

El uso del lenguaje algebraico en alumnos de bachillerato

1. Introducción

En un intento de profundizar en la problemática de los procesos de la enseñanza, sobre todo del aprendizaje de las matemáticas, y en especial del álgebra, el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas (PNFAPM), del Cinvestav, inició un proyecto de investigación en el que participaron un grupo de estudiantes de la maestría en Educación Matemática y Computación Educativa de la UAEM. Este trabajo es una aportación a una de las primeras etapas de ese proyecto, llevado a cabo en la Escuela Preparatoria Diurna Uno de esa institución.

Como antecedente al proyecto se puede señalar el programa *Concepts in secondary mathematics and science (CSMS)*, iniciado en 1974, el cual tuvo una continuación en el proyecto *Strategies and errors in secondary mathematics (SESM)*¹ desarrollado a partir de 1980 en el Chelsea College, University of London, para profundizar en algunas materias matemáticas, entre las cuales se encuentra el álgebra.

En los resultados más importantes de ese estudio pionero sobre el aprendizaje de las matemáticas, se tiene que a lo más 10% de la población estudiantil muestra un nivel aceptable en el manejo y utilización de los medios matemáticos, principalmente del álgebra, que se le ha enseñado.

Esa investigación encontró también que casi de la mitad de la población estudiada no se mueve de nivel en su manejo algebraico conforme progresa de grado escolar. En otras palabras, el avanzar de un curso a otro no es factor para que se superen los problemas presentados en ese ámbito por la mayoría de los alumnos³.

Enrique Vega Villanueva²

Universidad Autónoma del Estado de Morelos (UAEM), México

¹ La descripción del proyecto está basada en: Booth, Lesley R., *Algebra: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*, Centre for Science and Mathematics Education, Chelsea College, University of London, NFER-NELSON, 1984.

² Investigador de tiempo completo de carrera de la Unidad de Matemática Educativa y de la Escuela Preparatoria Diurna I de la UAEM en Cuernavaca, Morelos, México.

³ *Ib.*, pág. 1

Los resultados obtenidos en dicho trabajo, tanto en los aspectos de eficiencia ya citados, como en cuestiones cualitativas relacionadas con el tipo de estrategias utilizadas por los alumnos, se han confirmado en varias partes del mundo. En México, ya son varios los trabajos de investigación en los que —además de reproducir parcialmente la sección de álgebra del estudio *Concepts in Secondary Mathematics and Science*— se aplicaron cuestionarios ampliados que incluyeron otros temas de matemáticas propios de la currícula del sistema educativo de nuestro país⁴.

En esos estudios se ha llegado incluso a incorporar a grupos de profesores de matemáticas, no sólo en la recopilación y análisis de datos, sino además, en fases de enseñanza remedial⁵.

En esa línea de investigación se coloca el proyecto de investigación *Competencia en el uso del lenguaje algebraico*, que a nivel nacional tiene como objetivos finales más importantes el de proporcionar los perfiles de competencia algebraica de los alumnos de los niveles educativos medio superior y superior, proponer alternativas didácticas para el mejoramiento de la competencia algebraica actual, factibles de reproducirse en el aula, y formar recursos humanos que continúen el desarrollo de la investigación⁶. Específicamente, es en la fase de diagnóstico y establecimiento de los perfiles de competencia algebraica de los alumnos de nivel medio superior, donde se inserta este estudio.

Para lograr estos objetivos, el trabajo de campo se llevó a cabo en una población escolar de estudiantes de los tres grados de bachillerato. Esto permitió, con respecto a los estudiantes, por un lado, tipificar el nivel de competencia algebraica y caracterizar el tipo de errores y estrategias utilizadas y, por otro, medir su cambio al avanzar en escolaridad y en edad.

2. Instrumento de la investigación⁷

De entre las dos formas fundamentales de afrontar el trabajo de campo para la recopilación de los datos, que permitieran llevar a cabo el diagnóstico: la entrevista personal y la aplicación de un cuestionario, se eligió esta última. Lo que motivó tal decisión fue que si bien un estudio cualitativo es más preciso en sus conclusiones para los pocos individuos entrevistados, tiene la limitación de su restringida generalización. En cambio, la aplicación de un cuestionario tipo examen, pese a que por lo general se escapan detalles importantes, permite abarcar una mayor población. En vista de que con este trabajo se pretendió efectuar un enfoque de la problemática con una serie de preguntas, algunas ya probadas y otras nuevas, se optó por abarcar el mayor número posible de alumnos por diagnosticar.

⁴ Por ejemplo, un estudio realizado en México, que reproduce fielmente el trabajo del CSMS, es el elaborado por Oscar Ortega. Ahí se puede observar un análisis comparativo de los resultados de ambos estudios

⁵ PNFAPM—Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV. IPN-SEP.

⁶ Se trata del proyecto *Competencia en el uso del lenguaje algebraico*, que se lleva a cabo a nivel nacional en varios centros de educación superior y que es coordinado por la Dra. Teresa Rojano, de la Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV. Dentro de la Unidad de Matemática Educativa de la UAEM está ubicado un nodo en el cual se trabaja dicho proyecto.

⁷ Véase el cuestionario anexo.

Una característica importante a destacar en el cuestionario utilizado fue que —además de incluir diferentes temas y grados de dificultad— se aprovechó la oportunidad para incluir dos tipos de preguntas según su tipo de respuesta: abiertas y cerradas (opción múltiple).

Se debe aclarar que el cuestionario aplicado tiene un diseño que en gran parte difiere de otros que han servido para medir los conocimientos algebraicos de estudiantes. Básicamente, contiene preguntas dirigidas hacia el análisis de las estrategias para resolverlas, en vez de sólo medir el empleo de la sintaxis algebraica. Esto significa que está orientado hacia el objetivo de evaluar la competencia en el uso del lenguaje algebraico.

Las características de las trece preguntas del cuestionario se pueden resumir de la siguiente manera:

- Por el *tipo de respuesta*: ocho abiertas y cinco cerradas o de opción múltiple.
- Por el *contenido de las preguntas*: 5 que requieren traducir una expresión verbal a una expresión algebraica; 3 para expresar algebraicamente el perímetro de una figura geométrica; 2 para encontrar la solución de un problema verbal; 1 que pide encontrar la solución de un problema algebraico; 1 que solicita expresar verbalmente una expresión algebraica, y 1 para representar gráficamente una expresión algebraica, o bien, encontrar la representación gráfica que corresponde a una expresión algebraica.
- Por la *dificultad del procedimiento*: 7 preguntas simples y 6 complejas, usando este término para denotar problemas que requieren de la aplicación de varias habilidades y conocimientos.

3. Población del estudio

La escuela donde se aplicó el cuestionario es la Preparatoria Diurna Uno de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, con una población estudiantil que fluctúa en alrededor de 1,500 alumnos, repartidos en 27 grupos: 10 de primero, 9 de segundo, y 8 de tercero. Se seleccionaron 2 grupos de cada grado escolar para la elaboración del diagnóstico: 1^oA, 1^oB, 2^oA, 2^oB, 3^oA y 3^oC. Cabe señalar que el plan de estudios que lleva esta preparatoria comprende los dos primeros años de tronco común y el último de especialidad. Los grupos de tercero que fueron seleccionados corresponden a las especialidades de ciencias naturales y de la salud, y ciencias físico-matemáticas; ambos grupos llevan la materia de matemáticas en ese año escolar.

Como rasgos importantes para caracterizar a los alumnos de esta escuela, se puede apuntar que provienen de distintas secundarias, no sólo de la ciudad de Cuernavaca, sino del propio estado y de otros estados vecinos a Morelos. La preferencia por asistir a esta escuela, radica en que se la considera la de mayor tradición, y que influye para la continuación de los estudios superiores en la propia Universidad, lo cual por cierto no es así. Lo anterior permite asegurar que la población seleccionada es representativa de estudiantes de distintas zonas, principalmente urbanas y, por lo tanto, los resultados obtenidos se pueden tomar como una buena medida para realizar una tipificación apropiada del nivel de competencia algebraica de los alumnos de bachillerato.

El experimento se llevó a cabo en julio de 1992, al final del segundo semestre del año escolar 1991/92 (el ciclo escolar es de septiembre de un año a julio del siguiente). Esto significa que los alumnos de tercero, prácticamente ya habían terminado su ciclo escolar de bachillerato.

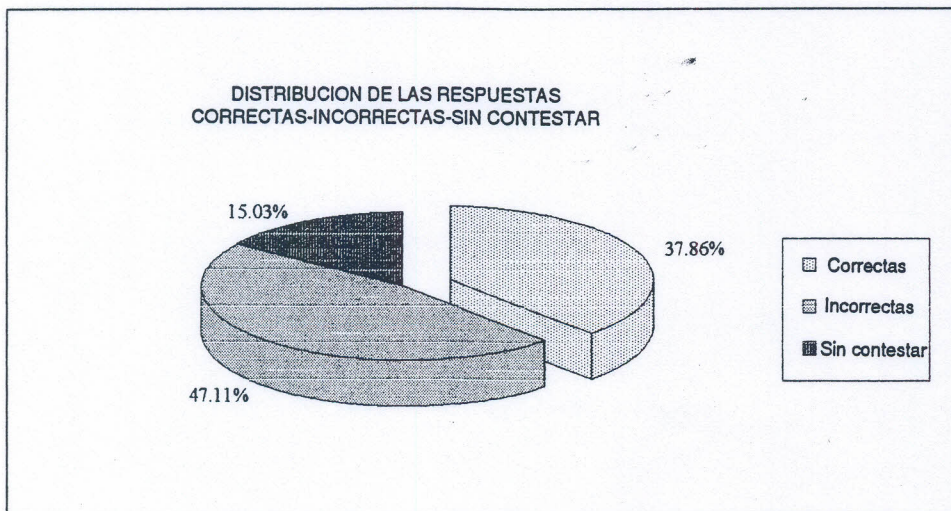
Los cuestionarios fueron aplicados por los maestros de matemáticas de cada grupo sin haber anticipado a los alumnos que iban a tener examen. Por ello, de los 330 posibles cuestionarios sólo se obtuvieron 294, contando con la ausencia de un número importante de alumnos en el grupo 2ºB. El tiempo que utilizaron para contestar fue, en general, de un poco menos de una hora. Es decir, el mismo tiempo que los profesores utilizan para una clase normal.

4. Resultados

Calificando las respuestas a las preguntas de manera correcta o incorrecta, los resultados se presentan a continuación. Se anticipa que en esta forma de calificar no se toma en cuenta la diversidad de las respuestas, sobre todo en las correctas, lo cual puede influir al cotejar si se está cumpliendo con el objetivo que se pretende evaluar.

Para el total de los alumnos:

El 37.9% fueron respuestas correctas; 47.1%, incorrectas, y 15.0% sin contestar (Gráfica 1). Esto muestra una mínima preparación algebraica por parte de la mayoría de los alumnos.

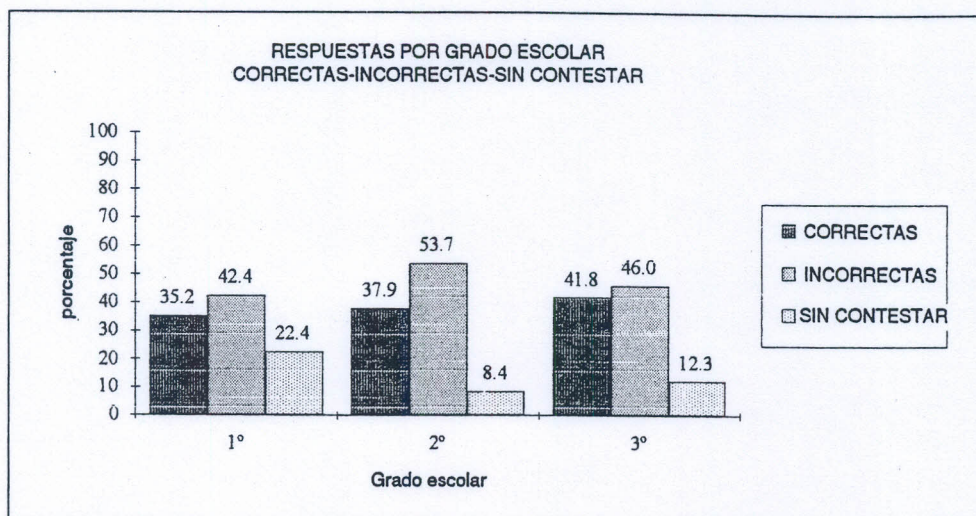


Gráfica 1

PORCENTAJES DE RESPUESTAS POR GRADO ESCOLAR				
Tipo de respuesta	1º	2º	3º	4º
Correctas	35.2	37.9	41.8	37.9
Incorrectas	42.4	53.7	46.0	47.1
Sin contestar	22.4	8.4	12.3	15.0

Por grado escolar:

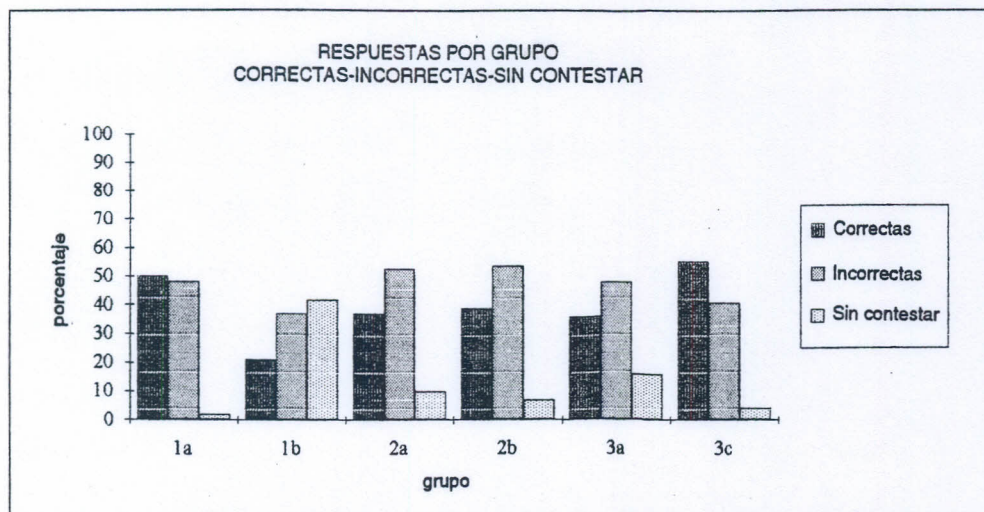
Aunque se presentó una tendencia a un mayor porcentaje de respuestas correctas según se avanza de grado escolar, las diferencias no son muy significativas, pues sólo alcanzan a incrementar alrededor de un 3% entre cada grado. En los primeros años se obtuvo un 35.2%; en los segundos, 37.9%, y en los terceros, 41.8% (Gráfica 2). En las preguntas sin contestar es donde existe una mayor diferencia entre los tres grados escolares, pues mientras que en los primeros grados llega a más del 22%, en los otros es de alrededor del 10%.



Gráfica 2

Cabe resaltar que mientras en los grupos de segundo año no hay diferencias importantes, en los de primero y de tercero sí se presentan grandes diferencias, sobre todo entre los dos grupos de primero. Así, mientras que en 1ºA se obtuvo un 50.3% de respuestas correctas y sólo un 1.5% sin contestar, en el 1ºB las cifras correspondientes fueron del 20.8% y del 42.3%, es decir, casi un 30% de diferencia en las respuestas correctas y más del 40% en las preguntas sin contestar. En el grupo 3ºA las respuestas correctas llegaron al 36.3%, mientras que en 3ºC alcanzaron el 55.2%; en las preguntas sin contestar, en 3ºA se presentó un 15.8%, y en 3ºC un 3.7%, o sea, una diferencia de casi el 20% en las respuestas correctas, y más de 10% en las preguntas sin contestar (Gráfica 3).

Tipo de respuesta	1ºA	1ºB	2ºA	2ºB	3ºA	3ºC
Correctas	50.3	20.8	37.1	38.5	36.3	55.2
Incorrectas	48.2	36.9	52.7	54.4	47.9	41.1
Sin contestar	1.5	42.3	10.3	7.2	15.8	3.7

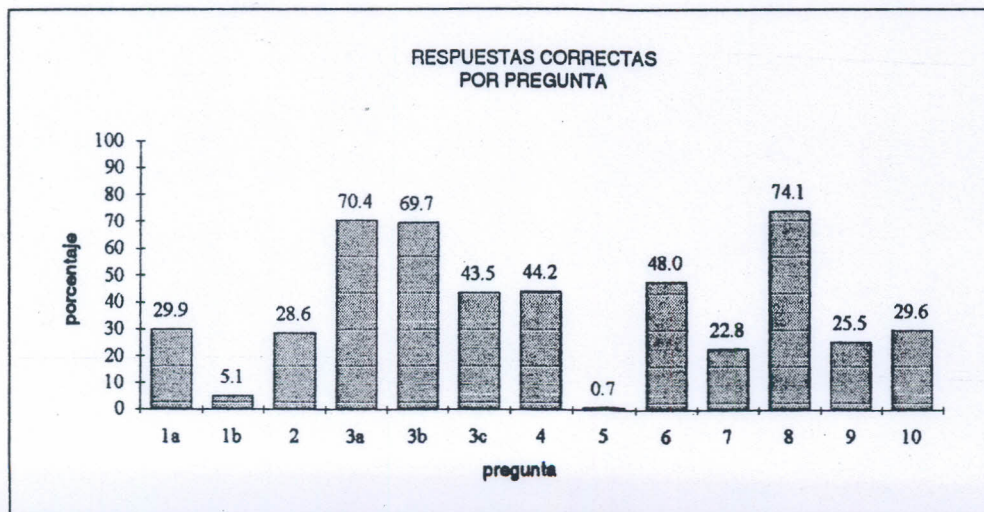


Gráfica 3

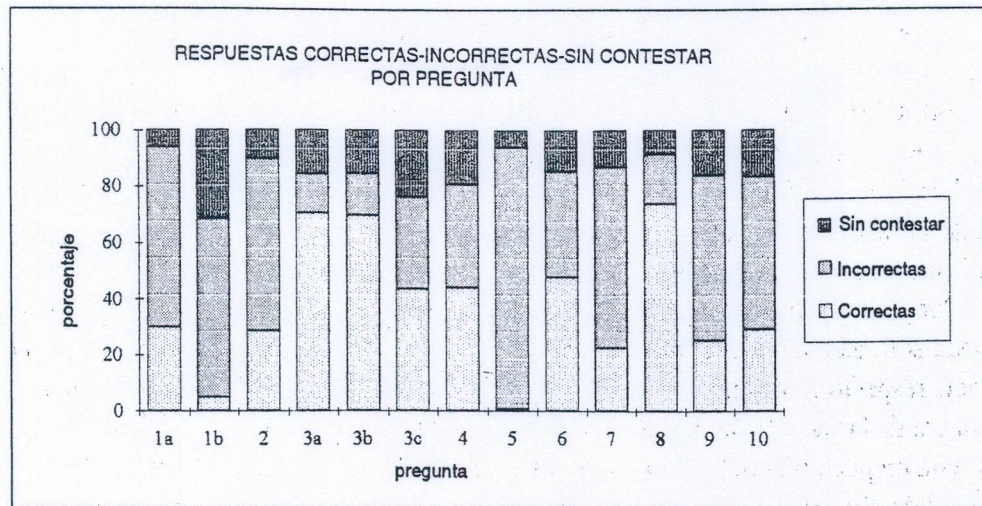
Por pregunta:

Antes de hacer la presentación de los resultados por pregunta, se hace la siguiente aclaración. En la Pregunta 5, de acuerdo con la codificación presentada con anterioridad, las respuestas en donde sólo aparece el resultado —sin algún procedimiento algebraico para su obtención— se tipificó como error debido a que el estudio principal es sobre competencia algebraica, y los cuadros correspondientes están contruidos de esa manera. Debido a que en tal sección se analizan los resultados como si se tratara de una evaluación de eficiencia, en su momento se formulará alguna referencia a esta situación.

Tomando en cuenta la aclaración anterior, si se consideran correctas las respuestas no algebraicas, la pregunta que obtuvo un mayor porcentaje de respuestas correctas con 86.7%, fue la Pregunta 5 la cual se refiere al problema de los pollos y conejos, similar en estructura a la Pregunta 1a, la cual sólo obtuvo un 29.9% de respuestas correctas (Gráficas 4 y 5). Una posible explicación del motivo por el cual se obtuvo este resultado, es que los métodos primitivos para encontrar la solución se ajustan con mayor facilidad; o bien, al ser un problema común, en algunos casos es posible que ya se supiera la respuesta.



Gráfica 4



Gráfica 5

A continuación, siguiendo un orden descendente en el nivel de respuestas correctas, con un 74.1%, se encuentra la Pregunta 8, la cual pide la traducción de un problema verbal a una expresión algebraica de tres ecuaciones con tres incógnitas, con respuesta de opción múltiple. Este resultado contrasta con el de la Pregunta 1b, la cual es similar en estructura y complejidad, con la diferencia de solicitar la respuesta en forma abierta, y en la cual se presentó el nivel más bajo de aciertos, 5.1%. Incluso también contrasta con la Pregunta 1a, la cual implica un problema similar con menor complejidad, pues solicita traducir un problema verbal a una expresión algebraica de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, con respuesta en forma abierta, y en la cual se alcanzó un 29.9% de respuestas correctas.

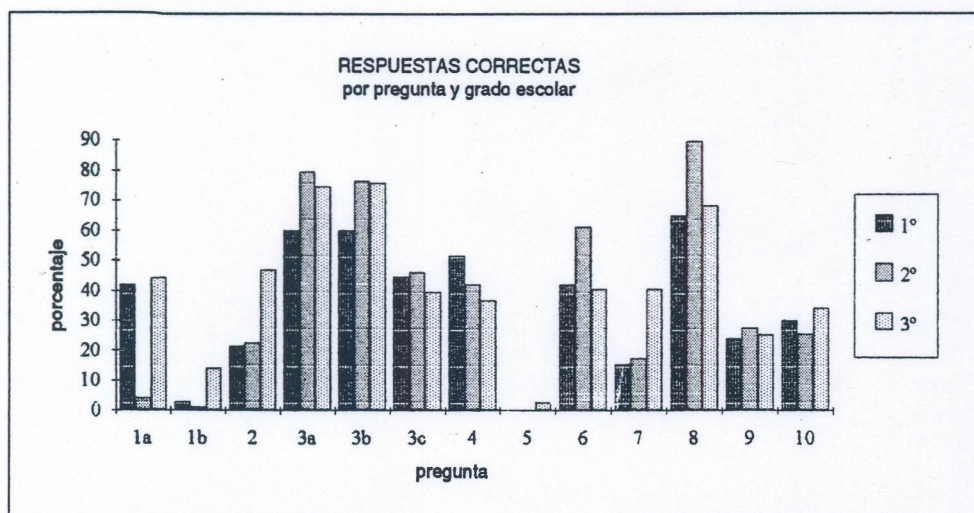
También, con un alto nivel de respuestas correctas se encuentran las Preguntas 3a y 3b, con 70.4% y 69.7%, respectivamente, las cuales tratan los problemas simples de perímetros.

Con casi la mitad de respuestas correctas se encuentran las Preguntas 3c, 4 y 6. Por debajo, y con casi un tercio de las respuestas correctas, se hallan las Preguntas 1a, 2, 7, 9 y 10. Finalmente, con un muy bajo 5.1% de respuestas correctas se tiene la Pregunta 1b que, como ya se explicó anteriormente, pide escribir las ecuaciones correspondientes a un problema verbal, la cual en estructura es similar a la Pregunta 8.

PORCENTAJES DE RESPUESTAS CORRECTAS POR PREGUNTA Y GRADO ESCOLAR				
Pregunta	1º	2º	3º	Total
1a	41.9	4.1	44.3	29.9
1b	2.6	1.0	13.9	5.1
2	21.4	22.5	46.8	28.6
3a	59.8	79.6	74.7	70.4
3b	59.8	76.5	75.9	69.7
3c	44.4	45.9	39.2	43.5
4	51.3	41.8	36.7	44.2
5	0.0	0.0	2.5	0.7
6	41.9	61.2	40.5	48.0
7	15.4	17.3	40.5	22.8
8	65.0	89.8	68.4	74.1
9	23.9	27.6	25.3	25.5
10	29.9	25.5	34.2	29.6

De nuevo, cabe señalar que la Pregunta 5 es un caso especial, pues solicita la solución del problema sin especificar el método a seguir para ello. Aunque en las preguntas de opción múltiple tampoco se solicita la justificación, en esta pregunta —como ya se dijo— es en la que más fácilmente se puede encontrar la solución sin la correspondiente explicación. Calificándola desde el punto de vista algebraico, sólo dos alumnos la contestaron correctamente, lo cual significa un 0.7%. Seguramente, si se hubiera pedido su justificación el nivel hubiera sido mayor.

Por grado escolar, aunque casi en todas las preguntas existen diferencias, en aquellas donde son más notables son: en la Pregunta 1a, donde la diferencia entre el segundo grado respecto al primero y al tercero es de un 40% (Gráfica 6). En la Pregunta 6, primera de las de opción múltiple, se presentó una situación inversa a la de la Pregunta 1a, con un poco más del 20% de diferencia. En la Pregunta 2, que solicita traducir una expresión algebraica a una verbal, la diferencia entre el primero y el segundo grado es de un 25% menos que en el tercer grado. En la Pregunta 7 también se presenta un situación similar a la de la Pregunta 2.



Gráfica 6

Aunque la diferencia no es tan notable como las anteriores, en la Pregunta 1b que tiene el menor nivel de respuestas correctas, entre el primer a el segundo grado, respecto del tercero existe un diferencia de un poco más del 10%.

Solamente en las Preguntas 1b, 2 y 7 puede afirmarse que existe una clara tendencia hacia una mejoría en los niveles de eficiencia según se avanza en escolaridad, pues en el tercer grado es mayor el nivel de respuestas correctas. Por otro lado, aunque con diferencias no tan marcadas, en las Preguntas 3c y 4 se podría decir que existe retroceso.

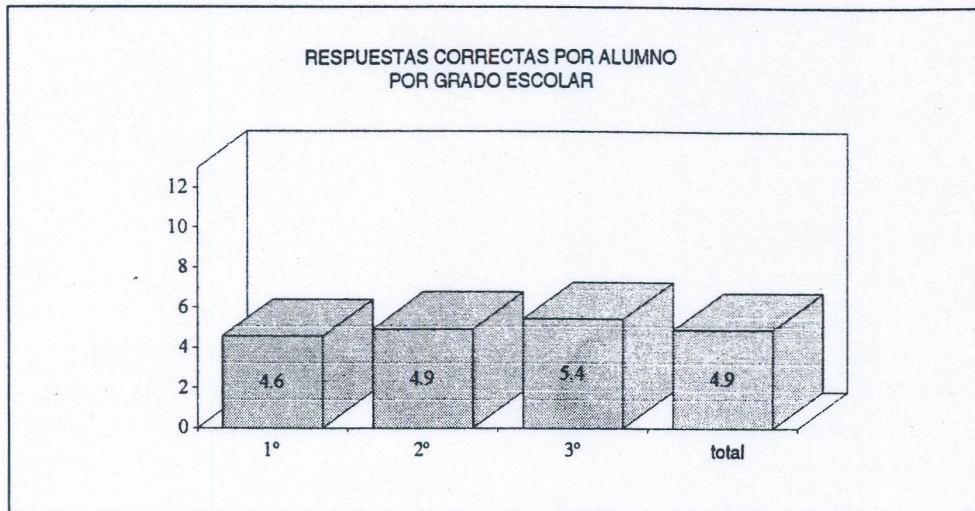
Por alumno:

En este apartado se consideran sólo las respuestas correctas en las 13 preguntas. Destacamos en primer lugar que ningún alumno las contestó todas en forma correcta. En promedio, los alumnos examinados contestaron poco menos de 5 preguntas correctas (Gráfica 7). Por grado escolar, aunque no existen diferencias significativas, se presenta una tendencia a elevar el número de respuestas correctas.

RESPUESTAS CORRECTAS POR ALUMNO Y POR GRADO ESCOLAR

Grado	Respuestas correctas	Alumnos	Promedio
1º	535	117	4.6
2º	483	98	4.9
3º	429	79	5.4
TOTAL	1,447	294	4.9

**RESPUESTAS CORRECTAS POR ALUMNO
POR GRADO ESCOLAR**

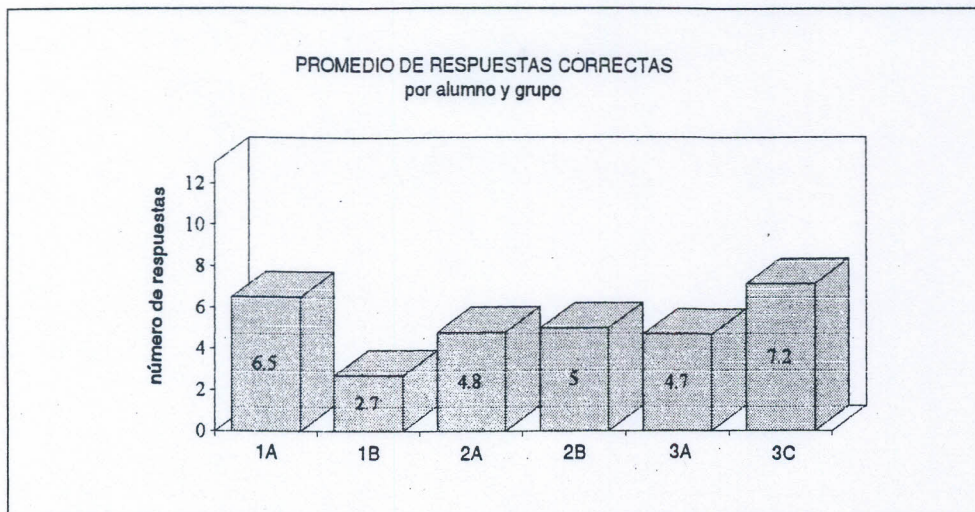


Gráfica 7

En contraste, por grupo se deben destacar mayores diferencias en los niveles presentados en cada grado escolar. Así, mientras que el grupo 3ºC —especialidad en física y matemáticas— fue el que mayor nivel presentó con 7.2 respuestas correctas en promedio (un poco más de la mitad del total), el grupo 3ºA llegó sólo a 4.7 respuestas correctas por alumno. El grupo 1ºA obtuvo 6.5 respuestas correctas por alumno —el segundo promedio más alto—, y el 1ºB solamente tuvo 2.7 —el más bajo de todos. En segundo año, grupos 2ºB y 2ºA, se tuvieron en promedio 5.0 y 3.0 preguntas correctas por alumno, respectivamente (Gráfica 8).

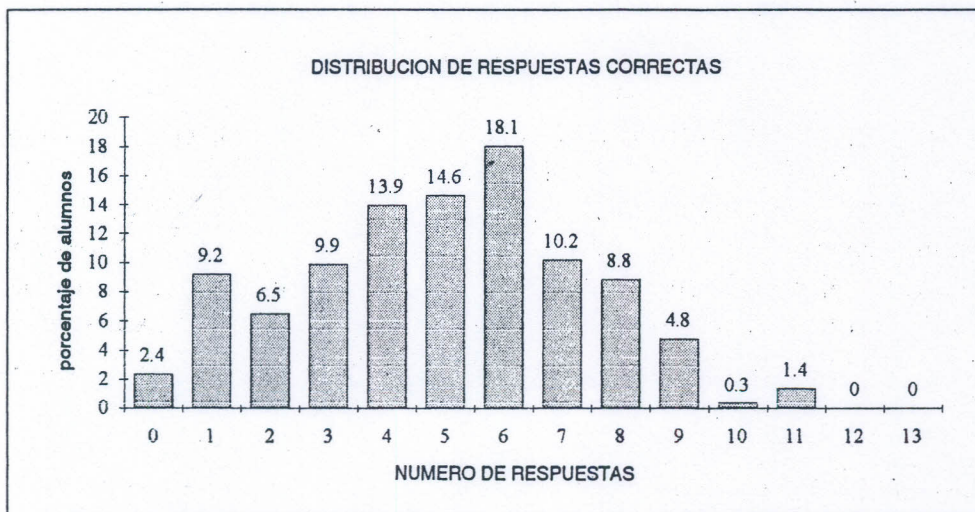
RESPUESTAS CORRECTAS POR ALUMNO Y POR GRUPO

Grupo	Respuestas correctas	Alumnos	Promedio
1ºA	373	57	6.5
1ºB	162	60	2.7
2ºA	188	39	4.8
2ºB	295	59	5.0
3ºA	264	56	4.7
3ºC	165	23	7.2



Gráfica 8

Más de la mitad de las respuestas correctas —7 en adelante, y con la Pregunta 5 calificada con el procedimiento algebraico— fueron contestadas solamente por el 25.5% de los alumnos (Gráfica 9). Esta cifra aumenta aproximadamente a 40% si la Pregunta 5 se califica sólo por la solución. Si se toma cada pregunta con el mismo “peso” y una calificación de 7.7 como parámetro para definir que un alumno alcanza un nivel de competencia alto, lo que corresponde a 10 o más respuestas correctas, entonces sólo 1.4% de los alumnos examinados tiene ese nivel.



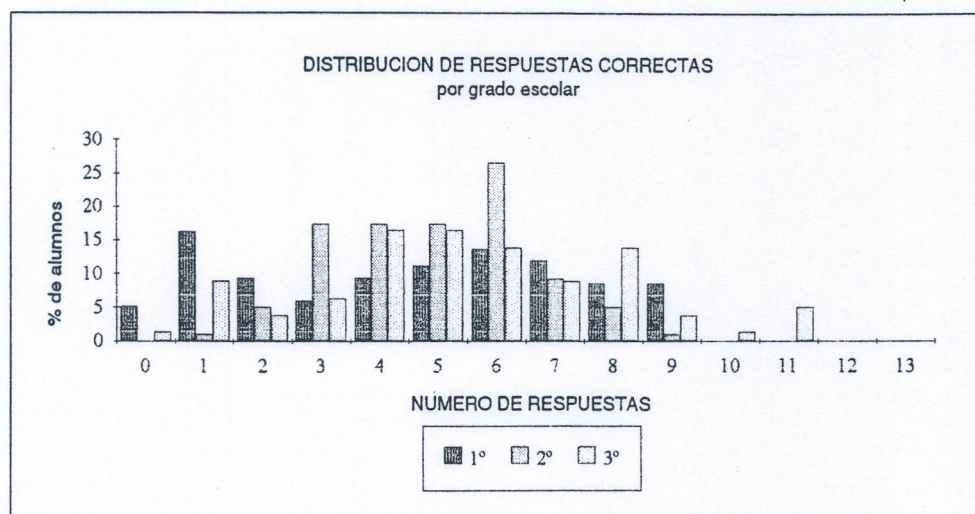
Gráfica 9

PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS POR ALUMNO Y GRADO ESCOLAR

Respuestas correctas	1º	2º	2º	Total
0	5.1	0.0	1.3	2.4
1	16.2	1.0	8.9	9.2
2	9.4	5.1	3.8	6.5
3	6.0	17.3	6.3	9.9

PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS POR ALUMNO... (Continuación)				
Respuestas correctas	1º	2º	2º	Total
4	9.4	17.3	16.5	13.9
5	11.1	17.3	16.5	14.6
6	13.7	26.5	13.9	18.0
7	12.0	9.2	8.9	10.2
8	8.5	5.1	13.9	8.8
9	8.5	1.0	3.8	4.8
10	0.0	0.0	1.3	0.3
11	0.0	0.0	5.1	1.4
12	0.0	0.0	0.0	0.0
13	0.0	0.0	0.0	0.0
TOTAL	100.0	100.0	100.0	100.0

Por grado escolar se debe destacar que sólo en los terceros años se tuvieron alumnos con 10 o más preguntas correctas. Específicamente, fue en el grupo 3°C, donde 5 alumnos presentaron esa situación (Gráfica 10).



Gráfica 10

Clasificación de las respuestas:

Toda vez que al contestar una pregunta, un alumno puede cometer varios tipos de error —o también, es posible obtener respuestas que sean acertadas, pero que tengan variantes— se procedió a su clasificación dividiéndola en dos grupos: el de los aciertos y el de los errores.

Los códigos asignados para distinguir cada tipo de respuesta fueron del número 99 al 88 para los aciertos, y del 1 al 38 para los errores. La razón de la utilización de estos códigos fue para evitar confusiones en el procesamiento y su presentación en los cuadros que se anexan al final.

Se tuvieron preguntas con más de una respuesta, en cuyo caso se dio la posibilidad de varias combinaciones: Todas las respuestas correctas; todas incorrectas; una parte correcta y otra incorrecta; en una incorrecta podrían surgir varios tipos de error; etc. Esto puede apreciarse con claridad en los cuadros que presentan la información por

alumno. Por lo mismo, en los cuadros en los que se expone concentrada la información, no siempre las sumas representan el número de alumnos, sino el conjunto de las respuestas codificadas, las cuales pueden ser en mayor cantidad.

Aciertos

- (99) Expresiones algebraicas correctas, utilizando la sintaxis apropiada y el número correcto de ecuaciones. Esto es, expresiones algebraicas que no tienen ningún problema. En el caso de que no se involucren de antemano algunas literales, no importa cuales se utilicen.
- (98) Expresiones algebraicas correctas con la solución del sistema en forma también algebraica. Este tipo incluye al anterior, y permite distinguir a quienes tienen un nivel mayor de competencia en álgebra. Sobre todo en las preguntas que sí involucraban el proceso para encontrar las respuestas finales del problema.
- (97) Expresiones algebraicas correctas con la solución del sistema en forma incompleta o incorrecta. En el intento de encontrar la solución se pueden identificar algunos de los demás errores, principalmente el de ejecución o sintaxis algebraica.
- (96) Sólo parte de las expresiones algebraicas requeridas en forma correcta, o bien una parte correcta y otra incorrecta. De hecho, a este tipo de acierto parcial, si se califica la pregunta en forma de buena o mala, le corresponde la segunda categoría.
- (95) Expresión algebraica con los signos en forma invertida, pero que da finalmente una ecuación correcta para el problema.
- (94) Expresión algebraica correcta con el orden de los términos alfabéticos en forma descendente, o los términos numéricos independientes escritos primero que las literales, o las literales escritas primero que los coeficientes en términos compuestos. En resumen, no se utilizan las convenciones más refinadas de la sintaxis algebraica.
- (93) Expresión algebraica correcta, sin agrupar ningún término semejante. Este tipo está representando, desde el punto de vista de la competencia algebraica, también una forma incorrecta de respuesta.
- (92) Expresión algebraica correcta, agrupando sólo algunos términos semejantes, o no simplificando la expresión hasta su última reducción posible. Este tipo se encuentra en la misma situación que el anterior.
- (91) Selección acertada de opción múltiple sin haber realizado otra selección.
- (90) Selección acertada de opción múltiple habiendo efectuado otra selección, la cual fue desechada.
- (89) Selección acertada de opción múltiple habiendo realizado la comprobación de la respuesta, con o sin la solución algebraica correspondiente, u otra elaboración adicional.
- (88) Expresión verbal que traduce correctamente una expresión algebraica.

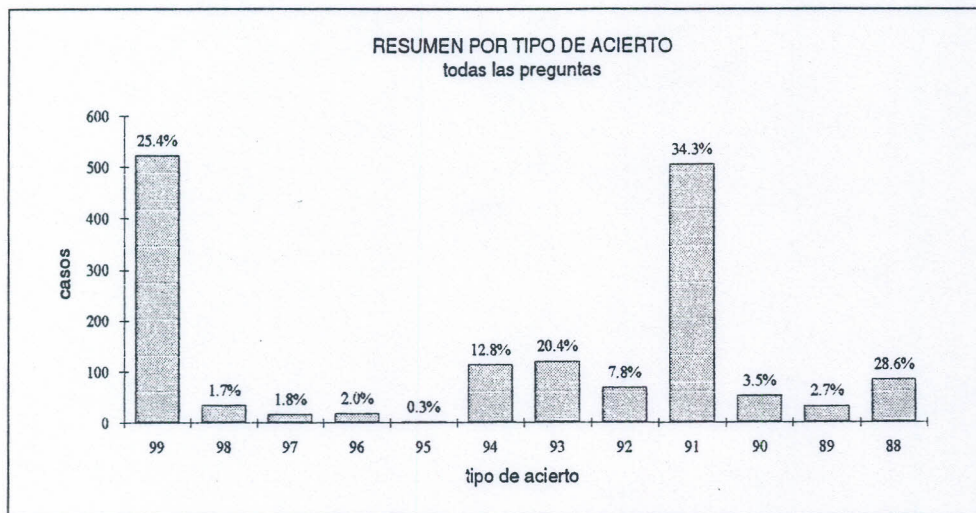
Errores

1. Sin respuesta.
 2. En expresiones algebraicas que no corresponden a lo que se solicita, además se cometen errores de sintaxis algebraica similares a los tipificados con el código 94.
 3. Se intenta simbolizar algebraicamente aunque en forma incorrecta. Si se utiliza esta categoría es porque no se ha podido identificar con algún otro tipo de error específico tipificado.
-

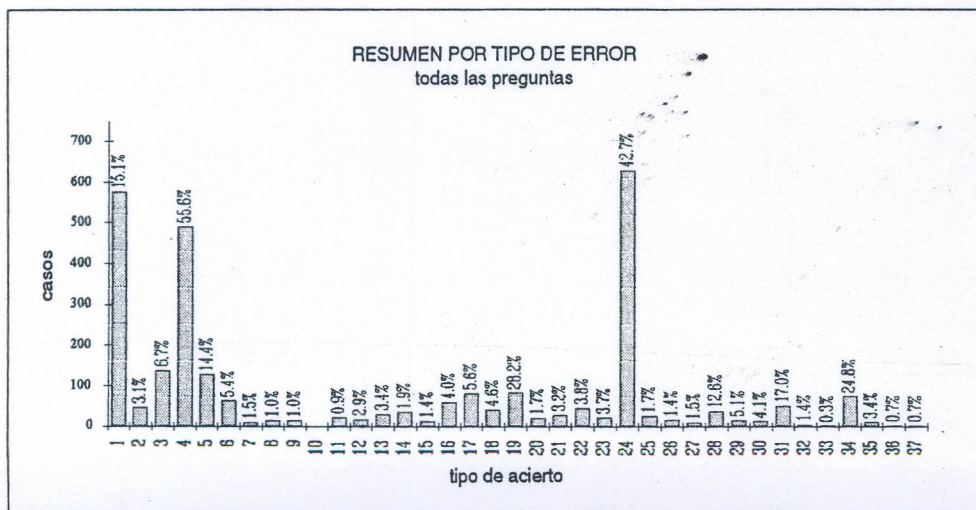
4. Método primitivo. Se ha respondido en forma correcta sólo con el resultado sin haber anotado el procedimiento utilizado, por lo cual no se puede determinar si se usó el ensayo y error, el conteo, otro procedimiento numérico, o incluso si ya se conoce la respuesta.
 5. Igual al tipo anterior, pero con la respuesta incorrecta. En muchos de los casos codificados con este tipo se puede inferir el método usado. Por ejemplo, en la Pregunta 1b cuando la respuesta es 400 —suma de los valores numéricos que aparecen en el problema— se podría usar el tipo 12 (letra no usada).
 6. Método primitivo de ensayo y error. Varias respuestas, pueden estar algunas de ellas tachadas, e incluir o no la respuesta correcta.
 7. Método primitivo de conteo. Se intenta construir una tabla con distintos valores con valores numéricos para las variables.
 8. Uso inadecuado del signo igual.
 9. Suma o producto mal realizado. Ejecución errónea solamente en la operación numérica. Al realizar una suma o un producto con números se tiene un resultado erróneo.
 10. Ejecución o procedimiento algebraico mal realizado, generalmente cometido al tratar de simplificar una expresión. Aquí entran los errores de linealidad y generalización al tratar de efectuar la simplificación.
 11. Fuera de contexto. Por ejemplo, al tachar una respuesta que es correcta.
 12. Letra no usada.
 13. Letra como objeto.
 14. Ligado al contexto. En algunos casos sólo se presenta una explicación de las relaciones entre las variables. En otros se explica que faltan datos para poder dar la respuesta.
 15. Letra evaluada de antemano. Se asignan valores numéricos a las variables sin que esos valores estén involucrados.
 16. Uso inadecuado del exponente al simplificar una suma de términos iguales.
 17. Uso inadecuado (excesivo) de paréntesis.
 18. Uso del producto al simplificar una suma de términos iguales o diferentes. (Concatenación de símbolos).
 19. Incapacidad para generalizar en la figura incompleta dada, del polígono regular, pregunta 3c.
 20. Necesidad de incluir la letra x como incógnita.
 21. Uso inadecuado (reiterado) del signo de multiplicación en un producto de dos términos distintos o de la misma literal. Cuando el producto involucra números y se trata del mismo, no se aplica este tipo de error.
 22. Uso inadecuado o reiterado de unidades, ya sea que estén involucradas o no, como pesos, centímetros, kilogramos., etc.
 23. Uso incorrecto del razonamiento proporcional (regla de tres) al plantear una expresión algebraica, ya sea utilizando sólo literales o combinándolas con numerales, Pregunta 4.
 24. Selección no acertada de opción múltiple sin haber realizado otra selección.
 25. Selección no acertada de opción múltiple habiendo efectuado antes otra selección también no acertada, la cual se desechó.
 26. Selección no acertada de opción múltiple habiendo desechado la selección acertada.
 27. Indicación de que no existe dentro de las opciones múltiples una correcta.
 28. Expresión verbal que reproduce casi igual una expresión algebraica.
 29. Expresión verbal que explica como condicional una expresión algebraica.
-

30. Expresión verbal que traduce incorrectamente el producto de un número con una literal.
31. Expresión verbal que hace iguales ambos lados de una expresión algebraica.
32. Expresión verbal que invierte los términos de la expresión algebraica.
33. Expresión verbal que traduce sólo la mitad de una expresión algebraica.
34. Expresión verbal que considera las literales como objetos, y no como parte de una expresión algebraica, las cuales se deben operar.
35. Expresión verbal que traduce la expresión algebraica como una relación comparativa entre ambos términos de la igualdad.
36. Expresión verbal que traduce la expresión algebraica como una incógnita a despejar.
37. Expresión verbal que traduce el contexto de una expresión algebraica.

En los cuadros que siguen se exponen todos los tipos de respuestas acertadas y erróneas con el número de casos con el cual se presentaron y sus frecuencias relativas en función del número de preguntas en las cuales se registraron (Gráficas 11 y 12).



Gráfica 11



Gráfica 12

CANTIDAD DE RESPUESTAS POR TIPO DE ACIERTO

Tipo de respuesta	Grado			SUMA	Porcentaje			TOTAL
	1º	2º	3º		1º	2º	3º	
99	234	152	135	522	28.6	22.2	24.6	25.4
98	6	1	27	34	0.7	0.1	4.9	1.7
97	11	1	4	16	3.1	0.3	1.7	1.8
96	5	2	11	18	1.4	0.7	4.6	2.0
95	0	1	0	1	0.0	1.0	0.0	0.3
94	28	44	41	113	8.0	15.0	17.3	12.8
93	34	66	20	120	14.5	33.7	12.7	20.4
92	19	11	39	69	5.4	3.7	16.5	7.8
91	176	200	128	504	30.1	40.8	32.4	34.3
90	29	16	7	52	5.0	3.3	1.8	3.5
89	1	1	30	32	0.2	0.3	9.5	2.7
88	25	22	37	84	21.4	22.4	46.8	28.6

CANTIDAD DE RESPUESTAS POR TIPO DE ERROR

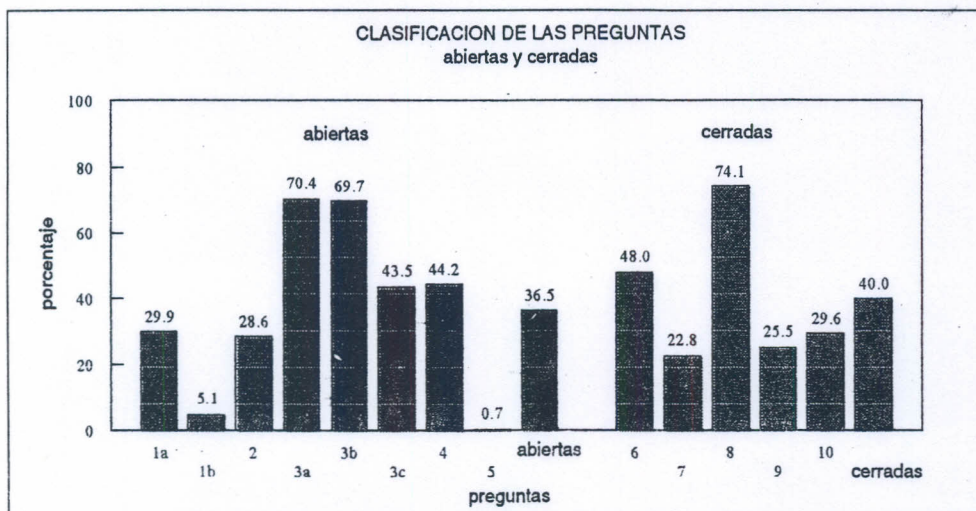
Tipo de respuesta	Grado			SUMA	Porcentaje			TOTAL
	1º	2º	3º		1º	2º	3º	
1	340	109	127	576	22.4	8.6	12.4	15.1
2	9	20	17	46	1.5	4.1	4.3	3.1
3	67	33	38	138	8.2	4.8	6.9	6.7
4	153	224	113	490	43.6	76.2	47.7	55.6
5	66	35	26	127	18.8	11.9	11.0	14.4
6	25	27	11	63	5.3	6.9	3.5	5.4
7	2	4	3	9	0.9	2.0	1.9	1.5
8	10	4	0	14	1.7	0.8	0.0	1.0
9	3	6	5	14	2.5	1.2	1.3	1.0
10	0	0	0	0	-	-	-	-
11	19	1	2	22	2.0	0.1	0.3	0.9
12	12	1	4	17	5.1	0.5	2.5	2.9
13	11	1	18	30	3.1	0.3	7.6	3.4
14	18	7	9	34	2.6	0.2	1.9	1.9
15	5	4	3	12	1.4	1.4	1.3	1.4
16	17	25	17	59	2.9	5.1	4.3	4.0
17	21	23	38	82	3.6	4.7	9.6	5.6
18	14	13	14	41	12.0	4.4	5.9	4.6
19	19	36	28	83	4.1	9.2	8.9	7.1
20	17	2	1	20	4.8	0.7	0.4	2.3
21	14	11	3	28	3.0	2.8	0.9	2.4
22	7	30	8	45	3.0	15.3	5.1	7.7
23	1	12	9	22	0.2	2.4	2.3	1.5
24	244	206	178	628	41.7	42.0	45.1	42.7
25	15	8	2	25	3.2	2.0	0.6	2.1
26	4	3	9	16	1.7	1.5	5.7	2.7
27	1	7	1	9	0.9	7.1	1.3	3.1
28	12	15	10	37	10.3	15.3	12.7	12.6
29	13	1	1	15	11.1	1.0	1.3	5.1
30	6	2	4	12	5.1	2.0	5.1	4.1
31	23	19	8	50	19.7	19.4	10.1	17.0
32	1	1	2	4	0.9	1.0	2.5	1.4
33	0	1	0	1	0.0	1.0	0.0	0.3
34	22	43	8	73	18.8	43.9	10.1	24.8
35	2	1	7	10	1.7	1.0	0.9	3.4
36	2	0	0	2	1.7	0.0	0.0	0.7
37	2	0	0	2	1.7	0.0	0.0	0.7

5. Conclusiones

Si se toma el cuestionario que se aplicó a los alumnos como un examen de eficiencia, el cual se califica en forma tradicional, los resultados son muy pobres; la calificación promedio sería de 3.8 en un intervalo de 0 a 10. La ganancia promedio entre los alumnos del primer año y los de tercero sería de apenas seis décimas de punto. Es más, esta diferencia se debe descartar si se toma en cuenta que los alumnos de tercer año considerados, son los únicos que continuaron estudiando cursos de matemáticas durante los tres años de preparatoria.

Siguiendo con esa misma forma de calificar, la máxima calificación obtenida sería de 8.5, alcanzada por 1 de cada 50 alumnos. Si nos preguntamos cuantos aprobarían el "examen" con más de 6 de calificación, solamente 3 de cada 20 alumnos podrían "pasar" álgebra.

En una primera aproximación comparativa de los niveles de respuestas correctas entre las preguntas con respuesta de tipo abierto y cerrado, se infiere que no existen diferencias. Pero en esta afirmación hay que hacer una observación importante: dentro de las preguntas con respuestas múltiples se encuentran las más difíciles y sobre todo son las que requieren de un proceso algebraico para contestarlas sin adivinar (en preguntas de opción múltiple), cosa que no ocurrió (Preguntas 7 y 9) (Gráfica 13). Más aún, un resultado que permite evaluar el instrumento de la investigación en ese sentido, se refiere a lo obtenido en las Preguntas 1b y 8, ambas del mismo tipo y nivel de complejidad, con la primera de respuesta abierta y la segunda de opción múltiple. En ellas se presentaron resultados totalmente contrarios. En la de opción múltiple se tuvo el mayor número de aciertos de todas las preguntas, mientras que la otra fue la más baja. Esto permite concluir que las preguntas de opción múltiple no son adecuadas para evaluar la competencia algebraica.

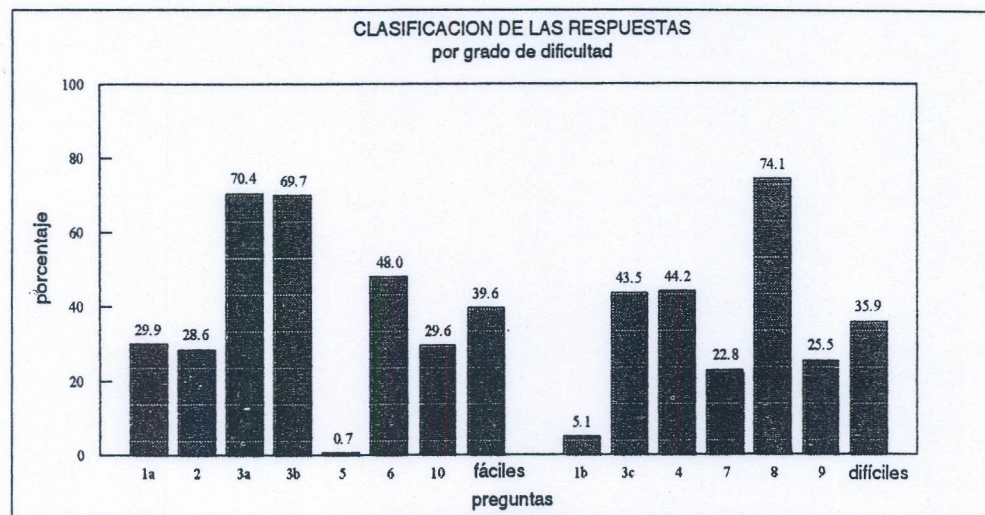


Gráfica 13

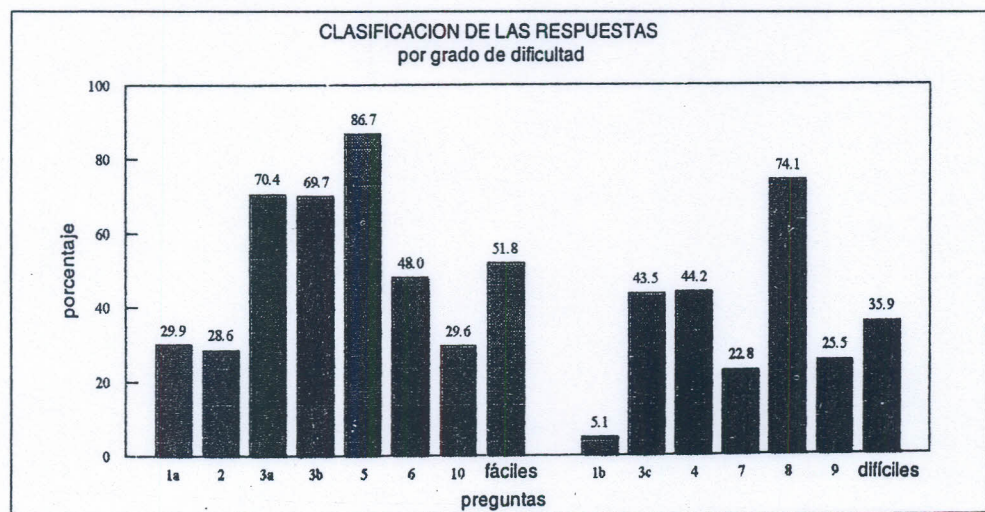
Respecto de la dificultad de las preguntas podemos concluir que nuestra agrupación de simples y complejas no fue del todo correcta. En promedio, no se aprecia que existen diferencias entre los dos grupos de acuerdo con nuestra clasificación (Gráficas 14 y 15). Aquí también cabe una aclaración: en el grupo de las preguntas catalogadas como fáciles se encuentra la número 5, la cual para responderla desde el punto de vista

algebraico requiere de una elaboración no muy complicada, y fue contestada casi por todos los alumnos en forma intuitiva. En ella se presentó el mayor nivel de respuestas correctas, pero el menor desde el punto de vista de la competencia del uso del lenguaje algebraico. Calificándola sólo por la respuesta, como examen de eficiencia, la diferencia entre las simples y complejas sería de más de 15 puntos porcentuales. También influye en este resultado la situación ya comentada referente a la Pregunta 8 de opción múltiple, clasificada como difícil siendo la que mayor cantidad de alumnos contestó correctamente.

Al considerar el cuestionario desde el punto de vista de la competencia, en algunos aspectos los resultados llegan a ser incluso en el sentido inverso del grado de escolaridad. Por ejemplo, en los errores de sintaxis algebraica, con el aumento de la escolaridad, en lugar de disminuir la cantidad de alumnos que los cometen, aumenta.



Gráfica 14
(Pregunta 5 calificada como examen de eficiencia)



Gráfica 15
(Pregunta 5 calificada como examen de competencia)

Por otro lado, existen algunas preguntas en las cuales, aunque se obtuvieron diferencias mínimas a favor de los alumnos con mayor escolaridad, se puede tener una

explicación basada no sólo en el número de años cursados. Por ejemplo: en la Pregunta 1b, la cual resultó ser la más difícil, con sólo 1 de cada 20 alumnos que la contestaron correctamente, casi todos ellos de tercer año. Esto se puede explicar si se considera que dichos alumnos fueron del grupo con la especialidad de físico-matemáticas, en teoría los más "capaces".

Existen otras preguntas en las que las diferencias (de manera por demás contradictoria) están a favor de los alumnos de segundo año. Por ejemplo: en las Preguntas 3a, 3b, 3c, 6, 8 y 9.

Es posible que si se hubiera aclarado a los alumnos el objetivo final del cuestionario, los resultados podrían haber permitido indagar más sobre los tipos de errores que existen. En general, los alumnos no se preocuparon demasiado por utilizar los procedimientos algebraicos que requerían los problemas. Un alumno comentó que era la primera vez que se enfrentaba a un cuestionario de ese tipo.

De acuerdo con los resultados obtenidos, ningún alumno resultó competente en el uso del lenguaje algebraico, en el sentido señalado por Guzmán (1992a) de ser capaz de enfrentar con éxito cualquier situación que requiera del álgebra, ya que no hubo quien contestara todas las preguntas en forma correcta. Pero esta afirmación puede atenuarse, ya que conociendo a los alumnos del grupo de tercer año de la especialidad de físico-matemáticas (3°C), del total de 23 alumnos que contestaron el cuestionario, se puede aseverar que cinco de ellos son competentes.

Muchos de los errores detectados se encontraron con frecuencias mínimas debido en gran parte a que las preguntas que conformaron el cuestionario no estuvieron diseñadas para su aparición. Algunas fueron tomadas de trabajos realizados con anterioridad por otras personas. El sentido general del cuestionario era medir la competencia en el uso del lenguaje algebraico.

En ese sentido se puede afirmar lo que sigue: Se confirman los resultados de otras investigaciones, aunque la escolaridad no influye en el nivel alcanzado por los alumnos de primer año. Puede decirse que los conocimientos y habilidades obtenidos por los alumnos en su trayectoria por la escuela secundaria, y en el primer año del bachillerato, son los que definitivamente influyen para alcanzar el bajo nivel de competencia algebraica.

Se insiste en que no se prepara a los estudiantes en el ambiente escolarizado para ser usuarios competentes en el uso del lenguaje algebraico, en el sentido ya discutido anteriormente. Esto es, no son capaces de enfrentar cualquier situación que involucre la utilización del álgebra.

Anexo-Cuestionario

Pregunta 1. *Plantea la ecuación que conduce a la solución de cada uno de los siguientes problemas. No se requiere que des la solución.*

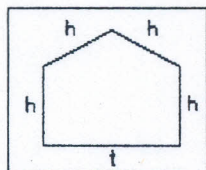
Pregunta 1a. Hallar dos números cuya suma sea 24 y cuya diferencia sea 6.

Pregunta 1b. Un niño tenía cierta cantidad de dinero. Si compra 10 lápices, le quedarán 100 pesos; si compra 4 cuadernos, le quedarán 200 pesos; y si compra 4 lápices y 3 cuadernos, le quedarán 100 pesos. ¿Cuánto dinero tiene?

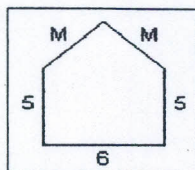
Pregunta 2. Si E es el número de ensambladores de una fábrica y P es el número de pintores de esa fábrica, escribe un enunciado en español que describa la misma información de la ecuación siguiente: $E = 7P$

Pregunta 3. Escribe el *perímetro* de cada una de las siguientes figuras.

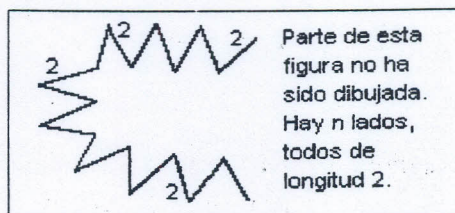
Pregunta 3a



Pregunta 3b.



Pregunta 3c.



Pregunta 4. Se cuelgan diferentes pesos de un resorte y se mide el estiramiento correspondiente. Los datos tomados aparecen en la siguiente tabla.

ESTIRAMIENTO (cm)	PESO (g)
3	78
6	156
9	234
12	312

Escribe una *ecuación* que te permita predecir el estiramiento (E) si conoces el peso (P).

Pregunta 5. Hay pollos y conejos en un corral; si cuento las cabezas encuentro que hay 16, y si cuento las patas, encuentro que hay 52. ¿Cuántos pollos y cuántos conejos hay?

Pregunta 6. Al resolver la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$, se obtienen como soluciones:

a) $x_1 = 2$ b) $x_1 = -2$ c) $x_1 = -1/2 + \sqrt{-23}/2$ d) $x_1 = -1/2 - \sqrt{-23}/2$
 $x_2 = -3$ $x_2 = 3$ $x_2 = -1/2 - \sqrt{-23}/2$ $x_2 = -1/2 + \sqrt{-23}/2$

Pregunta 7. Recuerda que la longitud de la circunferencia de un círculo es “dos veces p por radio”, y el área es “ p por radio al cuadrado”. Si el número de unidades de la circunferencia de un círculo es igual a su área, ¿Cuánto mide su radio?

a) 2π b) 2 c) 4π d) 4

Pregunta 8. Una maestra reparte 100 chocolates entre 3 grupos de niños. El segundo grupo recibe 4 veces el número de chocolates del primer grupo, y el

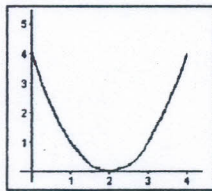
tercero recibe 10 chocolates más que el segundo. Para encontrar el número de chocolates que recibió cada grupo, ¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones usarías?

- a) $x + y + z = 100$ b) $x + y + z = 100$
 $y = 4x$ $y = 4x$
 $y + z = 10$ $z = y + 10$
- c) $x + 4y + z + 10 = 100$ d) $y = 4x$
 $z = y + 10$

Pregunta 9. Un terreno rectangular tiene 50 metros de perímetro y 150 metros cuadrados de superficie. ¿Qué ecuación usarías para encontrar el largo y el ancho del terreno?

- a) $(xy)^2 + 2(x + y) = 200$ b) $x^2 + 100 = 0$
c) $x^2 - 25x + 150 = 0$ d) $x^2 + 50y = 150$

Pregunta 10. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a la gráfica?



- a) $y = x^2 - 4x + 4$ b) $y = x^2 + 4x - 4$ c) $y = x - 2$ d) $y + 4 = x - 2$

Bibliografía

- ADDA, J., (1982). "Difficulties with mathematical symbolism: Synonymy and homonymy", en *Visible Language*; Vol. XVI, No. 3.
- AVILA, A., GARCÍA, F., y ROJANO, T., (1990), "Algebraic syntax errors: A study with secondary school children", en *Proceedings-Fourteenth PME Conference*, G. Booker, P. Cobb y T. N. de Mendicuti (Eds.), Cuernavaca, Mor. México.
- BOOTH, L. R., (1984). *Algebra: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*, Centre for Science and Mathematics Education, Chelsea College, University of London, NFER-NELSON.
- CROWLEY, M. L., (1987). "The van Hiele model of the development of geometric thought", en Liguist, M.M. (ed), *Learning and Teaching Geometry, K-12. 1987 Yearbook*, National Council of Teachers of Mathematics.
- FREUDENTHAL, H., (1989). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Cap. XVI, "El lenguaje algebraico", P. Reidel Publishing Co.
- FUYS, D., GEDDEES, D. y TISCHLER, R., (1988). *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents*, National Council of Teachers of Mathematics, New York.
- GODINO, J. D., (1991). "Hacia una teoría de la didáctica de la matemática", Cap. III, *Area de conocimiento: Didáctica de la matemática*, Gutiérrez R., A. (ed.), Editorial Síntesis, Madrid, España.

- GOLDIN, G. A., (1982). "Mathematical language and problem solving", en *Visible Language*, Vol. XVI, No. 3.
- GÓMEZ, A. B., (1991). "Las matemáticas y el proceso educativo"; Cap. II, *Area de conocimiento: Didáctica de la matemática*, Gutiérrez R., A. (ed.), Editorial Síntesis, Madrid, España.
- GUTIÉRREZ, R. A., (1991). "La investigación en didáctica de las matemáticas"; Cap. IV, *Area de conocimiento: Didáctica de la matemática*, Gutiérrez R., A. (ed.), Editorial Síntesis, Madrid, España.
- GUZMÁN, H. J., (1992). "Competencia algebraica"; en *Memoria de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Cuernavaca, México, Vol. 1, págs. 124-129.
- KIERAN, C., *The Learning of Algebra: A Teaching Experiment*, U.S. Department of Education, Educational Resources Information Center, Washington, D.C.
- MATZ, M., (1980). *Towards Computational Theory of Algebraic Competence*, Intelligent Tutoring System, D. Sleeman & J.S. Brown Academic Press; Massachusetts Institute of Technology.
- ORTON, A., (1988). *Didáctica de las matemáticas cuestiones; teoría y práctica en el aula*, Ministerio de Educación y Ciencia; Ediciones Morata, S.A., Madrid, España, 1990. Traducción de Solana, G., título original: *Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom Practice*, Cassell, Londres.
- PIMM, D., (1987). *El lenguaje matemático en el aula*, Ministerio de Educación y Ciencia; Ediciones Morata, Madrid, España, 1990. Traducción de Manzano, P., título original: *Speaking Mathematically. Communication in Mathematics Classrooms*, Rutledge & Kegan Paul, Limited.
- PUIG, L. y CERDÁN, F., (1991). *Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universitat de València.
- ROJANO, C. T., (1991). Proyecto: *Competencia en el uso del lenguaje algebraico. Estudio longitudinal de experimentación educativa*, PNFAPM-CINVESTAV.
- TALIZINA, N. F., (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*, Angeles Editores, México.
- THORPE, J. A., (1989). "Álgebra: Qué deberíamos enseñar y cómo deberíamos enseñarlo", en *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Vol. 4, National Council of Teachers of Mathematics.
- VAN HIELE, P. M., (1984). "The Child's Thought and Geometry", en *English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele*, Brooklyn College, Geddes, D., Fuys, D. y Tischler, R., (eds.), Washington, D.C.
- VEGA, V. E., (1992). Proyecto: *Competencia en el uso del lenguaje algebraico*, Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
- WOODROW, D., (1982). "Mathematical Symbolism", en *Visible Language*, Vol. XVI, No. 3.
-