Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural

Learning Mathematical Models in a Sociocultural Environment

Aprendizagem da modelação matemática em um meio sociocultural

Fernando Hitt* 0000-0002-9106-8806
Samantha Quiroz-Rivera** 0000-0002-1332-8000

Artículo de investigación
Revista Colombiana de Educación, N.° 73. Segundo semestre de 2017, Bogotá, Colombia.

doi: 10.17227/01203916.73rce151.175

Para citar este artículo: Hitt, F., y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. *Revista Colombiana de Educación,* (73), 153-177.

Recibido: 25/01/2017
Evaluado: 22/03/2017

* Doctor en Ciencias. Profesor del Departamento de Matemáticas. Universidad de Québec, Canadá. Correo electrónico: ferhitt@yahoo.com

** Doctora en Innovación Educativa. Tecnológico de Monterrey, México. Correo electronico: samanthaq.rivera@gmail.com

Resumen

La investigación en torno a la modelación matemática ha llevado al cambio de currículo en diferentes sistemas educativos en el mundo. Estudios recientes han mostrado como variable importante en la modelación matemática el proceso de comunicación entre los estudiantes para la resolución de tareas complejas. El presente estudio tiene como propósito comprender cómo estos procesos de comunicación apoyan el aprendizaje de las matemáticas en la resolución de situaciones problema. Aplicando la teoría de la actividad, se analizaron las representaciones de cuatro estudiantes acerca de la noción de covariación, así como su evolución a través del uso de una metodología que privilegia el debate científico y la autorreflexión. Los resultados muestran que las representaciones intuitivas de los estudiantes tienen un carácter funcional y espontáneo, y se pueden modificar a través de la interacción y el diálogo dentro de un trabajo en equipo. Con ello se promueve la equidad en la construcción del conocimiento.

Palabras clave

representaciones; modelación matemática; covariación; teoría de la actividad; equidad

Abstract

Mathematical modeling research has led to a change in the curriculum of education systems around the world. Recent studies show that the communicative process among students when they carry out complex tasks is an important variable during mathematical modeling. The main purpose of this research is to understand how these communicative processes influence the learning of mathematics when solving problems. Through the Activity Theory, we analyzed four students' representations as they solved a problem related to covariation between variables. We also analyzed the evolution of those representations through the use of a methodology that privileges scientific debate and self-reflection. Results show that the students' intuitive representations are functional and spontaneous, and can be modified by means of interaction and dialog in teamwork. This kind of work enhances equity during the knowledge construction process.

Keywords

representations; mathematical modeling; covariation; activity theory; equity

Resumo

A pesquisa sobre a modelação matemática produziu uma mudança no currículo de diversos sistemas educativos no mundo. Estudos recentes mostraram o processo de comunicação entre os estudantes para a resolução de tarefas complexas como variável importante na modelação matemática. Este estudo visa compreender como esses processos de comunicação apoiam a aprendizagem das matemáticas na resolução de situações problema. Aplicando a teoria da atividade, foram analisadas as representações de quatro estudantes acerca da noção de covariação, assim como sua evolução através do uso de uma metodologia que privilegia o debate cientifico e a autorreflexão. Os resultados evidenciam que as representações intuitivas dos estudantes têm um caráter funcional e espontâneo, e podem ser modificadas através da interação e o diálogo dentro do trabalho em equipe. Com isso, promove-se a equidade na construção do conhecimento.

Palavras chave

representações; modelação matemática; covariação; teoria da atividade; equidade

La enseñanza de las matemáticas en el siglo XX estuvo marcada por el interés de la psicología en el desarrollo de la inteligencia en el medio escolar, que se impulsó a través de la corriente de resolución de problemas (*problem solving*). Hasta este entonces, la preponderancia de los estudios en inteligencia se enfocaba hacia la resolución de problemas tipo acertijo (*puzzle*), que buscaban el desarrollo de un pensamiento lateral (DeBono, 1997), una iluminación (*insight*). Un ejemplo característico de un problema tipo *puzzle*, en donde se quiere medir la "fijación", es el proporcionado por Myers (2012) sobre "incapacidad de ver un problema desde una nueva perspectiva": ¿Cómo colocar seis cerillos para formar cuatro triángulos equiláteros? Contrario a estas ideas, los estudios de Brownell (1942) versaron sobre la resolución de problemas aritméticos en la escuela primaria, lo que llevó hacia el estudio del desarrollo de habilidades matemáticas en el aula. Fueron dichos estudios los cimientos para el desarrollo de habilidades individuales desde un punto de vista educativo.

Centrar la didáctica de las matemáticas en el individuo trajo consigo un fortalecimiento de marcos teóricos constructivistas tales como la visualización matemática (Zimmerman & Cuningham, 1991) y la noción de representación (Duval, 1993, 1995; Janvier, 1987), entre otros. Desde finales del siglo XX se fortalece un nuevo paradigma, que promueve un cambio teórico-metodológico, en busca de un acercamiento del aprendizaje dentro de un marco socioconstructivista. Sin embargo, como lo señala Von Glasersfeld (2004), al haber avanzado más de cuarenta años en una teoría constructivista (e incluso radical) centrada en el individuo, no es posible transferir directamente todos esos conocimientos a un acercamiento social del aprendizaje. En sus propias palabras, este autor señala:

> El *constructivismo social* es un movimiento reciente iniciado por personas que afirman que el constructivismo radical ignora el papel de las interacciones sociales en la construcción del conocimiento. Esta declaración, según entiendo, se justifica en parte por el hecho de que hasta ahora ni Piaget, ni el constructivismo más reciente, han propuesto un modelo detallado del funcionamiento de la interacción social en la misma perspectiva del constructivismo. Sin embargo, Piaget y todos los que fueron inspirados por su trabajo siempre han sostenido que la interacción social es muy importante en la construcción del conocimiento. Pero primero hemos tenido que desarrollar modelos para todas las construcciones elementales que debe realizar un organismo cognitivo antes de que se pueda comenzar a conocer e interactuar con los demás. Por otra parte, por lo que sé, el 'constructivista social' tiende a considerar a la sociedad como dada, y un constructivista radical no puede aceptar eso. En mi opinión, la sociedad se debe analizar como un concepto construido si vamos a explicar y valorar correctamente su papel en la posterior construcción de conceptos. (Traducción libre, p. 294).

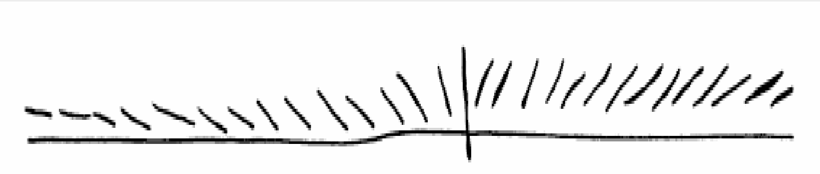
Bajo esta línea de razonamiento, según Von Glasersfeld, los constructos teóricos en un marco constructivista no son directamente transferibles a otro marco centrado en la construcción social del conocimiento. Como lo señalan Von Glasersfeld (2004) y Duval (2005), la teoría constructivista considera que se debe conocer más a fondo al individuo y la manera en que construye su conocimiento, antes de pensar en una co-construcción del conocimiento.

El estudio sobre una construcción social del conocimiento matemático produjo la aparición de investigaciones que versaban sobre procesos de modelación matemática. Retomando la modelación matemática como una estrategia didáctica, esta se definió como un proceso cíclico en el que se plantea a los estudiantes una situación problema enmarcada en un aspecto de la vida cotidiana, se promueve su resolución a través de la creación de un modelo matemático que ha de ser resuelto y cuya respuesta debe estar ligada al contexto inicial en el cual fue inserto el problema (Blum, 2002; Niss, Blum y Galbraith, 2007; Quiroz 2015; Rodríguez y Quiroz, 2015).

Plantear situaciones problema a los estudiantes cuando trabajaban en colaboración puso en evidencia la importancia del rol de la noción de representación. Sin embargo, el tipo de representaciones que los estudiantes producen cuando se les plantea una situación problema en un marco de modelación matemática distan mucho de ser consideradas representaciones institucionales, que habían sido el foco de estudio de la teoría de los registros de representación de Duval (2006).

Ejemplo de ello es la investigación de DiSessa, Hammer, Sherin y Kolpakowski (1991), quienes proponen a un grupo de estudiantes la situación que se presenta en la figura 1.

Representar la situación siguiente: Un automovilista conduce a través del desierto y en un momento dado siente mucha sed. Al ver un cactus, se detiene para extraer el líquido de este y beber. Después, regresa al auto y retoma su camino tranquilamente.



Explicación de un estudiante posterior al trabajo en equipo: "Si la línea es horizontal, él va muy rápido. Cuanto mayor sea la inclinación de la línea, él conduce más despacio. Y después, cuando llega aquí [línea vertical] él se detiene".

Figura 1. Representación no institucional mostrada por DiSessa et al. (1991, p. 131)

La respuesta de un equipo de estudiantes muestra perfectamente el uso de una representación espontánea (no institucional), para representar la covariación entre dos variables de manera no usual (tiempo y velocidad). Esta no pertenece a ninguno de los registros propuestos por la teoría de los registros de representación. De acuerdo con Duval (2006), este tipo de representaciones se consideran como transitorias y les otorga, desde nuestro punto de vista, menor valor que a las representaciones institucionales. La investigación de DiSessa et al. (1991) es una muestra de cómo las representaciones espontáneas emergen regularmente en los procesos de modelación y de resolución de situaciones no rutinarias. De hecho, desde una perspectiva vygotskiana, Bartolinni Bussi (1996) establece que

> El enfoque Vygotskiano enfatiza también el papel funcional del dibujo y la lectura de imágenes en el desarrollo general del niño (cognitivo, emocional, etc.); como tal, el dibujo no es tratado como aislado de otras habilidades mentales del niño. (p. 18).

Actualmente, los sistemas educativos alrededor del mundo privilegian el uso de procesos de modelación matemática como estrategia en las aulas de clase de los diferentes niveles educativos. A manera de ejemplo, desde el 2001 y el 2004, respectivamente, las escuelas primarias y secundarias de la provincia de Quebec siguen un programa basado en competencias. Al estudiar las matemáticas, la primera competencia disciplinaria es precisamente la resolución de situaciones problema a través de un aprendizaje socioconstructivista. La primera competencia (MELS, 2007) queda definida como:

- ¿Qué caracteriza una situación problema? En matemáticas, una situación problema debe satisfacer una de las dos condiciones siguientes:
- no ha sido presentada anteriormente en el curso del aprendizaje;
- la obtención de una solución satisfactoria exige revisar una combinación no aprendida de reglas o de principios, entonces el estudiante puede lograr o no el aprendizaje;
- el producto no ha sido presentado antes. (Traducción libre, p. 22)

Las características de esta competencia implican directamente los procesos de modelación matemática que, por cierto, todo parece indicar que no fueron conscientemente establecidos en los programas de estudio y libros de texto. Todo ello ha implicado un proceso muy largo de adaptación en Quebec.

En resumen, los cambios curriculares a partir de los noventa y principios de este siglo nos muestran la importancia de:

- conocer más a fondo cómo se realiza un aprendizaje en un ambiente social (socioconstructivista o sociocultural),

» estudiar el rol de las diferentes representaciones que emergen en matemáticas bajo estos tipos de aprendizaje,
» estudiar qué es una situación problema y cómo se integra en un aprendizaje social del conocimiento,
» estudiar el tipo de método de enseñanza adecuado al tipo de aprendizaje señalado,
» elaborar actividades *ad hoc* de acuerdo a un ambiente social del aprendizaje

A continuación se exponen los elementos que la presente investigación retoma para el estudio del tipo de aprendizaje elegido.

Componentes de la teoría de la actividad

La búsqueda de elementos que permitan la construcción de un marco teórico coherente sobre las representaciones que incluya a las representaciones espontáneas (como la mostrada en DiSessa et al., 1991), y que permita su evolución en un ambiente de aprendizaje en colaboración, llevó a poner en consideración las investigaciones de Leontiev (1975) sobre la actividad en el proceso de aprendizaje en colaboración.

Si bien desde los estudios de Vygotsky se retomaron importantes elementos, como lo social, el rol del instrumento y el signo (Montealegre, 2005), es Leontiev el responsable de la formulación de la teoría de la actividad.

Para nuestra investigación retomamos como elementos importantes de dicha teoría los siguientes:

» La orientación: corresponden a este elemento las necesidades, los motivos y las tareas que se pretenden conseguir.
» La ejecución: consiste en la realización misma de acciones y operaciones relacionadas con los elementos mencionados en el ítem anterior (Montealegre, 2005).

Es importante poner de manifiesto la diferencia entre acciones y operaciones de acuerdo con Leontiev (1975). Para él, las acciones ligan la actividad según el contexto y pueden ser mentales y físicas. Cuando las acciones son asimiladas por el cuerpo y la mente de la persona, se puede decir que se convierten en operaciones. Es decir, un proceso de aprendizaje pasa por dos etapas: una nueva en la que mente y sentidos encuentran nuevas sensaciones (acciones), y otra en la que estas acciones son asimiladas y uno es capaz de reproducirlas (operaciones).

Desde una perspectiva sociocultural, adoptada por el mismo Leontiev, la evolución de una acción a una operación estaría restringida si no se propiciara la comunicación entre los individuos. De esta manera, cuando un estudiante produce una representación espontánea, emergente de sus acciones, esta podría no llegar a convertirse en operación (considerando la representación interna y externa) si no está ligada a un proceso de comunicación.

Para Radford (2006), el proceso de comunicación ha sido estudiado desde las tradiciones saussureana, peirceana y vygotskiana. Teniendo en cuenta los preceptos ubicados en cada una de estas tradiciones, aquí consideramos la última como la indicada para este estudio. Así, retomamos la definición de Voloshinov (1973), quien indica que la comunicación es el motor principal para la construcción de un signo. Además concordamos en que en la construcción de un signo, lo que es importante es el proceso que lleva cierta comunidad en su construcción y no el producto final, que es el signo (Eco, 1975/1992; Radford, 2002, 2003). En consecuencia, una representación espontánea ligada a la resolución de un problema o situación problema podrá evolucionar en la discusión con otros y convertirse en un signo dentro de esa microcomunidad. Desde este punto de vista, el territorio del signo trasciende al individuo y se consolida en la comunicación con otros (véase la figura 2).

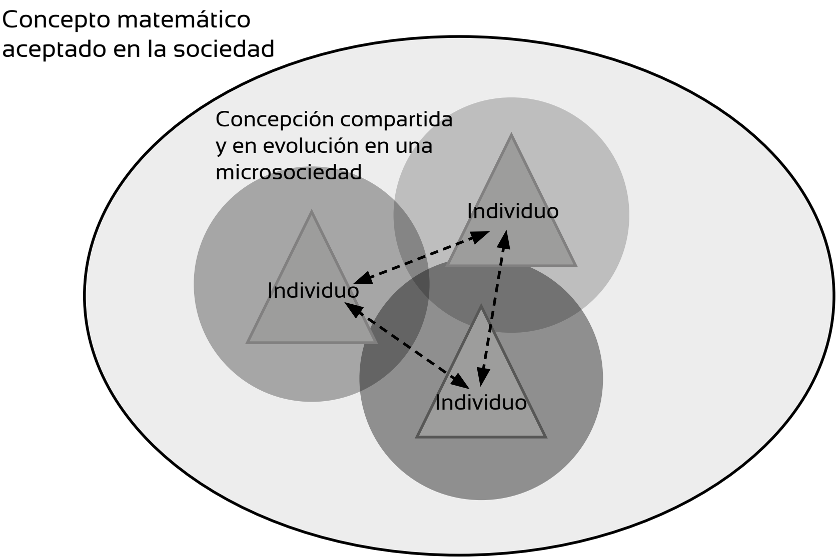


Figura 2. Nuestra interpretación del territorio del signo según Voloshinov (1973) y evolución del mismo en un aprendizaje equitativo

Fuente: elaboración propia.

El estudio de representaciones desde una perspectiva sociocultural

De acuerdo con lo expuesto, la presente investigación reconoce la importancia del estudio de las representaciones en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, consideramos necesario buscar nuevos elementos de análisis que difieran de los centrados solo en el individuo, como lo hace el acercamiento constructivista de Tall y Vinner (1981), o teorías como la APOS (Asiala et al., 1996). En particular, nos parece necesario dejar de lado herramientas teóricas que solo privilegian el uso de representaciones institucionales.

Reconocemos la importancia de profundizar en teorías que consideren como fundamentales en el proceso de aprendizaje equitativo las representaciones no institucionales que emergen de manera intuitiva cuando se transita por procesos de modelación matemática y de resolución de problemas, y su evolución durante los procesos de comunicación.

En este documento, queremos ejemplificar la emergencia de representaciones no institucionales y su evolución dentro de los procesos de comunicación en el aula de matemáticas. Para ello, hemos seleccionado el concepto de covariación entre variables.

Con respecto a este y otros muchos conceptos de la matemática, representaciones no institucionales han estado presentes en la historia del desarrollo de las ideas matemáticas, como es el caso de las ideas propuestas por Oresme (Edwards, 1937) y Galileo (Azcárate, 1984) sobre la covariación entre variables, que llevaron posteriormente al desarrollo del concepto de función. Las representaciones presentadas por Oresme y Galileo muestran ideas intuitivas que surgieron para dar respuesta a un problema físico (tiempo y velocidad, cuerpo que cae considerando tiempo y distancia recorrida, etc.). Así dieron cuenta de un pensamiento divergente para proporcionar soluciones creativas y funcionales (véase la figura 3).

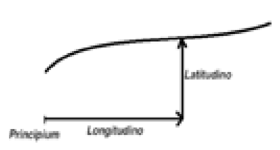
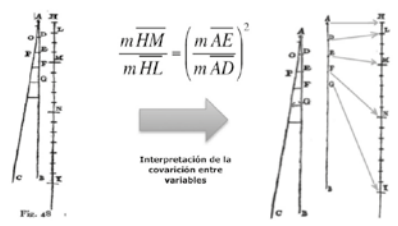
Interpretación de la propuesta de Oresme para representar un fenómeno en forma gráfica	Interpretación de un teorema de Galileo sobre la caída libre de un objeto. Consideración de covariación entre variables: tiempo (línea vertical), velocidad línea en diagonal, distancia recorrida por el cuerpo en su caída (línea vertical derecha).
	

Figura 3. Interpretación de las representaciones iniciales de Oresme (Costé 1997, p. 1) y de Galileo (Azcárate 1984, p. 207)

Estas representaciones de carácter funcional y espontáneo (siguiendo una línea de razonamiento como la de Leontiev y Voloshinov) permiten su evolución en un proceso de comunicación. A partir de este momento, nos referiremos a estas representaciones intuitivas e iniciales como “Representaciones funcionales-espontáneas” (R_{F-E}).

Desde nuestra posición, consideramos que las R_{F-E} emergen de manera natural en los procesos de modelación matemática, y de acuerdo a nuestro marco teórico, a través de un proceso de comunicación es posible su evolución, en un proceso equitativo, hacia las representaciones institucionales.

La enseñanza a través de procesos de modelación matemática utilizando la metodología Acodesa

Nuestra propuesta de enseñanza considera primordial la noción de R_{F-E} y la posibilidad de su evolución dentro de una comunidad en un trabajo en colaboración en el aula de matemáticas, para responder a la pregunta ¿Qué metodología es apropiada en un ambiente de interacción social en el aprendizaje de las matemáticas?

En un acercamiento sociocultural, considerando un acercamiento de Aprendizaje colaborativo, Debate científico y Autorreflexión (Acodesa), queremos resaltar la importancia del trabajo en colaboración, del debate científico (Legrand 1993) y la autorreflexión en el aula de matemáticas. Este acercamiento nos permite organizar la práctica en el aula como se muestra en la figura 4.

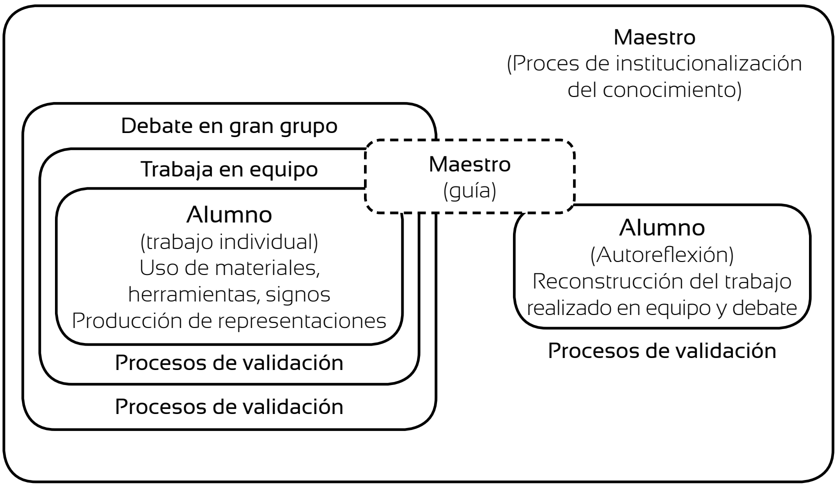


Figura 4. Metodología de enseñanza Acodesa (Hitt y González-Martín 2015)

En la figura 4 se muestran cinco etapas que constituyen la metodología de enseñanza Acodesa:

Etapa 1. Trabajo individual. Producción de $R_{F\text{-}E}$ para entender la tarea. El trabajo individual permite al estudiante representarse la situación problema o el problema a fin de prepararse para una discusión en la cual sus ideas tengan mayor impacto. En esta etapa las representaciones funcionales-espontáneas emergen en forma natural.

Etapa 2. Trabajo en equipo sobre la misma tarea. Procesos de discusión y validación. Refinamiento de las $R_{F\text{-}E}$.

De acuerdo con Voloshinov (1973) y Davydov (1999), en un marco teórico de la actividad no debemos oponer la práctica a la comunicación, sino más bien considerarlas como inseparables. Esto para permitir la evolución de las $R_{F\text{-}E}$ que emergieron durante la primera etapa en el acercamiento individual. Al mismo tiempo, el proceso de validación se presenta de manera natural en el intercambio de ideas. La distribución del trabajo es importante: uso de tecnología por una persona, uso de materiales por otra, toma de datos y escritura de resúmenes de las acciones realizadas por otra, etc. Es importante trabajar en equipos de tres personas (Prusak, Hershkowits y Schwarz, 2013). El refinamiento y la evolución de las representaciones se realizan de manera natural y equitativa.

Etapa 3. Discusión (podría provocar un debate científico). Procesos de discusión y validación (refinamiento de representaciones). La discusión en plenaria no es fácil de dirigir, el maestro tendría que promover la comunicación científica en el sentido de Legrand (1993) creando un ambiente de discusión científica, en donde la validación sea un elemento esencial, de manera que se favorezca un aprendizaje equitativo. Cada equipo propone sus resultados y los pone a consideración de toda la clase. Una vez más las $R_{F\text{-}E}$ pasan por otra etapa de refinamiento. Es importante llegar a un acuerdo en el grupo. Sin embargo, también se debe tener en cuenta la *fugacidad del consenso*; es probable que los estudiantes consideren que han comprendido sin que verdaderamente hayan interiorizado los resultados y nuevas representaciones (Thompson, 2002). La siguiente etapa es insustituible.

Etapa 4. Regreso a la tarea en forma individual (trabajo individual de reconstrucción y autorreflexión). Esta etapa es crucial en la metodología Acodesa, ya que todo el trabajo individual y en equipo una vez pasado el consenso se puede olvidar rápidamente. La estabilidad del conocimiento adquirido en las etapas anteriores no podrá alcanzarse si no se pasa por un periodo de reconstrucción (autorreflexión) de lo realizado.

Etapa 5. Institucionalización del conocimiento. Procesos de institucionalización y uso de representaciones institucionales. En esta etapa, el maestro resume los resultados de los equipos, muestra la evolución de las representaciones espontáneas que emergieron en las etapas anteriores y discute su eficacia antes de introducir las representaciones institucionales y los procesos correctos.

A través del uso de este método de enseñanza se realizó una investigación con estudiantes de secundaria en Quebec (Hitt y González-Martín, 2015) sobre el tema de la modelación matemática que nos permitiera sustentar nuestros hipótesis, con un marco teórico basado en los trabajos de investigadores seguidores de la escuela soviética con respecto al aprendizaje en un medio sociocultural y en la construcción del signo desde esta perspectiva. Nuestro acercamiento metodológico también lo investigamos en un medio sociocultural que incluyera el uso de tecnología (Hitt, Saboya y Cortés, 2016, 2017).

En este documento, hemos querido refinar nuestro acercamiento teórico-metodológico y proporcionar definiciones más apropiadas al marco teórico en el que nos estamos basando.

La modelación matemática desde la teoría de la actividad

Con las ideas descritas anteriormente como marco teórico, en la figura 5 presentamos el diagrama que describe nuestra postura sobre modelación matemática retomando elementos importantes de la teoría de la actividad.

Consideramos que es a través del planteamiento de una situación problema como puede generarse un pensamiento diversificado con miras a su resolución. La búsqueda de la solución conforma la orientación de la actividad misma de los estudiantes, puesto que les proporciona una meta u objetivo hacia el cual dirigir sus acciones. Por ello, en la figura 4 es posible apreciar que en esta primera sección se presenta una situación problema a los estudiantes, allí está presente la etapa de orientación presentada por Leontiev (1973).

En un segundo momento, durante el proceso de resolución, son los estudiantes quienes generan las R_{F-E} y estas evolucionan a través de un proceso de comunicación en un trabajo en colaboración. Las ideas intuitivas plasmadas en las R_{F-E} y las representaciones siguientes que se generan muestran el tipo de acción que realizan los estudiantes para ejecutar la actividad.

En un tercer momento, los estudiantes a través del diálogo y la reflexión constantes en sus grupos de trabajo y también en un proceso de comunicación de ideas en el salón de clases (considerada como aula equitativa) logran que sus acciones se conviertan en operaciones, sistematizando las actividades que llevan a cabo para la resolución de la situación problema.

Es importante mencionar que el paso entre acciones y operaciones está determinado tanto por un medio sociocultural del aprendizaje como por la promoción de tratamiento entre representaciones que llevarán a la evolución de las $R_{F\text{-}E}$ hacia las representaciones institucionales (R_I).

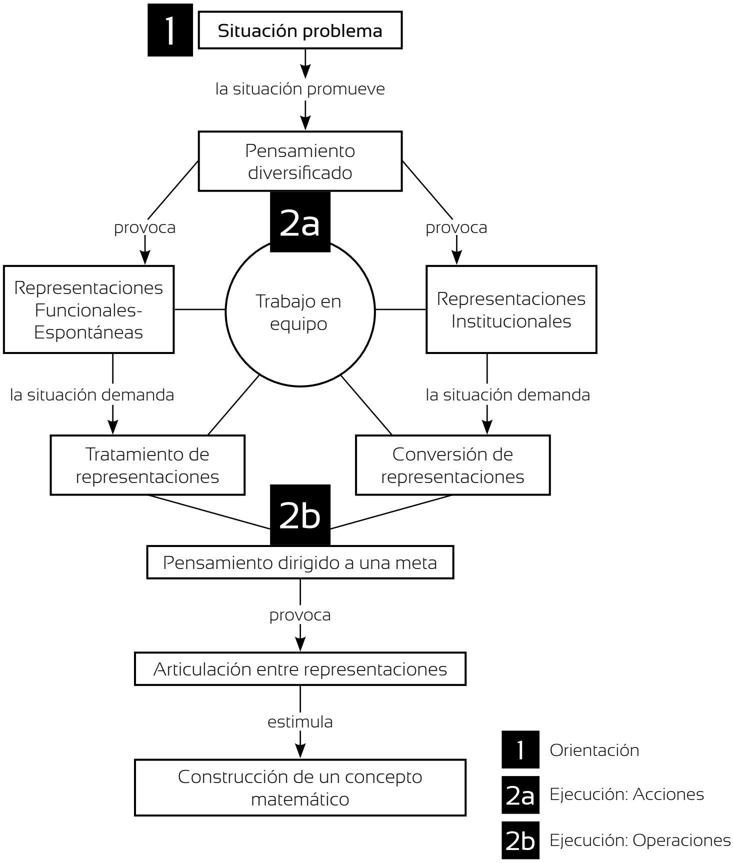


Figura 5. Esquema propuesto para el estudio de un proceso de modelación con elementos de la teoría de la actividad

Fuente: elaboración propia.

Metodología

El presente estudio se basa en un paradigma cualitativo de investigación, enmarcado en un estudio de caso. La recolección de datos tuvo lugar en una escuela secundaria pública de la ciudad de Montreal, Canadá. La población elegida fueron estudiantes de tercer grado (la escuela secundaria consta de cinco grados) de dicho nivel educativo que cursaban la materia de matemáticas.

La actividad diseñada forma parte de una serie de cinco situaciones problema que se aplicaron en un periodo largo para promover una evolución de significados que dieran pie a una co-construcción cognitiva de los estudiantes sobre los conceptos de covariación entre variables y función. Las actividades se implementaron en dos grupos de 24 y 36 participantes respectivamente, con una edad entre 14 y 15 años. Una meta concerniente a las cinco actividades era el desarrollo de representaciones gráficas y algebraicas de las funcionales a través de la noción de covariación entre variables (véase la tabla 1). Las cinco actividades, en sus primeras etapas, promovían la emergencia de las R_{F-E}; se les solicitó explícitamente a los estudiantes que produjeran una representación externa. Es necesario recordar que los dibujos (diagramas) y las representaciones verbales son dos maneras posibles de externar las representaciones de los estudiantes a fin de conocer sus R_{F-E}.

Tabla 1. Organización de las actividades y tipo de representación solicitada

Actividad/Representación	Diagrama	Verbal	Gráfica	Algebraica
El fotógrafo	✓	✓	x	x
El explorador	✓	✓	✓	x
El *jacuzzi*	✓	✓	✓	x
Los cuadrados	✓	✓	✓	✓
Las sombras	✓	✓	✓	✓

Fuente: elaboración propia.

Para su aplicación, se retomó la metodología de enseñanza Acodesa, ya descrita. Este es un método bien articulado que combina el aprendizaje en colaboración con el debate científico y la autorreflexión. La metodología Acodesa privilegia las R_{F-E} de los estudiantes cuando resuelven una situación problema, puesto que dan pie al uso de un pensamiento diversificado en el que el docente no provee la solución sino que motiva la aplicación de diferentes procedimientos para su resolución.

Preguntas de investigación

La presente investigación se interesa en conocer las R_{F-E} de los estudiantes cuando se les plantea una situación problema basada en la modelación matemática. Asimismo, se busca describir la manera en que dichas representaciones evolucionan mediante el uso de una metodología en colaboración y debate científico. Las dos preguntas de investigación que se pretenden responder son las siguientes:

- ¿Qué características poseen las representaciones funcionales-espontáneas que surgen cuando se plantea un problema basado en modelación matemática respecto a la covariación entre variables?
- ¿De qué manera evolucionan las representaciones funcionales-espontáneas de los estudiantes a través de una experiencia sociocultural mediante una metodología en colaboración y debate científico?

Para realizar tal análisis se retomarán los resultados presentados por un equipo de trabajo (a manera de estudio de caso) en un salón de clases donde se aplicó el método de enseñanza Acodesa. La actividad denominada "El fotógrafo" estuvo dirigida al aprendizaje de la covariación entre variables (véase la figura 6).

En la siguiente sección se describe la metodología que se utilizó así como la actividad empleada, y se analizan las acciones de los estudiantes durante la primera actividad. Esta se seleccionó para el presente estudio puesto que permite mostrar las ideas iniciales de los estudiantes respecto a la covariación entre variables, logrando visualizar y analizar sus R_{F-E}. La muestra (estudio de caso) está delimitada por un equipo de cuatro integrantes elegidos al azar de entre los equipos de los dos grupos donde se aplicó la sesión, cuyas características específicas se describirán.

Diseño de la actividad

La actividad seleccionada tiene el nombre de "El fotógrafo". Esta situación problema fue diseñada como actividad introductoria y por lo tanto no es uno de sus objetivos llegar a una representación gráfica ni algebraica (véase la figura 6).

Las diferentes partes de la actividad tienen como objetivo el lograr que los estudiantes tengan un primer acercamiento al concepto de función a través de la covariación entre variables. En este primer acercamiento se pide a los estudiantes externar una primera representación a través de un dibujo o diagrama en el que expliquen el fenómeno estudiado. Además, se les dice que lo expliquen por medio de palabras de manera individual.

Posteriormente en un segundo momento, se pide a los estudiantes que trabajen en colaboración en equipos de cuatro personas para comparar sus ideas y lograr expresar un dibujo o diagrama como una construcción social de conocimientos que explique el problema a través del diálogo. Cuando todos los equipos han llegado a una representación, se pide que presenten al resto del grupo sus respuestas. Por último, cada equipo puede decidir si mantiene su esquema propuesto o cambiarlo de acuerdo a lo que sus compañeros indican. Es importante mencionar que el rol del docente, además del diseño de la situación, es la orquestación de la interacción social en los equipos de trabajo a través de preguntas que guíen el proceso de aprendizaje desde una perspectiva sociocultural, como la referida por Bartolini Bussi y Boni (2003). La figura 6 muestra las tareas propuestas a los estudiantes en la actividad "El fotógrafo".

Página 1 Un fotógrafo profesional camina cerca de la estatua de Jacques Cartier. Toma fotografías desde diferentes partes sobre la acera para elegir las fotos que tomará más tarde y los lugares que le permitirán obtener las mejores tomas. Por cada foto que toma, anota el lugar donde se encuentra sobre la acera y la distancia que lo separa de la estatua. Una vez que las fotos se revelen en el laboratorio, podrá utilizar sus notas para elegir los lugares donde se debe colocar sobre la acera para tomar las mejores fotos cuando regrese cerca de la estatua de Jacques Cartier. Por ejemplo, aquí hay dos posiciones posibles para tomar una foto.
Página 2 Por cada punto donde el fotógrafo se posiciona, la distancia entre él y la estatua varía. Describe el fenómeno con tus palabras y haz un dibujo de la situación para ilustrar la manera de mostrar las diferentes posibilidades.
Página 3 Nuestro fotógrafo desearía dar a conocer esta información a sus colegas. Encuentra una nueva manera de representar el fenómeno anterior, diferente a la que ya explicaste.

Figura 6. Actividad "El fotógrafo"

Análisis de resultados

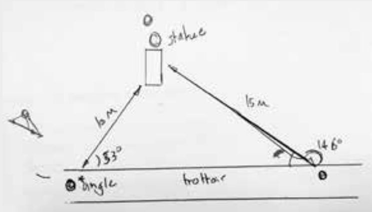
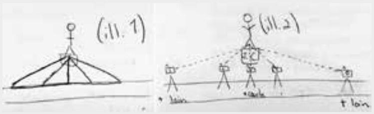
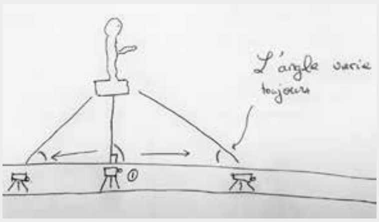
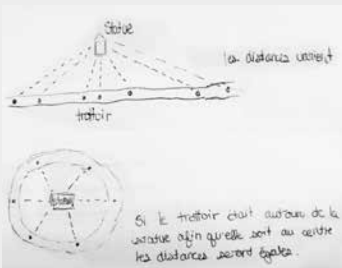
Los resultados serán presentados siguiendo las diferentes etapas de la metodología Acodesa.

Etapa 1. Trabajo individual

Después de que a los estudiantes se les presentó la situación problema, se les propuso explicitarla de manera individual por medio de una representación externa. Además, se les solicitó que expresaran por medio de palabras escritas dicha explicación.

Entre el equipo elegido de cuatro integrantes, fue posible apreciar cuatro diferentes $R_{F\text{-}E}$ generadas por los estudiantes a quienes denominamos A_1, A_2, A_3 y A_4. Se presentan a continuación las cuatro $R_{F\text{-}E}$ y sus explicaciones.

Tabla 2. R_{F-E} de los estudiantes en el trabajo individual

Estudiante	R_{F-E}	Explicación del estudiante
A_1		Tomando en cuenta que la estatua no se desplaza pero que cuando tomamos las fotos nosotros sí lo hacemos, el ángulo y la distancia pueden variar. Así, podemos encontrar innumerables posibilidades, todo simplemente cambiando el ángulo y la distancia.
A_2		Si construimos un triángulo, podemos ver que cuanto más se aleje de la estatua, más largo es el cateto de la base, así como la hipotenusa. Todo depende del punto de vista que el fotógrafo quiera tener.
A_3		Ya que la acera es una línea recta, el fotógrafo forzosamente nunca está a la misma distancia de ella, dependiendo de donde se sitúe. Si se desplaza a la izquierda o a la derecha sobre la acera, nos damos cuenta de que la distancia cambia. Sin importar a dónde te desplaces sobre la acera, la distancia entre tú y la estatua cambiará porque la acera no forma un círculo. Entonces la estatua jamás podrá estar a la misma distancia por la relación de todos los puntos posibles donde podrás ubicarte en la acera.
A_4		La acera no está situada a una distancia igual de la estatua. Como la acera es recta, entonces la distancia varía. Si nos colocamos lo más cerca posible de la estatua, la distancia es corta, y si nos alejamos, la distancia es mayor. Si la acera estuviera alrededor de la estatua, las distancias serían iguales.

Distinguimos entre las respuestas de los estudiantes varios puntos importantes. En primer lugar, los cuatro muestran sus ideas sobre la situación problema que se les presentó, analizan las variables que el enunciado les indicaba y logran expresar a través de un dibujo comprender el fenómeno estudiado. A pesar de que las variables que involucran los estudiantes son diversas, es posible resaltar que ellos están orientados hacia la actividad que realizan. Es decir, existe una meta clara y entendible que les permite expresar en papel las cuatro R_{F-E} que están plasmadas en la tabla 1.

De acuerdo con Leontiev (1973), toda actividad se desencadenará por la presencia de una meta que regirá las acciones que se desarrollen en un momento posterior. Dicha meta motiva al estudiante para desarrollar la tarea posterior, y es precisamente una situación problema enmarcada en la vida cotidiana la que desencadena la actividad de los estudiantes, de acuerdo a Niss, Blum y Galbraith (2007) en sus estudios sobre modelación matemática.

Ahora bien, de las cuatro ideas iniciales, existen ideas relativas a la covariación. La representación de A_1 expresa una covariación entre el ángulo formado por la línea recta entre el fotógrafo y la estatua con respecto a la acera, y la distancia que lo separa de la estatua. Es decir, el estudiante considera la covariación entre ángulo y distancia entre la cámara y la estatua. En este caso, la estatua desempeña un papel importante ya que se toma con una altura.

El estudiante A_2 considera una covariación entre el tamaño del cateto de la base de un triángulo que varía y su hipotenusa. Es posible distinguir que este es el único estudiante que muestra a través de un triángulo la manera en que se podría solucionar la situación problema, mientras que los otros tres se limitan a describir la situación. También es importante señalar que aun cuando la estatua está representada con una figura, en el modelo matemático, se convierte en un punto (vértice superior del triángulo).

Además de esto, las R_{F-E} de A_2 tienen muchos elementos por estudiar. El proceso de modelación de A_2 en su primer acercamiento de trabajo individual proporciona más elementos para utilizarlos en el proceso de matematización. Como se ha dicho, para A_2 la estatua representa un punto; esto marca la importancia de fijar un lugar para hacer las mediciones entre el fotógrafo y la estatua, lo que no ocurre con los otros compañeros. Por ejemplo, con respecto al dibujo de A_1, no es claro que esté construyendo un triángulo y así la estatua se considere un punto.

El tercer estudiante distingue una covariación limitada. Para él, existe una covariación entre la distancia recorrida por el fotógrafo y la distancia entre la cámara y la estatua. Sin embargo, a diferencia de los otros dos casos, en A_3 es posible apreciar la claridad sobre la variación de la distancia entre la cámara y la estatua y mucho menos énfasis en la variación de la distancia recorrida por el fotógrafo, es decir, no muestra alguna idea directa de covariación en su representación, ni tampoco en la explicación que hace de ella.

El cuarto estudiante, A_4, expresa con mayor claridad un fenómeno de covariación entre la distancia del fotógrafo al moverse y la distancia entre el fotógrafo y la estatua. Incluso, propone un ejemplo en donde la distancia del fotógrafo a la estatua no varía, al considerar un círculo como acera.

En estos momentos ya podemos posicionarnos con respecto a las características de las representaciones en esta primera etapa de Acodesa contestando la primera pregunta de investigación:

- » La representación funcional-espontánea que construyen los individuos está ligada al enunciado, pero también a la acción de representarla externamente. Si el individuo solo leyera el enunciado, su representación podríamos considerarla como exclusivamente mental. Sin embargo, cuando realiza una representación externa, la representación mental se transforma en R_{F-E} (interna-externa).
- » La representación externa expresa en cierta medida lo que el individuo ha comprendido de la situación.
- » El proceso de modelación es inmediato en esa construcción funcional-espontánea. La potencialidad de la representación externa y la comunicación con los miembros de su equipo y de toda la clase dependerán de otros factores que están ligados y son determinantes en un proceso de comunicación.

Etapa 2. Trabajo en equipo

La discusión en equipo produjo un cambio sustancial en el trabajo. En la metodología Acodesa, se solicita a los estudiantes iniciar con tinta negra, si realizan cambios, utilizar tinta roja en el trabajo en equipo, y si de nuevo realizan cambios, utilizar tinta verde en la discusión en la plenaria. Así resulta más fácil analizar lo producido por los estudiantes, ya que algunas veces no se filmaba el proceso completo de cada equipo (solo se contaba con dos cámaras).

En el proceso de discusión es posible apreciar algunas características particulares de los cuatro estudiantes:

A_1: Es un estudiante extrovertido que se impone en el trabajo en equipo. Opina frecuentemente, con mucha seguridad en sí mismo ante sus compañeros y ante el profesor.

A_2: Es un estudiante introvertido que interviene poco en la conversación y regularmente solo cuando se le solicita. Tiende a trabajar solo, pero es muy reflexivo y atento a las opiniones de sus compañeros.

A_3: Es un estudiante regular que interviene poco. No promueve una discusión con sus compañeros ni les muestra su trabajo. Busca completar las hojas de trabajo y para ello incluso escribe sin revisar las ideas que plasmaron sus compañeros.

A_4: Es un estudiante que opina poco, sin embargo parece atento durante toda la discusión. No parece modificar sus ideas iniciales, y le permite a A_2 que escriba en su hoja de trabajo lo que él ya había escrito de antemano.

Ante estas características describiremos lo sucedido en el trabajo en colaboración. El equipo al verse en la necesidad de crear una sola representación externa que explique mejor la situación presentada entre los cuatro integrantes del equipo, inicia su proceso de comunicación. El primero en iniciar el diálogo fue $A_{1,}$ quien tomó la palabra con rapidez. Les mostró a sus compañeros sus ideas respecto a la relación entre el ángulo y la distancia, mientras A_2 estaba atento a estas ideas.

A_1: Dado que la estatua no se desplaza, pero cuando tomamos la foto sí lo hacemos, entonces el largo de la distancia (hacia la estatua) puede variar. Pero incluso hay otras variables que cambiarían el ángulo.

Ante la incorporación de la variable "ángulo" a la discusión, A_2 empezó a integrar por escrito esta noción y agregó a su representación indicaciones de ello. Es posible notar en la hoja de trabajo que A_2 refiere como importante que el ángulo de la foto respecto a la estatua también sea una variable que se tenga en cuenta, sin embargo no le dice a $A_{1.}$

Por su parte, A_1 sigue tomando constantemente la palabra para explicar más de sus ideas. Entre ellas, plantea al docente la posibilidad de que se puedan incluir otras variables en la situación. Ante la pregunta del docente sobre cuáles serían estas nuevas variables, A_1 indica: "Otras variables pueden ser si la acera tiene alguna inclinación, si hay un árbol (entre la estatua y el fotógrafo), la calle, la iluminación.

Como A_2 era el que tomaba nota de lo discutido, siempre utilizó un triángulo, proporcionando una idea clara de matematizar la situación. Incluso en la parte verbal, escribe que al utilizar un triángulo es posible calcular lo necesario, así aplica el teorema de Pitágoras (véase la figura 7).

De nuevo, A_2 acepta e incorpora estas ideas a su hoja de trabajo. Mientras tanto A_3 y A_4 opinan poco y no muestran su hoja de trabajo a sus compañeros. A_3 integra en su documento lo que hace A_4. A_2 se encarga de plasmar una nueva representación en una nueva hoja de trabajo, que incorpore las ideas de su equipo de trabajo. La figura 7 muestra la representación de los estudiantes.

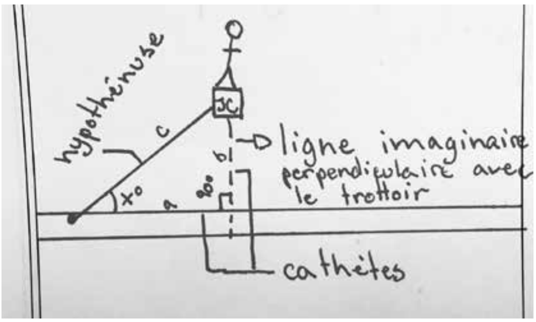


Figura 7. Trabajo en equipo del grupo A_1, A_2, A_3 y A_4 (en tinta roja).

En la segunda representación, A_2 escribe el nuevo acercamiento de su equipo de manera global e incluye las variables que él mismo no había considerado y que fueron aportadas por A_1. En la representación es posible apreciar conceptos como hipotenusa, catetos y ángulos, en el dibujo que se representa mediante un triángulo. Es importante notar que a diferencia del primer esquema presentado por A_1, en esta representación se considera la estatua como un punto, a pesar de que el dibujo es una figura en forma de hombre. Además, plasman las ideas respecto a la variación del ángulo.

A_1 está de acuerdo con la representación realizada por A_2 y pide que se incorpore además en la descripción las otras variables que él mismo menciona que pueden influir, como la inclinación de la acera, o un árbol entre el fotógrafo y la estatua.

Es importante a su vez reconocer que A_2 encuentra nuevos elementos (ángulo) que le permiten escribir explícitamente que es a través de la construcción de un triángulo y tomando en cuenta las diferentes variables como es posible encontrar las medidas entre el fotógrafo y la estatua. Ello muestra que los estudiantes consiguieron alcanzar una meta al ir modificando sus $R_{F\text{-}E}$ iniciales.

Podemos decir que el trabajo en colaboración proporcionó nuevos elementos para refinar las $R_{F\text{-}E}$ individuales y mejorar los procesos de modelación matemática de este equipo, de acuerdo a las ideas de construcción del signo (Eco, 1975, 1992; Radford, 2002, 2003, 2006) en un proceso de comunicación (Voloshinov, 1973).

Discusión

Los resultados expuestos en la sección anterior evidencian que a través de un proceso de modelación matemática donde se plantea una situación problema es posible la generación de representaciones no institucionales por parte de los estudiantes. Las cuatro representaciones creadas en la actividad propuesta tienen un carácter funcional y espontáneo ($R_{F\text{-}E}$) puesto que surgen de manera natural para explicar el fenómeno estudiado con representaciones propias (generalmente no institucionales).

Las cuatro representaciones mostradas en la tabla 1 describen las ideas iniciales de los estudiantes en cuanto a la situación "El fotógrafo". En todas ellas existen ideas y conceptos matemáticos diversos que se ponen en juego, y algunos de ellos se relacionan a través de la covariación, tales como: ángulo, distancia entre la estatua y el fotógrafo, distancia entre la acera y el fotógrafo, triángulos, catetos, hipotenusas, entre otros.

De acuerdo con las ideas expresadas por Leontiev (1973), este conjunto de acciones llevadas a cabo por los estudiantes tanto individualmente como en equipo responden en todo momento a una orientación inicial o meta común. Esta meta estuvo delimitada por la situación problema propuesta al inicio de la metodología Acodesa.

A través de un proceso de comunicación, se evidenció cómo las acciones de los estudiantes cambiaron y se ajustaron al trabajo en colaboración. Se aprecia que A_2 incorpora las nociones y conceptos propuestos por sus compañeros, mientras que A_1 expresa de manera natural sus explicaciones ante el docente y su equipo de trabajo. En consonancia con las ideas de Leontiev y Voloshivov, las representaciones no lograrían evolucionar si no estuviera presente el proceso de comunicación.

Por la naturaleza de la actividad, no se pedía a los estudiantes que llegaran a otro tipo de representaciones (gráficas o algebraicas). Ello debido a que, por ser la primera situación planteada a los estudiantes, tenía como meta poner en juego en el grupo las normas de experimentación ligadas a la metodología Acodesa, así como enfocarse en el estudio de las nociones iniciales de covariación. Por lo tanto, no es posible en este escrito documentar la evolución de las acciones de los estudiantes en operaciones (Hitt y González-Martín, 2015).

La interacción social de la que se ha hablado en este manuscrito fue posible gracias al empleo de la metodología Acodesa. Siguiendo las etapas de esta, se dejó de lado una instrucción que privilegiara las representaciones institucionales y se permitió que los mismos estudiantes mostraran las representaciones espontáneas partiendo de una meta en común.

Conclusiones

El estudio concluye que las representaciones iniciales e intuitivas de los estudiantes ante la resolución de una situación problema son de gran importancia en su proceso de aprendizaje. Pasarlas por alto conduce a ignorar parte de la construcción de los conceptos matemáticos y a olvidar la importancia de las concepciones de los estudiantes.

Respondiendo a la primera pregunta de investigación, las representaciones iniciales poseen un carácter funcional y espontáneo, surgen de manera natural y persiguen una meta inicial de aprendizaje. Este tipo de representaciones deben ser incluidas y estudiadas con el fin de comprender el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos. Es necesario profundizar hacia el estudio de este tipo de representaciones dentro de la investigación en didáctica de las matemáticas con el fin de definirlas de manera adecuada y cada vez más completa.

Con relación a la segunda pregunta de investigación, mencionamos que la metodología Acodesa permitió, a través de un ambiente sociocultural, que los estudiantes del equipo de trabajo plasmaran las representaciones mencionadas, primero de manera individual y después como parte de un equipo. La evolución de las representaciones en el trabajo en equipo permitió reconocer la importancia de la comunicación entre pares dentro del salón de clases, característica importante de la metodología Acodesa.

Consideramos que la teoría de la actividad nos proporcionó elementos importantes para el análisis de lo ocurrido en el estudio. En investigaciones posteriores es necesario profundizar respecto al estudio de las acciones y operaciones dentro de la formación de un concepto matemático.

Es indispensable señalar que, concordando con la teoría de la actividad, el proceso de comunicación fue el punto clave para la evolución de las representaciones de los estudiantes siguiendo un aprendizaje equitativo. El significado que cada uno de ellos brindó en sus primeros esquemas cambió después de que se estableciera un diálogo con sus pares. Así, se espera que los estudiantes construyan un concepto similar al que la sociedad espera de ellos.

Por otra parte, la investigación reconoce que la comunicación no tuvo el mismo impacto en los cuatro miembros del equipo de trabajo. Para dos de ellos el diálogo llevó a la incorporación de ideas dentro de sus primeras representaciones, mientras que los otros dos tuvieron una participación limitada y se mantuvieron al margen de la discusión, sin embargo apoyaron la proposición final del equipo. De ello podemos concluir que las características propias de cada individuo y sus formas personales de trabajo pueden influir en el desarrollo del proceso de diálogo, y con ello en el beneficio del trabajo en colaboración. Nos parece importante realizar una caracterización de los estudiantes con el objetivo de promover equipos heterogéneos respecto a dichas características, preferiblemente con no más de tres integrantes (Prusak et al., 2013), y con ello buscar mejores oportunidades de aprendizaje.

En este estudio hemos querido ejemplificar las nociones de representación funcional-espontánea y su importancia en la construcción de conceptos. Esta actividad, como lo hemos señalado, solo tenía la intención de poner en juego las normas de la experimentación en el grupo. En este manuscrito, hemos mostrado nuestra idea de evolución de R_{F-E} en un contexto sociocultural del aprendizaje.

Referencias

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (eds.). CBMS *Issues in Mathematics Education*, *6*, 1-32.

Azcárate, C. (1984). La nueva ciencia del movimiento de Galileo: una génesis difícil. *Historia de las ciencias*, 203-208.

Bartolini Bussi, M. y Boni, M. (2003). Instruments for semiotic mediation in primary classrooms. *For the Learining of Mathematics, 23*(2), 15-22.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education – Discussion Document. *Educational Studies in Mathematics*, *51*(1), 149-171. DOI:10.1023/A:1022435827400

Brownell, W. A. (1942). "Problem Solving", the psychology of learning. *Forty-First Yearbook of the National Society for the Study of Education, Part II*. Chicago: University of Chicago Press.

Costé, A. (1997). L'oeuvre scientifique de Nicole Oresme. *Bulletin de la Societé Historique de Liseux*, 37. Consultado en Diciembre 2016. https://www.lmno.cnrs.fr/archives/oresme/Oresme.html

DeBono, E. (1997). El pensamiento lateral, manual de creatividad. Buenos Aires, Argentina: Paidós Empresa 5.

DiSessa, A.; Hammer, D.; Sherin, B. y Kolpakowski, T. (1991). Inventing graphing: Meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior*, *10*, 117-160.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée [Registers of semiotic representation and cognitive functioning of thought]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels* [Semiosis and human thought: semiotic registers and intellectual learning]. Bern, Suiza: Peter Lang.

Duval, R. (2005). Compréhension des démonstrations, développement de la rationalité et formation de la conscience individuelle. En *Colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 7-38). Montreal: Denis Tanguay (Ed.).

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Eco, U. (1975). *Trattato di semiotica generale (Traité de sémiotique générale)*. Milán: Bompiani.

Eco, U. (1992). *Interpretation and overinterpretation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Edwards, C. H. (1937). *The historical development of the calculus*. Nueva York: Springer.

Hitt, F.; Saboya, M. y Cortés, J. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. *Bolema, 30*(54), 240-264.

Hitt, F.; Saboya, M. y Cortés C. (2017). Rupture or continuity: The arithmetic-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

Hitt, F. y González-Martín, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The Acodesa (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 201-219.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, *10*, 123-159.

Leontiev, A. A. (1975) Sign and Activity. *Journal of Russian & East European Psychology*, *44*(3), 17-29.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS) (2007). *Programme de formation, deuxième cycle du secondaire* [Training Program, Secondary Second Cycle]. http://www.mels.gouv.qc.ca/DGFJ/dp/menusec.htm

Montealegre, R. (2005). La actividad humana en la psicología histórico-cultural. *Avances en Psicología Latinoamericana*, *23*(1) 33-42.

Myers, D. (2012). *Exploring psychology*. Nueva York: Worth.

Niss, M.; Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. Modelling and applications in mathematics education. *The 14th* ICMI *Study*, *10*(1), 3-32.

Prusak, N.; Hershkowits R. y Schwarz B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 266-285.

Quiroz, S. (2015). *Análisis de concepciones de modelación matemática en profesores en formación de escuela primaria* (tesis doctoral inédita). Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Monterrey, México.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken, and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*, 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, 7-21.

Rodríguez, R. y Quiroz, S. (2015). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 99-124. DOI: 10.12802/relime.13.1914.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Thompson, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. En F. Hitt (ed.), *Mathematics visualization and representations* (pp. 199-206). Mexico City: Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN.

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language* (trad. L. Matejka y I. R. Titunik). Harvard: Harvard University Press.

Von Glasersfeld, E. (2004). Questions et réponses au sujet du constructivisme radical. En P. Jonnaert et Masciotra D. (eds.). *Constructivisme choix contemporains. Hommage à Ernst von Glasersfeld* (pp. 291-323). Presses de l'Université du Québec.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. *MAA Notes*. 19.