Relación entre el concepto de límite y los conceptos topológicos[1]

Resumen

A través de una prueba aplicada a alumnos de 4to y 5to año se establece la correlación existente entre el concepto de límite y el concepto de entorno. Las características de las respuestas obtenidas permite una calificación de las mismas que van desde las que evidencian un pensamiento en el nivel concreto a las respuestas que consideran el modelo matemático apto para cada circunstancia.
Desde un planteo teórico se estudian las dificultades en la comprensión del continuo geométrico y la aparente ruptura con la completitud del conjunto de los números reales.

El concepto de límite constituyó el gran *breakthrough* en el pasaje de la matemática "clásica", que estudiaba la cantidad **exacta** y la matemática de las aproximaciones, que comenzó con Newton y Leibnitz, en el siglo XVII.

Creemos que ese acontecimiento se fundó en la introducción del concepto de **infinitud** en las consideraciones matemáticas, dificultad que algunos autores han llamado "horror al infinito", y que encontramos fundamentalmente en la concepción del matemático griego, apegado al concepto de magnitud conmensurable.

El docente de la Escuela Media conoce las dificultades que el alumno enfrenta para comprender el concepto de límite, sobre todo cuando le presentamos la definición formal, configurada esencialmente por entornos reducidos y símbolos lógicos.

Nuestro trabajo se dirige —por esta razón— a comprobar la íntima conexión entre la comprensión del concepto de límite y la de los conceptos topológicos. Esto no en un nivel operativo, sino en un nivel conceptual, pues creemos que —aunque estos conceptos no surgieron en el mismo momento histórico—, tienen como raíz común la necesidad de concebir un proceso infinito.

¿Qué entendemos por **límite** de una función?

Alicia Estela Collel
CIAFIC- CONICET, Argentina

[1] Este trabajo es parte de uno realizado en uso de una Beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.

El concepto de límite implica un proceso de infinito potencial por el cual los valores de una función se aproximan *indefinidamente* a un cierto valor (el **límite**) cuando la variable independiente se aproxima tanto como queramos a un punto determinado.

Como se puede observar, este punto de vista considera el concepto de límite como uno dinámico, que exige a la mente ir más allá de lo concreto. Suponer que un proceso continúa y formar hipótesis sobre el resultado final del mismo.[2]

La topología, por su parte, estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten ante las deformaciones de aquéllas, y aun cuando éstas pierdan todas sus propiedades métricas y proyectivas. Las propiedades de las cuales hablamos, llamadas *propiedades topológicas*, se conservan cuando aplicamos a una figura una transformación topológica. Es importante señalar que la topología se desinteresa de la morfología del espacio, pues la 'forma' está ligada a conceptos métricos.

Conceptos fundamentales para la topología son los conceptos de entorno y límite, y la topología de un espacio puede ser definida a partir de ellos.

A nivel metodológico consideramos que los conceptos de entorno e intervalo están fundados en la comprensión del punto como un *modelo matemático*. La comprensión del "punto matemático" exige la consideración de una 'partícula' cada vez más pequeña, sin que lleguemos nunca a encontrar materialmente una representación exacta del mismo.[3] Es que estos conceptos, como señalamos en párrafos anteriores, tienen implícito un dinamismo potencial semejante a aquél que conduce al concepto de límite.

La relación entre el concepto de límite y los conceptos de ento no e intervalo son avaladas por la **completitud** del conjunto de números reales sobre e cual se tratan estos conceptos. Para comprender esta afirmación será necesario referir :os brevemente a su significado.

La completitud en $\mathbb{R}$

El concepto de densidad en el conjunto Q se analiza paulatinamente desde la Escuela Primaria (alumnos de 7 a 12 años), cuando solicitamos al niño que determine el punto medio entre dos números establecidos, y se afirma formalmente en la Escuela Media (12 a 17 años).

Aunque la densidad del conjunto $\mathbb{R}$ parece ser el fundamento del continuo real, es necesario para éste una nueva propiedad característica del conjunto de números reales: la *completitud*. Por ella podemos establecer que toda sucesión monótona acotada del conjunto $\mathbb{R}$ **converge a un número del mismo conjunto**.

Por otra parte, en el ámbito geométrico, la divisibilidad potencialmente infinita de la recta nos permite encontrar siempre un segmento más pequeño que cualquier segmento considerado. Puesto que tal elemento es un conjunto de puntos, podremos establecer entonces que entre dos puntos cualesquiera de la recta siempre existen otros.

---

[2] La comunicación del proceso constituye un proceso de infinito potencial, mientras que el punto final sólo se alcanza en el infinito actual.

[3] La consideración del punto matemático como un ente de razón no excluye la posibilidad de viabilizar la comprensión abstracta del mismo a partir de las operaciones intelectuales que parten de lo concreto. Los obstáculos que tienen los alumnos para la comprensión del punto matemático se deben —a nuestro parecer— a no haber gestado el proceso indefinido que supone este concepto.

Es posible hablar entonces de una correspondencia biunívoca entre el conjunto de puntos de la recta y el conjunto de los números reales. Basta para ello fijar una unidad y un origen sobre la recta geométrica. De este modo, a cada punto de la recta podremos asociar una abscisa real, y a cada número real corresponderá —por esta biyección— un punto de la recta.

La comprensión de este isomorfismo no es fácil para los adolescentes: en el campo numérico no tienen dificultad para aceptar las propiedades que suponen un planteo de infinito potencial y les resulta inmediato obtener la semisuma de dos números dados, aunque éstos se hagan cada vez más pequeños. Sin embargo, cuando nos referimos a la recta, el sentido de la vista les "asegura" que en la recta sólo podrán colocar un número finito de puntos.

La continuidad de la recta y la continuidad real parecen sustentar, a nivel del alumno, una contradicción.

Es la contradicción señalada por Poincaré sobre el continuo intuitivo: de tres elementos vecinos A, B, C, se tiene que A no se distingue de B, ni B de C, y percibimos que A = B = C, pero A es distinto de B y distinto de C.

Como afirma **Piaget** (1948):

> **"el continuo perceptivo o intuitivo es una síntesis entre la vecindad (procedente de la 'proximidad' perceptiva) y la separación (separación entre elementos espaciales distinguidos para el análisis, vecinos o no), pero una síntesis inacabada, pues A y B son percibidos como vecinos (puesto que son indiferenciados), pero no separados, B y C igualmente, mientras que A y C son separados, y percibidos como más vecinos de lo que son en realidad. Es decir, el continuo intelectual comienza cuando la separación se generaliza en función de operaciones de partición y ya no se limita a la diferenciación perceptiva: una nueva síntesis se encuentra entre la vecindad y la separación y esta síntesis no estará completa hasta el momento es que todos los elementos vecinos sean separados, o separables por el análisis."**[4]

Es necesario indicar que para que el alumno geste la noción de continuo señalada por **Piaget**, debe comprender que en todo entorno de un punto, por pequeño que sea el entorno, existen infinitos puntos del conjunto.

Estamos aquí frente a dos temas: por una parte el continuo geométrico, para el cual es necesario comprender la posibilidad de la existencia de indefinido número de entornos posibles para un punto. Señalemos que el continuo geométrico ya queda definido al concebir la divisibilidad potencialmente infinita de la recta.

En segundo lugar, la densidad de la recta real, por la que sabemos que entre dos números hay siempre infinitos, es decir, que no podemos establecer un número inmediatamente sucesivo a otro.

Según Rigo,[5] es posible que la noción de continuo consignada en *Los elementos* de Euclides, esté sustentada en la teoría aristotélica de las cantidades continuas. Según

---

[4] PIAGET, J., INHELDER. *La représentation de l'espace chez l'enfant*, P.U.F., París, 1948, pág. 174.

[5] RIGO LEMINI, MIRELA. *Elementos históricos y psicogenéticos en la construcción del continuo matemático.* Educación Matemática, Vol. 6, No. 2, agosto de 1994, págs. 16-29.

Aristóteles: "una cantidad es continua si cada paso de su proceso de subdivisión da como resultado otra cantidadd susceptible de volverse a dividir". (Pág. 29)

Puesto que en nuestro trabajo buscamos evaluar la gestación de procesos cuyo punto de partida pudiera vincularse con lo sensible, no consideramos aquí la definición de continuidad dada por Dedekind[6] pues no hace referencia a hechos empíricos.

A partir de esta correspondencia, la Geometría Euclidiana deja de estar 'recluida' en su propio ámbito pues pueden establecerse en ella definiciones de carácter métrico. Ejemplo de ello es la definición de distancia entre dos puntos de la recta real:

La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento de recta determinado por ellos. Convendremos en denotar *distancia* mediante el signo de valor absoluto:

$$d(a, b) = |a - b|$$

Dado que nuestro tema es la relación entre el concepto de límite y los conceptos topológicos, será necesario introducirnos brevemente en las definiciones de *entorno* e *intervalo* que, junto con el concepto de límite constituyen los conceptos fundamentales sobre los que se define la topología de un espacio.

Horvath (1975) los define del siguiente modo:

"Se llama intervalo abierto a un subconjunto de $\mathbb{R}$ de los cuatro tipos siguientes:

- El conjunto (a, b) de todos los números reales que satisfacen las desigualdades $a < x < b$, donde a y b son dos números reales dados tales que $a < b$.
- El conjunto $(a, \longrightarrow)$ de todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $x > a$, donde a es un número real dado.
- El conjunto $(\longleftarrow, a)$ de todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $x < a$, donde a es un número real dado;
- Toda la recta real R: $(\longleftarrow, \longrightarrow)$".[7]

Los intervalos cerrados son subconjuntos de puntos en la recta real, que satisfecen las siguientes condiciones:

[a, b] es el conjunto de puntos x de la recta, tales que $a \leq x \leq b$.

La notación de intervalos mediante los signos de valor absoluto es bastante común. Asi, por ejemplo, la desigualdad

$$|x| < r \text{ equivale a } \quad -r < x < r \quad (r > 0)$$

y caracteriza el intervalo abierto de punto medio 0 y semiamplitud r.

Más generalmente, la desigualdad $|x - a| > r$ caracteriza el intervalo abierto de centro a y semiamplitud r, pues equivale a

[6] La continuidad en el conjunto de números reales se sustenta en la definición de números reales mediante encajes de intervalos dada por Dedekind. En el ámbito geométrico, "la recta de Dedekind, en concordancia con su definición de continuidad basada en los cortes, está configurada como una estructura actualmente infinita y atómica" (Rigo, Mirela. *Elementos históricos y psicogenéticos en la construcción del continuo matemático*, ob. cit., pág. 20).

[7] HORVATH, Juan. Introducción a la topología general. 1. Secretaría General de la OEA., 1975, pág. 12.

$$-r < x - a < r$$

Es decir,

$$a - r < x < a + r$$

$$2r$$

$$a - r \qquad a \qquad a + r$$

Dado un punto x_0, podemos asociar a él varios intervalos abiertos que lo contengan, pero si queremos un intervalo que lo contenga como centro, lo llamaremos **vecindad** de x_0 y estará formado por todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, para cualquier $\delta > 0$.

El isomorfismo existente entre el conjunto de puntos de la recta y los números reales, permitirá relacionar estos conceptos con la noción de continuidad señalada en la perspectiva euclidiana.

Sabemos que $| x - a | < \delta$ indica, en la recta numérica, que la distancia entre los puntos x y a es cada vez menor o, en otras palabras, que es tan pequeña como queramos. Comprender este concepto supone la posibilidad —en la mente del alumno—, de la división potencialmente infinita de ese segmento rectilíneo.

Por tanto, si analizamos el concepto desde una perspectiva psicológica será necesario señalar que sólo en la etapa del pensamiento formal[8] el alumno es capaz de imaginar la división potencialmente infinita, y anteponer a lo real todas las posibilidades que él puede imaginar.

Para comprender esta afirmación analicemos las dificultades que surgen en la comprensión del continuo geométrico.

Dificultades en la comprensión del continuo geométrico

Si tenemos en cuenta que el conocimiento humano comienza en la percepción, para evitar las dificultades del alumno frente a la abstracción que suponen los conocimientos matemáticos, debemos plantear la enseñanza de la matemática —al menos hasta los 14-15 años— teniendo como punto de partida la realidad sensible. La enseñanza de los entes fundamentales de la geometría en nuestras aulas debiera partir de lo concreto y, mediante operaciones del pensamiento llegar a la gestación de un proceso indefinido que permita captar el concepto abstracto de punto, recta o plano.

¿Cuál es la dificultad en la comprensión del ente matemático?

Hemos señalado que el punto matemático no tiene existencia material sino que es un **ente de razón**. Partir de la realidad para obtener, mediante operaciones del pensamiento

[8] En la evolución mental del niño, Piaget distinge etapas que van desde la acción y la representación imaginada y estática del niño de 2 a 7 años, al espacio de las operaciones concretas (7 a 12 años), en el cual la reversibilidad de las operaciones se da sólo con objetos manipulables y finalmente —después de los 12 años— el espacio de las operaciones formales en el cual el niño hace abstracción de un concepto y puede elaborar mentalmente deducciones y relaciones sin necesidad del objeto material concreto.

el concepto teórico del mismo, supone una acción que se prolonga en las operaciones intelectuales. Este proceso es complejo, y a veces el niño no alcanza el "salto de abstracción" necesario para el concepto teórico. Por ello, no acepta que el "punto" que percibe con la vista *no es* el "punto matemático" y, para lograr la comprensión del concepto debemos —en este caso— hacer referencia al hecho de que nuestros sentidos son limitados, por lo cual no es posible la percepción del producto de esa partición infinita realizada a nivel intelectual.

> **Afirma Fabro (1977) que "la acción del estímulo sobre el órgano subyace a definidas condiciones de distancia, mínima y máxima, más acá y más allá de lo cual no se da la sensación". "Cuando tenemos cualidades sensibles que no son ya susceptibles de división, hay que suponer que se da un cuerpo mínimo que trasciende toda división de cualidades sensibles y que, por lo tanto, ya no tiene cualidad alguna sensible..."[9]**

Para superar esta contradicción será necesario poner las bases para un conocimiento más profundo, y fundamentalmente **de distinta naturaleza**, que el derivado del carácter perceptivo de la intuición inicial. Sólo en el dinamismo intelectual[10] (reversible, formal) que el sujeto adquiere en la comprensión del infinito potencial —que se da cuando puede concebir la partición indefinida de un proceso; esto es, no sólo la repetición real sino la repetición potencial— podrá gestar la noción de recta (continuo geométrico) como 'algo que siempre podemos afinar más' y la noción de punto como 'la parte mínima que podamos imaginar'.

En qué etapa alcanza el niño este dinamismo intelectual?

En los niños pequeños la percepción está ligada a la intuición inicial; por ello, el infante no es capaz de la partición indefinida. Se mantiene en el plano concreto, en el cual la contradicción entre continuo físico (divisible un número finito de veces) y continuo matemático (divisible indeterminadamente) se advierte cuando dice, basado en la teoría escuchada, que la recta tiene infinitos puntos y luego, cuando le hacemos dibujar algunos puntos, reduce el total a "100 o 200".

Para superar esta contradicción será necesario poner las bases para el paso al modelo matemático, el cual a su vez, en interacción con la intuición y con el concepto imagen[11] que el alumno posea, posibilitará un conocimiento más profundo y fundamentalmente de distinta naturaleza que el derivado del carácter perceptivo de la intuición inicial.

---

[9] FABRO Cornelio. *Percepción y Pensamiento*. Edic. Universidad de Navarra, Pamplona, 1968, pág. 170.

[10] Entendemos por "dinamismo intelectual" la capacidad de la inteligencia para continuar un proceso —que materialmente ha concluido. Este dinamismo permite, por ejemplo, la partición indefinida de un segmento y, por la reversibilidad de las operaciones intelectuales, la recomposición del mismo a partir del resultado de la partición.

[11] Entendemos por concepto imagen la estructura total de conocimiento asociada a un concepto, en el sentido dado por TALL y VINNER (1981). Ésa contiene cuadros mentales, propiedades y procesos asociados a ese concepto. Señalemos también que, en términos generales, se entienda por intuición un conocimiento en el cual se da el contacto entre objeto y sujeto sin intermediación de un proceso de elaboración o un conocimiento inmediato, que se apoya en conocimientos adquiridos (intuición intelectual). Es a este tipo de intuición al que nos referimos en este párrafo.

En el estadio de las intuiciones preoperativas, Piaget (1948) señala que los niños no perciben la composición de la línea mediante puntos, pues "si los puntos quedan visibles y discontinuos no será línea y si se tocan de manera continua (perceptivamente hablando), no son puntos."[12]

Cuando el sujeto deja el ámbito de lo concreto, el dinamismo intelectual del pensamiento formal le permite superar la contradicción que percibía en los estadios anteriores. En este momento, el pensamiento ha devenido —hipotético— deductivo, con lo cual el sujeto supera las nociones de partición y de punto perceptible, y prolonga los mecanismos de descomposición y de recomposición más allá de todo límite efectivo.

> **"Es que en un momento dado el sujeto toma conciencia del dinamismo de la operación como composición formal indefinida, y que entonces su partición o su recomposición dejan de ser figura de simples operaciones aditivas sobre objetos concretos y termina por vincularse a la serie ilimitada, como tal, de los encajes o desencajes".**[13]

Hemos señalado la posibilidad psicológica del sujeto para concebir el continuo geométrico. Creemos que el continuo numérico adquiere, a través de los años de enseñanza sistemática, una entidad propia fundada en estructuras matemáticas definidas frente a la necesidad de dar respuesta a problemas físicos y también matemáticos.

El continuo numérico y el continuo geométrico sin embargo no quedan desvinculados: es posible establecer un isomorfismo entre el continuo geométrico y el conjunto de los números reales, como hemos señalado en el punto anterior.

A nivel educativo surgen dificultades en la comprensión de este isomorfismo, dificultades que devienen —a nuestro entender— como consecuencia de una metodología fundada exclusivamente en el carácter operatorio del conjunto de números reales, y no en el concepto de número real, que tiene implícito la noción de infinito (potencial y actual) al considerar a éstos como límite de sucesiones monótonas convergentes de intervalos encajados. Entonces sí, el concepto podrá vincularse estrechamente con el concepto de punto que hemos señalado.

Los conceptos topológicos enseñados en la Escuela Media

La necesidad de excelencia en la operatividad de la matemática de los primeros años del Ciclo Medio —edad de 13 a 15 años— lleva al docente a dejar de lado ciertos aspectos vinculados con la comprensión de los conceptos de entorno y de intervalo, que serán utilizados frecuentemente en el cálculo diferencial.

Señalamos en las primeras páginas la importancia de la enseñanza del concepto de límite como un concepto dinámico que exige a la mente ir más allá de lo concreto y formar hipótesis sobre el resultado final de un proceso de infinito potencial.

¿Qué relación hay entre este concepto y los de entorno e intervalo a los que ahora hacemos mención?

---

12 PIAGET-INHELDER. La réprésentation de l'espace chez l'enfant, P.U.F., París, 1948, pág. 166.

13 PIAGET-INHELDER. La réprésentation de l'espace chez l'enfant, Ob. Cit., pág. 177.

Creemos que para la comprensión de ambos conceptos es necesaria la gestación de un proceso indefinido.

Sabemos también que en los caminos zigzagueantes de la ciencia, algunos conceptos se apoyan en otros, y recíprocamente. Los conceptos de entorno e intervalo se sostienen en la comprensión del continuo numérico, y es por medio del isomorfismo de éste con el conjunto de puntos de la recta, que podemos aspirar a la captación "intuitiva"[14] del concepto de límite de una función de variable real.

El gráfico de la función (modelo intuitivo para la comprensión del concepto de límite) nos permitirá analizar cual es el comportamiento de la misma cuando nos acercamos tanto como queramos a un cierto punto. Es de señalar que "acercarnos tanto como queramos" supone la aceptación —por parte del sujeto— de infinitos entornos posibles para el punto en cuestión.

Dada la importancia de estos temas, realizamos un análisis de la enseñanza de los mismos en la Educacion Media en la República Argentina. Este análisis se llevó a cabo en dos ámbitos:

a. Los programas vigentes.
b. Los libros utilizados por docentes y alumnos para desarrollar ese programa.
a. Respecto al análisis de los programas vigentes debemos señalar tres ámbitos:

- Los colegios de bachillerato común.
- Los colegios técnicos.
- Los colegios con Bachilleratos especializados.

En los colegios de Bachillerato común están en uso los programas aprobados por decreto 6680/56 del Ministerio de Educación, de la Nación.

En 4° año[15] se introduce el concepto de número real y la aproximación de un número real a partir de sucesiones monótonas. El programa insiste luego en la operatividad del conjunto de números reales (extracción de factores del radical; operaciones con radicales; racionalización de denominadores). No se considera el concepto de módulo, distancia entre dos puntos, intervalos y entornos.

En 5° año[16] se introduce la noción de límite de una función de variable real precediéndola por la definición de límite de una progresión. Debemos destacar que en el desarrollo del programa no se observa el estudio de funciones, **tema básico para la comprensión del límite de una función.** Por otra parte, la 'fusión' entre el límite de una progresión y el límite de una función, es actualmente discutida.[17]

En las Escuelas dependientes del CONET, los problemas señalados en el programa de 4° año de los bachilleratos, se observan en 3er año.[18]

En el ciclo superior de las Escuelas Técnicas, la cantidad de contenidos es importante pero —aun cuando el tema específico es Análisis Matemático— parece no tratarse *conceptualmente* la completitud del conjunto de los números reales o los conceptos

---

[14] Me refiero aquí a los modelos intuitivos que, según FISCHBEIN (*Intuition in science and mathematics*, Dordrecht, Holland, Reidel, 1987) llegan a manejarse con la misma facilidad que lo concreto.

[15] Programas para las asignaturas del 4o. año del Bachillerato. Edic. Goudelias. Año 1985. Resolución ministerial 598/66, circular No. 91/66.

[16] Programa de Matemática para 5o. año. Edic. Goudelias. Resoluc. ministerial 1509/67. Circular No. 98/67.

[17] Cfr. TORANZOS-RENZO. *Límite funcional versus límite de sucesiones*, Exposición UMA 1991.

[18] CONET. Decreto 14086/62. Resolución 13000 C/63.

topológicos ya mencionados. El nivel matemático parecería estar respaldado por la operacionalidad adquirida es decir, por la capacidad para resolver límites, derivadas o integrales, o bien para determinar puntos de inflexión, y máximos o mínimos de una curva.

La cantidad y la calidad de los temas parecen no respaldar la *comprensión* de los conceptos, sino sólo su operacionalidad.

En los bachilleratos especiales se analizó el programa del bachillerato modalizado en Ciencias y Letras, cuyo plan de estudios fue aprobado por resolución ministerial 1974/83, que exige —como condición de ingreso a esta modalidad— haber aprobado el ciclo básico, según los programas vigentes por decreto 6680/56.

En 4° año hay una profundización del estudio de funciones: lineal, cuadrática, fraccionaria, trascendente, funciones circulares y trigonométricas, y función inversa. El estudio de las funciones es profundo y prepara adecuadamente —a nuestro juicio— para el concepto de límite funcional. Sin embargo, los conceptos topológicos de entorno e intervalo, señalados como importantes para la comprensión del concepto de límite, no están detallados. Figura en el programa 'distancia entre dos puntos', en lo cual, a nuestro juicio, podríamos apoyarnos para dar lugar a los conceptos de intervalo y entorno.

b. Respecto de los libros en uso, analizamos los correspondientes a 3°, 4° y 5° año de las escuelas de bachillerato, y 3° año de escuelas técnicas, por ser en estos cursos que comienza la enseñanza con números reales.

En los libros examinados[19] se encontró el concepto de entorno y de intervalo sólo como introducción instrumental para definir el concepto de límite. No se observa un tratamiento conceptual de los temas de intervalo y entorno que se introducen en la unidad correspondiente a números reales. Sólo se hace un estudio operativo de los mismos. Tampoco se advierte el tratamiento del concepto de módulo —excepto la definición de módulo considerada después de definir el conjunto de los números enteros.

Creemos que es necesario anteponer a la definición formal de intervalos o entornos, la comprensión del concepto de los mismos, ligado ello estrechamente a las propiedades de densidad y completitud del conjunto de los números reales, como hemos señalado en este trabajo.

Nos parece importante señalar que, en el análisis realizado, los temas aparecen tratados desde un punto de vista algebraico —operatorio y no se les considera desde la perspectiva del Análisis, según el desarrollo realizado en los puntos anteriores. Esto puede conducir a serias dificultades en el tratamiento del concepto de límite pues —como hemos señalado—, es necesario, en primer lugar, la gestación de un proceso indefinido que permita concebir la completitud del conjunto de los números reales, y la comprensión del isomorfismo entre continuo numérico y continuo geométrico. Éstos llevarán a la comprensión de los conceptos de entorno e intervalo, sobre los que se sustentan los conceptos del Análisis.

---

[19] Cfr REPETTO-LINSKENS-FESQUET. *Trigonometría*, 5o. año Bachillerato. Buenos Aires, Edit. Kapelusz, 1968. REPETTO-LINSKENS-FESQUET. *Algebra y Geometría*, 4o. año Bachillerato. Buenos Aires, Edit. Kapelusz, 1968. TAPIA. *Matemática IV*. Edit. Estrada, Buenos Aires., 1986. TAPIA. *Matemática III*. Edit. Estrada, Buenos Aires., 1985. TAJANI-VALLEJOS. *Algebra para Escuelas de Educación Técnica*, III año, Cesarini Hnos Edit., 1979. ROJO-SANCHEZ-GRECO. *Matemática IV*, Edit. El Ateneo, Buenos Aires., 1986. CORTEZ. *Matemática IV*, Edit. Stella, Buenos Aires., 1993.

Test a utilizar

En la búsqueda de conceptos asociados al concepto de límite, consideramos de especial relevancia los conceptos topológicos de intervalo cerrado y abierto, entorno y vecindad, que tienen implícito el concepto de continuo numérico y el de infinito estrechamente vinculado con el anterior.

Buscamos entonces comprobar la correlación existente entre la adquisición del concepto de límite y la adquisición de los conceptos topológicos. Para ello se evaluó, en forma colectiva, el *test* que ahora describimos. El mismo buscó determinar en qué medida un alumno posee los conceptos de límite y entorno, y la relación que hay entre la adquisición de ambos.

La evaluación se realizó sobre 68 alumnos de 4o. y 5o. año.

Ejercicio no. 1

Un dispositivo en forma de balanza posee, en uno de sus extremos, un resorte. La tapa de contención del resorte salta cuando en el platillo se colocan dos kilogramos.
Juan y Pedro quieren jugar y disponen que el primero que haga saltar el resorte es el que pierde. En el platillo puede colocarse cualquier peso. (Los pesos se acumulan,) ¿Qué estrategia deberá seguir un jugador para ganarle al otro?

El problema se planteó de este modo con vistas a observar si el alumno advierte que, en caso de pesas reales, la iteración es definida y, si lo realiza imaginariamente, la iteración es indefinida aunque el juego carezca de sentido.

Mediante este ejercicio queremos determinar en qué medida el alumno posee un proceso de iteración indefinida, como punto clave en la comprensión del concepto de límite. Además, esperamos observar si el alumno es capaz de advertir la oposición que se plantea entre el modelo utilizado numéricamente (1.99999...-indefinido) y la realidad concreta que encuentra si considera pesas de distintos tamaños, en donde la iteración (real) es definida.

Ejercicio Nº 2

"Considera un punto *x* en la recta: *x* = 3. Podemos determinar muchos segmentos que tengan al punto 3 como punto central del segmento. ¿Puedes escribir los extremos del menor segmento que contenga al punto 3? Justifica tu respuesta."

Debemos señalar que hablamos con imprecisión al señalar "$x = 3$" dadas las dificultades que surgieron cuando el problema se planteó sin el número real asociado al punto[20] En vista de ello, como nuestro objetivo era conocer si el alumno comprendía el concepto de entorno de un punto, optamos por el texto señalado.

---

[20] Un escaso porcentaje de alumnos —inferior al 20%— resolvió el siguiente problema: "Considera un punto en la recta. ¿Cuál es el menor segmento que contiene a ese punto? Supongamos que hay un "agujero" en el punto, ¿cuál es el menor segmento que contiene al agujero?"

Mediante este ejercicio queremos analizar el concepto de entorno. la comparación de los resultados obtenidos en él y los obtenidos en el ejercicio No. 1 se confrontaron para determinar la posible correlación existente entre la adquisición del concepto de límite y la adquisición de los conceptos topológicos. A la vez, las respuestas nos aportaron elementos interesantes sobre la comprensión de la completitud de la recta real.

Criterios de Evaluación

Los ejercicios fueron puntuados según el siguiente esquema.

Ejercicio No. 1

Entiende la consigna............................3 puntos
La respuesta no aclara el peso posible
pero considera "el peso más cercano"........3 puntos.
Considera un peso real muy aproximado.....1 punto.
Considera un peso de infinitas
Cifras decimales................................2 puntos.
Advierte que la solución no es real........ ...1 punto.

Casos especiales: Si el alumno da la respuesta 1.999 sin otra aclaración se computarán 6 puntos.

Si el alumno no entiende la consigna pero considera que el proceso es infinito se computarán 6 puntos.

Ejercicio No. 2

Entiende la consigna..........................3 puntos.
El radio del intervalo considerado es
mayor que 0.1.................................2 puntos.
El radio del intervalo considerado es
menor que 0.1.................................2 puntos.
Advierte la existencia de
infinitos intervalos............................3 puntos.

Este puntaje es acumulativo y la superación del error que implica el puntaje anterior supone adquirido ese puntaje.

Si el alumno no supera el plano de lo concreto se computarán 2 puntos.

Análisis cualitativo

Aun cuando es el análisis cuantitativo el que determinó la validez de nuestra hipótesis de trabajo, es interesante el estudio detallado de las respuestas obtenidas, que ayudaron a advertir las dificultades que encontraban los alumnos en la comprensión de los temas objeto de la prueba evaluada. Detallamos a continuación las características de las respuestas obtenidas.

Ejercicio Nº 1

Como hemos señalado, este ejercicio evalúa el concepto de límite, al gestar un proceso de iteración indefinida. Esperamos que el alumno observase la infinitud del proceso señalado y advirtiese a la vez que, si bien el planteo matemático es potencialmente infinito, en la realidad no encontraremos el material adecuado para pesos tan pequeños como los que se necesitan. Es interesante señalar también la posibilidad de que el alumno advierta el rol que juega la precisión del instrumento de medición utilizado.

En el trabajo no se utilizó material concreto, sin embargo, los alumnos argumentaron en favor de instrumentos de mayor precisión que nos permitiesen un tiempo de juego mayor.

Las respuestas fueron clasificadas en tres categorías que van desde la respuesta concreta —que en general utiliza una buena aproximación (1.99 Kg.)— a la iteración indefinida presentada en forma numérica. Dentro de ésta cabe señalar una diferencia entre las respuestas que advierten la imposibilidad material de pesos **infinitamente pequeños**, y aquellos sujetos que trabajan en uno de los dos campos (real o matemático) con exclusión del otro.

El campo matemático requiere de la operación intelectual (dado que hemos señalado a su objeto como un "ente ideal"). En el ámbito de la teoría piagetiana, para lograr la operación formal —requerida en la Matemática— el sujeto pasa por distintos estadios a partir de la acción sobre los objetos:

a. La asimilación del objeto percibido a los esquemas que se poseen;
b. La acción interiorizada, constituida por la representación intuitiva;
c. La operación concreta;
d. La operación formal, abstracta.

En el nivel operativo concreto, el niño puede realizar una acción e imaginar su retorno, sin modificar el objeto a conocer.

En el estadio de las operaciones concretas, el niño se limita a registrar datos sucesivos según todas las relaciones y clases que responden a su diversidad, pero esta estructuración no responde a la realidad, que le muestra una "mezcla" de contenidos. El niño no sabe combinar las situaciones experimentales y sólo obtiene datos aislados. Tampoco sabe razonar mediante implicaciones por lo cual no puede componer los datos experimentales que observa. Elabora su conclusión solamente a través de la acción.

Para combinar las distintas operaciones, el niño combina sus ideas, hipótesis y juicios del mismo modo que combinaría los objetos. Posteriormente a esta combinatoria, debe decidir, entre esas asociaciones, cuáles son verdaderas y qué significado tienen los subconjuntos a los que ha llegado. Esta elección será el resultado de operaciones de clasificación aplicadas a las mismas asociaciones y generalizadas a todos los casos posibles. En esta etapa, señalada por Piaget como estâdio operatorio formal, el adolescente puede hacer hipótesis sin necesidad de acciones previas. Las operaciones proposicionales —implicación, incompatibilidad, etc.— aparecen en este nivel y derivan de la combinatoria señalada.

Las respuestas catalogadas de "concretas" en nuestro trabajo, parecen indicar que estos alumnos se encuentran en la etapa del pensamiento concreto. En ella, 'lo posible' no es considerado —puesto que no tienen capacidad para hipotetizar sobre una acción interiorizada— y como consecuencia, el proceso de iteración obtenido no es infinito.

I. Respuesta concreta (Plano real)

Graciela (17, 3)[21] 5o año.
"Deberá colocar un objeto que pese alrededor de 1 kilo y 998 gramos (1.998 kg), de modo que su compañero, cuando coloque un objeto, sume los 2 kg."

Es de observar que esta alumna responde 1 kg y 998 gramos, y *no* 1 kg y 999 gramos, porque identifica probablemente los 999 g con 1 kg.

En otros casos, para el peso más aproximado a 2 kg se consideró 1.99 kg. Aquí debemos señalar una advertencia semejante a la del párrafo anterior: el peso "más aproximado" —en el ámbito real— sería 1.999 kg.

Guadalupe (16, 11) 4o año.
"El primer jugador pone el peso inmediatamente anterior a 2 kg y así el otro jugador, al poner el mínimo de peso posible, pierde. (Por ejemplo: si el menor peso es de 1 g el primer jugador coloca 1 kg y 999 g."

II. Observa que la posibilidad de juego es infinita pero no advierte que, en una perspectiva real, el juego finaliza en algún momento. (Oposición entre el modelo matemático y la realidad concreta.)

En esta categoría los alumnos se ubican en un pensamiento operatorio formal, pero dejan de lado el marco del problema planteado para ubicarse estrictamente en el plano matemático con independencia de lo real presentado. Hemos considerado dos subcategorías:

a. El planteo se realiza desde el ámbito aritmético.

La infinitud de los números reales hace que el sujeto advierta que puede encontrar siempre un número menor que otro. La respuesta del alumno se ubica sólo en el plano matemático, sin considerar el ámbito de la cuestión considerada. Como consecuencia no advierte que llegará un momento en el que el objeto (cualquiera que sea el 'material' utilizado) será más pesado que el número obtenido.

Lucrecia (16, 9) 4o. año.
"Ninguno va a ganar porque siempre existe un número más pequeño que otro".
Cecilia (16, 9) 4o. año.
"El primero que juegue tendrá que poner el peso de 1.9...9 kg para que el segundo jugador ponga lo que ponga, pierda".

---

[21] El par ordenado indica la edad en años y meses. Ejemplo: (17,3) significa 17 años y 3 meses.

Dolores (16, 7) 4o. año.
"En este juego para mí no va a haber ningún ganador, ya que se pueden poner pesos infinitamente livianos sin llegar a 2 kg."

Mercedes (17, 4) 4to año.
"Aunque un jugador coloque un elemento que pese lo más aproximado posible a 2 kg (1.99 kg) al colocar un elemento el otro jugador no perderá, ya que siempre habrá un elemento que pese lo suficientemente poco como para no alcanzar a sumar los 2 kg, y así sucesivamente, sin que ninguno de los dos jugadores pierda."

b. No especifican la cantidad

El proceso indefinido no se explicita en el ámbito numérico (aunque implícita o explícitamente recurran a la cantidad).

Rosa (17, 7) 5o. año.
"Deberá tratar de poner la mayor cantidad sin llegar a 2 kg para que cuando el otro coloque cualquier peso, salte el resorte".

Catalina (18) 4o. año.
"Voy sumando todos los elementos que voy poniendo en la balanza; es decir, sumo el peso de cada uno y de acuerdo al peso, voy calculando con los elementos de mi compañero hasta que pueda lograr que el otro jugador llegue a los 2 kg y salte el resorte; después uso siempre la misma estrategia".

Soledad (16, 11) 4o. año.
"Un jugador para ganarle al otro, deberá tener en cuenta el peso de los objetos que va a utilizar él y su contrincante. Y así deberá poner el objeto con mayor peso, que no llegue a 2 kg, pero que sea lo máximo que pueda pesar sin llegar al peso en el que el resorte salte. También deberá comenzar él ya que de ese modo podrá colocar su objeto, y así ganar."

III. Se integran el plano matemático y el plano real.
En esta categoría, el alumno analiza la posibilidad de la iteración indefinida en el contexto planteado.

Socorro (16, 7) 4o. año.
"Si jugamos con elementos de 100 g yo colocaría siempre el elemento impar (100, 300, 500 gramos, etc.), y de esta forma el resorte saltaría cuando mi contrincante juegue.

- Si los elementos son de distintos pesos, me arriesgaría a colocar primero los más pesados (ej.: 1 kg y 990 g) suponiendo que no habrá ningún elemento de 10 g, aproximadamente.

- Si tenemos elementos ya pesados y de diferentes pesos voy a limitarme a colocar la mitad del peso que mi compañero colocó anteriormente y de esta manera nunca voy a poder completar los 2 kg con exactitud".

Sebastián (17, 2) 4to año.
"Si estamos considerando una balanza muy exacta, para ganarle al otro hay que poner un objeto muy aproximado a 2 kg procurando que no sea uno igual al peso de la diferencia de 2 kg y el objeto puesto".

Florencia (17, 5) 5o. año.
"Si los pesos con los que se juega ya están establecidos, o sea que se tienen cubos o bolsitas con determinado peso (y no que cada uno regule el peso a su parecer agregando arena suelta, por ejemplo), el primer jugador colocaría un peso bastante grande que se acerque lo más posible a los 2 kg, de modo que al segundo jugador se le dificulte colocar un peso tan pequeño".

Ejercicio Nº 2

Consideramos correcta la resolución de este ejercicio cuando el alumno advierte la existencia de infinitos intervalos posibles y supone —por ello— extremos indefinidos. Es decir, una amplitud de intervalo tan pequeña como se quiera. Si el alumno ha comprendido esto, su respuesta será

$$(3 - 0.00\ldots1 \; ; \; 3 + 0.00\ldots1)$$

El 54.41% del total de la muestra resolvió correctamente este ejercicio.
La estructura de razonamiento utilizada es fundamentalmente aritmética, como consecuencia del valor del punto x señalado ($x = 3$), sobre el cual se deseaba encontrar el intervalo mínimo.

Dentro de las respuestas se observaron las siguientes características:

I. La respuesta no supera el plano concreto.

Dentro de esta categoría hemos ubicado a aquellos sujetos que centran la respuesta en el mínimo punto que pueden representar en una escala considerada. Creemos que estos alumnos no conciben el punto como ente abstracto que puede visualizarse *incorrectamente* mediante la mínima marca que deja el lápiz o la intersección de dos trazos de línea. Esta representación del punto sólo es el "comienzo" para la serie de operaciones intelectuales que, mediante un proceso de iteración indefinida, conduce al concepto abstracto.

Isabel (18, 3) 5o. año.
"Los extremos son 2.99 y 3.01, porque ambas son las unidades más cercanas al 3: una es la anterior inmediata, y la otra la posterior inmediata (3.01)".

II. Observan la imposibilidad física para dibujar el menor segmento

En esta categoría podemos señalar dos subcategorías:[22]

a. Explicitan la relación entre los puntos de la recta y los números reales;
b. Trabajan sólo en un ámbito.

a. Los sujetos aclaran la oposición existente entre la posibilidad de dibujar el segmento más pequeño y los extremos probables para el mismo. Se observa aquí la coexistencia de dos representaciones no integradas: geométricamente supone que hay un segmento mínimo, mientras que la representación aritmética le permite extremos indefinidos.

Como ejemplos dentro de esta subcategoría podemos señalar a:

Felícitas (17, 11) 5o. año.
"Los extremos del segmento serán 2.99 y 3.01, teniendo en cuenta que el punto 3 es el punto medio. Esto sería en forma gráfica. En forma imaginaria los extremos serían:

$$x_1 = 3 - 0{,}00\ldots1 \quad \text{y}$$
$$x_2 = 3 + 0.00\ldots1.$$

Dulcinea (17, 9) 5o. año.
"Los extremos del menor segmento que contenga al punto 3 estarían dados en el punto 3 ya que si comenzamos a reducir el segmento que tiene como centro el punto 3, llegamos, en un momento, a unir los extremos con el punto medio (3). Por lo que sería un solo punto: el 3."

Vemos en este ejemplo la ruptura existente entre el plano real y el matemático, contradicción que la alumna supera falsamente ("unir los extremos con el punto medio") admitiendo la realidad física aunque se 'opone' a la realidad matemática, puesto que la partición indefinida de un segmento conduce a otro segmento tan pequeño como queramos.

Señalamos esto como "ruptura", dado que el alumno supone en el ámbito numérico extremos indefinidos y, cuando se refiere al continuo geométrico, señala una amplitud nula para el menor segmento.

Mariana (17,7) 5o. año.

----

0 2,99 3 3,01

"Ya que busco la mínima parte que se puede dibujar (0.01), al 3 le resto 0.01, y así formo un extremo; luego, para determinar el otro extremo, a 3 le sumo 0.01.

Imaginado será: $3 - 0.00\ldots\ldots1$
$3 + 0.00\ldots\ldots1$

[22] Este análisis —si bien no corresponde a la correlación buscada entre el concepto de límite y los conceptos topológicos— aporta elementos para la comprensión de las dificultades del alumno frente al concepto de entorno e intervalo, relacionados con las dificultades en la comprensión del isomorfismo entre el conjunto de números reales y la recta geométrica.

b. En esta subcategoría los alumnos se ubican sólo en un ámbito, eliminando de este modo la contradicción a que puede dar lugar la representación sensible del segmento.

Ejemplos de esta subcategoría son:

Soledad (17, 4) 5o. año.
"No se puede representar porque es imposible limitar una escala numérica a números decimales, ya que es infinita".

Guadalupe (16, 11) 4o. año.
"Estará determinado por el número inmediatamente anterior a 3 y por el número inmediatamente posterior a 3 (son infinitamente pequeños)."

Mercedes (17, 4) 4o. año.
"Al ser los puntos de la recta infinitos, aunque se coloquen como extremos del segmento dos puntos muy cercanos al punto *x*, siempre va a haber otros más cercanos y, por lo tanto, el segmento no sería el más pequeño".

III. La posibilidad de los infinitos radios del entorno se funda en la infinitud de puntos de la recta.
En esta categoría los alumnos admiten la completitud de la recta real, por la cual toda sucesión de puntos de la recta converge a un punto de la misma recta. Como consecuencia de ello, admiten la imposibilidad de obtener un segmento mínimo.

Soledad (16, 11) 4o. año.
"No puedo nombrarlo, ya que la recta es un conjunto de infinitos puntos. Por ello es difícil o imposible precisar los extremos del menor segmento que contenga a un punto de ella".

Análisis Cuantitativo

Este análisis se realizó bajo un doble aspecto: por un lado, el análisis porcentual que nos permitió observar que, en general, a partir de los quince años las adquisiciones de los conceptos relacionados con el análisis matemático no dependen de la edad del alumno, ni tampoco del nivel escolar en el que se encuentre (se comparan solamente alumnos de cuarto y quinto año). Por otro lado, el análisis de la hipótesis de trabajo planteada, en el cual se utilizó la prueba estadística no paramétrica de Spearman.

Nuestro deseo entonces es comprobar la relación entre el concepto de límite y el concepto de entorno que, como ya señalamos, tienen implícita la gestación de un proceso infinito y que, por ello, sólo se dan en alumnos que poseen un razonamiento formal en el cual lo real pasa a formar parte de todas las posibilidades que puedan imaginarse.

Hemos señalado anteriormente que en la etapa operatoria formal —señalada por Piaget— el adolescente puede hacer hipótesis sin necesidad de la acción sobre los objetos. El adolescente puede entonces imaginar una partición indefinida, en la cual la partición real (acción concreta) es sólo *una* de las ilimitadas particiones posibles.

La determinación de la correlación se realizó mediante la prueba estadística siguiente:

Coeficiente de correlación de rangos de Spearman

Hipótesis de nulidad: H_0: la adquisición del concepto de límite y el concepto de entorno no están asociados en la población.

Hipótesis aternativa: H_1: La adquisición del concepto de límite y el concepto de entorno están asociados en la población.

Nivel de significación : sea $\alpha = 0.05$.

Número de individuos que conforman la muestra: $N = 68$.

Grados de libertad: $N - 2 = 66$.

Para comprobar la correlación existente entre los ejercicios 1 y 2, ordenamos los puntajes según sus rangos, atribuyendo a los puntajes ligados el promedio de los rangos correspondientes. (Pueden confrontarse los rangos atribuidos observando la tabla general en el Apéndice.)

TABLA DE RANGOS, EJERCICIOS 1 y 2

Ej. 1	Ej. 2	ld l	Ej. 1	Ej. 2	ld l	Ej. 1	Ej. 2	ld l
13	23	10	67	46,5	20,5	45	55,5	10,5
13	9,5	3,5	13	55,5	42,5	45	28	17
45	9,5	35,5	13	9,5	3,5	45	28	17
45	9,5	35,5	68	66	2	45	28	17
13	20	7	45	66	21	26,5	9,5	17
13	55,5	42,5	45	55,5	10,5	45	9,5	35,5
13	55,5	42,5	13	23	10	45	9,5	35,5
65,5	9,5	56	13	46,5	33,5	13	9,5	3,5
13	55,5	42,5	13	28	15	26,5	9,5	17
45	37,5	7,5	45	55,5	10,5	30	37,5	7,5
13	37,5	24,5	13	9,5	3,5	45	55,5	10,5
13	9,5	3,5	45	9,5	35,5	13	55,5	42,5
45	55,5	10,5	45	37,5	7,5	45	55,5	10,5
13	28	15	45	28	17	45	62,5	17,5
13	37,5	24,5	45	28	17	45	9,5	35,5
13	37,5	24,5	62	46,5	15,5	65,5	62,5	3
45	9,5	35,5	62	46,5	15,5	45	66	21
13	55,5	42,5	45	9,5	35,5	62	66	4

13	20	7	13	23	10	45	37,5	7,5
13	20	7	13	9,5	3,5	62	9,5	52,5
45	37,5	7,5	62	66	4	28,5	37,5	9
45	37,5	7,5	45	46,5	1,5	28,5	37,5	9
13	37,5	24,5	45	46,5	1,5			

$$x^2 = \frac{68^3-68}{12} + \left[\frac{25^3-25}{12} + \frac{2^3-2}{12} + \frac{2^3-2}{12} + \frac{29^3-29}{12} + \frac{5^3-5}{12} + \frac{2^3-2}{12}\right]$$

$$x^2 = 26\,197 - 3\,341.5 = 22\,855.5$$

$$y^2 = \frac{68^3-68}{12} +$$

$$\left[\frac{18^3-18}{12} + \frac{3^3-3}{12} + \frac{3^3-3}{12} + \frac{7^3-7}{12} + \frac{12^3-12}{12} + \frac{6^3-6}{12} + \frac{12^3-12}{12} + \frac{2^3-2}{12} + \frac{5^3-5}{12}\right]$$

$$y^2 = 26\,197 - 830.5 = 25\,366.5$$

$$d^2 = 36628$$

$$r_s = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma d^2}{2\sqrt{\Sigma x^2 . \Sigma x^2}}$$

$$r_s = \frac{22\,855.5 + 25\,366.5 - 36\,628}{2\sqrt{22\,855.5 \,.\, 25\,366.5}}$$

$$r_s = \frac{11\,594}{48\,156.58}$$

$$r_s = 0.240756$$

$$t = r_s \; \frac{\sqrt{N-2}}{1-r_s^2}$$

$$t = 0.240756 \sqrt{\frac{66}{0{,}942036}}$$

$$t = 2.01518$$

Según la tabla B[23] de los valores críticos de la t de Student con la cual se evalúa el coeficiente de correlación de Spearman, si N es mayor que 30, a un valor de $t = 2.01518$ está asociada una probabilidad de 0.05 para pruebas de dos colas. Dado $\alpha = 0.05$,

[23] SIEGEL, Sisney. *Estadística no paramétrica*. Edit. Trillas, México, 1983, pág. 282.

resulta $p \leq \alpha$, por lo cual H_0 cae en la región de rechazo. Por ello debemos rechazar H_0 y aceptar la hipótesis alternativa:

H_1: La adquisición del concepto de límite y del concepto de entorno están asociados en la población.

Conclusión

Las características principales de este análisis nos llevaron a las siguientes conclusiones:

1. Para el alumno, el punto resulta un residuo estático,[24] fruto de la división de una materia determinada. Por ello, no ha gestado el proceso de partición indefinida que le permita concebir el punto como un ente ideal.
2. En el campo numérico, los alumnos no tienen dificultad para aceptar las propiedades que suponen un planteo de infinito potencial. Utilizan los números racionales del mismo modo que las realidades sensibles. Por esto les resulta inmediato obtener la semisuma entre dos números dados, aunque éstos se hagan cada vez más pequeños a medida que consideramos el elemento de partida y el obtenido en la semisuma anterior. Sin embargo, al no haber gestado el esquema operatorio correspondiente al infinito, utilizan este concepto arbitrariamente, y muchas veces en forma errónea.
3. El mayor obstáculo surge frente al isomorfismo entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de la recta pues, si bien en el ámbito aritmético las operaciones le permiten calcular 'infinitos' números entre dos números dados, el sentido de la vista le 'asegura' que en la recta sólo podrá colocar un número finito de puntos.
4. La formación de dos representaciones no integradas —una aritmética y otra geométrica— se destaca como un factor a tener en cuenta en la enseñanza de números reales. Creemos que la operatividad de la matemática de la Escuela Media le permite establecer una iteración indefinida en el campo numérico pero, a la vez, no le ayuda a gestar un esquema operatorio en el que confluyan las dos representaciones. Más aún, creemos que es la insistencia **sólo** en lo operativo y no en lo **conceptual**[25] la que establece el hiato entre las dos representaciones, y por lo cual la matemática se ha constituido en una ciencia de fórmulas y números que no le permite alcanzar su finalidad específica.

El análisis estadístico, mediante el coeficiente de correlación de rangos de Spearman, determinó una correlación significativa entre la adquisición del concepto de límite y los conceptos topológicos.

Por ello queremos señalar la importancia de la enseñanza del concepto de intervalos y entornos mediante la gestación de un proceso indefinido de partición de la recta numérica y, a la vez, analizando desde una perspectiva ontogenética el surgimiento del concepto de número real. Sólo así estos conceptos contribuirán a la comprensión del concepto de límite.

---

[24] Entendemos por "residuo estático" el resultado final de un proceso finito, en oposición al concepto señalado en este trabajo.

[25] En el concepto de número real como un número al cual tiende cualquier sucesión de intervalos encajados, y *no* en la exclusiva operatividad en el campo real (operaciones con radicales, racionalización, etc.)

Apéndice

TABLA GENERAL					
No. A1.	Ej. 1	Ej. 2	No. A1	Ej. 1	Ej. 2
1	7	10	2	6	6
3	7	0	4	3	6
5	3	6	6	6	6
7	0	6	8	6	6
9	6	7	10	6	8
11	6	10	12	10	10
13	0	0	14	0	8
15	9	7	16	0	2
17	0	2	18	0	8
19	6	0	20	0	6
21	0	6	22	0	5
23	6	8	24	0	6
25	6	6	26	0	8
27	8	0	28	0	8
29	0	8	30	0	2
31	6	0	32	6	0
33	0	3	34	0	5
35	0	7	36	7	10
37	0	0	38	0	3
39	6	0	40	7	7
41	7	7	42	6	5
43	6	5	44	6	6
45	6	0	46	0	0
47	6	10	48	8	9
49	6	0	50	6	9
51	6	8	52	0	8
53	6	8	54	5	6
55	2	0	56	0	0
57	6	0	58	0	0
59	6	0	60	2	0
61	6	5	62	6	5
63	6	8	64	6	7
65	6	8	66	0	3
67	6	5	68	0	0