Comprensión y reflexión de la tarea argumentativa que emerge en la demostración geométrica de estudiantes para profesor

Arévalo Vanegas, Camilo - González Pinilla, Oscar
kmilo741a@gmail.com – oscarmateud@gmail.com
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, (Colombia)

Resumen

Algunos trabajos investigativos constatan el fracaso respecto a la capacidad del estudiante para formular una demostración (Balacheff, 1988), esto se debe a que conciben la matemática como la memorización de algoritmos, limitándose a copiar los procesos que plantea el docente en sus clases, como señala Gascón (2001) y Balacheff (1988) quien formula; ¿Qué nivel de comprensión alcanzan los estudiantes en una demostración, si ésta se basa exclusivamente en la imitación?

Ante esta problemática se plantea una propuesta, que pretende que tres estudiantes para profesor de matemáticas, se involucren con un problema que exija la demostración geométrica y así reconocer la importancia de caracterizar y analizar la tarea argumentativa que emerge en ellos. Por ello se exploran las fases de resolución de problemas, entendiendo la metacognición como una estrategia de autocontrol y autoconocimiento, que lleva consigo procesos de planificación, supervisión y valoración, para una comprensión y reflexión de los mismos.

Palabras clave: Metacognición, demostración, geometría, resolución de problemas.

1. Introducción

El proyecto de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y su eje de didáctica y resolución de problemas, aborda la demostración desde lo aritmético, algebraico y geométrico, constituyendo la importancia de la demostración en la formación de docentes en matemáticas. Como dice Harel (1998) (Citado por Gutiérrez, 2013, p. 197), la demostración se concibe como una prueba formal y dominante, por la serie de enunciados organizados y validados desde un conjunto de reglas que le dan la esencia de veracidad, se caracteriza por su forma estructurada de gran rigor y formalidad, "Esta se convierte en tal, después del acto social de aceptar que lo es".

Para analizar los procesos de demostración y encarar dicha situación problema tomamos como referente metodológico Gutiérrez (2001), que muestra una serie de categorías en relación a dos tipos de demostración, pragmáticas y concretas, Manson, Burton & Stacey (1992), estudian los métodos para resolver problemas en matemáticas, y Polya (1989) habla del quehacer matemático del estudiante dentro de un ambiente de resolución de problemas.

En su trabajo Gutiérrez (2001), afirma que no por el hecho de que la demostración sea en sí misma un contenido de enseñanza, ésta puede dejar de ser tratada como un tema específico y esencial dentro de la enseñanza de las matemáticas. La propuesta de Manson, Burton & Stacey (1992), plantea un valioso método para resolver problemas en matemáticas, considerando el estudio de las características de los procesos cognitivos que involucra toda actividad matemática: particularización y generalización.

Y finalmente Polya (1989) que se ubica en el quehacer matemático del estudiante; basándose en métodos heurísticos donde a partir de la actitud investigadora del estudiante se conlleve al descubrimiento por medios propios, esto a partir de unos procesos planteados por el autor, comprender el enunciado, confeccionar un plan, ejecutar un plan y examinar la solución, que serán necesarios para el proceso de resolución de la situación problema.

Desde estos referentes, la propuesta tiene como objetivo primordial, caracterizar, evidenciar y reflexionar sobre la actividad argumentativa que emerge en la práctica de resolución de problemas específicamente al demostrar geométricamente en tres estudiantes para profesor.

Este trabajo autoreflexivo será significativo en dos sentidos, uno personal y otro a nivel profesional. La búsqueda por comprender desde nosotros mismos cómo la cognición se comporta dentro de las estrategias y rutas de resolución en el campo de la demostración, estudiando la manera en que evoluciona y los posibles problemas que se encuentran, esto nos dará la oportunidad de consolidar herramientas y experiencias, a partir de la pregunta: ¿Qué procesos cognitivos emergen en la práctica de resolución de problemas en estudiantes para profesor, específicamente al demostrar geométricamente y cómo realizar un proceso de reflexión y comprensión de los mismos?

2. Marco de referencia

Al plantear una propuesta de resolución de problemas con un grupo de estudiantes para profesor que trabajen en demostración, se caracterizan los procesos que emergen en cada individuo al momento de demostrar. Igualmente esto ayuda a la hora de evidenciar el trabajo demostrativo de futuros estudiantes, valorando no solo el producto de la demostración, sino todos aquellos procesos que se generan tras abarcar distintas estrategias, formulaciones y usar varios argumentos. El presente proyecto se desarrolla a partir de referentes teóricos, que centran la atención en la resolución de problemas a la hora de demostrar; para hablar de demostración en matemáticas, es necesario aclarar el concepto, ya que se confunde con otros como prueba o explicación.

Una prueba se da cuando una explicación es reconocida y aceptada por un grupo o comunidad. Es decir la proposición de un sujeto llega a ser prueba cuando ha sido analizada, examinada y aceptada por una sociedad que le da tal estatus. Sin embargo, así como una prueba puede ser aceptada por una comunidad, también puede ser rechazada por otra, los cuales la concebirán como explicación o proposición.

Las pruebas se pueden clasificar en pragmáticas o intelectuales, las primeras apuntan a la acción o a la manifestación de los juicios o presunciones, las segundas son las que separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades y relaciones.

Ahora bien, Boero (2007) indica que la demostración se fundamenta sobre un conjunto de definiciones, teoremas y reglas de deducción, cuya validez es aceptada socialmente.

Sobre la metacognición y su importancia en la resolución de problemas, Santos (2007), identifica tres categorías, que garantizan dicho proceso; el contenido matemático construido del propio proceso de aprendizaje, la operatividad y el seguimiento de estrategias utilizadas en la resolución de problemas y la determinación de que tan acertado es tener en cuenta un conjetura o hipótesis que sustente y valore el contenido matemático trabajado.

Dicha propuesta se enmarca en Gutiérrez (2001), quien propone una nueva clasificación que complementa las teorías de los autores Balacheff (1988), su clasificación se enfoca en el análisis de los vacíos conceptuales que generan los estudiantes al interpretar la geometría. Esta clasificación enmarca a los estudiantes en etapas que se basan en los análisis e interpretaciones pertinentes. Sus dos grandes grupos, demostraciones empíricas en las que el elemento de verificación son los ejemplos y las demostraciones deductivas, que se basa en el análisis y razonamiento de propiedades lógicas de abstracción formal. (Véase la figura 1).

Demostraciones empiricas	Demostraciones deductivas
Empirismo naif o ingenuo: los estudiantes seleccionan ejemplos específicos, reconociendo propiedades a través de la manipulación o la visualización (métodos perceptivos)	**Experimento mental:** aunque la demostración puede llegar a ser deductiva y abstracta, todavía se reconoce la ayuda del ejemplo, por tal razón se enmarcan dos tipos de experimentos; los *transformativos*, cuando la demostración se basa en la modificación de un enunciado y los *axiomáticos*, cuando la demostración es lógica y se sustenta a través de teoremas, definiciones y postulados, que garantizan y verifican su proceso.
Experimento crucial: aunque los estudiantes saben que es primordial la generalización en la demostración, lo hacen con el ejemplo menos especifico, estableciendo cuatro estructuras, la *ejemplificación*, cuando la demostración es mostrar un experimento crucial, el *constructivo*, cuando demuestra como obtuvo el ejemplo, el *analítico*, cuando la demostración se basa en propiedades matemáticas y el *intelectual*, cuando la demostración se separa de lo empírico y se basa en propiedades matemáticas y relaciones deductivas.	
Ejemplo genérico: buscan evidenciar las transformaciones y propiedades abstractas, a través de la lógica matemática, pero todavía por medio de un ejemplo, teniendo en cuenta la etapa de generalización.	**Demostración formal:** sus demostraciones muestran una serie de pasos lógicos formales y sin recurrir a ejemplos.

Figura 1. Categorización de los procesos de prueba y demostración Gutiérrez (2001).

Ésta será la clasificación que caracterice el trabajo, porque expone las etapas desde la misma demostración geométrica y los procesos que se desencadenan. Para la caracterización de los razonamientos y acciones de los estudiantes, se considerar a Manson, Burton & Stacey (1992), quienes aluden a la resolución de problemas en matemáticas desde el estudio de procesos cognitivos "particularización y generalización" y con la propuesta de Polya (1989) basándose en métodos heurísticos donde a partir de la actitud investigadora del estudiante se conlleve al descubrimiento por medios propios. (Véase la figura 2).

	Comprender el enunciado	Confección de un plan	Ejecución del plan	Examinar solución/ visión retrospectiva
POLYA	*1.- ¿Entendemos el problema? 2.- ¿Podemos replantear el problema en nuestras propias palabras? 3.- ¿Distinguimos cuáles son los datos? 4.- ¿Sabemos a qué queremos llegar? 5.- ¿Hay suficiente información? 6.- ¿Hay información extraña? 7.- ¿Es este problema similar a algún otro que hemos resuelto antes?*	*1.- Ensayo y Error (Conjeturar y probar la conjetura). 2.- Buscar un Patrón 4.- Resolver un problema similar más simple. 6.- Hacer una figura. 7.- Hacer un diagrama 8.- Usar propiedades 9.- Resolver un problema equivalente. 12.- Trabajar hacia atrás. 13.- Usar casos. 14.- Usar un modelo. 17.- Usar análisis dimensional.*	*1.- Implementar la o las estrategias que dedujimos o escogimos. 2.- Tomar el tiempo razonable y que sea necesario para resolver el problema. 3.- solicitar sugerencias 3.- Si es necesario hay que volver a empezar.*	*1.- ¿Es la solución correcta? ¿La respuesta satisface lo establecido en el problema? 2.- ¿Hay una solución más sencilla? 3.- ¿Podemos ver cómo extender nuestra solución a un caso general?*
	Fase de abordaje	Fase de ataque		Fase de revisión
Mason Burton Stacey	Prepara el terreno para un posterior ataque eficaz y se debe dedicar el tiempo conveniente, es decir ¡leer atentamente el problema! El trabajo en esta fase se estructura hacia tres preguntas: ¿Qué es lo que sé?, ¿Qué es lo que quiero? y ¿Qué puedo usar?	Esta fase inicia cuando el problema ya se ha instalado en la mente, cuando la persona se ha apropiado de él y termina cuando se abandona o resuelve. En esta fase se pueden poner en juego diversos planes y ensayar diferentes enfoques.		Cuando se tiene una solución o se abandona el problema se revisa el trabajo hecho. Esto requiere comprobar lo que se hizo y reflexionar sobre los procesos a la par

Figura 2. Fases y etapas de resolución de problemas Polya (1989) y Mason, Burton & Stacey (1992)

3. Aspectos metodológicos

El presente trabajo se desarrolla como una investigación de carácter cualitativo, en tanto se encarga de indagar y describir textualmente lo sucedido en los momentos de resolución de problemas de carácter geométrico, enfatizando en los procesos de argumentación y demostración.

Es un estudio de caso, desde la adaptación, aplicación y evaluación de situaciones al demostrar geométricamente por estudiantes para profesor y seguirá las siguientes fases:

- Planteamiento y asignación del problema: A cargo del profesor
- Resolución del problema: A cargo de los estudiantes para profesor
- Método de resolución del problema: A partir de las fases de resolución de problemas descritas por Mason-Burton-Stacey (1992)
- Exploración de fases de resolución de problemas: Desde las categorías de demostración en geometría de Gutiérrez (2001)

4. Desarrollo de la propuesta

El problema asignado:

"Sobre los lados de un cuadrado se construyen cuatro triángulos rectángulos iguales, de tal forma que cada lado del cuadrado es la hipotenusa de cada triángulo"

La situación problema permite desarrollar de manera autónoma procesos de exploración tales como la formulación de hipótesis, validación grupal y según sea el caso su reformulación; haciendo de la situación una forma en el que se dinamicen los conceptos inmersos en ella y se relacionen las conceptualizaciones particulares con las formas universales socialmente construidas.

En las conversaciones de los resolutores se menciona explícitamente la importancia que tiene el planteamiento de preguntas, evidenciando que a partir de sus preguntas y exploraciones logran abordar el problema desde las representaciones gráficas con miras a esclarecer los conceptos inmersos en la situación y plantearse su problema de demostración. (Véase la figura 3).

Figura 3. Trabajo de resolutores.

En esta parte del momento de exploración, surge en los estudiantes la necesidad de un esquema que dé mayor información de la situación, por lo que proponen el cambio de representación, *de lo dicho en la situación, a una construcción*. En esta parte de interacción grupal se evidencia la necesidad por cambiar de representación, un dibujo o esquema que les permita evidenciar lo que la situación propone.

Ahora bien, haciendo el contraste de las evidencias con las categorías de análisis propuestas en el marco de la demostración geométrica, podemos afirmar que los *EPP* (Estudiantes para profesor) se encuentran en la primera fase de *ataque-empirismo ingenuo* dado que se hace necesaria una representación visual que pueda ser construida, para poder obtener información de la situación. Aquí los EPP dependen totalmente del dibujo pues es a partir de éste que logran hacer sus hipótesis y aserciones. (Véase la figura 4).

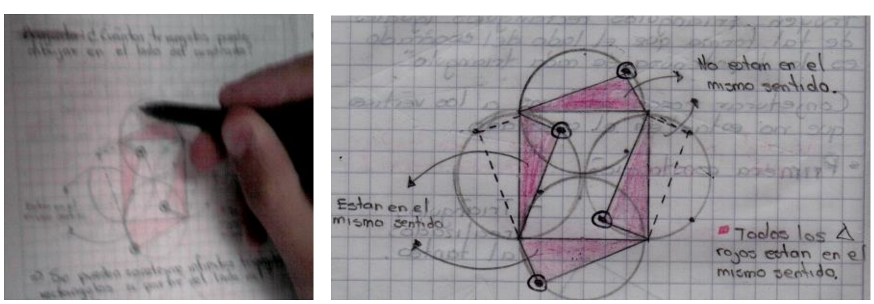


Figura 4. Evidencia cuadernos resolutores.

Es importante decir que en este caso la representación gráfica puede o no ser favorable en un trabajo resolutor, en el sentido de limitarse solamente a hablar de aspectos físicos o perceptivos de las representaciones gráficas, haciendo difícil el razonamiento y análisis de sus propiedades. Tal como lo afirma Gutiérrez (2013):

> "Es interesante analizar cómo las representaciones gráficas de objetos y conceptos geométricos producen muchas veces dificultades durante la resolución de problemas y en la demostración en Geometría"

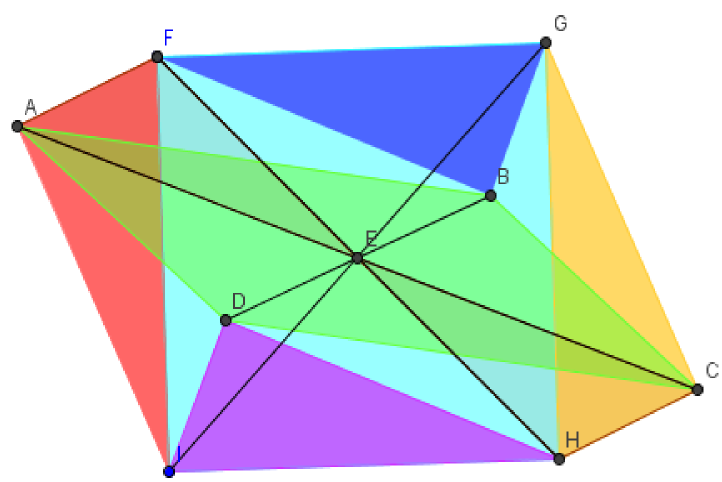
Sin embargo, se evidencia que los *EPP* evocan la construcción de la situación para tener una visión más determinada del problema. En este sentido la representación gráfica fue de ayuda porque permitió evidenciar ciertos atributos de la construcción así como hacerse una idea de los posibles caminos que podrían establecer. De igual manera en lo que corresponde a la demostración y sobre todo en la geometría siempre se ha utilizado el dibujo (construcción) como carácter significante de lo que es la geometría, obteniendo propiedades y características a través de su visualización. Entonces los *EPP* realizan la construcción con el objetivo de ser ayudas visuales para establecer hipótesis, conjeturas o deducciones lógicas de una demostración. Chevallard (1982) (Citado por Balacheff, 1988, p.4)

Es aquí donde podemos afirmar que en la misma etapa de exploración del problema, los *EPP* se encontraban en dos fases simultaneas, la de *ataque-empirismo ingenuo y abordaje- empirismo ingenuo,* donde no solo hacen la reconstrucción figural de la situación sino se basan en ella para construir sus primeras interrogaciones, el dibujo sirve como ayuda a enfocar el trabajo resolutor, cuando efectúan una afirmación intentan justificarla ya no desde el mismo dibujo, sino evocando más construcciones, ampliando así la gama de ejemplos que logran representar desde la percepción de los estudiantes la misma situación. De esta manera se remiten a la construcción rigurosa de varias representaciones gráficas que incorporen el problema en su generalidad, es decir que intentan llegar a un esquema que les permita decir finalmente que representa la situación con todas sus propiedades.

El trabajo resolutor de los *EPP* empieza a formalizarse cuando establecen relaciones entre las construcciones que realizan y lo que propone el problema, es aquí donde se generan discusiones frente a la manera de abordarlo y se construyen conjeturas que se empiezan a demostrar. En este proceso de interacción y de discusión de representaciones surge la importancia de recordar las experiencias de los *EPP* frente a problemas trabajados anteriormente que fuesen muy similares a este, hacen una retrospección de su trabajo como estudiantes para determinar la manera en que deben proceder para realizar una construcción exacta que represente la situación planteada y su respectiva demostración. A continuación se presenta una de las conjeturas obtenidas por el grupo y su respectiva demostración.

Conjetura 1

"Si los cuatro triángulos están en el mismo sentido, dos de ellos opuestos y dentro del cuadrado, al unir los vértices entonces se obtendrá un paralelogramo"



Afirmación	Razón
Hallar el centro E del cuadrilátero FGHI trazando las diagonales FH y GI	Construcción
Unir los vértices que no están sobre el cuadrado de los triángulos rectángulos iguales.	Construcción NC1
Unir cada uno de los vértices de los triángulos al centro E del cuadrilátero	Construcción NC1
Digo que los triángulos BCE y AED son iguales GC=AI DI=GB $\measuredangle FGC = \measuredangle HIA$	Criterio de semejanza de triángulos lado-ángulo-lado
$\measuredangle BGC = \measuredangle DIA$	Si quitamos cosas iguales a cosas iguales los

	restantes serán iguales
Por tal razón los triángulos AID y GBC serán iguales al igual que los lados AD y BC	Criterio LAL
Unamos FE y EH	Construcción NC 1
FE=EH	Porque E es la mitad de la diagonal FH del cuadrado
AF=HC	Por ser lados de triángulos iguales
$\measuredangle AFG = \measuredangle IHC$ si quitamos los ángulos iguales $\measuredangle GFH y \measuredangle IHE$ respectivamente, entonces $\measuredangle AFE = \measuredangle CHE$	Si quitamos cosas iguales a cosas iguales los restantes serán iguales
Por lo tanto los triángulos EHC y AFE serán iguales al igual que sus lados AE=EC	Criterio LAL
Consideremos ahora los triángulos FEB y HED, donde FB=DH	Lados de triángulos iguales
FE=EH	Diagonal del cuadrado
$\measuredangle GFB = \measuredangle DHI$ (1)	Ángulos de triángulos iguales
$\measuredangle IFH = \measuredangle GHF$ (2) Quitemos a los ángulos iguales $\measuredangle GFI = \measuredangle GHI$ (1) y (2) respectivamente, entonces $\measuredangle EFB = \measuredangle EHD$ Por lo tanto los triángulos EFB y EHD son iguales al igual que sus lados EB y DE	Criterio LAL
Digo que los triángulos AEB y DEC son iguales porque DH=FB AF=HC $\measuredangle CHI = \measuredangle AFG$ (1) $\measuredangle IHD = \measuredangle GFB$ (2) Quitando (2) de (1) resulta $\measuredangle CHD = \measuredangle AFB$ Por lo tanto AB=DC y AE=EC Entonces los triángulos AEB y DEC son iguales	Criterio LAL
Sumemos las áreas de los triángulos iguales DEC+BEC=DAE+AEB Pero ABCD es un cuadrilátero al que la diagonal DB lo divide en dos partes iguales lo que pasa únicamente con los paralelogramos. E es centro del cuadrado FGHI pero también vértice de los triángulos anteriores por lo tanto E debe estar en el segmento BD	Si a cosas iguales le sumamos cosas iguales los resultados serán iguales
Q.E.D	Q.E.D

Finalmente mediante una organización de pasos lógicos, cada uno de ellos justificado de manera detallada, los EPP logran construir una demostración válida por lo menos para el grupo, pues consideran que en ella se evidencia formalidad, justificación de cada paso y un orden lógico. Como vemos únicamente se hace necesaria la construcción representativa de la demostración ya no como soporte indispensable, sino como ayuda para construir la demostración, no hace falta de recursos ajenos a la misma demostración ni de explicaciones detalladas para justificar alguno de los pasos. Por lo tanto al finalizar esta etapa, los estudiantes se encuentran en la fase de *ataque-demostración formal;* ya que realizan deducciones e implicaciones lógicas y ordenadas, basadas en teorías formales, aunque aludiendo al ejemplo genérico, como ayuda para su comprensión.

5. Conclusiones

El grupo resolutor a manera general siguió un esquema ordenado y progresivo por las fases de análisis que se sintetizan en los siguientes ítems:

- El grupo resolutor inicia con afirmaciones desligadas y poco convincentes apoyadas únicamente de esquemas y dibujos que de la situación problema podían obtener.
- En una etapa posterior logran dividir los casos específicos en subgrupos de ejemplos del problema con características comunes, por lo que generalizan una hipótesis para cada subgrupo, sin embargo aún no encuentran una generalidad para todos los casos, que fue la colinealidad. Así logran manipular un ejemplo que si bien es particular, actúa como representantes de su clase.
- Se hace el paso de representaciones pictóricas con lápiz y papel, al uso de tecnologías como Geogebra, que aseguraban una mayor precisión y certeza de la construcciones tenidas en cuenta; ello permitió que las conjeturas que obtenían de los casos tuvieran mayor aceptación y validez en el grupo.
- Al no encontrar una generalidad que agrupase todos los casos, se decide demostrar las conjeturas que agrupaban los casos específicos, probando de manera abstracta y deductiva cada conjetura pero a partir de manipulaciones con ejemplos genéricos.

- Finalmente se construye una cadena de implicaciones lógicas basadas en propiedades, axiomas o definiciones para cada conjetura aceptadas por el grupo, donde el ejemplo genérico y el dibujo ya no es la esencia de la demostración sino una simple ayuda para proveer las transformaciones más convenientes y organizar las cadenas de implicaciones, sin embargo aun con la necesidad de tenerlo en cuenta.

A manera general esta fue la ruta de demostración seguida por el grupo, se enfatiza en el por qué no se logró una demostración formal en la fase de revisión, aunque se pretendía que la demostración fuera una cadena de deducciones lógicas sin soporte de ejemplos de ninguna clase y donde el dibujo o representación del problema no fuera esencial para construirla.

Referencias bibliográficas

- Balacheff, N. (1988). *Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas*. Universidad de los Andes. Traducción. Primera Edición: Agosto 2000. Bogotá, Colombia
- Boero, P. (2007). *Teoremas en la escuela: La epistemología y la cognición en la escuela*. Rotterdam, los países bajos.
- Gascón, J. (2001). *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, julio, 129-159.
- Gutiérrez, A. (2001). *Procesos De Prueba En Los Alumnos De Matemáticas*. Universidad de los Andes. Traducción. Bogotá, Colombia
- Gutiérrez, A. Camargo, L y Fiallo, J. (2013). *Acerca de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en matemáticas* Revista de integración, Septiembre, 181-205
- Mason, J. Burton, L. y Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. (1.ª ed. - 2.ª reimpresión, 1.992-). Barcelona. MEC-Ed. Labor).
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. (15ª reimpresión). Serie Matemáticas. (Traducción, Prof. Zugazagoitia). México: Editorial Trillas.
- Santos, M. (2007). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav-IPN. México.