Intuición Primera versus Pensamiento Analítico: Dificultades en el Paso de una Representación Gráfica a un Contexto Real y Viceversa

Resumen

Diferentes investigaciones sobre el concepto de función han demostrado la importancia del estudio específico acerca de las dificultades que tienen los estudiantes al pasar de una representación de concepto a otra. El trabajo está relacionado con la detección de errores al pasar de un tipo de representación (gráfica de una función) a otra (diseño de un recipiente) y viceversa. El estudio se dirigió al análisis de respuestas dadas por profesores de matemáticas; se encontraron errores al no contextualizar (analíticamente) la variable independiente que aparece en una gráfica, y al no hacer una traducción) —preservando el significado—, al pasar al contexto real, y viceversa. La visualización permaneció a un nivel intuitivo primario, en donde la ausencia de procesos analíticos, no permitió a los profesores de matemáticas (nivel medio superior en México) pasar a otro nivel de abstracción que les proporcionara elementos de comparación con sus procesos intuitivos.

DESARROLLO DEL ESTUDIO

1. Visualización e imágenes mentales

En el presente estudio utilizaremos la expresión *Visualización matemática* como preludio de la abstracción de conceptos. Como lo señala Simmermann y Cunningham (1991):

> "En la visualización matemática, precisamente en lo que estamos interesados es en la aptitud de los estudiantes para elaborar diagramas apropiados (con lápiz y papel, o en algunos casos con microcompu-

Fernando Hitt Espinosa

CINVESTAV-IPN, PNFAPM

México

tadora) para representar un concepto matemático o un problema del uso del diagrama para alcanzar la comprensión y como ayuda en la resolución de problemas".

Desde este punto de vista, no sólo se espera que el individuo pueda crear una imagen mental de un concepto si no que además procese interiormente (según transformaciones mentales) los conceptos matemáticos adquiridos, y pueda exteriorizar esa imagen mental del concepto de manera que sea observable, ya sea de manera verbal, sobre papel, pantalla, etc. La articulación de una representación a otra tiene que ver con el proceso de asociar mentalmente —preservando el significado— las diferentes representaciones de un concepto. Es decir, esperamos que un individuo pueda exteriorizar las diferentes representaciones mentales que tiene de un determinado concepto, a través de diagramas, símbolos, frases; en suma, en representaciones externas relativas al concepto en cuestión.

Consideramos que un conocimiento asociado a un concepto es estable en un individuo, si éste puede articular las diferentes representaciones del concepto sin contradicciones.

En consecuencia, nuestros diseños de estrategias de aprendizaje deben prestar especial atención al tipo de representación (Fig. 1) que se utilice para designar un objeto matemático (para mayor conocimiento en malentendidos por malas representaciones, véase Adda, 1987).

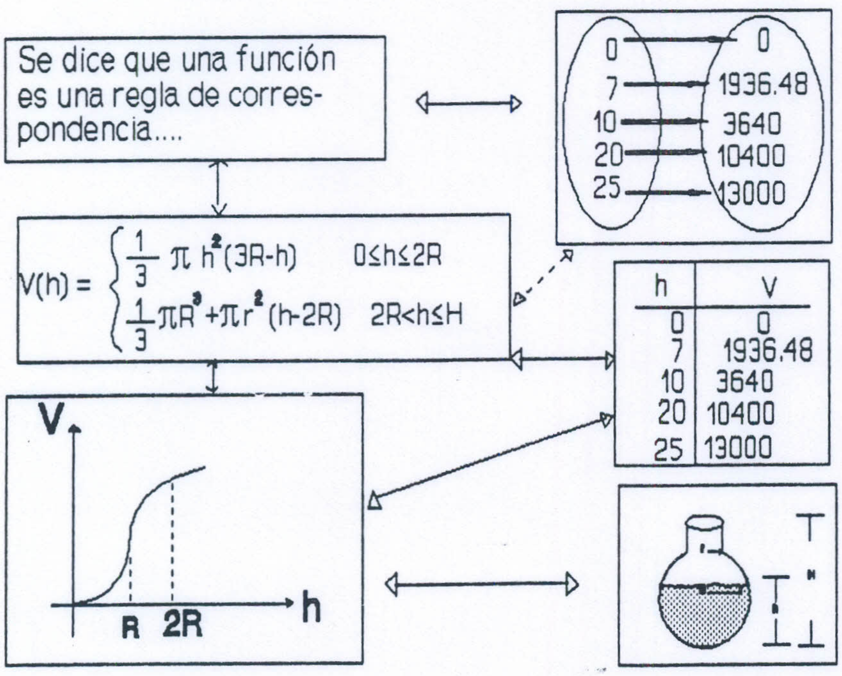


Figura 1

Diferentes investigaciones se han realizado en relación con algunas representaciones. Por ejemplo, Vinner y Dreyfus (1989) reportan que los alumnos entrevistados en su experimentación, no vinculan la "definición del concepto" (fijación de la noción, que la persona, tiene en la mente) con su "imagen conceptual" (nociones mentales de cualquier estilo que surgen al evocar el concepto). Por ejemplo, señalan que los alumnos no pueden reconocer como representación gráfica de una función lo mostrado en la Figura 2 (izquierda). Estos alumnos argumentan que la gráfica muestra un "cambio en su regularidad" al pasar de curva a recta. Ello indica que ese tipo de línea no encaja con la imagen conceptual que tienen sobre las gráficas de funciones, y no vinculan la definición del concepto para verificar si efectivamente es la gráfica de una función o no. Este fenómeno se puede también encontrar en el trabajo de Markovitz *et al.* (1986), quienes señalan que un alto porcentaje de alumnos no considera la gráfica de la Figura 2 (derecha) como representación de una función. Es decir, en el primer caso los estudiantes no han incorporado a su imagen conceptual, representaciones gráficas de funciones definidas por varias expresiones algebraicas, y en el segundo, funciones definidas en conjuntos discretos.

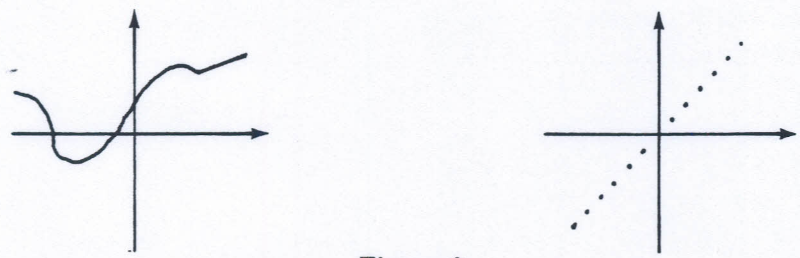


Figura 2

2. Sistemas de representación

2. Estudios acerca de los problemas del paso de una representación a otra de un concepto matemático, ha llevado a la idea de considerar a las representaciones de un mismo tipo, junto con las operaciones que se puedan realizar según reglas preestablecidas, como un sistema (Kaput, 1987). Por ejemplo, lo mostrado en la Figura 3.

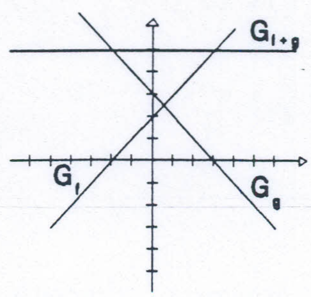
Sistema algebraico	Sistema gráfico
Representaciones algebraicas $f(x) = x + 2, \quad x \in \mathbb{R}$ $g(x) = -x + 3, \quad x \in \mathbb{R}$ $f(x) + g(x) = 5, \quad x \in \mathbb{R}$	Representaciones gráficas 

Figura 3. Representaciones en los sistemas algebraico y gráfico.

En este contexto de los sistemas de representación se menciona el trabajo de Duval (1988), quien señala la importancia de realizar estudios acerca de las dificultades de articulación entre diversos sistemas de representación. En su estudio, afirma que es más difícil pasar del sistema gráfico al algebraico, que a la inversa. Ruthven (1990) coincide en su estudio con esta afirmación.

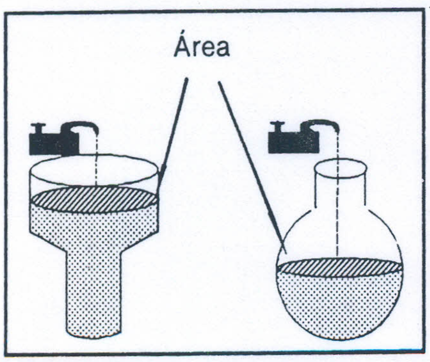
En nuestro caso, consideramos la importancia de investigaciones que nos permitan aclarar los procesos de articulación entre diferentes representaciones del concepto de función. El estudio que reportamos en esta ocasión, forma parte de uno mayor en donde se consideran diferentes representaciones de dicho concepto.

3. Experimentación

En la presente investigación se trabaja explícitamente con la representación gráfica de ciertas funciones y su vinculación con una representación en un contexto físico (dibujo de un recipiente). El objetivo del estudio consiste en saber qué representaciones son evocadas por los profesores al plantearles ejercicios sobre el concepto de función en un contexto no algebraico.

En el estudio participaron nueve profesores de matemáticas del nivel medio superior de México, y a manera de comprobación de resultados, seis profesores de matemáticas de enseñanza media y superior, de Guatemala. El análisis lo restringiremos exclusivamente al estudio realizado en México.

Se diseñó un cuestionario que presentó al principio un ejemplo (Fig. 4) y después se plantearon 32 preguntas que describimos a continuación. En las diez primeras se solicitó que dadas las formas de 10 botellas, se bosquejaran las gráficas correspondientes, suponiendo que los recipientes se llenaban gradualmente de líquido, y teniendo en cuenta que la variable independiente era la altura del fluido, y la variable dependiente, el área de la superficie del líquido (véanse Fig. 4 y Tabla I). En las siguientes 10 preguntas se proporcionaron gráficas cuya variable independiente era la altura, y la variable dependiente, el volumen; en este caso se pidió que dibujaran los frascos, correspondientes (véase Tabla II). Finalmente se presentaron 12 gráficas (altura contra área seccional de la superficie del



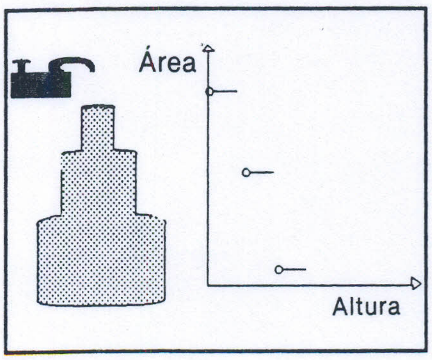


Figura 4

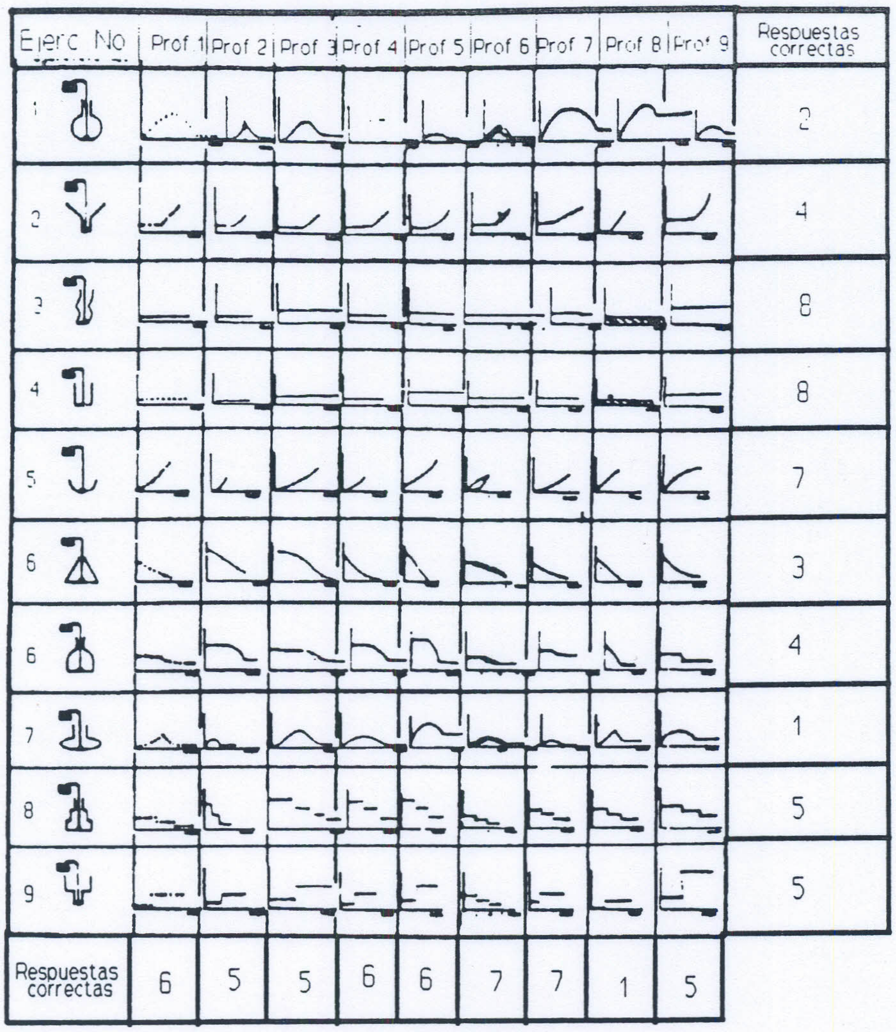


TABLA I

líquido) y se solicitó que dibujaran las botellas correspondientes (véase Tabla III). El tiempo máximo permitido en la resolución del cuestionario fue de 2 horas y media.

4. Análisis de resultados

Analizaremos las respuestas de todo el cuestionario según dos puntos de vista. El primero: éxito y fracaso por pregunta; el segundo, relación con las respuestas contradictorias de los profesores. Cabe aclarar que aunque el profesor 1 siempre dibujó un número finito de puntos para bosquejar las gráficas, para los propósitos de nuestro análisis consideramos válido su desempeño aun cuando no realizó trazos continuos.

En primer lugar analizaremos las respuestas a las preguntas 1, 5 y 7, dado que la botella 1 tiene partes en común con las otras dos (Fig. 5). En relación con las tres preguntas podemos observar en la Tabla 1 y comprobar con la Figura 5 que son contradictorias las respuestas de los profesores 1, 2, 3, 4, 5, 7 y 8.

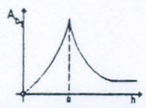
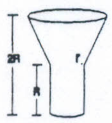
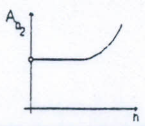
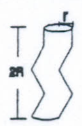
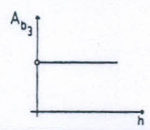
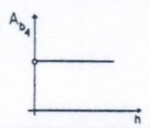
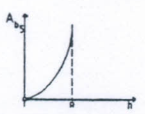
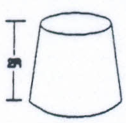
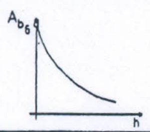
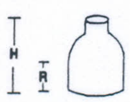
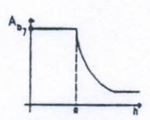
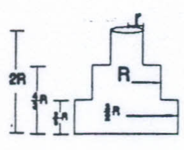
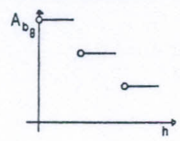
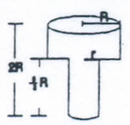
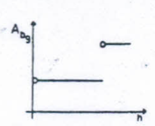
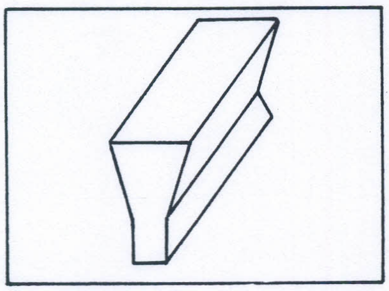
Representación gráfica	Representación icónica	Representación algebraica
		$A_{b_1}(h)=\begin{cases}\pi h^2 & 0<h\le R\\ \pi(2R-h)^2 & R\le h\le 2R-e\\ \pi r^2 & 2R-e\le h\le H\end{cases}$
		$A_{b_2}(h)=\begin{cases}\pi r^2 & 0<h\le R\\ \pi h^2 & R<h\le 2R\end{cases}$
		$A_{b_3}(h)=\pi r^2 \quad 0<h\le 2R$
		$A_{b_4}(h)=\pi r^2 \quad 0<h\le 2R$
		$A_{b_5}(h)=\pi h^2 \quad 0<h\le R$
		$A_{b_6}(h)=\pi(2R-h)^2 \quad 0<h\le 2R-e$
		$A_{b_7}(h)=\begin{cases}\pi R^2 & 0\le h\le R\\ \pi(2R-h)^2 & R\le h\le 2R-e\\ \pi r^2 & 2R-e\le h\le H\end{cases}$
		$A_{b_8}(h)=\begin{cases}\pi\left(\frac{3}{2}R\right)^2 & 0<h\le \frac{2}{3}R\\ \pi R^2 & \frac{2}{3}R<h\le \frac{4}{3}R\\ \pi r^2 & \frac{4}{3}R<h\le 2R\end{cases}$
		$A_{b_9}(h)=\begin{cases}\pi r^2 & 0<h\le \frac{3}{2}R\\ \pi R^2 & R<h\le 2R\end{cases}$

Figura 5

Hubo dos respuestas correctas a la pregunta 1, siete correctas a la 5, y una correcta para la pregunta 7. Las respuestas contradictorias son las de los profesores 1, 2, 3, 4, 5, 7 y 8 (véase Tabla I).

La influencia de la percepción de las formas de las botellas es más evidente en el desempeño mostrado en los ejercicios 2 y 6 (véanse Figura 6 y Tabla I). Las respuestas dadas a estas preguntas por los profesores 3, 4, 5 y 7 (véase Tabla I) son contradictorias.

Analizando globalmente las preguntas 1, 5, 7, 2 y 6, se aprecia como influye negativamente la conformación de la botella en la forma de la gráfica. Contornos redondos de las botellas producen curvas suaves en las gráficas correspondientes. Contornos rectos inducen líneas rectas. Por ejemplo, las gráficas erróneas proporcionadas al ejercicio 2 (Tabla I), deberían corresponder a una botella en donde la variable independiente estuviera relacionada con una función lineal y no con una cuadrática (Fig. 6).



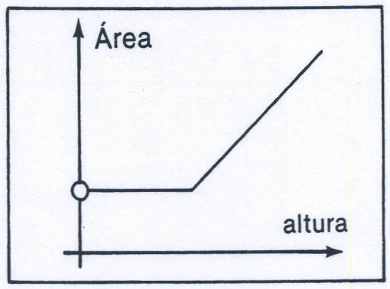


Figura 6

Finalmente, para este primer grupo de preguntas, analizaremos las respuestas correspondientes a los elementos o cuestiones3, 4, 8 y 9. Resultaron ser muy simples, tal vez porque el ejemplo que se proporcionó al inicio del cuestionario está relacionado con ellas.

Las dificultades detectadas se resumen en forma gráfica en la Figura 8. A partir de estos resultados, podemos inferir que el carácter global de la intuición (Fischbein, 1987) se antepone al pensamiento analítico, lo cual no sólo puede producir que algunas de sus respuestas sean erróneas, sino que además es tan fuerte su dominio que incluso induce al profesor a emitir **respuestas contradictorias.** Como lo señala Fischbein (ibídem, pág. 53):

> "La intuición es también descrita como una visión global, sintética, opuesta al pensamiento analítico..."

El pensamiento analítico queda oculto en la mente de la persona cuando interviene una intuición global.

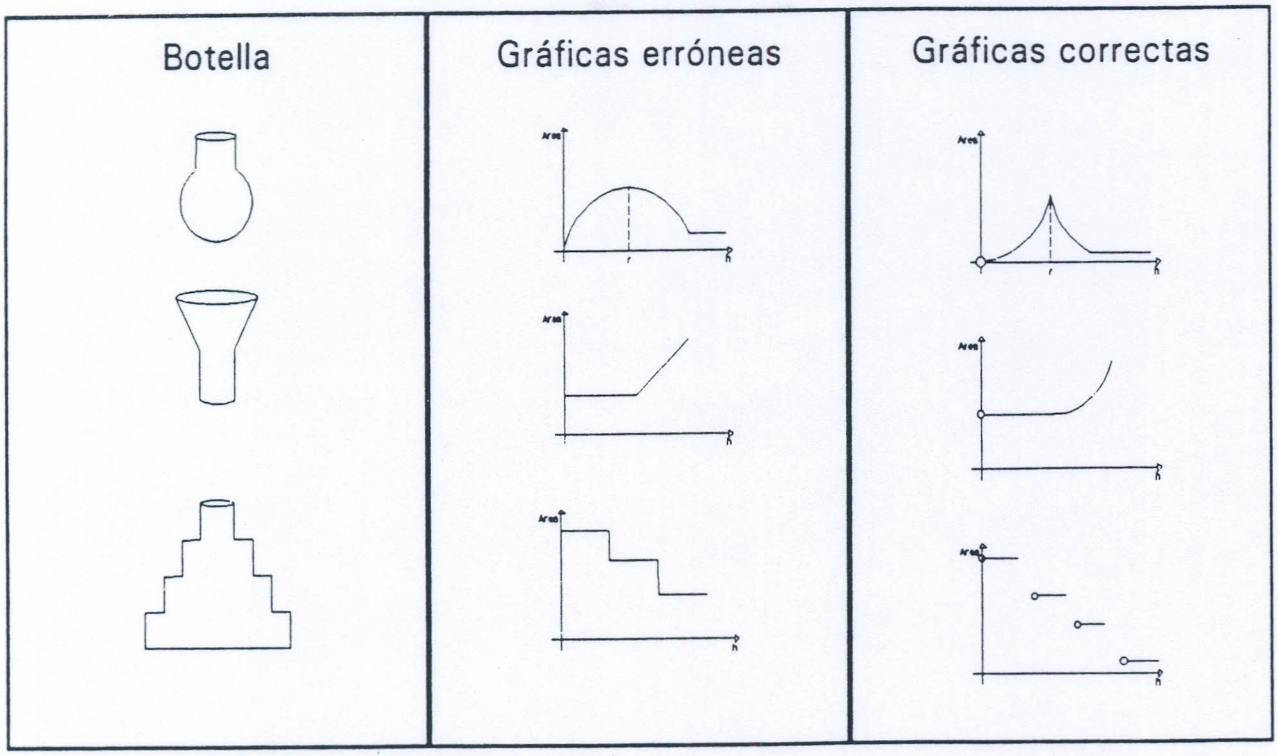


Figura 7

Podemos interpretar estas dificultades de la siguiente manera:

- Las formas de los recipientes inducen las formas de las gráficas: Traslación de formas. Las gráficas erróneas fueron producto de que la variable independiente no se analizó dentro de un contexto analítico. La intuición global no permitió visualizar la variable independiente para promover un pensamiento analítico.
- Existe primacía de las funciones continuas sobre las discontinuas.

La segunda dificultad, de la primacía de las funciones continuas sobre las discontinuas, puede explicarse a partir del hecho de que en forma natural existe una tendencia en los individuos a pensar en funciones continuas (Hitt, 1994). La historia del desarrollo del concepto de función muestra que en el surgimiento del concepto éste se hallaba ligado a la idea de función-continuidad (ibídem, 1994, pág. 11).

En la segunda parte de la experimentación se solicitó a los nueve profesores que dadas las diferentes gráficas de funciones (véase Tabla II), dibujaran botellas correspondientes, en donde la variable independiente representaba la altura de líquido en un recipiente desconocido, y el volumen del fluido en función de esta variable.

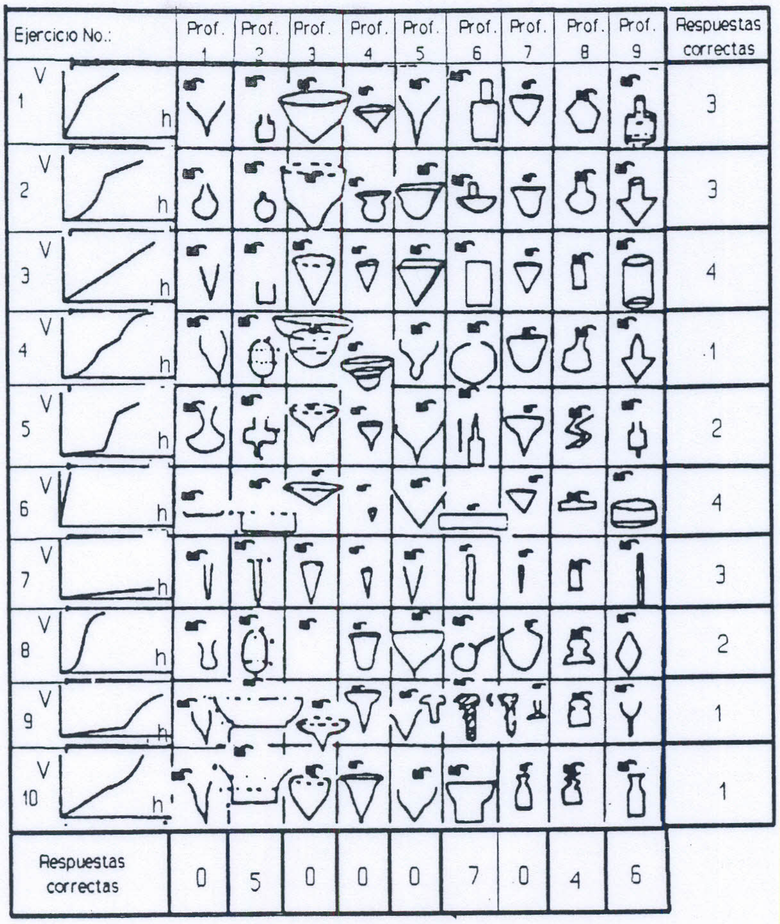
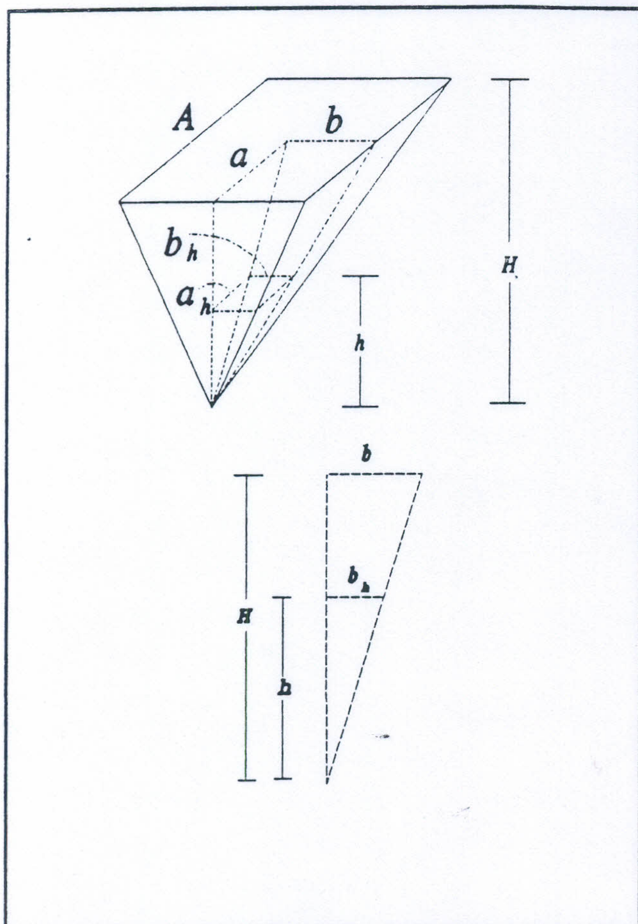


TABLA II

Analizaremos las preguntas 3, 6 y 7. Tres profesores (6, 8 y 9) respondieron correctamente a las tres preguntas. Salvo un profesor, los restantes cometieron los errores comentados en relación con el área de la superficie de un líquido (comentarios, Tabla I). El profesor 5 en las preguntas 2 y 3 introdujo un nuevo tipo de recipiente (por ejemplo, véase recipiente superior izquierdo de la Figura 8); fue el primero en cambiar de área circular (parte superior del recipiente) a área rectangular. Sin embargo, realizando un proceso analítico como el mostrado en la Figura 8, obtenemos que el volumen en terminos de la altura (variable independiente), es una cúbica y no una recta. Un proceso análogo se puede seguir al elegir un cono circular.

Las preguntas 1 y 5 son combinaciones de las gráficas anteriores. En la pregunta 1 hubo tres respuestas correctas, y en la 5, dos. Los errores en estas preguntas fueron semejantes a los señalados con el área de la superficie de un líquido. Sólo los profesores 1 y 8 propusieron recipientes distintos pero también erróneos.

Analizaremos las preguntas 2, 4, 8, 9 y 10. En la pregunta 2 se obtuvieron tres respuestas correctas, las de los profesores 6, 8 y 9. Hubo una influencia de la primera parte de la gráfica que es una curva suave, implicando una forma esférica de



Proceso Analítico

A, B, H, a y b son constantes

$$V_{Total} = \frac{A \times B \times H}{3}$$

$$V_{parcial}(h) = \frac{(2a_h)(2b_h)\,h}{3}$$

Por semejanza de triángulos:

$$\frac{b}{b_h} = \frac{H}{h} \rightarrow b_h = \frac{b \times h}{H}$$

Análogamente, $a_h = \dfrac{a \times h}{H}$; así,

$$V_{parcial}(h) = \frac{\left(\dfrac{2a \times h}{H}\right)\left(\dfrac{2b \times h}{H}\right)}{3}\,h$$

Finalmente, $V_{parcial}(h) = \left(\dfrac{4a \times b}{3H^2}\right) h^3$

Figura 8

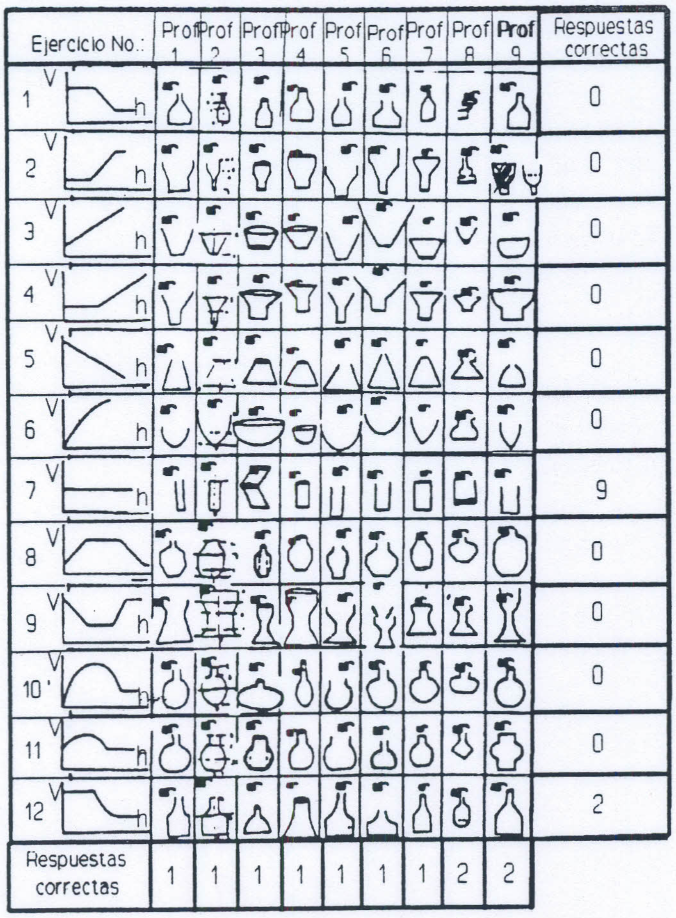
los recipientes. La pregunta 4 la respondió bien el profesor 2. La pregunta 8 obtuvo dos éxitos, el del profesor 2 y 6. Las preguntas 8 y 9 obtuvieron uno cada una, el del profesor 5 y el del profesor 6, respectivamente.

Resumiendo lo obtenido en este apartado:

- En las gráficas donde se muestra un segmento recto, los profesores asociaron regularmente con un cono o un cono truncado (traslación de formas)
- En las gráficas en donde se muestra una curva, los profesores asociaron su correspondiente parte de la botella también curvada (traslación de formas).

Comportamientos como los arriba señalados en este apartado fueron detectados también en jóvenes ingleses, de nivel de secundaria, en un estudio realizado por el personal académico de Shell Centre of Mathematical Education (Bell, 1985). En un estudio más reciente en un contexto diferente (gráficas de tiempo contra velocidad), Monk (1992) identifica fenómenos similares clasificándolos como *"traslación icónica"*. En nuestro caso, el fenómeno no es el de traslación icónica, sino —más bien— el de traslación de formas (Gestalt).

La tercera parte de la experimentación consistió en solicitar un proceso inverso al pedido en la primera parte en relación por el área de la superficie de un líquido. Es decir, en este caso se proporcionó a los profesores una gráfica (altura contra área) y se les pidió que dibujaran un recipiente de acuerdo con la gráfica (véase Tabla III).



Ejercicio No.:	Prof 1	Prof 2	Prof 3	Prof 4	Prof 5	Prof 6	Prof 7	Prof 8	Prof 9	Respuestas correctas
1										0
2										0
3										0
4										0
5										0
6										0
7										9
8										0
9										0
10										0
11										0
12										2
Respuestas correctas	1	1	1	1	1	1	1	2	2	

TABLA III

Analizaremos las preguntas 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 y 9. La pregunta 7 está muy bien representada por los recipientes dibujados por los profesores, **éxito total.** Nuevamente, las grandes dificultades se presentaron en donde la función no era constante. Como en la parte anterior, los segmentos de rectas no horizontales de las gráficas fueron interpretados como lados rectos de los recipientes correspondientes; además, los profesores propusieron siempre frascos con base y boca circular. De ahí que, salvo por la pregunta 12 que tuvo dos aciertos, **no hubo una sola respuesta correcta.**

Podemos resumir estos tipos de error en la siguiente clasificación:

- La forma de la gráfica determinó el tipo de recipiente que los profesores dibujaron. La traslación de formas y la no contextualización de la variable independiente, jugó un papel preponderante fortaleciendo el error.

- Existe una primacía en dibujar botellas con boca circular.

CONCLUSIONES

El estudio muestra que en el caso del área de la superficie de un líquido dentro de un recipiente, existe una gran dificultad para pasar del modo gráfico al contexto real (dibujo de un recipiente), pero igualmente, a la luz de los resultados, el proceso inverso es difícil. En el caso de una gráfica que relacione el volumen de un recipiente con su forma, también se mostró que hay problemas para pasar de la gráfica al contexto real.

Las dificultades detectadas son: 1) falta de asociación de la variable independiente con la dependiente en un contexto analítico; 2) la forma de la gráfica determina (sin análisis previo) la conformación de la botella; 3) la forma de las botellas es preferentemente de base y boca circulares; 4) la primacía de las funciones continuas sobre las discontinuas.

La explicación que podemos dar acerca de las dificultades mencionadas es que la experiencia de la percepción y del pensamiento quedaron dominadas por las formas, impidiendo la interacción con el pensamiento analítico. En términos generales, la intuición global se opuso al citado pensamiento. La primacía de las funciones continuas se da en forma natural en el surgimiento del concepto de función.

Los resultados muestran que el concepto de función no es un conocimiento estable en dichos profesores, dado que al interaccionar con diferentes representaciones del concepto, caen en contradicciones.

El desarrollo de la intuición a niveles más altos, implica la puesta en práctica de resolución de problemas que enriquezcan la imagen conceptual del individuo, a fin de que permita la incorporación del pensamiento analítico cuando se está en el proceso perceptivo en relación con un problema.

En otro estudio posterior con profesores de enseñanza media y superior de Guatemala, se encontró que incurrieron exactamente en el mismo tipo de errores que los profesores de México. Esto señala que las conductas observadas en los profesores mexicanos pueden ser más generales que lo que permite concluir una muestra tan reducida.

Los resultados de este trabajo muestran la importancia de diseños de lecciones y software que simulen hechos de la vida real y que puedan compaginarse con actividades matemáticas. La visualización de conceptos debe trabajarse paralelamente con procesos analíticos, para evitar que se generen respuestas erróneas, posiblemente dominadas por el nivel intuitivo primario en el que se encuentra un individuo o persona.

Bibliografía

Adda, J. (1987). *Elementos de didáctica de la matemáticas.* Curso impartido en la Sección de Matemática Educativa. Toma de notas y traducción de Guillermo Arreguín y Marta Olvera. México.

Bell A. *et al.* (1985). *The language of functions and graphs.* Shell Centre of Mathematical Education. University of Nottingham.

Duval, R. (1988). *Annales de didactique et de sciences cognitives.* Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg.

Fishbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* D. Reidel Publishing Company. Dordrecht.

Hitt, F. (1994). *Teachers' difficulties with the construction of continuous and discontinuous functions.* Focus Learning Problems in Mathematics, Vol. 16, No. 4.

Markovits, Z., Eylon, B., Bruckheimer M. (1986). *Functions today and yesterday.* For the Learning of Mathematics 6, 2, June, p. 18-28.

Monk, S. (1992). "Students' understanding of a function given by a physical model". In *The concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy,* Harel G. & Dubinsky E. (eds.), Mathematical Association of America, USA.

Ruthven, K. (1990). *The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms.* Educational Studies in Mathematics 21, p. 431-450.

Vinner S. (1983). "Concept definition, concept image and the notion of function". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14, 293-305.*

Vinner S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function". *Journal for Research in Mathematics Education, 20 (4), p. 356-366.*

Zimmermann, W. & Cunnigham S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematical Association of America, USA.