

Pensamiento Algebraico: Contraste entre resoluciones de distintos niveles académicos, una tarea de generalización de patrones

Brandon Ayala

beag_05@hotmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Bogotá, Colombia)

Andrea Mora

yuli.968@hotmail.com

Universidad Distrital FJC Francisco José de Caldas, (Bogotá, Colombia)

Diego Vega

alejo_1296@hotmail.com

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Bogotá, Colombia)

Resumen

El estudio aborda el análisis de la aplicación de una actividad sobre generalización de patrones realizada a dos estudiantes de diferentes niveles académicos, en la cual un estudiante no ha tenido ningún acercamiento al álgebra escolar y el otro pertenece a la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM), con el objetivo de reconocer que aspectos del pensamiento algebraico emergen en la resolución de dicha actividad y además, contrastar los diferentes resultados obtenidos en ambos casos, en términos de abordaje de la tarea y solución a ella, encontrando que al comprender el álgebra desde lo puramente simbólico se pueden generar obstáculos en el desarrollo de este tipo de actividades, dado que el pensamiento de alguna manera se condiciona a buscar una expresión netamente literal.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, generalización, álgebra escolar, resolución.

1. Introducción

A partir de un estudio de caso desarrollado en el espacio de formación Didáctica de la Variación correspondiente a sexto semestre de la malla curricular de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (UDFJC), cuyo objetivo estaba orientado a la identificación de rasgos del pensamiento algebraico a temprana edad, se llevó a cabo el análisis de la actividad realizada por un estudiante de 6° de bachillerato al resolver una tarea de generalización denominada plegado de papel (Rojas y Vergel, en prensa), siendo éste el eje principal del trabajo de Mora, Ayala, & Vega, (en prensa), no obstante éste, atendía específicamente al objetivo mencionado dejando de lado otras cuestiones como el nivel académico de los estudiantes, siendo este un claro influyente en la generalización construida por los resolutores.

Así, retomando el análisis presentado en Mora et al. (en prensa), se realiza un contraste con la resolución de la tarea “plegado de papel” de una estudiante de tercer semestre de la licenciatura, siendo nuestro objetivo principal determinar la forma en que los estudiantes de diferentes niveles académicos expresan la solución a una tarea específica de generalización de patrones.

De esta manera se construyó el respectivo marco conceptual que hiciese referencia a la resolución de tareas asociadas a la generalización de patrones, para lo cual se realizó el estudio de autores como Ellis y Kaput (citados en Callejo, 2015.p.5) y el grupo Azarquiél y Radford (citados en Rojas y Vergel, 2013.p.691 y 693).

Además se tuvo en cuenta el trabajo de Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2013), quienes realizan planteamientos concernientes a los niveles de algebraización en los que se pueden situar las actividades matemáticas de los escolares.

2. Referente conceptual

Para poder identificar diferentes rasgos del pensamiento algebraico en actividades o producciones hechas por los estudiantes acerca de la

generalización de patrones, es indispensable abordar una documentación que contenga diversos aspectos relacionados a este.

Es importante recalcar que este trabajo se realizó con procesos de generalización, por ende es importante definir este concepto; Kaput (citado en Callejo, 2015.p.5) “desde una perspectiva matemática, generalizar significa:

- identificar lo que es común en un conjunto de casos,
- extender un razonamiento más allá del rango en que se ha originado, y
- obtener resultados generales de casos particulares”.

Ahora para identificar diferentes aspectos del pensamiento algebraico en este tipo de actividades, comenzamos teniendo en cuenta los planteamientos hechos por Radford (citado en Rojas y Vergel, 2013), que reconocen tres tipos de generalización, determinados por los medios de expresión utilizados en la tarea:

1. Generalización Factual: En este los medios para encontrar la generalidad están caracterizados por movimientos, gestos, palabras y actividades perceptuales.
2. Generalización Contextual: Los medios anteriores son remplazados por palabras claves.
3. Generalización Simbólica: Las palabras claves ya son representadas por expresiones simbólico-literales o símbolos.

Ahora viendo desde un desde un punto de vista cognitivo, y teniendo presenta las investigaciones propuesto por el grupo Azarquiel (citado en Rojas y Vergel, 2013.p.691), dan cuenta de los pasos que se requieren en el proceso de generalización:

1. la visión de la regularidad, la diferencia, la relación de los objetos a trabajar.
2. La exposición verbal de las conjeturas o soluciones hechas.
3. La expresión escrita de las soluciones de la manera más concisa posible.

Y ya ubicados en un plano cognitivo, también tendremos en cuenta a Ellis (citada en Callejo, 2015.p.5), plantea tres tipos de acciones de generalización que siguen un orden jerárquico, las cuales son: *Relacionar* o establecer una asociación entre dos o más situaciones u objetos matemáticos; *buscar* o repetir acciones, para verificar si es válido en todos los casos y *extender* o expandir un modelo o una regla a un modo más general.

Por ultimo tenemos en cuenta los 4 niveles de algebrización propuestos por Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2013):

- *“Nivel 0 de algebrización (ausencia de razonamiento algebraico).*

Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante los lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero este valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización, el simple reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización.

- *Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1).*

Intervienen objetos intensivos (reglas generales) cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante el lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con estos. En tareas estructurales, se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal.

- *Nivel intermedio de algebrización (Nivel 2)*

Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico-literal para referir a los intensivos reconocidos. En tareas estructurales, las ecuaciones son de la forma. En tareas funcionales, se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

- *Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3).*

“Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica-literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones” (p. 207 - 211).

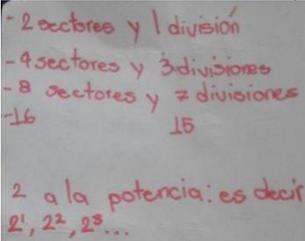
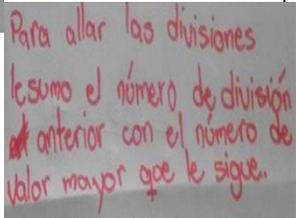
4. Descripción de la experiencia

Para el presente trabajo se retomaron algunos elementos teóricos junto con el análisis desarrollado por Mora et al. (en prensa), con el fin de realizar un contraste entre las producciones, del estudiante de 6° grado de bachillerato de dicho análisis y una estudiante quien cursaba 3° semestre de la LEBEM; para ello se les propuso una tarea denominada “plegado de papel” cuya intención es que el resolutor halle la generalidad de los pliegues y los sectores que resultan de la iteración del doblar a la mitad (de forma horizontal) de un rectángulo de papel.

De esta manera se optó por registrar mediante grabaciones de vídeo las resoluciones de los educandos, realizando un análisis (para el caso de la alumna para profesor) y contrastando ambas actividades a partir de aspectos cognitivos, socioculturales y de algebrización descritos en el marco conceptual.

Así, en las siguientes tablas se muestran algunas acciones relevantes del proceso de desarrollo de ambos alumnos, sujetas a las categorías expuestas, a modo de comparación.

Acciones de generalización según Ellis (2007)	Relacionar o hacer una asociación entre dos o más problemas, situaciones u objetos matemáticos	Buscar o repetir acciones con objeto de detectar una relación estable entre dos o más objetos.	Extender o expandir un modelo, relación o regla a una estructura más general.
Estudiante 1 (3er semestre de la licenciatura)	Realiza una predicción de los datos que obtendrá, expresa "yo creería que aquí va..." y los registra, (3dobles→ 5 pliegues, 6 partes).	Realiza el doblez y el conteo correspondiente a un caso particular para verificar su conjetura	Expresa la regularidad encontrada, a través de las siguientes expresiones: $2x-1$ para el caso de los pliegues, y $2x$ para los sectores
Estudiante 2 (sexto grado-bachillerato)	El estudiante identifica una regularidad entre el número de sectores teniendo en cuenta la cantidad de veces que se ha doblado el papel.	Expresa de forma escrita las potencias de dos para algunos casos y prueba para unos pocos si este método funciona.	El estudiante escribe textualmente qué se debería usar para saber el número de sectores en cualquier cantidad de dobles "Potencias de dos" "Dos se eleva al número de dobles que se quiera"
Pasos para el proceso de generalización según Azarquiél (1993)	La visión de la regularidad, la diferencia y la relación	Exposición verbal.	Expresión escrita, de la manera más concisa posible.
Estudiante 1 (3er semestre de la licenciatura)	Realiza la relación entre términos consecutivos de una secuencia por ejemplo "este siempre es el doble de este".	Expresa la regularidad haciendo uso del lenguaje: "pues lo que yo veo aquí (señalando el segundo término de la segunda columna) es que es el doble de este número (cantidad de pliegues del término anterior), más uno,	Expresa la regularidad que encuentra, mediante las siguientes expresiones: $2x-1$ para el caso de los pliegues, y $2x$ para los sectores
	Identifica una	Comenta que la	El estudiante escribe

<p>Estudiante 2 (sexto grado-bachillerato)</p>	<p>regularidad entre el número de sectores teniendo en cuenta la cantidad de dobles que le ha hecho al papel</p>	<p>diferencia entre un sector y el siguiente refiere matemáticamente a las potencias de dos.</p>  <p>Ilustración 1. Generalización de los sectores</p>	<p>textualmente qué se debería usar para saber el número de sectores en cualquier cantidad de dobles “Potencias de dos” “Dos se eleva al número de dobles que se quiera” y para los pliegues (divisiones):</p>  <p>Ilustración 2. Generalización de los pliegues</p>
<p>Tabla 1. Contraste de la teoría con las producciones de los alumnos.</p>			

Tipos de generalización Radford (2006)	Generalización Factual	Generalización Contextual	Generalización Simbólica
<p>Estudiante 1 (3er semestre de la licenciatura)</p>	<p>No Aplica</p>	<p>Establece que las expresiones algebraicas encontradas inicialmente son erróneas por lo que describe la regularidad mediante lenguaje natural y movimientos con su esfera.</p>	<p>Luego del 4° dobléz establece expresiones algebraicas $(2x - 1, 2x)$ para denotar la generalidad que ha encontrado aunque de forma incorrecta.</p>

Estudiante 2 (sexto grado- bachillerato)	No Aplica	Genera expresiones que denotan la generalidad que ha encontrado mediante lenguaje natural como “Todos los números de divisiones se estarían sumando con el número que le sigue en valor” además con movimientos corpóreos.	No aplica
Generalización Matemática, Kaput (1999)	Encontrar lo que es común en un conjunto de casos	Extender un razonamiento más allá del rango en que se ha originado	Obtener resultados generales de casos particulares
Estudiante 1 (3er semestre de la licenciatura)	Realiza una predicción de los datos que obtendrá siguiendo los resultados obtenidos hasta el 2° doblez.	Establece que hay equivocaciones en sus acciones por lo que describe la regularidad que ha encontrado mediante lenguaje natural con expresiones como “...pues lo que yo veo aquí es que es el doble de este número (cantidad de pliegues del término anterior), más uno...” y realizando movimientos con su esfero para hacer énfasis en las variables encontradas.	Establece expresiones alfanuméricas $(2x - 1, 2x)$ para la generalidad encontrada de los pliegues y sectores respectivamente, no obstante estas expresiones sólo relacionan dos términos consecutivos.

Estudiante 2 (sexto grado-bachillerato)	Fija su mirada en la hoja donde ha ubicado los datos y menciona "Yo creo que esto consiste en un patrón entre los sectores y las divisiones, entonces si nos ponemos a calcular estaríamos potenciando por dos"	Propone ejemplos de casos particulares más allá de los que puede obtener con los dobleces del papel por ejemplo para el caso 100 determina que el número de sectores es 2^{100}	Define mediante expresiones numéricas y de lenguaje natural la generalidad que ha encontrado, estableciendo que los sectores son iguales a "2 a la potencia" mientras para los pliegues "le sumo el número de división anterior con el número que le sigue en valor"
Algebrización, Godino et al. (2013)	Presencia de objetos intensivos	Tratamiento de objetos intensivos	Tipos de lenguajes usados
Estudiante 1 (3er semestre de la licenciatura)	Reconoce la comunalidad o regla de conformación, es decir un objeto intensivo, lo cual se hace explícito con la predicción que realiza y las expresiones que propone para denotar las generalidades que encuentra.	La manipulación de los objetos intensivos se queda en el mero anuncio de las expresiones.	De forma inicial establece expresiones alfanuméricas $(2x - 1, 2x)$ sin embargo al ver que éstas son erróneas, define la generalidad mediante lenguaje natural y movimientos con su esfero.
Estudiante 2 (sexto grado-bachillerato)	Se refiere al patrón general diciendo "dos a la potencia" dado que entiende que esa potencia podría ser cualquier número que refiera a la cantidad de dobleces, e igualmente obtendría el número de sectores.	Los objetos intensivos quedan expresados mediante frases escritas mediante lenguaje numérico y natural, por lo que no existe más tratamiento.	Escribe los patrones que considera le permiten hallar el número de sectores y pliegues en cualquier número de dobleces, haciendo uso de expresiones en lenguaje natural.
Tabla 2. Contraste de la teoría con las producciones de los alumnos.			

5. Reflexiones y conclusiones

A partir del trabajo desarrollado se identificaron diferencias entre las resoluciones ligadas principalmente al medio de expresión usado por los resolutores, si bien la estudiante de 3° semestre hace uso de lenguaje simbólico-literal para expresar la comunalidad o generalidad encontrada lo hace de forma incorrecta por lo cual recurre al lenguaje natural, sin llegar al objetivo de la tarea. Por otra parte el alumno de 6° de bachillerato quien carece de un acercamiento al álgebra escolar, hace uso de un lenguaje familiar para él: numérico y natural, para denotar la generalidad encontrada de forma acertada.

Es posible entonces que la formación en álgebra de la alumna se convierta en un obstáculo para ella al querer resolver tareas relacionadas con la generalización de patrones, ya que al estar sujeta al álgebra simbólica se convierte como único objetivo, el encontrar una expresión algebraica, sin reflexionar sobre las relaciones matemáticas que la generan.

Lo anterior conlleva a afirmar que lo entendido por pensamiento algebraico tradicionalmente está estrechamente ligado a las funciones, ecuaciones, así como a la Introducción y manipulación de símbolos literales únicamente. Se hace necesario entonces analizar el conocimiento que debe poseer el docente de matemáticas referente a la didáctica del álgebra y al pensamiento algebraico, de forma que tenga instrumentos suficientes para proponer y analizar tareas que potencien dicho pensamiento a temprana edad, como es el caso de la generalización de patrones.

Referencias bibliográficas

- Callejo, M. (2015). Generalización y pensamiento algebraico. UNO, vol. 64, 5-8.
- Godino, J. Aké, L. Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2013). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino_niveles_algebrizacion_EC2014.pdf.
- Mora, A. Ayala, B y Vega, D. (en prensa). Presencia del pensamiento algebraico en la generalización de patrones a temprana edad. Una experiencia de aula. Memorias

VI Encuentro Nacional Estudiantil en Educación en Matemáticas y Física.
Medellín, 13, 14 y 15 de Junio de 2016.

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico.
Recuperado de:
<http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/viewFile/7753/9562>.

Rojas, P. y Vergel, R. (en prensa). Pensamiento algebraico: Aportes para el trabajo en el aula. Memorias 16° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá, 5, 6 y 7 de Octubre de 2015.