Algoritmos Matemáticos y Afinación Musical

"La música se ocupa de los números sonoros"

RESUMEN

La intención del presente trabajo es dar una visión matemática de la afinación musical introducida por Pitágoras. Para ello se justifica brevemente cómo surgió tal afinación, y se hace una "traducción" matemática de las ideas básicas que la definen. Además, se muestra que afinar no es más que fijar un algoritmo para elegir una cantidad finita de puntos en el intervalo [1, 2], y que esta elección debe estar sujeta a ciertas propiedades numéricas. Por último, se da el algoritmo y algunos ejemplos que permiten hacer uso práctico de las ideas expuestas.

1. INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones, cuando se rastrea el origen de cualquier disciplina científica, aparece un pasado turbio en el que las antiguas civilizaciones identificaban ciencia, arte, técnica o religión. Esto ha originado que en muchos casos resulte difícil conocer bien la cronología de los hechos. Sin embargo, en materia de música, parece indudable que el arte se anticipó en alto grado a la ciencia, y mucho antes de que existiera construcción teórica alguna, los músicos ya habían establecido una afinación que identificaban de oído.

Por afinación, o más precisamente por **sistema de afinación**, entendemos el conjunto de los sonidos que utiliza la música; es decir, en el conjunto de las frecuencias de todos los sonidos $\mathbb{R}^+$, tenemos que elegir aquellos que *"sirven para hacer música"* y descartar el resto. Los sonidos admitidos por el sistema de afinación se denominarán *sonidos afinados* o bien *notas musicales*.

Vicente Liern Carrión

Universidad de Valencia

En este trabajo veremos que el criterio de afinación que estableció Pitágoras (que perdura hasta nuestros días), constituye un método matemático que permite elegir de entre todos los sonidos existentes, una pequeña cantidad que serán los que utilice la música. Más concretamente, este modo de afinación constituye lo que en un lenguaje matemático actual llamaríamos "algoritmo de elección de puntos en el intervalo [1, 2]".

Además mostraremos las propiedades matemáticas de este sistema, haciendo al mismo tiempo, un intento más por recuperar esa zona común del saber que alberga a la música y las matemáticas.

2. NOTAS HISTÓRICAS

Al menos desde la Antigua Mesopotamia (milenios IV y III a. C.) el ser humano se plantea con qué criterio la música admite unos sonidos y rechaza otros. Las teorías más arcaicas justificaron esta elección con razonamientos meramente religiosos o estéticos, consiguiendo con ello que durante muchos siglos la afinación fuese considerada una criba "caprichosa".

Ya en el primer milenio antes de Cristo, los *caldeos* relacionaron muy estrechamente la música con la astrología y las matemáticas. Así, quienes estudiaban las estrellas explicaban el destino de los hombres y la armonía del Universo, entrelazando la especulación matemática con los simbolismos. Esto dio lugar a que numerosos fenómenos cósmicos fuesen representados por comparación entre las longitudes de cuerdas tirantes. De este modo aparecieron cuatro relaciones que, por su importancia, tomaron nombres propios. Estas son:[1]

1/1 (unísono), 2/1 (octava), 3/2 (quinta), 4/3 (cuarta).

Se sabe que para los caldeos, el estudio de las propiedades de los números resultó fundamental en la predicción de sucesos, y en este sentido destacaron fundamentalmente el 4 y el 7, siendo este último, probablemente, el número de notas de la antigua escala caldea.

Aunque el conocimiento de tales materias nos ha llegado por conducto de varios autores clásicos (Filón y Plutarco entre otros), hay poderosas razones para creer que *Pitágoras de Samos* (580-500 a. C.), tras un largo periodo de estudio en las escuelas mesopotámicas[2], llevó a Grecia las teorías de la música y los principios de la afinación.

Pitágoras fue, sin duda, el primer pensador occidental que atribuyó a la música, y al resto de las cosas, un carácter numérico. Dedujo que un sonido musical producido por una cuerda vibrante varía en razón inversa a su longitud, esto es: "cuanto más corta sea la cuerda, tanto más aguda será la nota producida". Con ello fijó matemáticamente el concepto de **octava** que los músicos venían usando en los siguientes términos:

> "un sonido es una octava más alto que otro si la cuerda que lo produce es la mitad de larga que la del primero";

[1] En *História General de la Música* de A. Robertson y D. Stevens, ed. alpuerto s.a. (1988), se justifica cómo relacionaban estas cuatro fracciones con las estaciones del año.

[2] El lector puede encontrar esta hipótesis, por ejemplo, en la referencia [1]

y estos sonidos no sólo reciben el mismo nombre, sino que, para todos los efectos, se considera que son equivalentes.

El sistema de afinación pitagórico se fundamentaba en tres principios:

a) La música se basa en 7 notas. El hecho de que sean siete los sonidos fundamentales no representa una originalidad pitagórica, puesto que los caldeos ya lo consideraban así. Sin embargo, la novedad está en utilizar este número para reforzar la idea de la armonía de las esferas celestes[3].

b) La frecuencia de una nota puede ser multiplicada por o dividida entre 3, el número de veces que se quiera. Es decir, que la longitud de las cuerdas puede ser multiplicada o dividida por 3 cualquier número de veces.

c) La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por 2 cualquier número de veces. Con esto lo que haríamos es ir subiendo o bajando octavas respectivamente.

Con estos tres axiomas se dispone de suficiente criterio para determinar las notas musicales.

3. SONIDO PATRÓN: EL DIAPASÓN

Tenemos, pues, que dada una cuerda de longitud ℓ que produce una frecuencia f, los sonidos obtenidos al multiplicar ℓ por 3^n y 2^m ($n, m \in Z$) son también sonidos afinados dentro del sistema pitagórico.

Sin duda, esto provoca un serio inconveniente:

> "La cuerda inicial puede tener cualquier longitud $\ell \in \mathbb{R}^+$. Entonces, cualquier sonido s puede obtenerse si elegimos la cuerda con una longitud l_0 *de modo que para algunos* $n, m \in Z$, el producto $2^n \cdot 3^m \cdot \ell_0$ produzca el sonido s".

Evidentemente, esto significaría que el sistema de afinación que hemos descrito no sería un auténtico criterio de selección, puesto que no haría ninguna elección de los sonidos que se consideran afinados, sino que podrían considerarse afinados todos ellos.

Los pitagóricos, conocedores de esta inconveniencia, resolvieron el problema tal y como lo venían haciendo los músicos: impusieron condiciones a la longitud inicial de la cuerda. Se consideró un sonido que era patrón (el que da el diapasón) y se exigió que la longitud ℓ de la cuerda fuese aquella que, para algunos n $m \in Z$, el producto $3^n \cdot 2^m \cdot \ell$ produjese el sonido patrón.

[3] Según afirma F. Vera en *Historia de la Ciencia*, Ed. Iberia, Barcelona (1937), los tonos de la armonía universal están relacionados con las distancias interplanetarias de la forma siguiente: las distancias Mercurio-Venus, Luna-Marte y Marte-Júpiter son de ½ tono; las de Venus-Sol, Júpiter-Saturno y Saturno-Zodíaco son de (1 + ½) tonos; y la distancia Tierra-Luna es de 1 tono. Si se suman todas ellas se obtienen los siete tonos.

Poco se sabe acerca de cuál fue la nota que los pitagóricos fijaron para el diapasón, pero en la actualidad se toma el sonido[4] 440 Hz, y éste será el patrón que nosotros usaremos. Con ello, las cuerdas a las que hagamos referencia a lo largo de todo el trabajo, se les exigirá la siguiente condición:

Condición 1
Una cuerda de longitud ℓ será válida si E$n, m \in Z$ *tales que* $3^n \cdot 2^m \cdot \ell$ *produce el sonido de 440 Hz.*

4. NOTACIÓN

Si en los trabajos de matemáticas hay, en muchas ocasiones, necesidad de aclarar la notación que se utiliza, en este caso aún es más necesario, puesto que manejamos dos lenguajes: el *musical* y el *matemático* que "aparentemente" están muy alejados. Pasemos pues a aclarar algunas cuestiones:

a) Las siete notas fundamentales, a partir de las cuales se obtienen todas las demás, reciben en música los nombres *do, re, mi, fa, sol, la, si*[5]. En nuestro trabajo las vamos a numerar en este orden : Do = 1, Re = 2, Mi = 3, Fa = 4, Sol = 5, La = 6, Si = 7.

b) El resto de notas se obtienen mediante las "alteraciones" de las fundamentales. Pueden ser de dos tipos:

   1) Si la alteración de una nota r produce una nota s distinta de las fundamentales, de modo que la frecuencia de s es más **alta** que la de r, esta alteración se llama *sostenido*, y se representa por $\sharp$

   2) Si la alteración de una nota r produce una nota s distinta de las fundamentales, de modo que la frecuencia de s es más **baja** que la de r, esta alteración se llama *bemol*, y se representa por $\flat$

Aunque más adelante precisaremos en qué consisten las alteraciones, debemos dejar claro que un sonido puede estar afectado por varias alteraciones del mismo nombre, es decir varios sostenidos o varios bemoles.

5. ALGORITMO

Antes de modelizar matemáticamente el método pitagórico de afinación, será muy útil que construyamos un algoritmo que permita ver fácilmente cómo se obtienen las notas:

[4] A partir de 1700 el diapasón no ha cesado de subir. Por ello, la mayor parte de las obras corales y vocales de los maestros clásicos resultan en la actualidad de difícil ejecución. En 1950 se llevó a cabo un referéndum entre físicos y músicos franceses con el fin de bajar la nota patrón a 432 Hz. Sin embargo, a pesar de que muchos apoyaron esta idea no se ha hecho nada al respecto.

[5] En los países de lengua inglesa las notas se nombran con las letras del abecedario del modo siguiente: la = A, si = B, do = C, re = D, mi = E, fa = F, sol = G.

Primer paso:

Escribimos los números enteros como una matriz de infinitas filas y siete columnas de la forma siguiente:

$$7 * k + r, \quad k \in Z, \quad 1 \leq r \leq 7,$$

tal y como se ve en la Fig. 1.

Segundo paso:

A partir del número 4, es decir 7 * 0 + 4, vamos contando sucesivamente 4 "lugares" (en sentido creciente y decreciente) y marcamos los números así obtenidos (Fig. 2).

Tercer paso:

Con el paso 2 han aparecido cajas de 4 filas en las que hemos marcado las mismas cifras. Numeramos las cajas, como se ve en la Fig. 3.

ALGORITMO DE LA AFINACIÓN

PRIMER PASO

7 * (−3) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (−2) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (−1) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+0) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+1) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+2) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+3) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+4) + ···	1 2 3 4 5 6 7

Figura 1

SEGUNDO PASO

7 * (−3) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (−2) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (−1) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+0) + ···	1 2 3 $\boxed{4}$ 5 6 7
7 * (+1) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+2) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+3) + ···	1 2 3 4 5 6 7
7 * (+4) + ···	1 2 3 4 5 6 7

Figura 2

TERCER PASO

7 * (−5) + ···	1 2 3 4 5 6 7	C_{-2}
7 * (−4) + ··· 7 * (−3) + ··· 7 * (−2) + ··· 7 * (−1) + ···	1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7	C_{-1}
7 * (+0) + ··· 7 * (+1) + ··· 7 * (+2) + ··· 7 * (+3) + ···	1 2 3 $\boxed{4}$ 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7	C_0
7 * (+4) + ···	1 2 3 4 5 6 7	C_1

Figura 3

Interpretación:

a) Los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 que hemos marcado representan los nombres de las notas, como se ha dicho en el epígrafe 4.

b) El subíndice de las cajas representa el número de alteraciones que afecta a la nota. Si es positivo, las alteraciones serán sostenidos, y si es negativo serán bemoles.

c) Cada vez que hemos contado cuatro lugares en sentido ascendente (y marcado un número) significa que se ha dividido la longitud de la cuerda entre 3. Si se cuenta en sentido descendente ello significa que la longitud de la cuerda se multiplica por 3.

Ejemplo: Si al vibrar una cuerda de longitud ℓ produce un *re* , ¿cuánto tendría que medir la cuerda para producir un *sol*?

Según hemos dicho, el *re* está representado en la tabla por el número 2 de las tablas C_{-1} (porque tiene un bemol y re = 2).

La nota *sol* está representada por el número 5 de la caja C_0 (porque no tiene alteraciones). Para saber cuántas veces hemos dividido la longitud de la cuerda entre 3, miramos en la Fig. 2 cuántos "saltos" de cuatro lugares hemos hecho entre el *re* y el *sol*, y comprobamos que han sido 6 en sentido ascendente, por tanto, la cuerda deberá medir $\ell/3^6$.

NOTA:

En el algoritmo, por respetar cómo se ideó la afinación, se hace referencia a la longitud de las cuerdas y no a la frecuencia de los sonidos. Sin embargo, como en toda la bibliografía se prefiere hablar de las frecuencias, así lo haremos a partir de ahora.

Si el lector quiere pasarlo todo a longitudes no tiene más que tener en cuenta que la longitud de la cuerda y la frecuencia son magnitudes inversas. Así, cada vez que se multiplique por 3 la frecuencia se está dividiendo entre 3 la longitud y la viceversa.

6. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

Si sólo pretendemos utilizar la idea pitagórica de afinación para elegir sonidos, lo cierto es que no resulta demasiado complejo desde un punto de vista matemático. Si lo que se pretende no es sólo eso, sino hacer que esta noción matemática se corresponda biunívocamente con la afinación que manejan los músicos, la empresa es más laboriosa, según veremos.

El concepto de octava (dado en el epígrafe 2) nos permite definir en $\mathbb{R}^+$ (el conjunto de las frecuencias de todos los sonidos) una relación binaria de equivalencia R como sigue:

> "Dos sonidos de frecuencias f_1, f_2 están relacionados si existe un número entero, n, de modo que $f_1 = 2^n f_2$"

Con esto, en vez de estudiar todo $\mathbb{R}^+$, podemos estudiar el conjunto cociente $\frac{R^+}{R}$. Si, como hemos dicho anteriormente, fijamos una nota patrón $f_0 = 440$ Hz, el conjunto $\frac{R^+}{R}$ se reduce al intervalo $[f_0, 2f_0]$. O, si así se quiere, podemos trabajar directamente en el intervalo $[1, 2]$ sin más que dividir entre f_0 todas las frecuencias.

Así tenemos que un sistema de afinación, como se expresó en la Introducción, es una elección de puntos de $[1, 2]$.

La idea de conseguir con sucesivas multiplicaciones o divisiones por 3 las frecuencias afinadas se expresa fácilmente con la sucesión

$$3^n, \qquad n \in Z$$

Y si ésta quiere llevarse al intervalo $[1, 2]$ no hay que multiplicar por una potencia de 2 adecuada, es decir,

$$a_n = \frac{3^n}{2^{E(\log_2 3^n)}}, \ n \in Z$$

donde $E(x)$ representa la parte entera por defecto de x.

Matemáticamente hablando, tenemos resuelto el problema de elegir sonidos. Sin embargo, no es apropiada esta forma de expresar la sucesión $\{a_n\}_{n \in Z}$, porque no refleja la idea de que son siete las notas fundamentales, y tampoco sabemos con que nota se corresponde cada término de la sucesión.

Por ello, como hicimos en el algoritmo, vamos a reescribir los números enteros de una forma mucho más adecuada[6]

$$Z(7) = \{n = 7k + r, \qquad k \in Z, \qquad 0 \leq r \leq 6\}$$

Si reescribimos ahora la sucesión $\{a_n\}_{n \in Z}$ se tiene

$$a_n = \frac{3^n}{2^{E(\log_2 3^n)}} = \frac{3^{7k+r}}{2^{E(\log_2 3^{7k+3})}}$$
$$k \in Z, \ 0 \leq r \leq 6$$

* El número k indicará el número de alteraciones que afectan a la nota, pero no el nombre de éstas. Para conocer de qué nota se trata necesitaremos definir la aplicación $T: Z \rightarrow Z\,(7)$ dada por

$$T(n) = 4\,(n + 1)$$

* Admitiendo que la nota de la que partimos es la nota 4 (tal y como hacíamos en el algoritmo), el término a_0 produce un *fa*, y con ello podemos obtener el resto de notas sin más que considerar que dado $T(n) = 7k' + r'$, el número r' indica el nombre de la nota.

[6] Así como en el algoritmo, el número r tomaba los valores $1 \leq r \leq 7$, aquí es útil que el número 7 se reemplace por 0, porque con ello podemos usar la división entre 7, y r es simplemente el resto de la división. La única diferencia con el algoritmo es que la nota *si* está representada por el 0 en lugar de por 7.

En resumen, sería lo siguiente:

$$a_n = \frac{3^n}{2^{E(\log_2 3^n)}},\ n \in Z$$

$$n = 7k + r \Rightarrow k = \text{número de alteraciones}$$

$$T(n) = 7k' + r' \Rightarrow r' = \text{número de la nota}$$

Ejemplo: ¿Qué notas se obtendrían con los términos a_5 y a_{-9}?

1) $a_5 = \frac{3^{(7.0 + 5)}}{2^7}$, entonces sabemos que la nota no tendrá ninguna alteración porque $k = 0$ (ya que $5 = 7 \cdot 0 + 5$).
Para saber el nombre de la nota calculamos $T(5) = 4(5 + 1) = 7 \cdot 2 + 6$.
Como $r' = 6$ la nota es la número 6, es decir

$$a_5 = mi$$

2) $a_9 = \frac{3^{(7(-2) + 5)}}{2^{-15}}$, Como $k = -2$ sabemos que tiene dos alteraciones, que por ser negativas se trata de bemoles.

Para saber el nombre de la nota calculamos $T(-9) = 4(-9 + 1) = 7(-5) + 3$. Como $r' = 3$ se trata de la nota 3, es decir

$$a_{-9} = mi^{\flat\flat}$$

7. LA CUESTIÓN DEL INFINITO

En lo tratado hasta ahora, no hemos impuesto en ningún momento que la cantidad de frecuencias afinadas del intervalo $[f_0, 2f_0]$ fuese finita. De hecho, tanto el algoritmo como la sucesión generan una cantidad infinita (numerable) de sonidos. Sin embargo, parece lógico imponer una condición de "finitud" a las notas musicales, puesto que no tiene sentido suponer instrumentos que sean capaces de producir infinitos sonidos, y además el oído humano no sería capaz de distinguirlos.

Los músicos resolvieron el problema de forma sencilla:

Supuesto que las siete notas fundamentales deben estar en la música, la cantidad de sonidos distintos vendrá determinada por el número de alteraciones de estas notas que se precisen.

En realidad, es rara la música occidental en la que aparecen notas con más de una alteración, es decir un sostenido o un bemol; y en la música oriental tampoco aparecen más de dos o tres alteraciones.

Sin embargo, los músicos de siglos pasados no podían prever la aparición de **sintetizadores** capaces de producir sonidos como los instrumentos de cuerda, y que, por tanto, deberían afinar con el sistema de Pitágoras. Estos instrumentos electrónicos han posibilitado la creación de composiciones musicales en las que aparecen notas con muchas alteraciones, y esto ha supuesto un problema que los músicos todavía no han podido resolver con una teoría estrictamente musical.

Nosotros probaremos que la cantidad de notas viene determinada por la convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n \in Z}$.

Sin duda, para estudiar la convergencia de la sucesión, resulta más conveniente expresarla con subíndices naturales que con enteros, no sólo porque así tenemos los términos ordenados de la forma habitual, sino porque, además, este cambio nos permite desglosar $\{a_n\}$ en tres subconjuntos:

$$\mathcal{F} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{3^5}{2^7}, \frac{3^6}{2^9}\right\}$$

$$s_k = \frac{3^{6+k}}{2^{E(\log_2 3^{6+k})}}, \quad k \geq 1$$

$$b_k = \frac{3^{-k}}{2^{E(\log_2 3^{-k})}} \quad k \geq 1$$

Claramente el conjunto F contiene las siete notas fundamentales, la sucesión $\{s_k\}_{k \geq 1}$ contiene todos los sostenidos y la sucesión $\{b_k\}_{k \geq 1}$ todos los bemoles.

Por razones de comodidad definimos la sucesión $\{\bar{a}_n\}_{n \geq 1}$ como sigue:

$$\bar{a}_n = \begin{cases} s_k, & si\ n = 2k - 1 \\ b_k, & si\ n = 2k \end{cases}$$

Esta sucesión se obtiene sin más que quitar siete términos a la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$, precisamente los que corresponden a las notas fundamentales. No es necesario ir "arrastrándolos" porque ellos no intervienen en la cantidad de alteraciones que afectan a las notas.

Es fácil comprobar que la sucesión $\{\bar{a}_n\}_{n \geq 1}$ no tiene límite, y por esto necesitamos recurrir a un concepto de convergencia más general (ver la referencia [5]):

Definición: Sea $\{c_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de números reales. Para cada $k \in N$ se puede definir el conjunto $m_k = \inf \{c_n : n \in N, n \geq k\}$.

Sea $m = \lim_{K \to \infty} m_k$ $(-\infty \leq m \leq \infty)$. Al número m se le llama **límite inferior** de $\{c_n\}_{n \geq 1}$ y se denota por $m = \lim_{K \to \infty} c_n$.

Propiedad: La sucesión $\{\bar{a}_n\}_{n \geq 1}$ verifica que $\lim_{K \to \infty} a_n = 1$

Demostración:

Dado un número trascendente positivo α, la sucesión $b_n = \alpha \cdot n - E(\alpha \cdot n)$, [donde $E(x)$ es la parte entera por defecto de x] verifica $\lim b_n = O$

Como α es trascendente se verifica la propiedad siguiente: "cada dígito $d \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ aparece en la representación decimal, y cada grupo dd, ddd, ... también aparece una cantidad infinita de veces". Entonces,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : 10^{n_0}.\ \alpha - E(10_{n^0}.\ \alpha) = 0.9\, a_1^1 a_2^1 \ldots a_n^1 \ldots$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : 10^{n_1}.\ \alpha - E(10_{n^1}.\ \alpha) = 0.99\, a_1^2 a_2^2 \ldots a_n^2 \ldots$$

$$\exists n_r \in \mathbb{N} : 10^{n_r}.\ \alpha - E(10_{n^r}.\ \alpha) = 0.99\, a_1^r a_2^r \ldots a_n^r \ldots$$

Así podemos construir la subsucesión $\{b_{nk}\}_{nk \geq 1}$ de modo que $\lim_{K \to \infty} b_{nk} = 0$.

Consideramos la subsucesión $\{s_k\}_{k \geq 1}$ (análogamente podía haberse elegido $\{b_k\}_{k \geq 1}$. Si ésta tiene límite inferior 1 ya tenemos el resultado.

El número $\alpha = \log_2 (3)$ es un número trascendente, por tanto, la sucesión $b_n = \alpha \cdot n - E(\alpha \cdot n)$ tiene límite inferior 0.

La sucesión pitagórica, $S_k = \dfrac{3^k}{2^{E(\log_2 3^k)}}$, se puede reescribir como

$$s_k = 2^{\log_2 3^k - E(\log_2 3^k)} = 2^{k.\log_2 3 - E(k.\log_2 3)}$$

Entonces,

$$\lim_{K \to \infty} S_k = 2^{\lim_{K \to \infty} (k \cdot \log_2 3 - E(k \cdot \log_2 3))} = 2^0 = 1$$

c.s.q.d.

Gracias a esta propiedad, ya estamos en condiciones de definir el concepto de precisión o **comma** que los músicos manejan tan ambiguamente.

Definición: Dados $\{\tilde{a}_n\}_{n \geq 1}$ y $\epsilon \in \mathbb{R} : 0 \leq \epsilon \leq 1$, consideramos $m_O(\epsilon) \in \mathbb{N}$ el **primer** natural tal que $a_{m_O} < 1 + \epsilon$. Llamamos **notas musicales** con precisión ϵ al conjunto

$$N_\epsilon = \{\tilde{a}_n : n < m_O(\epsilon)\} \cup F$$

Al número $1 + \epsilon$ se le llama **comma** del conjunto.

Ejemplos:

1) Si $\epsilon = 0.068$, el conjunto de notas afinadas se reduce a las siete notas fundamentales, es decir

$$1 = \text{Fa},\ \frac{3}{2} = \text{Do},\ \frac{3^2}{2^3} = \text{Sol},\ \frac{3^3}{2^4} = \text{Re},\ \frac{3^4}{2^6} = \text{La},\ \frac{3^5}{2^7} = \text{Mi},\ \frac{3^6}{2^9} = \text{Si}$$

2) Si $\epsilon = 0.014$, N_ϵ tiene 17 elementos, y las notas serían

$$1 = \text{Fa},\ \frac{3}{2} = \text{Do},\ \frac{3^2}{2^3} = \text{Sol},\ \frac{3^3}{2^4} = \text{Re},\ \frac{3^4}{2^6} = \text{La},\ \frac{3^5}{2^7} = \text{Mi},\ \frac{3^6}{2^9} = \text{Si}$$

$$\frac{3^7}{2^{11}} = \text{Fa}^\#, \quad \frac{3^8}{2^{12}} = \text{Do}^\#, \quad \frac{3^9}{2^{14}} = \text{Sol}^\#, \quad \frac{3^{10}}{2^{15}} = \text{Re}^\#, \quad \frac{3^{11}}{2^{17}} = \text{La}^\#$$

$$\frac{2^2}{3} = \text{Si}, \quad \frac{2^4}{3^2} = \text{Mi}, \quad \frac{2^5}{3^3} = \text{La}, \quad \frac{2^7}{3^4} = \text{Re}, \quad \frac{2^8}{3^5} = \text{Sol}$$

Por último, reseñamos una curiosidad que presenta la sucesión $\{\bar{a}_n\}_{n \geq 1}$. Dado el conjunto de siete notas, para mejorar la precisión, hay que recurrir al de 17 notas, es decir, que los conjuntos de 8, 9 u otra cantidad de notas no mejoran al de 7.

Si queremos seguir reduciendo ϵ, del conjunto de 17 notas tendríamos que pasar a otro de 105 notas (con $\epsilon = 0.002$), y para mejorar éste último habría que manejar 1329 notas. Y, evidentemente, esto sólo podría interpretarse con ayuda de instrumentos electrónicos.

BIBLIOGRAFÍA

W.F. BYNUM, E.J. BROWNE, R. PORTER. *Diccionario de historia de la ciencia*. Ed. Herder. Barcelona, 1986.

J. CHALLAY, H. CHALLAN. *Theorie complete de la musique*. Ed. Alphonse Leduc et Cie. Editions Musicales, París, 1964.

V. LIERN. *Música y matemáticas*. Actas I cibem, Ed. UNESCO, Sevilla, 1990.

J.J. MATRAS. *Le son*. Ed. Presses universitaries de France, París, 1977.

K.R. STROMBERG. *An Introduction to Classical Real Analysis*. Ed. Wadsworth and Brooks. Pacific Grove, California, 1981.

R. TATON. *Historia general de las Ciencias*. (Tomo I). Ed. Destino S.A., Barcelona, 1985.

F. VERA. *Historia de la Ciencia*. Ed. Iberia, Barcelona, 1937.