

CONFERENCIA REPRESENTACIÓN Y MODELACIÓN DE OBJETOS DE LA NATURALEZA

Publio Suárez Sotomonte

Magister en Educación

GRUPO PIRAMIDE Uptc Tunja

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

psuarez2002@hotmail.com

Resumen

La conferencia describe una propuesta didáctica para representar y modelar en el plano y el espacio tridimensional, de manera aproximada, los atractores de fractales autosemejantes y sus familias, que sintetizan (falsean) representaciones de objetos de la naturaleza, usando los ambientes de geometría dinámica y modelación 3D, proporcionado principalmente por aplicaciones como Xfrog, Lsystem 4, Fractal Visión, Ultrafractal, Winfract, VistaPro y Cabri Geometry II Plus y Cabri 3D. Se inicia con una contextualización teórica sobre Geometría Fractal de la Naturaleza, describiendo una clasificación de Sistemas Iterados de Funciones (IFS's), desde los fractales autosemejantes clásicos, hasta las familias de fractales conocidas como superfractales. A partir de las nociones elementales de geometría euclidiana, geometría cartesiana, geometría vectorial y de la geometría de las transformaciones, de manera particular de la noción de afinidad regular contractiva, se construyen representaciones aproximadas de los fractales de Pitágoras, curvas y estrellas fractales y varios ejemplos de superfractales, empleando las macroconstrucciones como opciones para simular procesos recursivos e iterativos en espacios discretos, además de evidenciar algunos aspectos de la relación entre arte y geometría. Finalmente se hace una descripción de las actividades planteadas y un breve análisis sobre los resultados obtenidos en la fase de Representación-Modelación de objetos de la naturaleza, dentro de la propuesta para aprender Geometría Fractal, usando el software matemático descrito.

Palabras clave: Geometría Fractal, Modelación, Representación, Sistemas Iterados de Funciones (IFS's), Objetos de la Naturaleza, Geometría Dinámica.

INTRODUCCIÓN

CONTEXTUALIZACIÓN TEÓRICA

Geometría fractal de la naturaleza

Es considerada como la geometría de inicios del siglo XXI, la cual se desarrolló plenamente como disciplina a partir de la década de los años sesenta, gracias a los aportes del matemático nacionalizado francés Benoit Mandelbrot, quien profundizó sobre temas descubiertos a principios de siglo XX, rescatados del olvido, por los matemáticos más notables como Gauss, Sierpinski, Hausdorff, Cantor, Peano, Hilbert y Julia entre otros, para crear herramientas y modelos que representan los objetos y fenómenos de la naturaleza, con el propósito de descubrir sus secretos y predecir sus comportamientos²⁵. La Geometría fractal es una herramienta que permite mirar la realidad con otros lentes, que atrae enormemente la atención de los estudiantes y constituye una teoría para favorecer el desarrollo del pensamiento matemático, de tipo creativo, a través de la resolución de problemas. El nombre de Teoría Fractal de la Naturaleza se origina en el hecho de ser una fabulosa herramienta de tipo geométrico, para modelar muchos objetos naturales que no pueden ser tratados con la geometría euclídea y la geometría diferencial, con ópticas consideradas en el mundo matemático, como tradicionales.

²⁵ MIGUEL DE GUZMAN Y OTROS. Estructuras fractales, Editorial Labor S.A., Barcelona 1993.

El desarrollo de la informática, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y en especial de la computación gráfica, ha permitido abordar campos sobre la representación de modelos geométricos a partir de técnicas para el manejo del dibujo en dos y tres dimensiones. Se puede avanzar en el estudio de fractales gracias a la implementación de procedimientos y algoritmos, formulados de manera más general en la teoría matemática, como por ejemplo el Teorema del Collage y el Juego del Caos en Sistemas Dinámicos, que particularizados en la pantalla del ordenador generan los distintos ejemplos de la viabilidad al modelar la naturaleza, o al menos aproximarse a través de la representación de sus modelos.

Al trabajar con procesos algorítmicos el papel del Análisis Numérico es primordial, pues muy difícilmente se puede avanzar en su óptima implementación, sin analizar las implicaciones sobre el uso de métodos recurrentes e iterativos, como la solución aproximada de ecuaciones no lineales. Los métodos iterativos, proveen una excelente oportunidad para estudiar algunos fractales llamados atractores extraños o los fractales en tiempo de escape finito o infinito, como los generados mediante las órbitas de sistemas dinámicos, representados apropiadamente en el espacio de fases, como por ejemplo, los fractales tipo bifurcación, cuando al abordar su estudio no es de interés la convergencia sino la divergencia de ciertas sucesiones.

El matemático Michael Barnsley en su texto *Fractals Everywhere*, muestra otra alternativa, esta vez desde la Topología, al mostrar los fractales como los objetos matemáticos que viven en los espacios de subconjuntos compactos de un espacio métrico completo. El estudio de los sistemas dinámicos dentro de la Dinámica no Lineal, el concepto de la dimensión en Teoría de la Medida y algunas Ecuaciones Diferenciales y sistemas de ellas, para comprender la dinámica de algunos fenómenos naturales, se constituyen en alternativas no solo para emprender el estudio de los fractales, sino para contextualizar dichos conceptos con soporte en las estructuras matemáticas que conforman cada una de las ramas mencionadas.

Las visiones futuristas, han incluido en la formación matemática de nuestros futuros estudiantes, este nuevo tipo de geometría dentro de la amplia variedad de opciones como, geometrías no euclidianas (modelos hiperbólico y elíptico), proyectiva, plana absoluta, diferencial, de coordenadas y de grafos. Tal es la dinámica en el desarrollo de la matemática, que algunos han llegado a afirmar “la matemática que se aprenderá y enseñará dentro de diez años, aún no se ha descubierto”. Cuando se habla de la ciencia a prevalecer en el siglo XXI, la geometría fractal y su relación con la teoría del caos, ocupan un lugar preponderante en las propuestas curriculares visionarias.

Por esto, se planteó una investigación que pretende sistematizar algunas experiencias al incorporar la naciente Teoría Fractal de la Naturaleza, al currículo de la educación universitaria especialmente en las asignaturas de geometría y análisis numérico en la carrera de Licenciatura en Matemáticas e Ingenierías de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, en los aspectos formales y prácticos, específicamente en los elementos teóricos, conceptos, modelos y estructuras matemáticas necesarias para formalizar la teoría de los fractales como herramienta para describir y descubrir los secretos de objetos de la naturaleza; en cuanto al camino más apropiado para abordar el estudio de la geometría fractal de la naturaleza, con el propósito de plantear los cambios curriculares necesarios en educación básica, intermedia y superior, de tal manera que los conceptos de fractales y de teoría del caos, como: dimensión, transformación afín, incertidumbre, iteración, irregularidad, atractor extraño, algoritmo en tiempo de escape, juego del caos, sistemas iterados de funciones, órbita de sistemas dinámicos, entre otros, sean de común manejo en clases de matemáticas, y por último, en lo referente a las estrategias didácticas apropiadas con el fin de brindar ambientes creativos para aprender la geometría fractal, descubrir nuevos modelos y abordar sus aplicaciones, con la ayuda de la representación computarizada. Las diversas aplicaciones de la teoría fractal han permitido trabajar en campos aparentemente alejados de la matemática, como por ejemplo las artes. El diseño de objetos fractales que representen objetos de la realidad, o que plasmen en bellas imágenes las ideas más novedosas producidas por la imaginación de un artista, es una tarea cada vez más popular, gracias a los esfuerzos de los teóricos de la Geometría Fractal y al trabajo de los empíricos en el desarrollo de aplicaciones interactivas que permiten experimentar, bosquejar y crear las imágenes fractales, actividad propicia para el desarrollar la creatividad.

Los sistemas iterados de funciones

Una formalización bien conocida propuesta por Hutchinson²⁶ en su trabajo sobre fractales y autosimilaridad, proporciona un sustento matemático de los fractales autosemejantes generados por sistemas iterados de funciones, por sus siglas en inglés (IFS's). El fractal asociado con un IFS, se representa con el atractor. Las afinidades contractivas permiten estructurar y clasificar los diversos tipos de sistemas iterados de funciones que subyacen como modelos matemáticos de los fractales autosemejantes. Las clases de sistemas iterados de funciones (IFS's), entre ellos los IFS's con probabilidades y los IFS recurrentes, se afianzan como temáticas fundamentales para modelar los fractales escalantes. Una clasificación de sistemas iterados de funciones²⁷ ha sido construida en el ámbito teórico, la cual comprende: los sistemas iterados de funciones clásicos (IFS's), los sistemas iterados de funciones con probabilidades (PIFS's), los sistemas iterados de funciones recurrentes (RIFS's), los sistemas iterados de funciones locales (LIFS's), los sistemas iterados de funciones de un solo espacio (ssLIFS's), fractales v-variables y los superfractales²⁸. Dicha taxonomía pretende entre otras cosas, mejorar los modelos matemáticos para representar de manera realista los objetos de la naturaleza.

Construcción de fractales con Cabri: Fractal estrella 5P

Se describe inicialmente y a manera de ejemplo, la forma de construir la estrella fractal de cinco puntas (5P). La estrella 5P, dibujada como una poligonal cerrada, a partir de un segmento y considerando un ángulo de 36 grados.²⁹ Se define una primer macro, con dos parámetros, la longitud del segmento y un ángulo específico (Ver gráfica 1). El orden en que se escogen los puntos iniciales para definir la macro es importante para darle una orientación fija a la construcción. Una segunda macro auxiliar con dos parámetros, permite determinar un segmento trasladado a partir del original, en cada punta de la estrella: el primer parámetro es un factor de homotecia, respecto al segmento semilla y el segundo parámetro es el ángulo de rotación (Ver gráfica 2). Una tercera macro que se construye, graba el mecanismo de reproducción del fractal estrella de cinco puntas, con la cual se puede dibujar la aproximación del fractal, en el nivel deseado. Se pueden grabar macros intermedias de niveles más altos, por ejemplo nivel tres o cuatro, para agilizar el proceso de representación aproximada del atractor.



²⁶ HUTCHINSON, J. E. Fractals and self-similarity. Indiana: Univ. Math. J. 30 713–749, 1981.

²⁷ WADSTRÖMER, Niclas. Coding of fractal binary images with contractive set mappings composed of affine transformations. Linköping: Linköping University, 2001.

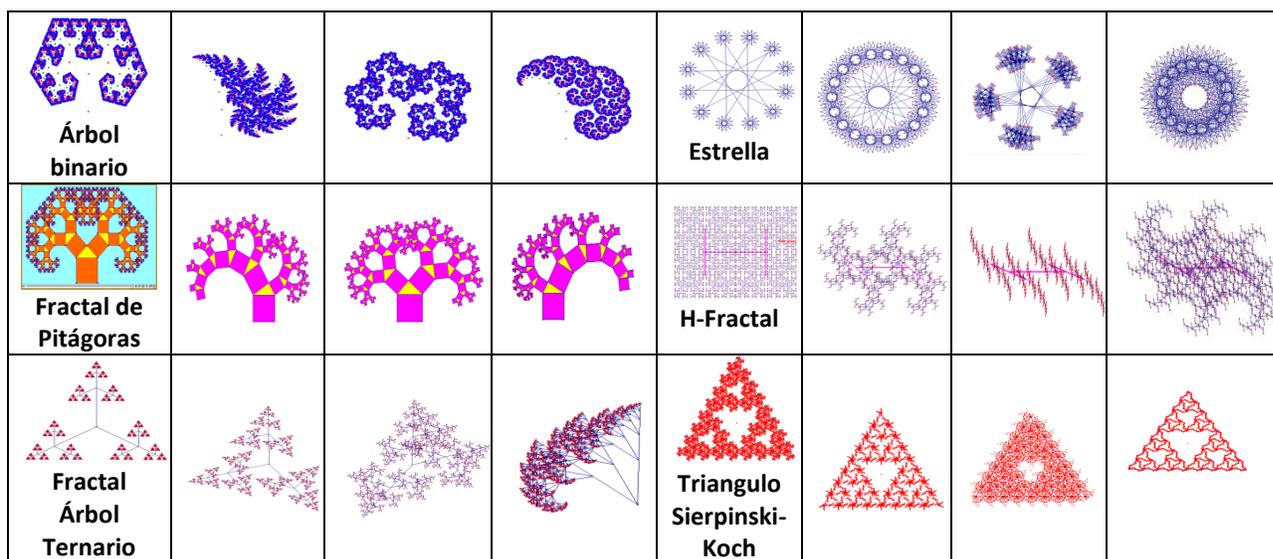
²⁸ BARNSELY Michael, HUTCHINSON John E. and STENFLO Orjan. V -variable fractals and superfractals. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2003.

²⁹ LAUWERIER, Hans. Fractals. New Jersey: Princeton University Press, 1987.

La clave para construir modelos de fractales dinámicos en el ambiente gráfico de Cabri, es poder definir macros con parámetros en su construcción, que posteriormente se pueden tomar como variables para realizar las animaciones que permiten obtener la familia de fractales con la misma estructura. En la medida que aumente el número de variables, es obvio que se amplía la gamma de representaciones aproximadas de atractores obtenidos.

Se presenta a continuación una colección de modelos de fractales dinámicos, elaborados en cada caso, siguiendo un procedimiento análogo al descrito anteriormente. Al analizar los resultados obtenidos, es evidente que surge una variedad de situaciones abiertas (sin resolver), respecto a problemas métricos como áreas, longitudes laterales, formas diversas de los atractores, lugares geométricos, que son una excelente oportunidad para descubrir muchas propiedades geométricas. Con interés didáctico, en la descripción de los sucesivos modelos de fractales dinámicos no se describen los detalles, pues se busca que los estudiantes aprendan a través del descubrimiento. Las situaciones problemáticas que se plantean pretenden ser cuestionadoras, para enriquecer las experiencias de los estudiantes en el campo de las representaciones gráficas. Las construcciones se clasifican de acuerdo con el creciente grado de complejidad y en el proceso de construcción surgen elementos comunes, que se van descubriendo como regularidades que se constituirán en los primeros pasos para trabajar con estructuras fractales.

En síntesis, las representaciones expuestas permiten que el estudiante descubra las propiedades básicas en los distintos tipos de geometría usadas en las figuras construidas; mediante la simulación, determina las propiedades de la composición de traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y en general de transformaciones afines. Tales construcciones son el propósito de la actividad, pero la riqueza en el manejo de las relaciones y proposiciones relativas a geometría euclideana y de las transformaciones, surge como tarea prioritaria para lograr finalmente las representaciones fractales.



Una experiencia en el aprendizaje de fractales.

Se contextualiza en una propuesta para el aprendizaje de la Geometría Fractal de la Naturaleza, en la cual proponen las siguientes cuatro etapas su aprendizaje: **exploración** como actividad de identificación y clasificación de objetos y fenómenos con características fractales subyacentes; **representación-modelación** como espacio para conocer y dibujar los fractales más famosos, detectar sus características y propiedades, y también la creación por parte de los estudiantes de sus propios fractales en computador; otra etapa es la **construcción formal** de los conceptos fractales claves soportados en las estructuras algebraicas de espacios vectoriales y por último la etapa

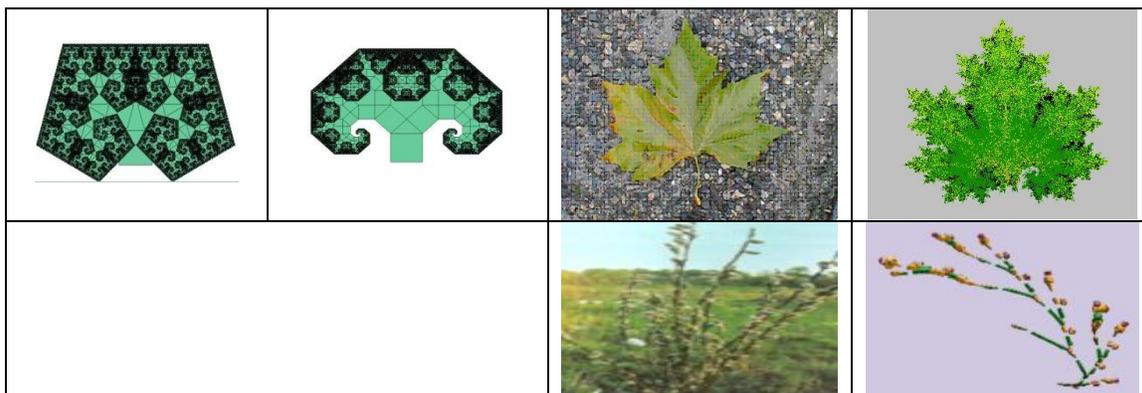
de **aplicación** de los conceptos fractales en la solución de diversos problemas de la vida cotidiana³⁰. A continuación se describen algunas actividades relativas a una experiencia didáctica en el aprendizaje de tipo de geometría. Para el propósito de la ponencia solo se enfatizará en la etapa de Representación- Modelación.

Práctica de campo

Cada año se lleva a cabo una práctica de campo con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas e Ingenierías de Tunja, para desarrollar principalmente las dos primeras etapas de la propuesta para el aprendizaje de la Geometría Fractal de la Naturaleza. El principal propósito es explorar los parques naturales más reconocidos de Colombia, para detectar objetos de la naturaleza con característica fractal, como árboles de distintas clases, plantas, hojas, flores, piedras, fósiles, paisajes, montañas, formas ramificadas de ríos o riachuelos, que sean susceptibles de ser posteriormente modelados en computador usando aplicaciones de fractales.

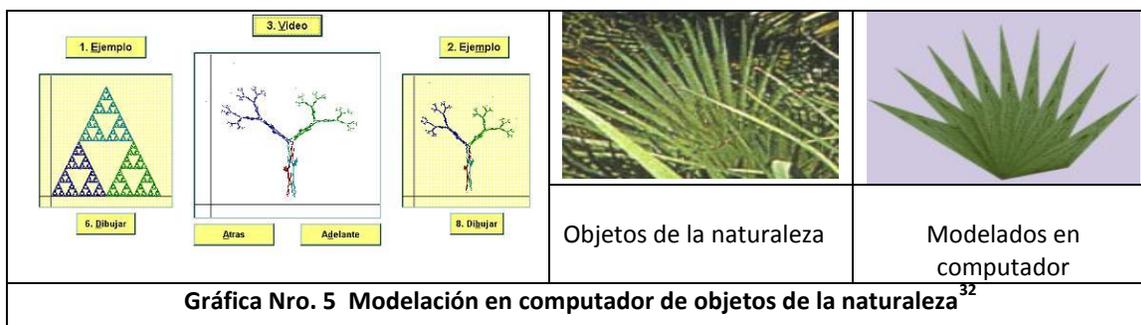
Exploración de aplicaciones para modelación fractal.

Como actividad primordial se probaron y experimentaron los demos de las siguientes aplicaciones para elaboración y modelación de fractales en computador. Para modelar fractales autosemejantes, generados por Sistemas Iterados de Funciones (IFS's), se trabajaron con los estudiantes y grupo investigador las siguientes aplicaciones: FRACTAL VISION, FRACTAL 3D, ULTRAFRACTAL, BRAZIL, FANTASTIC FRACTALS, FRACTALIN, FRACTGRAF, los programas de cálculo simbólico MATHEMATICA, MAPLE, MATLAB, y los ambientes de geometría dinámica proporcionados por CABRI GEOMETRE, GEOGEBRA, SKETCHPAD GEOMETRY y CARMETAL. Para Modelar los objetos de la Naturaleza se emplearon las siguientes aplicaciones: FRACTAL VISION, LSYSTEM, IFS-Graphics. Para la creación de paisajes virtuales se emplearon las aplicaciones VISTAPRO 4.0, FRACTAL DESIGN PAINTER y BRYCE 3D. En la siguiente ilustración se muestran algunos de los resultados del trabajo de modelación de los objetos de la naturaleza seleccionados en las prácticas de campo. También se exploró las aplicaciones FRACTPLANT y FRACTALES 1.0 elaboradas en el lenguaje de programación VISUAL BASIC con librerías de OPENGL, por un grupo de jóvenes investigadores del grupo Pirámide³¹ e ingenieros de sistemas.



³⁰ SUÁREZ, P. La representación en educación matemática: atractores de sistemas iterados de funciones (IFS's). II Congreso Internacional ALAMMI, UPTC, Tunja 2009

³¹ VIVAS Nancy y MARTÍNEZ Sergio. Fractplant. Modelación 2D Y 3D de objetos De La naturaleza. Dirigida por Mg. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2009.



Plantas a partir de IFS's

Como se evidencia en la parte izquierda de la anterior gráfica, una de las herramientas que se usó para modelar las estructuras tipo ramificación de los objetos de la naturaleza, son los sistemas iterados de funciones (IFS's) y los sistemas iterados de funciones con probabilidad (PIFS's), en donde se incorpora la aleatoriedad para generar los gráficos, empleando la representación por puntos y el algoritmo conocido como "juego del caos". Finalmente se emplearon los sistemas de funciones iteradas recurrentes (RIFS's), que son estructuras mucho más generales, en donde los coeficientes de las transformaciones se almacenan en matrices, lo cual facilita el trabajo al dibujar modelos parametrizados.

Generando grandes paisajes naturales

Modelar y renderizar escenas naturales implica una enorme complejidad. Primero, el terreno debe ser modelado y las plantas deben ser distribuidas apropiadamente para simular más realismo, reflejando la interacción entre los tipos de plantas y su relación con el entorno. Una escena natural, puede consistir en millones de plantas primitivas, que deben ser renderizadas eficientemente, en donde se incorpora la sutileza de la iluminación en ambientes naturales. Un sistema para desarrollar estos ambientes es descrito más adelante, en donde inicialmente se diseña el terreno usando un editor grafico interactivo, la distribución de las plantas la determina el usuario (como si diseñara un jardín), cuyas plantas individuales están representadas por modelos procesados paramétricamente. La complejidad geométrica de la escena se reduce mediante "muestras aproximadas", en las cuales, plantas, grupos de plantas y plantaciones son aproximadas por objetos representativos, para luego renderizar la escena.

Visualización interactiva de ecosistemas complejos de plantas.

El diseño y la visualización de escenas realistas, son usados para simulación de renovación de bosques, plantación de pastos, creación ambientes naturales modificados por el hombre, el diseño de ambientes naturales intermedios, como zonas reforestadas luego de un incendio, entre otras. Existen diversas aplicaciones para tales propósitos. Otras áreas han sido invadidas por el empleo con carácter educativo de estas aplicaciones de modelación de ecosistemas, para animación por computador, expresión artística, simuladores de vuelo y juegos.

Métodos de modelación e interfaces de usuario para la creación de plantas

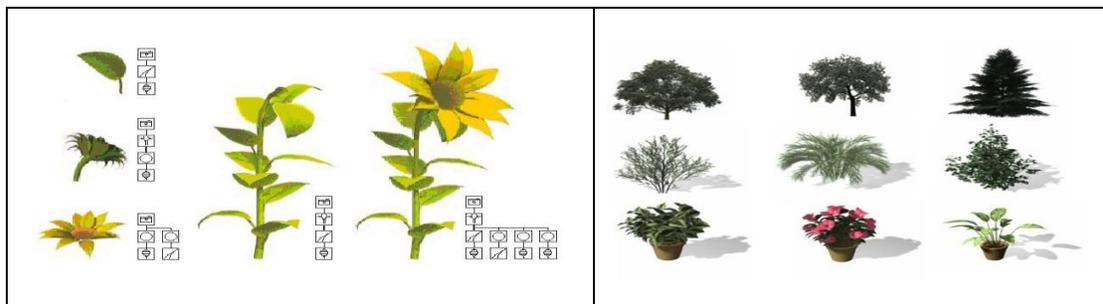
Lintermann y Deussen proponen una aplicación para el diseño de objetos naturales con estructura de ramificación, en donde combinan métodos de modelado para las propiedades geométricas y de estructura, empleando una técnica basada en grafos que contiene iconos para la representación de las componentes. A través de la interface

³² ROLDAN, Marisol. Los fractales y la naturaleza, V 1.0. Dirigida por: Ing Gilberto Calderón y Publio Suárez. Tunja: Universidad Antonio Nariño. Ingeniería de Sistemas. 1998.

gráfica, los usuarios determinan las propiedades geométricas y definen las estructuras de reproducción en el sentido de la formación de la planta. Un aspecto importante lo constituye la incorporación de técnicas de modelados para los órganos de la planta, determinando factores de curvatura axial y colateral y editando formas para el contorno, fijados por el usuario. Adicionalmente, se implementan diversas formas de tropismos que simulan la interacción de la planta con su entorno, como por ejemplo la influencia del viento, y efectos como la sensibilidad a la gravedad, gravi-tropismo y a los campos de luz. En las siguientes gráficas se muestra un ejemplo de la generación de la flor Diente de León, presentado por Lintermann y Deussen³³ y elaborado con la aplicación X-frog, en donde la intuición del usuario experimentado contribuye a obtener excelentes resultados.

Una propuesta paralela y similar con las descritas hasta ahora, debida a Deussen, Hanrahan, Lintermann, Mech, Parr y Prusinkiewicz, desarrolla un sistema para representación de ecosistemas, en donde se modela el terreno y sobre este se aplican técnicas de distribución de las plantas de manera realística, reflejando las interacciones entre las plantas y de ellas con su entorno; se emplean modelos geométricos de plantas individuales de acuerdo con su ubicación dentro del ecosistema, las cuales deben ser sintetizadas para poblar la escena y debido a la complejidad de estas, se incorporan técnicas de renderización apropiadas.

La modelación y renderización de grandes escenas se hace difícil por la gran cantidad de información que debe manejarse. Esta área seguirá siendo un campo de investigación permanente muy importante de la computación gráfica y su desarrollo se enfatizará en sistemas distribuidos, graficación en tiempo real y en entornos de realidad virtual. La generación individual de plantas empleando estructuras matemáticas de carácter recursivo, constituyen una fase para obtener mejores resultados en la optimización, tanto en la velocidad de procesamiento de los datos, como en el uso de recursos de memoria. Las técnicas de visualización evolucionan y se adaptan a la complejidad del problema de modelación de los ecosistemas. Muchas técnicas han surgido para tratar de solucionar, en parte, este problema. Las aplicaciones e interfases de usuario deben explotar el conocimiento intuitivo de los usuarios experimentados, y la interacción usuario-maquina, permitirá crear y simular procesos naturales cada vez más cercanos a la realidad.



Gráfica Nro. 6 Representación de plantas con Xfrog³⁴



Gráfica Nro. 7 Plantas susceptibles de ser modeladas con fractales V-variables y superfractales

³³ LINTERMANN, Bernd and DEUSSEN, Oliver. Interactive modeling of plants. IEEE Computer Graphics and Applications, 1999.

³⁴ LINTERMANN, Bernd and DEUSSEN, Oliver. Interactive modeling of plants. IEEE Computer Graphics and Applications, 1999.

Modelación de terrenos

Un nuevo método para la generación de superficies fractales es utilizado por las aplicaciones de computador para modelación y representación de terrenos; una descripción de dicho método y su justificación como herramienta para representar elementos de la naturaleza se presenta en la gráfica Nro. 9.

Debido a la complejidad inherente en los sistemas de información geográfica, es necesario reducir las estructuras espaciales, por ejemplo, en lo referente a los conceptos geométricos, a primitivas sencillas como puntos líneas y polígonos. Esta labor es menos complicada cuando se refiere a las estructuras de carácter topológico propia de los sistemas de representación geográfica, cuyas relaciones son complicadas de manipular.

En la aplicación que se describe a continuación, solo se trabajan algunas capas de las que componen la base de datos de un Sistema de Información Geográfica (SIG), como la hidrografía, topografía y vegetación, entre otras, y por eso es solo un acercamiento a las opciones de visualización 3D, implementada en algunos SIG.

Como se ha visto en la representación geométrica de superficies, casi todos los métodos se basan en la geometría euclidiana, como parte de la geometría diferencial, por ejemplo en el uso de curvas suaves o diferenciables. Pero la geometría que subyace en la naturaleza, no obedece a ese carácter diferencial, sino a la geometría fractal, incorporada como una opción fundamental para modelar las intrincadas superficies irregulares de las montañas, la complejidad en la formación de las nubes, la naturaleza fragmentada de los contornos de las hojas de una planta, las estructuras de ramificación de los ríos y algunos objetos y fenómenos de la naturaleza, solo mencionando algunas de ellas. Un elemento importante en las aplicaciones que modelan terrenos es la incorporación de técnicas de naturaleza fractal, que proporcionan un realismo mayor a la hora de representar las superficies terrestres, las nubes y la vegetación.

Creación de paisajes con VistaPro 4.0

El programa VistaPro 4.0 es un simulador de paisajes interactivos 3D, que usa métodos de representación de los terrenos, basados en superficies fractales como una de sus opciones, para generar paisajes fractales de manera aleatoria. Así mismo usa los formatos de gráficos U.S. Geological Survey (USGS), con el cual han sido modelados parte de la topografía de los terrenos de Estados Unidos. También es compatible con el formato de archivo Digital Elevation Model (DEM), que es un formato de archivo que contiene información para reducción de paisajes digitales tridimensionales.



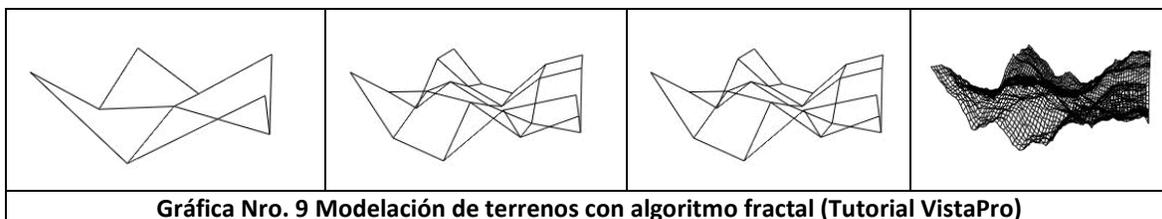
Gráfica Nro. 8 Paisajes virtuales generados con VistaPro 4.0

A continuación se describe la forma general de obtener superficies fractales, sobre la cual se basa el programa VistaPro, para la creación de superficies de terrenos en forma aleatoria, basado en el movimiento browniano y movimiento browniano fraccionario.

Dicho mecanismo es un movimiento aleatorio, es decir, cuando una partícula realiza algún tipo de desplazamiento está dependiendo de dos factores, el primero la ubicación en el espacio, y el segundo el tiempo. Si esta partícula realiza un giro inesperado en un tiempo t inesperado, la trayectoria será un tanto desordenada. Pero si se traza la trayectoria de dicha partícula se evidenciará una fuerte relación entre esta clase de movimiento y la geometría fractal. Este tipo de “desorden” puede ser bien aprovechado en diferentes programas de computación, especialmente el VistaPro, que está basado en este movimiento para la realización de paisajes naturales virtuales,

tanto en la generación de los terrenos como en la configuración de las formas irregulares, de los contornos de islas lagos, etc. La generación de superficies fractales se basa así mismo, en el llamado movimiento browniano fraccionario³⁵.

Para explicar el algoritmo fractal de representación de una superficie, se parte de un triángulo, y tomando los puntos medios de cada triángulo se divide en cuatro sub-triángulos. Dichos puntos medios son tomados como nodos que pueden desplazarse aleatoriamente, en sentido vertical de acuerdo con una interpolación aplicada a los ejes, con respecto a los vértices originales. En la gráfica Nro. 10, se ilustran los pasos básicos para la generación de dicha superficie.



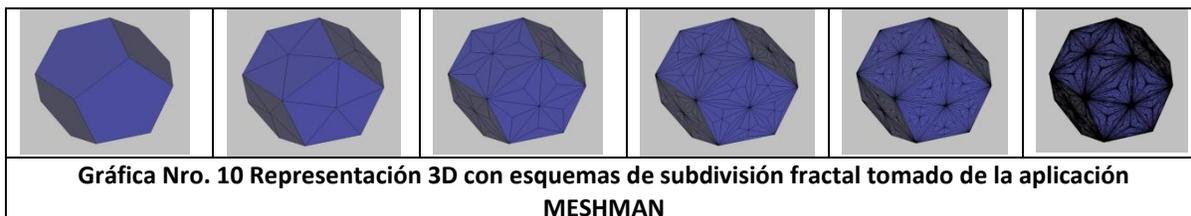
Gráfica Nro. 9 Modelación de terrenos con algoritmo fractal (Tutorial VistaPro)

Los modelos de mallas para representar superficies fractales, generalmente usan mallas triangulares, por su simplicidad, aunque puede ser extendida a otros polígonos. Un concepto importante, que incluye VistaPro como un elemento modificable, es la dimensión del terreno fractal, que oscila entre un valor entre dos y tres; la interpretación intuitiva corresponde que entre mayor irregularidad tenga el terreno, la dimensión es cercana a tres, mientras que si se acerca a dos, el terreno tiende a ser mas plano, o regular o suave en el sentido de la diferenciabilidad de la superficie.

Representación de objetos 3D en computador

El escenario natural para representar objetos del plano o espacio tridimensional es el espacio vectorial real y la colección de transformaciones afines regulares con la composición usual de transformaciones, que tiene estructura de grupo, llamado comúnmente grupo afín. Las afinidades regulares son usadas en métodos de segmentación para reconstrucción de superficies a partir de modelos volumétricos. Dos grupos de métodos han sido trabajados, "Marching Cubes" y "Octrees". Los espacios euclídeos, obtenidos al dotar a un espacio vectorial de un producto interior, se constituye en el contexto para tratar con las propiedades métricas de modelos representados.

Las aplicaciones gráficas disponibles en el medio, para modelación 3D, generalmente usan algunas librerías para gráficos como OpenGL o paquetes de librerías como Java 3D, en lenguajes de programación como Visual Basic, Visual C++ o Java. Para el manejo de las transformaciones bidimensionales y tridimensionales, se usan comúnmente las coordenadas homogéneas, expresadas matricialmente.



Gráfica Nro. 10 Representación 3D con esquemas de subdivisión fractal tomado de la aplicación MESHMAN

³⁵ QUINTERO, Leonardo. Fractales autosemejantes como modelos matemáticos para la representación de objetos y fenómenos de la naturaleza. Dirigida por Mg. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2000.

CONCLUSIONES

Esta propuesta didáctica, producto de la experimentación con varios grupos de estudiantes de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), con sede en Tunja, Boyacá, pertenecientes a la Licenciatura en Matemáticas y programas de Ingeniería, se plantea como una alternativa de trabajo para la construcción de conceptos relativos a la Geometría Fractal de la Naturaleza, que puede ser adoptada, reformulada y enriquecida como alternativa viable en otros contextos educativos similares. Los aspectos relevantes, producto de los resultados del trabajo de investigación se pueden sintetizar en:

En la construcción de los dibujos-dinámicos en Cabri Geometry II, descritos en este trabajo, es muy importante, determinar cuales son los parámetros elegidos mas apropiados, para dotar de mayor dinámica a tales construcciones, usando las opciones de desplazamiento y animación contenidas en el menú. De tal elección depende el éxito en la riqueza de las situaciones problemáticas planteadas y la amplitud de los sistemas semióticos que pueda proporcionar el modelo construido.

Las situaciones problemáticas acá planteadas, se pueden tipificar como abiertas (“blandas”, en el sentido de J. M. Laborde), pues obedecen a situaciones menos exigentes (en términos de cantidad de parámetros, no de complejidad). Dichas situaciones son más creativas que descriptivas, poseen características que propician la imaginación y el aprendizaje por descubrimiento. El uso del computador como mediador de aprendizaje implica la modificación de los problemas planteados de manera tradicional, de las preguntas y cuestionamientos, de los enfoques para su solución y hasta en la interpretación de los resultados.

Algunos atractores generados por sistemas iterados de funciones, con apariencia distinta, contienen una estructura básica común, la evidencia de este hecho clave, es mostrado con el desarrollo de las actividades propuestas. Las macro-construcciones, son las herramientas que permiten simular los operadores de iteración y retroalimentación en el proceso de construcción de fractales.

Las posibilidades de estos sistemas semióticos de representación externos (pizarra electrónica), son prácticamente ilimitados. Desde el espacio discreto de la pantalla del computador (o calculadora), y de acuerdo a una buena resolución de pantalla, las representaciones gráficas son percibidas por la mente como un proceso continuo, tal vez de manera espontánea. Las familias de fractales determinadas por los parámetros establecidos o fijados en la fase de construcción, permiten explorar amplios campos en la visualización de aproximaciones de atractores correspondientes a familias de sistemas iterados de funciones en donde subyacen estructuras similares.

La propuesta metodológica para el aprendizaje de la geometría fractal de la naturaleza planteada en este trabajo, si bien corresponde a un esquema tradicional, se considera una alternativa muy buena para el nivel universitario. Las etapas de exploración, representación y modelación, construcción formal y aplicación, se pueden implementar en cada uno de los temas a tratar en esta nueva geometría. No necesariamente se deben desarrollar en forma consecutiva o estricto orden. La etapa de exploración no solo motiva al estudiante para afrontar los problemas referentes a esta novedosa geometría, sino que le proporciona una nueva forma de mirar el mundo y la vida, le brinda otros enfoques, para desvelar y descubrir los secretos del fascinante mundo natural. Esta visión permite intuir que en muchos fenómenos y objetos de la naturaleza, subyacen los conceptos matemáticos, solo hay que observarlos con el lente adecuado para detectarlos y caracterizarlos.

La fase de representación - modelación es un espacio para el manejo concreto de las transformaciones geométricas básicas, el manejo activo del espacio y el desarrollo de talleres sobre los conceptos fractales básicos. Se pretende en esta etapa: explotar los sistemas semióticos de representación estáticos y dinámicos para rescatar la imaginación tridimensional, corporizar y dominar activamente las transformaciones afines y conceptos fractales, potenciar las capacidades para el dibujo, el diseño y modelación computarizada de objetos naturales abstraídos de nuestra realidad observada. Es el momento para afrontar los problemas matemáticos que afloran del análisis de dichas situaciones, para lo cual se adopta una heurística de resolución de problemas que pretende desarrollar el

pensamiento matemático. Todas las experiencias acumuladas se enriquecen y son la base para detectar regularidades y abstraer similitudes que conllevan consolidar estructuras que vinculan el conocimiento cotidiano con el conocimiento académico

La etapa de construcción formal, permite la aprehensión de los conceptos claves, consolidar nuevas estructuras conceptuales, formalizar ideas contextualizadas en teorías, cimentadas en estructuras matemáticas y unificadas a través de un lenguaje universal. La etapa de las aplicaciones es el espacio ideal para ligar la teoría con la práctica; buscar actividades que desarrollen las competencias que busquen la solución de problemas cotidianos para mejorar las condiciones y calidad de vida de las comunidades. La meta de esta fase prioriza el establecimiento de algunos puentes entre el conocimiento científico socializado (conocimiento de frontera) y tecnología de punta, con el conocimiento académico.

La demostración más destacada de la propuesta se evidencia en la fuerte motivación de los estudiantes y docentes en profundizar en el tema de la Geometría Fractal de la Naturaleza, varios de los cuales emprendieron trabajos de grado con éxito en este campo, como se relaciona al final del documento.

BIBLIOGRAFÍA

- ALSINA, Claudi y TRILLA, Enric. Lecciones de álgebra y geometría, curso para estudiantes de arquitectura. Barcelona: Editorial Gustavo Gili S.A., 1984.
- BARNESLEY, Michael. Fractals everywhere. San Diego: Academic Press INC, 1988.
- BARNESLEY Michael, HUTCHINSON John E. and STENFLO Orjan. V -variable fractals and superfractals. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2003.
- BARNESLEY Michael. Ergodic theory, fractal tops and colour stealing. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2003.
- BARNESLEY Michael. Theory and applications of fractal tops. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2005.
- BRIGGS, John. Fractals, the patterns of chaos. Discovering a new aesthetic of art, science and nature. New York: Touchstone Simon & Shuster Inc, 1992.
- HUTCHINSON, J. E. Fractals and self-similarity. Indiana: Univ. Math. J. 30 713–749, 1981.
- LABORDE Colette. Soft and hard constructions with Cabri : contribution to the learning of mathematics. Bogota: XVII Encuentro de Geometría, Universidad Pedagógica Nacional, 2006.
- LABORDE Colette. Cabri Geometry: una nueva relación con la geometría. Grenoble: Universidad Joseph Fourier, IUFM, 1998.
- LAUWERIER, Hans. Fractals. New Jersey: Princeton University Press, 1987.
- LINTERMANN, Bernd and DEUSSEN, Oliver. Interactive modeling of plants. IEEE Computer Graphics and Applications, 1999.
- MASON, John. Pensar matemáticamente. Madrid: Editorial Labor, 1989.
- MASSOPUST, Peter R. Fractal functions, fractal surfaces y wavelets. San Diego: Academic Press, 1994.
- MANDELBROT, Benoit. Los objetos fractales, forma azar y dimensión. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1984.
- MANDELBROT, Benoit. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.
- MIGUEL DE GUZMAN Y OTROS. Estructuras fractales, Editorial Labor S.A., Barcelona 1993.
- PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, part one, introduction to fractals and chaos. New York: Springer-Verlang, 1992.
- PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, strategic activities volume Two. New York: Springer-Verlang, 1992.
- PEITGEN, Heinz-Otto y RICHTER, P. H. The beauty of fractals. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- PRUSINKIEWICZ, P., AND LINDENMAYER, A. The algorithmic beauty of plants. New York: Springer-Verlag, 1990.
- PRUSINKIEWICZ, P., AND HANAN, J. L-systems: From formalism to programming languages. In *Lindenmayer*

- systems: Impacts on theoretical computer science, computer graphics, and developmental biology.*, Berlin: Eds. Springer- Verlag, 1992, pp. 193–211.
- SCHROEDER, Manfred R. *Fractals, chaos, power laws. Minutes from an infinite paradise.* New York: W. H. Freeman and Company, 1996.
- SABOGAL M., Sonia. *Sobre autosemejanza topológica.* Revista Integración UIS: Bucaramanga, 1999.
- SABOGAL Sonia y ARENAS Gilberto. *Una introducción a la geometría fractal.* Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2008.
- SUÁREZ, S. Publio. *El aprendizaje de la geometría fractal*, Tesis meritoria de magíster en educación, Universidad Pedagógica Nacional. Dirigida por Novoa, P, Alberto. Tunja: Publicaciones Universitarias, 1996.
- VASCO, Carlos E. *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas.* Volumen I y II Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1992.
- WEGNER, Tim y TYLER, Bert. *El mundo de los fractales, convierta los números en una realidad fractal.* Madrid: Ediciones Anaya Multimedia S.A, 1995.

MONOGRAFIAS

- AYALA, Jairo. *Simbiosis Matemática Arte.* Dirigida por Mg. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 1997.
- AYALA, Jairo. *Introducción a los sistemas dinámicos y la teoría del caos.* Dirigida por Mg. Suárez, Publio. Tunja: Especialización en Docencia de la Matemática. UPTC, 1998.
- HAYTHER, Laiton y BALLÉN Omar. *Fractales en 3D.* Dirigida por Mg. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2001.
- QUINTERO, Leonardo. *Fractales autosemejantes como modelos matemáticos para la representación de objetos y fenómenos de la naturaleza.* Dirigida por Mg. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2000.
- ROMERO, Alfonso y TORRES Javier. *Implementación de nuevas tecnologías en el estudio de los sistemas dinámicos y la teoría del caos.* Dirigida por Ms. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2003.
- ROLDAN, Marisol. *Los fractales y la naturaleza, V 1.0.* Dirigida por: Ing Gilberto Calderón y Publio Suárez. Tunja: Universidad Antonio Nariño. Ingeniería de Sistemas. 1998.
- VIVAS Nancy y MARTÍNEZ Sergio. *Fractplant. Modelación 2D Y 3D de objetos De La naturaleza.* Dirigida por Mg. Suárez, Publio. Tunja: Licenciatura en Matemáticas y Física. UPTC, 2009.