Sobre la introducción del concepto de irracionalidad en enseñanza secundaria: El caso de $\sqrt{2}$

Resumen

En este artículo se presentan siete demostraciones de la irracionalidad de la $\sqrt{2}$ pertenecientes a los ámbitos numérico y/o geométrico. El propósito es invitar al lector a la reflexión sobre la complejidad conceptual que encierran dichas demostraciones y poner de manifiesto algunas de las dificultades cognitivas que la literatura de investigación constata en los alumnos. Finalmente, argumentamos la conveniencia de un tratamiento didáctico del problema de la irracionalidad previo a este tipo de demostraciones. Dicho tratamiento debería apoyarse en la historia y la epistemología del concepto, así como en el trabajo con los distintos sistemas de representación asociados al mismo a lo largo de su evolución.

Abstract: Seven demonstrations of the irrationality of $\sqrt{2}$ are presented in this article; they belong to the numerical and/or geometrical domain. The purpose is to invite the reader to reflect upon the conceptual complexity that lays in these demonstrations and to point out some of the cognitive dificulties that pupils have, recorded in the research literature. Finally, we argue the convenience of a didactical treatment previous to this type of demostrations. This treatment should be supported by the history and epistemology of the concept, as well as by the work with the different systems of representation asociated to it throughout its evolution.

Introducción

En el actual sistema educativo español, está previsto que los alumnos aborden el aprendizaje de los números reales en la segunda etapa de la Educación Secundaria (14-15 años). Dicho aprendizaje plantea dos cuestiones básicas: el encuentro con un nuevo tipo

Romero Albaladejo, I. y Rico Romero, L.
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

de números —los números irracionales—, y la integración de éstos y los estudiados en etapas anteriores dentro del conjunto de los números reales.

Este trabajo se centra en la primera de estas dos cuestiones: la aparición de la irracionalidad, a la que los estudiantes han de enfrentarse por primera vez. Entendemos que es una iniciación que debe contemplarse desde dos ámbitos distintos pero complementarios: el numérico y el geométrico. Por lo que respecta al ámbito numérico la distinción racional-irracional aparece claramente en la expresión decimal, que es limitada o periódica en el caso de los números racionales es ilimitada y sin regularidad para el caso de los irracionales; por lo que respecta al ámbito geométrico esta distinción se revela de forma especialmente significativa mediante la conmensurabilidad-inconmensurabilidad de longitudes.

En la elección de un ejemplo que ilustre la introducción a la irracionalidad, la raíz cuadrada (concretamente, el caso de $\sqrt{2}$) ocupa una posición privilegiada, ya que se presta especialmente bien al trabajo en los dos ámbitos de nuestro interés: el numérico y el geométrico. Ahora bien, aunque existen diversas las pruebas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, encuadradas en los dos ámbitos mencionados, nuestra experiencia en el aula nos reafirma en la idea de la complejidad conceptual que subyace a todas estas pruebas y que desaconseja su inclusión en el curriculum de Matemáticas de secundaria, ya que resultan prácticamente inaccesibles para la gran mayoría de estudiantes de este nivel. No obstante, sí conviene analizar con detalle tales pruebas para determinar qué conocimientos matemáticos deben estar establecidos en el momento en que se estime trabajar con ellas.

En este artículo, hemos realizado una recopilación de demostraciones de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ que, en principio, pudieran parecer accesibles con conocimientos básicos de matemáticas. Nuestro objetivo, sin embargo, es hacer una reflexión sobre la problemática que encierran todas ellas, que es, en definitiva, la dificultad intrínseca al propio concepto de irracionalidad. En nuestra opinión, cualquier intento significativo de solucionar el problema de la irracionalidad lleva implícita la comprensión de la propia naturaleza del problema y la implicación en el conflicto, como etapa previa indispensable para dotar de sentido a sus soluciones formales, algunas de las cuales pasamos a presentar a continuación.

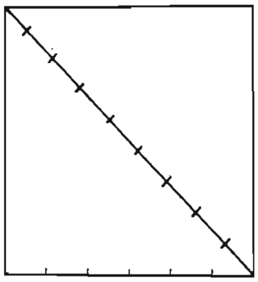
Algunas pruebas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

Pruebas correspondientes al ámbito geométrico:

Empezaremos presentando las pruebas correspondientes al ámbito geométrico, porque pensamos que el carácter más intuitivo de las mismas puede arrojar luz sobre el planteamiento del problema de la irracionalidad.

Las medidas de longitud, área y volumen se encuentra en las raíces de la geometría. Para medir un segmento por medio de otro, vemos cuántas veces cabe uno dentro del otro. Esto es sencillo si el resultado es un número exacto y no queda resto. Si el segmento menor no divide al mayor exactamente, tenemos que fijarnos en el resto. Puede ocurrir que éste sea la mitad, la tercera parte, dos terceras partes, u otra fracción del segmento que utilizamos como medida. Si es así, tenemos una especie de medida sustitutiva, una fracción del segmento que divide exactamente a áquel que estamos midiendo y el que empleamos como medida. El nuevo segmento es una "medida común" para los dos segmentos originales.

Es lógico ensayar esto en un cuadrado y buscar una medida común para el lado y la diagonal. Si intentamos hacerlo, nos encontramos con un resto y nos vemos forzados a volverlo a hacer empleando fracciones del segmento cada vez menores.



La cuestión se plantea en cuanto a la posibilidad de encontrar eventualmente una medida común o si simplemente no existe tal medida, es decir, si los dos segmentos son conmensurables o inconmensurables.

Esto nos enfrenta al problema de si se puede dividir un segmento arbitrariamente en pequeñas secciones o si hay un límite para estas posibles divisiones. ¿Está la recta constituida por un gran número de pequeñas partes indivisibles? ¿Tiene una "estructura atómica"? o se puede considerar la línea como "continua", es decir, apta para ser dividida arbitrariamente en pequeños segmentos.

Pero dejemos de lado esta cuestión (que plantea problemas didácticos no menos interesantes) y busquemos un procedimiento para averiguar si efectivamente existe una medida común entre el lado y la diagonal del cuadrado.

1. Para esta demostración harán falta algunas definiciones y resultados previos:

   LONGITUDES CONMENSURABLES. Dos longitudes, L y L′, se dicen conmensurables si tienen una unidad de medida común, u. Es decir si existen números enteros, a y b, tales que

$$L:u = a:1 \quad \text{y} \quad L':u = b:1$$

   En ese caso diremos que la razón de L a L′ es expresable mediante la razón entre los números enteros a y b, o lo que es lo mismo, mediante el número racional a/b.

— No es difícil demostrar que no importa de qué longitudes L y L′ se trate, si éstas tienen una medida común u, la longitud en "unidades u" de la mayor medida común de L y L′ viene dada por el máximo común divisor de a y b: m.c.d.(a,b). Así que un método efectivo para hallar el m.c.d.(a,b) podría darnos un procedimiento para encontrar la mayor medida común de L y L′, si es que la hubiera.

— Consideremos el Método de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números, a y b. El primer paso es construir el par (a_1,b_1) tal que

$$a_1 = \text{máx}(a,b) - \text{mín}(a,b)$$
$$b_1 = \min(a,b)$$

y entonces, simplemente se repite la operación de sustraer el número más pequeño del mayor. Es decir, si el par construido en el paso i es (a_i, b_i), entonces el par construido en el paso $i+1$ es

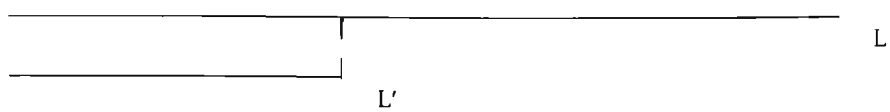
$$a_{i+1} = \text{máx}(a_i,b_i) - \text{mín}(a_i,b_i)$$

$$b_{i+1} = \text{mín}(a_i,b_i)$$

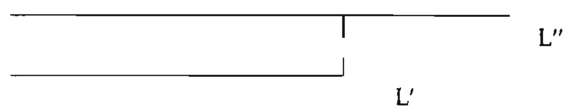
Se demuestra, apelando a las propiedades de los números naturales, que el algoritmo termina en el momento en que $a_j = b_j$, y este valor común es el máximo común divisor de a y b. Esto es así porque la diferencia de dos números preserva sus factores comunes (y por tanto el máximo común divisor), de modo que cuando $a_j = b_j$ tenemos

$$\text{mcd}(a,b) = \text{mcd}(a_1,b_1) = \ldots\ldots = \text{mcd}(a_j,b_j) = a_j = b_j$$

— El mismo procedimiento podemos aplicarlo a las longitudes basándonos en dos hechos muy sencillos:
  Dadas dos longitudes, L y L′,

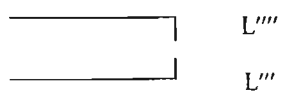


i) Si u mide exactamente a L y a L′, entonces mide exactamente a L″ = L - L′
ii) Si u mide exactamente a L′ y a L″ = L – L′, entonces u mide exactamente a L.



De esto se sigue que las medidas comunes de L y L′ son las mismas que las de L″ y L′. En particular, la mayor medida común de L y L′ es precisamente la misma que la mayor medida común de L″ y L′. Podemos tomar ahora el par de longitudes L′ y L‴ e imitar el paso anterior; obtendremos entonces que la mayor medida común de L y L′ es la misma que la mayor medida común de L′ y L‴.

Podemos repetir el proceso una vez más con el nuevo par de segmentos y, en nuestro caso particular, habremos llegado al final ya que L⁗ mide a L‴ exactamente.



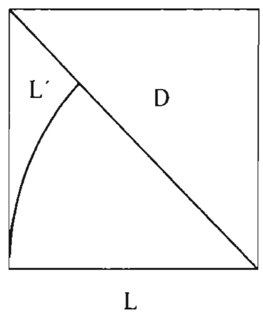
Así que L''''' es la mayor medida común de L''' L'' y, puesto que las medidas comunes son las mismas para todas las etapas del proceso, L'''' es la mayor medida común del par original de segmentos L y L'.

TEOREMA. Si dos segmentos dados L y L' tienen una medida común (desconocida) el procedimiento anterior producirá siempre la mayor medida común de L y L' en un número finito de pasos.

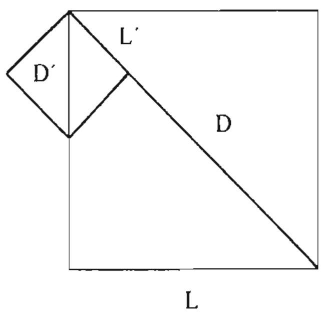
Este resultado se demuestra por inducción.

1.1 Veamos entonces qué ocurre en el caso de las longitudes correspondientes a la diagonal y el lado de un cuadrado. Vayamos por pasos:

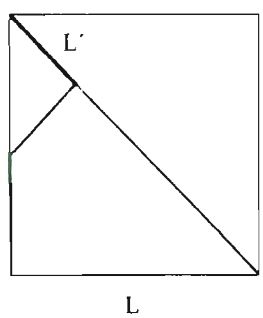
— Según hemos visto antes, la mayor medida común entre L y D es la misma que entre L y L', en donde L' = D–L.



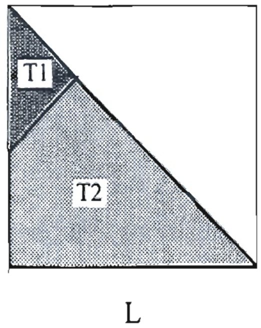
— Veamos ahora que la mayor medida común entre L y L' es la misma que entre L' y D'.



— Para ello, bastará con probar que los segmentos señalados miden igual, con lo que demostraríamos que D' = L–L'.



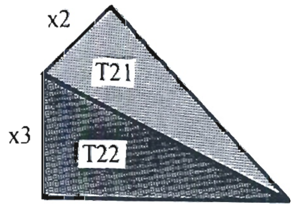
En efecto:



T1

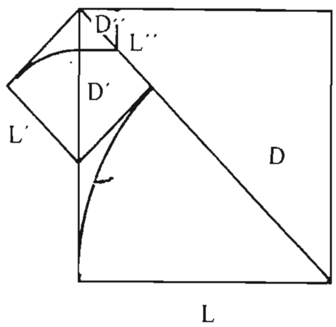
T1 es isósceles
por tanto x1 = x2

T2



T21 y T22 tienen dos
lados y un ángulo iguales,
por tanto T21 = T22
Entonces x2 = x3
y en jconsecuencia
<u>x1</u> = x2= <u>x3</u>

— Ahora podemos repetir el mismo proceso y continuar así indefinidamente (puesto que el lado de un cuadrado es siempre menor que su diagonal y podremos obtener una diferencia entre ambas longitudes), obteniendo que la razón entre la diagonal D y el lado L de un cuadrado C es la misma que la razón entre la diagonal D′ y el lado L′ de un cuadrado C′ menor que el anterior y, a su vez, igual a la razón entre la diagonal D″ y el lado L″de otro cuadrado C″aún menor, etc...



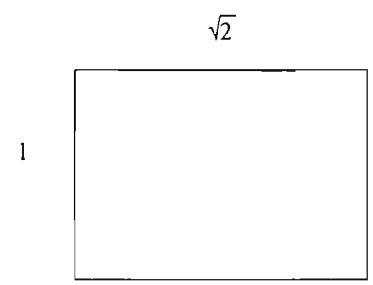
— Al llegar a este punto podemos concluir la demostración de dos formas:

1.1.a Hemos visto que cuando aplicamos nuestro proceso general para encontrar la mayor medida común de la diagonal y el lado del cuadrado, el proceso continúa indefinidamente. Sin embargo, el teorema expuesto asegura que si ambas longitudes tuvieran una medida común el proceso concluiría en un número finito de pasos. La contradicción surge entonces porque la diagonal y el lado del cuadrado no tienen medida común, en contra de lo que habíamos supuesto.

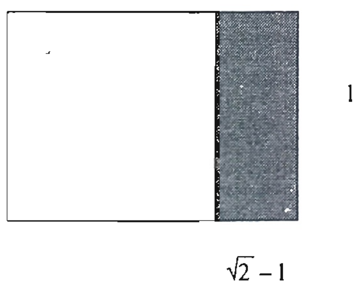
1.1.b Si interpretamos nuestro procedimiento general en el sentido de que si dos longitudes tienen una medida común, podremos construirla mediante el procedimiento, podremos intuir fuertemente que no hay medida común entre la diagonal y el lado del cuadrado, porque vemos que la suposición de que hay tal medida común lleva a la contradicción de que ésta debe ser cero. Sin embargo, una prueba rigurosa requiere la moderna idea de límite o el uso de alguna forma del axioma de Arquímedes. Dicho axioma, que en realidad es anterior a Arquímedes, dice que si de cualquier cantidad quitamos la mitad o más, y del resto quitamos su mitad o más, y seguimos el proceso, podemos alcanzar un resto que sea menor que cualquier cantidad fijada de antemano. (El axioma está estrechamente relacionado con el concepto de límite, que es fundamental en el tratamiento moderno de los irracionales).

1.2 Hemos visto en los resultados previos que dadas dos longitudes L y L′, el método de las diferencias sucesivas nos da en un número finito de pasos la mayor medida común entre ellas, si es que ambas tienen una medida común.

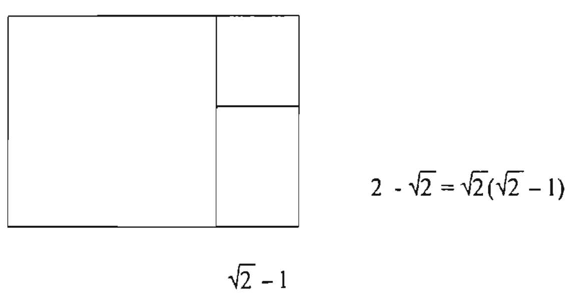
— Veamos lo que ocurre con un rectángulo de lados 1 y $\sqrt{2}$ (Se puede construir sobre la diagonal de un cuadrado unidad).



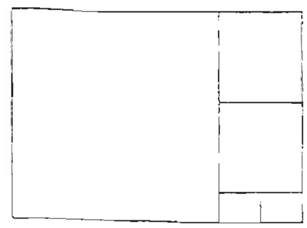
— Si restamos el lado pequeño del mayor, según el método de las diferencias sucesivas, tendremos que las medidas comunes entre los lados del rectángulo de partida son las mismas que las del rectángulo sombreado.



— Repitiendo el proceso con el rectángulo sombreado, obtenemos otro rectángulo semejante al inicial, ya que $\sqrt{2}:1 = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1):(\sqrt{2} - 1)$



— Y así podríamos continuar indefinidamente, puesto que, alternativamente, se obtiene un rectángulo semejante al inicial.

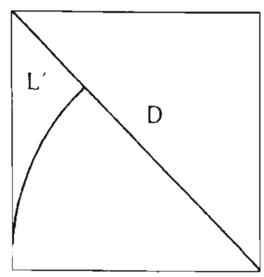


Ahora podemos concluir la demostración de forma análoga al apartado 1.1.

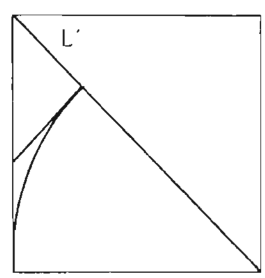
2. También podemos proceder de otro modo:

— Consideremos la misma construcción geométrica que en el apartado 1/, pero sólo como construcción geométrica:

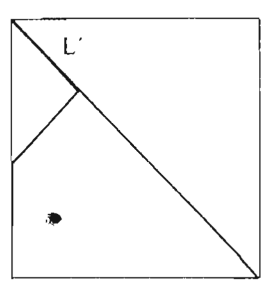
Dado un cuadrado, midamos el lado sobre la diagonal



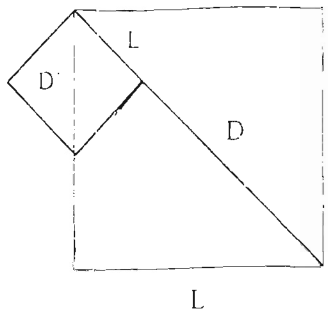
— Vemos que cabe solamente una vez. Tracemos ahora la perpendicular a la diagonal a partir del punto de corte



— Los dos segmentos señalados miden igual, como ya se ha probado anteriormente.



— Completemos el cuadrado de lado L'



— Todo el proceso anterior puede aplicarse ahora al nuevo cuadrado: se mide su lado sobre la diagonal, a partir del punto de corte se traza la perpendicular a la misma y se ve que los dos segmentos señalados son iguales.

— Evidentemente esto se puede repetir indefinidamente, y siempre quedará un resto en la diagonal que puede utilizarse como lado para el siguiente cuadrado. Aunque este proceso no termine nunca el resto será gradualmente menor (pero nunca será cero):

$$(\dagger)\ L > L'' > L''' > \ldots$$

Y como hemos visto, cada uno de estos restos constituye la diferencia que hay entre la diagonal y el lado del cuadrado correspondiente:

$$(\dagger\dagger)\ L' = D - L,\ L'' = D' - L',\ L''' = D'' - L''\ldots$$

A partir de aquí procederemos a la demostración, que tendrá carácter indirecto. Asumiremos que el lado y la diagonal son conmensurables y llegaremos a una situación insalvable. Si ambos son conmensurables tienen una medida común, un segmento u que divide exactamente al lado y a la diagonal. Pero si dos segmentos cualesquiera son múltiplos enteros de u, la diferencia entre ambos también es un múltiplo entero de u. Es decir, si D y L son múltiplos enteros de u, también lo es L', según (††). Por otra parte, resulta que D' = L − L' (puesto que los dos segmentos señalados en negrita en el tercer dibujo miden lo mismo), lo cual siendo una diferencia entre múltiplos de u es también múltiplo de u. Del primer cuadrado hemos pasado al segundo, podemos continuar de la misma forma; tomando L' y D' resulta que L'' y D'' son múltiplos de u, y esto continúa en los sucesivos cuadrados.

Llegamos ahora a la contradicción. Si D y L son múltiplos enteros, hemos visto que L', L'', L''', ... son también múltiplos sin resto de u. Pero (†) demuestra que estos múltiplos de u decrecen continuamente, sin parar, aunque nunca llegan a ser cero. Esto no es posible ya que, por ejemplo, si L fuera 1000 u, entonces L', un múltiplo menor de u sería como máximo 999 u, etc., hasta llegar a un término (el 1001) que sería menor que u. Esto contradice el hecho de no haber ningún término en (†) que sea cero.

— Todas estas demostraciones correspondientes al ámbito geométrico prueban que la diagonal y el lado del cuadrado son inconmensurables, es decir, la relación entre ellas no puede expresarse en términos de razón entre enteros. Por tanto, si tomamos el lado del cuadrado como unidad, $\sqrt{2}$ (que es la medida de la diagonal del cuadrado según el Teorema de Pitágoras) no puede expresarse como razón entre números enteros o, lo que es lo mismo, es irracional.

Pruebas correspondientes al ámbito numérico:

Como ya hemos señalado, los números con representación decimal infinita y sin regularidad son los irracionales, pero ¿cómo podemos saber que $\sqrt{2}$ es un decimal de este tipo? Si calculamos la expansión decimal de $\sqrt{2}$ de forma práctica, sólo podemos calcular un número finito de cifras decimales por muy grande que éste sea; ¿cómo sabremos que la regularidad no empieza más adelante? La única forma es probando que $\sqrt{2}$ no es un número racional, lo cual quedaría demostrado si probáramos que no puede escribirse en forma de fracción.

3. Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces, existen dos números naturales p y q, $q > 0$ tales que $\sqrt{2} = p/q$, con p y q primos relativos o coprimos: m.c.d.(p,q) = 1.

Como $\sqrt{2} = p/q$ $\qquad 2q^2 = p^2$

Hagamos una tabla con todas las cifras en las que pueden terminar p, q, p^2, q^2 y $2q^2$:

p	q	p^2	q^2	$2q^2$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	2
2	2	4	4	8
3	3	9	9	8
4	4	6	6	2
5	5	5	5	0
6	6	6	6	2
7	7	9	9	8
8	8	4	4	8
9	9	1	1	2

Si comparamos las columnas correspondientes a p^2 y $2q^2$, nos damos cuenta de que $2q^2 = p^2$ sólo si ambos miembros de la igualdad terminan en cero, y esto sucede únicamente si p termina en 0 y q termina en 0 o en 5; en cualquier caso p y q serían múltiplos de 5 y, por tanto no serían primos relativos, con lo cual llegamos a una contradicción.

4. Utilizaremos para esta demostración el hecho de que todo número natural tiene una única factorización en factores primos. Ahora sea una fracción cualquiera p/q; probaremos que su cuadrado no es dos. Elevemos p/q al cuadrado; entonces la factorización de p^2 tiene los mismos factores que la de p, pero el número de cada factor primo es doble. De igual forma, el número de factores primos de q^2 es el doble que el de q. Esto caracteriza a los cuadrados de los racionales como aquellas fracciones cuyos factores primos en el numerador y en el denominador se presentan un número par de veces. El número 2 = 2/1 no es uno de ellos, así que no es el cuadrado de un racional, y por tanto $\sqrt{2}$ no es racional.

5. Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional de la forma p/q con p y q naturales, $q > 0$. Como p y q son naturales, pueden expresarse como producto de factores primos elevados a una cierta potencia:

$$p = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \dots$$

$$q = 2^{b_1} \cdot 3^{b_2} \cdot 5^{b_3} \dots$$

$$p^2 = 2^{2a_1} \cdot 3^{2a_2} \cdot 5^{2a_3} \dots$$

$$q^2 = 2^{2b_1} \cdot 3^{2b_2} \cdot 5^{2b_3} \dots$$

Como $2q^2 = p^2$ tenemos

$$2^{2b_1+1} \cdot 3^{2b_2} \cdot 5^{2b_3} \dots = 2^{2a_1} \cdot 3^{2a_2} \cdot 5^{2a_3} \dots$$

Esto implica que $2b_1 + 1 = 2a_1$, lo cual no puede suceder con a_1 y b_1 naturales. Así que $\sqrt{2}$ no es racional.

6. Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. Entonces, existen dos números naturales p y q, $q > 0$ tales que $\sqrt{2} = p/q$, con p y q primos relativos.
   Como $\sqrt{2} = p/q$ $\qquad 2q^2 = p^2$ (*)

el primer miembro de la igualdad (*) es divisible por 2, así que el segundo miembro de (*) debe serlo también. Es decir:

$$2 \text{ divide a } p^2$$

Luego 2 divide a p, o lo que es lo mismo, p debe ser par.
   Como p es par sabemos que $p = 2k$ para algún entero k.
Sustituyamos esto en (*):

$$2q^2 = (2k)^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

Aquí vemos que q^2 es divisible por 2, y por tanto q es divisible por 2. En otras palabras, p y q no eran primos relativos, y tenemos así una contradicción. Por tanto nuestra suposición de que $\sqrt{2}$ es racional debe ser falsa.

Todas estas demostraciones prueban que $\sqrt{2}$ ha de tener una expansión decimal infinita no periódica, porque en caso contrario, es decir, si tuviera una expresión decimal finita o infinita periódica sería un número racional, y hemos demostrado que no es así.

----

7. Para concluir, presentaremos la demostración con la que hemos concluido el apartado de demostraciones numéricas, en el contexto del problema griego de la medida, aunando de alguna manera los dos ámbitos en los que nos hemos movido por separado:

   Supongamos que el lado y la diagonal del cuadrado tienen en común una medida u. Sea la diagonal p veces u, y el lado q veces u. Aplicando entonces el teorema de

Pitágoras a uno de los triángulos rectos formados por los lados del cuadrado y la diagonal, resulta

$$(\#)\ p^2 = q^2 + q^2,\quad p^2 = 2q^2$$

Podemos suponer que p y q no tienen factores comunes, puesto que siempre pueden reducirse alterando u. Por ejemplo, 10 y 16 tienen el factor común 2, pero pueden ser reducidos a 5 y 8 doblando el tamaño de la medida común u. De ahora en adelante asumiremos que tal reducción ha sido efectuada.

Por (#) vemos que p^2 es dos veces el mismo número, y por tanto es par. Pero si el cuadrado de un número es par, dicho número también lo es; por tanto, p es par. Consecuentemente q tiene que ser impar, porque de lo contrario tendrían 2 como factor común, lo cual es una contradicción con el hecho de que han sido reducidos. No obstante, puesto que p es par, p^2 es divisible por 4,

$$p^2 = 4g^2,\quad 2q^2 = 4g^2, \text{ y por tanto, } q = 2g.$$

Es decir, que q^2 es par y, en consecuencia, también lo es q. Todo lo cual contradice lo que acabamos de demostrar (que q es impar), y demuestra en consecuencia que nuestra primera suposición, que p y q tienen una medida común, es falsa. Dicho de otra forma, no existe ninguna fracción (ningún número racional $x = p/q$ cuyo cuadrado sea 2). Esto puede también expresarse así: No existe ningún número racional que sea igual a $\sqrt{2}$, o finalmente, $\sqrt{2}$ es un "número irracional.

Reflexiones didácticas a partir de las pruebas presentadas

A raíz de las pruebas presentadas, desde el punto de vista didáctico, surgen de forma natural las siguientes cuestiones: ¿qué hace falta para entender estas pruebas?, ¿cuáles son las condiciones para que un alumno de Secundaria pueda comprenderlas y aprenderlas? En principio, pudiera parecer que estas pruebas se basan en conocimientos matemáticos bastante elementales; la distinción par-impar, las reglas de la divisibilidad, la descomposición en factores primos y resultados básicos de comparación de triángulos están en el acervo de un estudiante de Secundaria.

Pero la cuestión es, sin duda, más profunda. Prescindiendo de las particularidades de cada demostración, un punto fundamental que tienen en común las pruebas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, es que todas ellas son, en mayor o menor medida, pruebas indirectas, es decir, utilizan un razonamiento basado en el principio de no contradicción y en la prueba por reducción al absurdo; y es un hecho sabido que este tipo de razonamiento causa problemas de aceptación en la práctica. La mayoría de nuestros alumnos se encuentran desconcertados ante él, y esto es natural, habida cuenta la falta de precisión con que habitualmente utilizan el pensamiento deductivo y su falta de experiencia en el terreno de la demostración matemática. Incluso los estudiantes de cursos superiores y universitarios siguen considerando, en su mayoría, "incómodas" las pruebas por contradicción y en un buen número de casos, terminan aceptándolas únicamente por familiaridad (Tall, 1978). Una posible explicación a este hecho es que el problema de la irracionalidad surge en un contexto muy específico: el de la matemática griega. En opinión de autores como Arsac (1987), la cuestión de la irracionalidad está en el origen de la transformación de la matemática en una ciencia hipotético-deductiva. Así pues, su introducción a los alumnos requiere una evolución cualitativamente importante en su pensamiento matemático.

A los problemas derivados del razonamiento por reducción al absurdo hemos de añadir todavía otra consideración en el caso de las demostraciones geométricas. En este caso, el argumento para la resolución del problema, aunque su planteamiento sea más intuitivo, resulta más complicado que en la versión numérica: en efecto, en la demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con respecto a su lado hemos de pasar de un estadio donde la figura sirve de instrumento de prueba a otro en el cual la geometría se convierte en "el arte de los razonamientos exactos sobre figuras falsas" Para explicarlo con más precisión: la conmensurabilidad de un segmento mediante otro es siempre físicamente viable con dos segmentos cualesquiera, es decir, dados dos segmentos hay siempre una "buena" partición física de ambos mediante la misma unidad; la imprecisión de los instrumentos y de nuestros sentidos es la principal justificación de esta conmensurabilidad intuitiva. Es más, "La idea de que dos magnitudes, y más precisamente dos longitudes, tienen siempre una parte alícuota común es sin duda una etapa inevitable en el desarrollo del pensamiento matemático tanto a nivel histórico como a nivel individual. El descubrimiento de la irracionalidad se apoya de hecho "contra" en el sentido de Bachelard, esta teoría preliminar" (Arsac, 1987).

La inconmensurabilidad de dos segmentos surge, no de sus dimensiones físicas perceptibles sino de una relación explícita entre ambos, que se presenta en el contexto de una figura geométrica tal y como ocurre con la diagonal y el lado de un cuadrado; es la relación entre ambas longitudes el dato fundamental sobre el que se razona y no sobre las dimensiones físicas de una figura concreta. La inconmensurabilidad sólo concierne a objetos matemáticos ideales y, por ello, la demostración tiene un carácter más abstracto y riguroso, en donde se abandona la comparación física directa y se busca el mantenimiento de la relación inicial entre el lado y la diagonal del cuadrado en las sucesivas diferencias. Además, el problema tradicional de la geometría: razonar de manera exacta sobre figuras imperfectas, se aborda en este caso mediante un método indirecto que lleva a un proceso recurrente. Hay un cambio metodológico que, conjugado con un proceso infinito, lleva igualmente a un razonamiento por reducción al absurdo.

Ahora bien, a pesar de todas las dificultades expuestas correspondientes al ámbito geométrico, hemos de señalar que, a nuestro juicio, no puede obviarse el trabajo en este terreno si queremos que los alumnos construyan una base sólida sobre la que asentar la comprensión del concepto de irracionalidad y de número real. "Sin la presión de los problemas de la medida, R no habría respondido más que a problemas matemáticos extremadamente elaborados" (Douady, 1980; pg. 109). "Todo ensayo de tratamiento formal de los números irracionales que no utilice el concepto de magnitud geométrica conducirá a los artificios más delicados y abstrusos..." (Hankel, citado por D'Hombres).

Ante los problemas señalados o, más bien, partiendo de su consideración, cuando nos enfrentamos a la introducción del número real con alumnos de Secundaria, antes de la pregunta "qué hace falta para entender estas demostraciones", hay otra cuestión que parece prioritaria: *¿Qué hace falta para que estas demostraciones resulten significativas?, ¿qué* hace falta para que la cuestión de la irracionalidad constituya para los alumnos un problema, de forma que tenga sentido intentar comprender sus soluciones? Y avanzando aún más, *¿En qué sentido es pertinente el planteamiento de dicho problema a los alumnos y el trabajo alrededor del mismo y sus soluciones?*

Empezaremos por hacer algunas reflexiones acerca de las dos primeras cuestiones. Si atendemos a la Historia, el problema de encontrar aproximaciones a razones diferentes (entendiendo por razón cociente indicado de dos cantidades de una misma magnitud) que surgen de la resolución de problemas, mediante procedimientos ligados a las formas particulares de escritura de los números propias de cada civilización, no lleva al planteamiento de la irracionalidad (incluso la aproximación de algunas razones racionales puede ser tan delicada como la de razones irracionales).

El conflicto y el intento de solución se presentan por primera vez en la matemática griega: los pitagóricos creían que los números naturales y sus razones eran suficientes para describir la razón entre dos segmentos cualesquiera. Su descubrimiento de longitudes no conmensurables, como la diagonal y el lado del cuadrado, supuso el primer enfrentamiento con el problema de la irracionalidad: es decir, con la existencia de longitudes cuya relación no podía expresarse en términos de razones de enteros. Esto les condujo a separar el mundo de las magnitudes continuas del dominio del número, en un intento de buscar una teoría general que integrara todos los entes conocidos. El concepto de irracionalidad surge así de la geometría y permanece conectado a ella hasta el siglo XVI, cuando a raíz del desarrollo de las fracciones decimales por Stevin, surge la discusión de si los decimales infinitos no periódicos son números o no y de qué clase. (En su obra principal, la "Aritmética Íntegra" (1544), que trata de aritmética, de los irracionales del libro X de Euclides y de álgebra, Stifel considera que hay razones a favor de su aceptación, puesto que son útiles cuando "nos fallan los números racionales", así como consideraciones que "nos impulsan a negar que los irracionales sean números en absoluto" porque "cuando tratamos de someterlos a numeración [representación decimal]... hallamos que se escapan continuamente, de forma que ninguno de ellos puede ser aprehendido precisamente en sí mismo...Y nada de tal naturaleza carente de precisión puede llamarse número... Por consiguiente, de la misma forma que un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, sino que yace oculto en una especie de nube de infinitud". (Stifel, citado por Kline). Aunque finalmente los irracionales acaban siendo aceptados como números, no hay conceptualización del número real hasta finales del siglo XIX, cuando se cierra el problema con las definiciones dadas por Dedekind, Cantor y Weierstrass.

El desarrollo histórico del número real tiene tres etapas clave; las dos primeras, antes de que el conflicto se resuelva, presentan respectivamente el problema de la conmensurabilidad y de la notación decimal. Y, si bien es cierto que la génesis de un concepto en el alumno no puede ser idéntica a su evolución histórica, un punto tienen siempre en común las dos situaciones: el concepto no aparece históricamente, ni es asimilable por el alumno, más que si es indispensable para la superación de un conflicto.

El estudio de la génesis histórica del número real puede ser, entre otras, una fuente de problemas enormemente valiosa para el planteamiento de situaciones a los alumnos que posibiliten su conceptualización. Creemos que el trabajo en torno a este tema ha de llevarse a cabo en dos ámbitos complementarios: el numérico y el geométrico, y en ambos casos, debamos tener presente que el alumno se enfrenta por primera vez a situaciones en las que los procesos infinitos son inevitables para un aprendizaje significativo. Tanto en la interpretación de los decimales infinitos como en la cuestión de la inconmensurabilidad de longitudes, los alumnos se enfrentan con dichos procesos partiendo de sus experiencias en el terreno de la matemática finita y de sus intuiciones; esto constituye una fuente importante de concepciones erróneas y de puntos conflictivos, los cuales han de salir a la luz y ser puestos en cuestión de forma significativa, en un desarrollo progresivo, que asiente unas bases sólidas sobre las que sustentar la posterior comprensión del Análisis Matemático. Es, entonces, en este sentido en el que el problema de la irracionalidad, y el trabajo en torno a su comprensión y a sus soluciones, adquiere relevancia en la formación del pensamiento matemático de los estudiantes de Enseñanza Secundaria, particularmente en la de aquellos que más adelante opten por el estudio del Análisis Matemático.

Bibliografía

ARCAVI, A., BRUCKHEIMER, M., BEN-ZVI, R. (1987) History of mathematics: the case of irrational numbers. *For the learning of Mathematics.* vol.7, n 2. pags.18-23.

ARSAC, G. (1987) L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Matematiques.* vol. 8. n 3 pags 267-312.

ASSUDE, T. (1989) Racines carrées conceptions et mises en situations d'élèves de cuatrième et troisième. *Petit x.* n 20. pags. 5-33

BOYER, C. (1986) *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad Textos. (Dem. 1).

DOUADY, R. (1980) Aproche del nombres réels en situation dápprentissage scolaire (enfants de 6 á 11 ans *Recherches en Didactique des Mathémctiques.* 11, 77-110.

DREYFUS, T., EISENBERG, T. (1986) On the aesthetics of mathematical thought. *For the learning of Mathematics* vol 6. n 1 pags. 2-9. (Dem. 4)

GARDINER, A. (1982) *Infinite Processes.* New York: Springer-Verlag. (Dem. 5.1)

HILDEBRAND, S., TROMBA, T. (1990) *Matemática y formas óptimas.* Barcelona: Prensa científica. (Dem. 2)

KLINE, M. (1972/1992) *El pensamiento matemático de la Antiguedad hasta nuestros días.* Madrid: Alianza Editorial.

RADEMACHER, H. y TOEPLITZ, O. (1970) *Números y figuras.* Madrid: Alianza Editorial. (Dem. 5.2 y 7)

ROMERO, I. y RICO, L. (1991) En torno a la introducción del número real en Educación Secundaria. *Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.* Valencia. Junio de 1991.

ROMERO, I. (1993) *La Introducción del Número Real en Educación Secundaria. Memoria de Tercer Ciclo.* (Publicación interna del Dpto de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada).

ROMERO, I. y RICO, L. (1994) La introducción del número real en Secundaria: algunas pruebas de la irracionalidad de 2. *Revista Épsilon.* n 29, págs. 73-87

ROMERO, I. (1995). *La introducción del Número Real en Educación Secundaria. Tesis Doctoral.* (Publicación interna del Dpto de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada).

ROMERO ALBALADEJO I. (1996). "Introducción del Número Real en Educación Secundaria: una experiencia de Investigación-Acción" Granada: Comares. (En prensa).

STILLWELL, J. (1989). *Mathematics and its History* New York: Springer-Verlag. (Dem. 6)

TALL, D. y SCHWARZENBERGER, R. (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching.* 82. pags. 44-49. (Dem. 3).