hotmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

A continuación se detalla una experiencia de aula realizada en el primer semestre del año 2013 en el I.E.D José Félix Restrepo, que da cuenta de la construcción de un producto notable: el cuadrado de la suma de dos cantidades a partir del desarrollo de una situación fundamental propuesta en grado octavo.

Palabras clave: Producto notable, representaciones, generalización.

1. Introducción

El conocimiento matemático aparece como un producto "acabado" de manera que, pareciera que quien lo aprende no entra en relación directa con su construcción. En particular, para la construcción de un producto notable, se requiere de un proceso geométrico y aritmético que en muchas ocasiones es eclipsado por la introducción de fórmulas que deben ser memorizadas:

> El alumno al recibir conceptos como los productos notables de forma memorística, no desarrolla todo su potencial que les permita relacionar sus conocimientos para llegar a descubrir nuevos aprendizajes; mientras que, con diagramas esquemáticos y ejemplos volumétricos, ayudan a la comprensión de estos elementos matemáticos de suyo abstractos. (Aréstegui, 2006, p. 34).

En consecuencia se cavila acerca de la importancia de favorecer ambientes en los que el estudiante desarrolle procesos de manera inductiva que lo lleve a interpretar y justificar las identidades o productos notables. Una propuesta didáctica que surge a razón de esta iniciativa, es una situación fundamental, Brousseau (citado por Panizza 2004); que busca propiciar en los estudiantes la conceptualización del producto notable del cuadrado de la suma de dos cantidades a partir de representaciones gráficas.

2. Marco de referencia

El marco de referencia se enfoca hacia la clasificación de errores provenientes de la aritmética generalizada, dificultades en convenio de notación y errores que se convierten en obstáculos de enseñanza, (D'Amore, 2008). Paralelamente se aborda el cambio de registro del visual al simbólico, Duvan (citado por Palarea 1999); en los que se divisa el proceso geométrico para construir el producto notable de una manera inductiva, (Aréstegui, 2006).

La transición aritmética al algebra trata de darle a entender al alumno el paso del número a la variable como operador, (Pretexto, 2002). Este cambio es uno de los tránsitos más difíciles en el desarrollo gradual de los conocimientos matemáticos, ya que se ponen en tela de juicio muchos de los conceptos que se aprendieron durante largo tiempo en la primaria y parte del bachillerato.

Martínez (2010), resalta que para interpretar propiedades en álgebra se requiere una interpretación de las operaciones diferente a la entendida desde la aritmética, que se liga a una acción física y relaciona el igual con un carácter unidireccional y no con un carácter bidireccional,: ¨*al presentar en forma general propiedades como, para todo a ,m ,n* $\in \mathbb{R}$ *se tiene que* $a^m x a^n = a^{m+n}$*, una de las dificultades que encuentra el estudiante para interpretarla es ver la doble dirección del igual, es decir, no solamente como el resultado de una operación*¨ (p. 22).

Al desconocer propiedades de las estructuras aditivas y multiplicativas, se evocan errores en el manejo de símbolos algebraicos: al considerar $3(b+2) = 3b + 2$, se evidencia que no se ha aplicado de una manera correcta la propiedad distributiva, pues la expresión indica que se tienen 3 veces $(b + 2)$, es decir, 3 veces b y 3 veces 2.

Este tipo de errores, dificultades y obstáculos ocurren como producto de una enseñanza memorística en la que se aplican algoritmos sin dotarlos de significado, es por ello que en esta propuesta se desarrolla una situación fundamental para una construcción de un producto notable, más allá de enseñar una fórmula.

3. Aspectos metodológicos

Para el desarrollo de esta propuesta se tiene en cuenta una metodología de situaciones didácticas propuestas por Brousseau (1968). En primer lugar, se propone una situación problemática que tiene como fin construir una pista de hielo con medidas particulares, realizando cuestionamientos para llevar de manera inductiva a una generalización de dimensiones de la pista.

En segundo lugar, se lleva a cabo una fase de acción en la que el estudiante trabaja de manera individual proponiendo estrategias de solución.

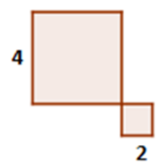
En tercer lugar, se emprende una fase de formulación en la que un alumno *emisor* debe formular explícitamente un mensaje destinado a otro alumno *receptor* que debe comprender el mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) con base a la estrategia elaborada por su compañero con el fin de validarla o no.

En cuarto lugar, se desarrolla una fase de validación en la que dos alumnos (o grupos de alumnos) deben enunciar aserciones y ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Las afirmaciones propuestas por cada grupo son sometidas a la consideración del otro grupo, que debe tener la capacidad de “sancionarlas”, es decir ser capaz de aceptarlas, rechazarlas, pedir pruebas, oponer otras aserciones.

En último lugar, se organiza una institucionalización, en la que se revoca lo aprendido por el alumno y lo enseñado por el docente, la puesta en escena de lo que se realizó para la construcción de un producto notable a partir de una generalización.

En lo que concierne al análisis de información, se implementa una metodología de investigación a través de categorías de análisis (niveles de enseñanza) que se sustentan a partir de teoría expuesta en el marco de referencia.

4. Desarrollo de la temática

SITUACIÓN FUNDAMENTAL: "Completando la pista de hielo"	Se quiere construir una pista de hielo de forma cuadrada, cuya área es de $36m^2$. Hasta el momento la constructora ha conseguido dos lotes ubicados de la siguiente manera y con las siguientes medidas:  ¿Qué medidas deben tener los lotes que hacen falta para construir la pista? Realiza el proceso geométrico para hallarla. Si consideras un área de $64m^2$ ¿qué dimensiones deben tener los 4 lotes? Represéntalos Investiga casos similares y represéntalos geométricamente Generaliza los casos para cualquier área que pueda tomar la pista. Represéntalos geométricamente.
Niveles y porcentaje  	N1: Determina la generalidad de completar el cuadrado de una manera inductiva a partir de un proceso geométrico, a raíz de esto construye una expresión que determine cualquier valor en la representación, luego es capaz de construir el producto notable $(a+b)^2$ N2: Determina la generalidad de completar el cuadrado de una manera inductiva, a partir de un proceso aritmético, pero no lo relaciona con un proceso geométrico para determinar por simple inspección el producto notable $(a+b)^2$ N3: Determina casos particulares de completar el cuadrado, realizando un proceso aritmético que no le permite llegar a la generalidad para determinar por simple inspección el producto notable $(a+b)^2$

Análisis de resultados

Primer caso: área $\boldsymbol{36\ m^2}$

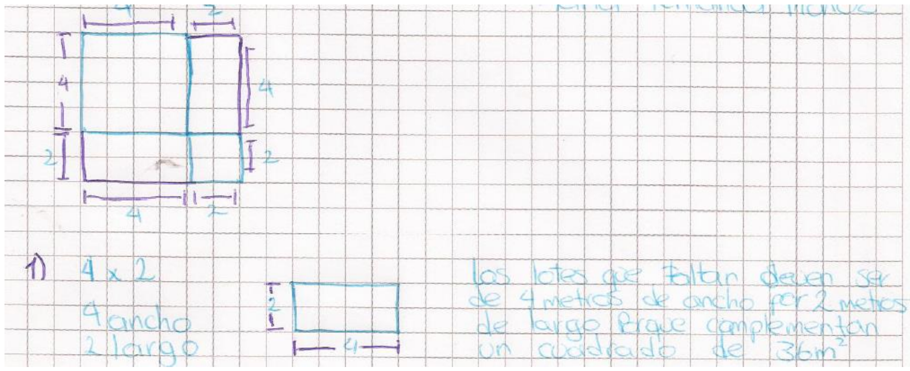


Figura 1. El estudiante define la medida de cada uno de los lados del cuadrado que completó. Esto le permite deducir la medida que debe tener cada rectángulo para completar la pista de hielo. En este caso en paricular se observa, un adecuado análisis dimensional en el cual el estudiante tiene en cuenta tanto la cantidad de magnitud como la magnitud ($4metros$, $2\,metros$), lo que le permite reconocer que al hallar el área $36\,m^2$, la unidad de medida cambia y pasa a ser una ¨*unidad compuesta*¨, (Steffe, 1994, p.4).

Casos similares cambiando el área total del lote

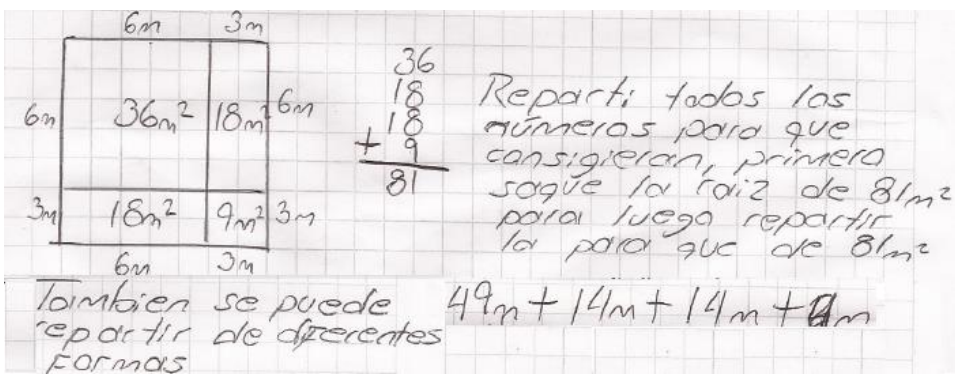


Figura 2. El estudiante enuncia otro manera para hallar las medidas de los lados del cuadrado dado su área, reconociendo que la raíz del área da información acerca de los lados, esto evidencia por un lado el cambio de unidad de m^2 a m, y la manera de relacionar aritméticamente lo construido geométricamente para un caso en particular, que llevaría de una manera inductiva a la distinción del producto notable trabajado. Adicional a lo anterior, el estudiante reconoce que es posible completar el cuadrado con diferentes medidas, como se muestra en la figura, para obtener un lote de $81\,m^2$, aunque al mostrar otra repartición $49\,m^2 + 14\,m^2 + 14\,m^2 + 4\,m^2$ hay un error con el análisis dimensional que expresa en medida de longitud y no de área.

Caso de generalización

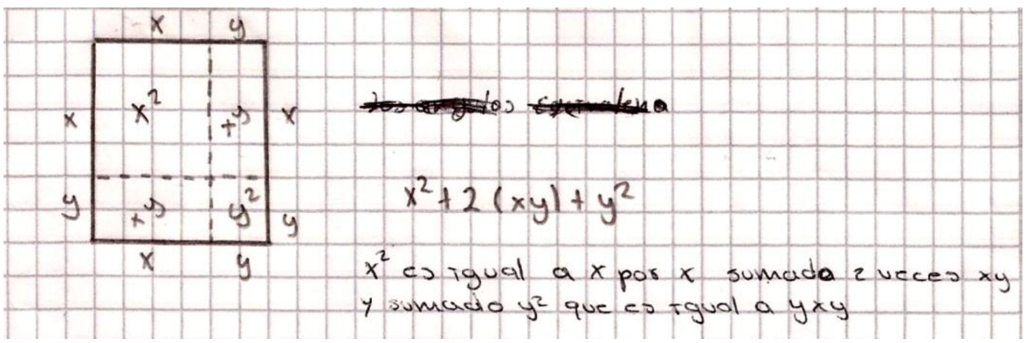


Figura 3. El estudiante describe un proceso geométrico para completar el cuadrado: ¨*Se construye un cuadrado de lado a unidades, otro de lado b unidades, y dos rectángulos de largo a y ancho b Uniendo las cuatro figuras anteriores, se forma un cuadrado de $a + b$¨,* (Baldor citado por García, 2012, p. 35).

5. Conclusiones

La situación diseñada permitió ahondar un trabajo de generalización del producto notable: el cuadrado de la suma entre dos cantidades, encontrando estrategias que llevaron a los estudiantes a deducirla y explicarla basándose en hechos geométricos y cálculos aritméticos de manera inductiva; así mismo se evidenciaron obstáculos y errores provenientes de la aritmética generalizada en cuanto el análisis dimensional.

Referencias bibliográficas

- Aréstegui L. (2006). Estrategia didáctica para facilitar la construcción de los productos notables algebraicos en el tercer grado de educación secundaria. Tesina, opción de ensayo para obtener el título de licenciado en educación. México D.F.: UPN
- D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. Revista de la ASOVEMAT. Vol. 17, N° 1, p. 87-106.
- Palarea, M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico, reflexiones de una investigación. NÚMEROS Revista didáctica de las matemáticas, 40, p. 3-38.
- Panizza, (2004). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. Recuperado 06 de abril de 2013 de: http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf.