

ISSN 1677-9266

## **Um Modelo Determinístico para Avaliação do Controle Biológico de Praga de Citros**



## **República Federativa do Brasil**

*Fernando Henrique Cardoso*  
Presidente

## **Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento**

*Marcus Vinicius Pratini de Moraes*  
Ministro

## **Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - Embrapa**

### **Conselho de Administração**

*Márcio Fortes de Almeida*  
Presidente

*Alberto Duque Portugal*  
Vice-Presidente

*Dietrich Gerhard Quast*  
*José Honório Accarini*  
*Sérgio Fausto*  
*Urbano Campos Ribeiral*  
Membros

### **Diretoria Executiva da Embrapa**

*Alberto Duque Portugal*  
Diretor-Presidente

*Bonifácio Hideyuki Nakasu*  
*Dante Daniel Giacomelli Scolari*  
*José Roberto Rodrigues Peres*  
Diretores-Executivos

### **Embrapa Informática Agropecuária**

*José Gilberto Jardine*  
Chefe-Geral

*Tércia Zavaglia Torres*  
Chefe-Adjunto de Administração

*Kleber Xavier Sampaio de Souza*  
Chefe-Adjunto de Pesquisa e Desenvolvimento

*Álvaro Seixas Neto*  
Supervisor da Área de Comunicação e Negócios



Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária  
Embrapa Informática Agropecuária  
Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento

ISSN 1677-9266  
Outubro, 2002

# ***Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento 3***

## **Um Modelo Determinístico para Avaliação do Controle Biológico de Praga de Citros**

Sônia Ternes  
Hyun Mo Yang

Campinas, SP  
2002

**Embrapa Informática Agropecuária**  
**Área de Comunicação e Negócios (ACN)**

Av. André Tosello, 209

Cidade Universitária "Zeferino Vaz" – Barão Geraldo

Caixa Postal 6041

13083-970 – Campinas, SP

Telefone: (19) 3789-5743 - Fax (19) 3289-9594

URL: <http://www.cnptia.embrapa.br>

e-mail: [sac@cnptia.embrapa.br](mailto:sac@cnptia.embrapa.br)

**Comitê de Publicações**

*Amarindo Fausto Soares*

*Ivanilde Dispatto*

*José Ruy Porto de Carvalho (Presidente)*

*Luciana Alvim Santos Romani*

*Marcia Izabel Fugisawa Souza*

*Suzilei Almeida Carneiro*

Suplentes

*Adriana Delfino dos Santos*

*Fábio Cesar da Silva*

*João Francisco Gonçalves Antunes*

*Maria Angélica de Andrade Leite*

*Moacir Pedroso Júnior*

Supervisor editorial: *Ivanilde Dispatto*

Normalização bibliográfica: *Marcia Izabel Fugisawa Souza*

Capa: *Intermídia Produções Gráficas*

Editoração eletrônica: *Intermídia Produções Gráficas*

**1ª. edição**

on-line - 2002

**Todos os direitos reservados**

---

Ternes, Sônia.

Um modelo determinístico para avaliação do controle biológico de pragas de citros / Sônia Ternes, Hyun Mo Yang. – Campinas : Embrapa Informática Agropecuária, 2002.

25 p. : il. – (Boletim de Pesquisa e Desenvolvimento / Embrapa Informática Agropecuária ; 3)

ISSN 1677-9266 - on-line

1. Modelo matemático. 2. Dinâmica populacional. 3. Larva minadora. 4. Praga do citros. 5. Inimigo natural. 6. Controle biológico. I. Título. II. Yang, Hyun Mo. III. Série.

CDD – 21st ed.

551.8

595.7815118

# Sumário

Resumo .....	5
Abstract.....	7
Introdução .....	9
Material e Métodos .....	11
Resultados e Discussão .....	17
Conclusões .....	23
Referências Bibliográficas .....	24



# Um Modelo Determinístico para Avaliação do Controle Biológico de Praga de Citros

---

Sônia Ternes <sup>1</sup>

Hyun Mo Yang <sup>2</sup>

## Resumo

O uso de modelos matemáticos aplicados ao controle biológico de pragas permite analisar o sistema praga-parasitas. Com esse objetivo foi desenvolvido um modelo matemático determinístico e compartimental que visa descrever a dinâmica populacional do inseto-praga *Phyllocnistis citrella* (larva-minadora-da-folha-dos-citros) em interação com os inimigos naturais *Galeopsomyia fausta* (parasito nativo) e *Ageniapis citricola* (parasito exótico). Através do estudo analítico do sistema de equações diferenciais que representa o modelo, avaliou-se a possibilidade de coexistência entre as espécies e a competição entre os dois inimigos naturais. Na análise das três espécies em interação foram obtidos limitantes inferiores e superiores para os parâmetros  $k_2$  e  $k_4$ , que representam, respectivamente, a capacidade de parasitismo para os inimigos naturais nativo e exótico. Quando tais limites são obedecidos, a coexistência entre as espécies é possível. Caso contrário, a população de um dos parasitos é deslocada e, dependendo das condições do agroecossistema, a presença de um único inimigo natural pode não ser suficiente para o controle da população do inseto-praga, podendo causar danos econômicos à citricultura nacional.

Termos para indexação: modelos matemáticos, dinâmica de populações, larva-minadora-da-folha-dos-citros, inimigos naturais.

---

<sup>1</sup> Dra. em Engenharia Elétrica, Pesquisadora da Embrapa Informática Agropecuária, Caixa Postal 6041, Barão Geraldo – 13083-970, Campinas, SP. e-mail: sonia@cnptia.embrapa.br

<sup>2</sup> Dr. em Física, Prof. do Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-Unicamp, Caixa Postal 6065, Barão Geraldo – 13081-970, Campinas, SP. e-mail: hyunyang@ime.unicamp.br





# Deterministic Model for Evaluation of the Biological Control of Citrus Leafminer

---

## Abstract

*The use of mathematical models in the biological control of insect pests allows to evaluate the pest-parasite system. With this in mind it was developed a compartmental and deterministic mathematical model to describe the population dynamics of the pest *Phyllocnistis citrella* (citrus leafminer) in interaction with its natural enemies *Galeopsomyia fausta* (native parasite) and *Ageniapis citricola* (exotic parasite). By the analytical study of the equation system, we evaluated the coexistence among the three species and the competition between the natural enemies. In the analysis of the species in interaction were obtained inferior and superior limits for  $k_2$  and  $k_4$  parameters, which are related to natural enemies parasitism ability. When these limits are obeyed, it is possible the coexistence among the three species. Otherwise, one of the parasite population is displaced. After that, depending on the ecosystem conditions, the presence of only one natural enemy could not be efficient to control the population pest and economic damage could be caused to national citrus crop.*

*Index terms: mathematical models, population dynamics, citrus leafminer, natural enemies.*



## Introdução

A cultura da laranja é de extrema importância econômica para o Brasil. Em 1996 o país exportou cerca de 1,2 milhão de toneladas de suco concentrado de laranja, gerando uma receita de 1,2 bilhão de dólares (Graziano, 1997). O Estado de São Paulo é responsável por 80% da produção nacional, tendo alcançado em 1997 a produção recorde de 383 milhões de caixas (de 40,8 kg) (Amaro et al., 1998).

Devido a esta importância, é necessário o controle permanente de pragas dessa cultura através de métodos eficientes, capazes de conter o avanço das pragas sem agredir o agroecossistema.

Novas pragas e doenças surgiram recentemente na citricultura brasileira. Dentre elas destaca-se a “larva-minadora-da-folha-dos-citros”, *Phyllocnistis citrella* (Lepidóptera: Gracillariidae) (Chagas, 1999), que foi encontrada pela primeira vez no Brasil em março de 1996 em Iracemápolis, São Paulo e rapidamente se disseminou para outros estados.

A *P. citrella* ataca preferencialmente folhas novas em brotações de citros. A fêmea da *P. citrella* ovipõe sob a superfície ventral da folha. O ovo eclode dando origem à larva que fura a epiderme da folha e caminha formando minas. A pupação ocorre dentro da mina, em uma célula especial (câmara pupal) localizada na margem da folha. A formação das minas leva à atrofia do tecido foliar e favorece a infecção da planta por agentes fitopatogênicos, como o cancro cítrico, causado pela bactéria *Xanthomonas axonopodis* pv. *citri*. Segundo Chagas (1999), levantamentos realizados em condições de campo têm demonstrado um índice de infestação de cancro de até 75% em folhas de citros, quando a larva-minadora está presente. Estima-se que nos últimos dois anos o cancro-cítrico causou prejuízos de 300 milhões de reais (Fundecitrus, 2001).

A região de Limeira, uma das cinco maiores regiões citrícolas do Estado de São Paulo, apresenta as condições básicas para o desenvolvimento da *P. citrella*, ou seja, umidade relativa do ar superior a 60% e temperaturas médias acima de 25°C, durante os meses de setembro a abril, período no qual se concentram os maiores fluxos de brotações novas (Chagas, 1999), demonstrando o potencial de danos desse inseto-praga.

Para combater a *P. citrella* usa-se agrotóxicos, mas pode-se utilizar também o controle biológico, como preconizado pelo Manejo Integrado de Pragas (MIP).

No MIP, o controle biológico é associado ao uso de técnicas culturais e inseticidas, a fim de obter um resultado eficiente, econômico e ecologicamente viável (Bosch et al., 1985). No MIP, o monitoramento do nível populacional da praga é necessário, observando-se alguns índices importantes, tais como o nível de dano econômico (ND) – menor densidade populacional que causa prejuízo econômico, compensando, portanto, a aplicação de medidas de controle – e o nível de limiar econômico (NL) – nível populacional no qual medidas devem ser tomadas para se evitar que a população do inseto-praga atinja o ND – (Silveira Neto et al., 1976).

Na tentativa de manter a minadora abaixo do ND e reduzir o risco de contaminação de cancro nos pomares, pesquisadores vêm desenvolvendo projetos visando o seu controle biológico.

No Estado de São Paulo, a espécie *Galeopsomyia fausta* (Hymenoptera: Eulophidae) foi identificada como o principal parasito nativo da *P. citrella* (Sá et al., 1998). A *G. fausta* é um ectoparasita (se desenvolve fora do hospedeiro) da fase de pupa. A fêmea da *G. fausta* ovipõe sobre a câmara pupal da minadora. O ovo eclode e a larva se alimenta da pupa desse inseto-praga, ocasionando a sua morte. A reprodução deste parasito nativo é do tipo partenogênese telítoca (óvulo não fecundado produz apenas fêmeas), apresentando machos ocasionais (LaSalle & Peña, 1997).

A espécie *Ageniaspis citricola* (Hymenoptera: Encyrtidae) foi introduzida no Brasil em 1998, visando o controle biológico da *P. citrella* (Chagas et al., 1999). Essa espécie exótica é um endoparasita de ovos e larvas jovens da minadora. O parasitismo é gregário, podendo produzir até oito ovos por hospedeiro (desenvolvimento por poliembrionismo). A fêmea da *A. citricola* deposita seu ovo dentro de ovos e larvas da minadora, matando o hospedeiro quando esse alcança o estágio de pré-pupa. Machos e fêmeas são produzidos, com os ovos não fertilizados produzindo machos (partenogênese arrenótoca) e ovos fertilizados produzindo machos e fêmeas (Edwards & Hoy, 1998).

O objetivo desse trabalho é apresentar um modelo matemático compartimental e determinístico para analisar a dinâmica populacional do inseto-praga *Phyllocnistis citrella* em interação com seus inimigos naturais *Galeopsomyia fausta* (parasito nativo) e *Ageniaspis citricola* (parasito exótico). Com o estudo analítico do sistema de equações diferenciais que descreve o modelo, avalia-se a eficiência do controle biológico da *P. citrella* através da possibilidade de coexistência entre as espécies e da competição entre os dois inimigos naturais.

## Material e Métodos

O fenômeno biológico da interação praga-parasitos é descrito por um modelo matemático determinístico e compartimental, representado por um sistema de equações diferenciais ordinárias não-lineares.

O modelo matemático proposto visa descrever a dinâmica populacional do inseto-praga *Phyllocnistis citrella* num processo de parasitismo pelos inimigos naturais *Galeopsomyia fausta* e *Ageniaspis citricola*.

A abordagem utilizada caracteriza-se pelo desenvolvimento de modelos compartimentais estágio-estruturados. Cada compartimento do modelo representa uma fase do ciclo de vida do inseto. Assim, o processo que representa as entradas e saídas em cada fase ou estágio do ciclo é descrito matematicamente por uma equação diferencial ordinária.

As vantagens do uso de modelos estágio-estruturados foi descrita adequadamente por Murdoch (1990). Na literatura destacam-se os trabalhos de Godfray & Waage (1991) e de Hearne et al. (1994) com tais características. Entretanto, Godfray & Waage (1991) consideraram apenas dois estágios genéricos (imaturos e adultos) na representação do ciclo de vida das espécies em estudo (um hospedeiro e dois parasitóides). Por outro lado, Hearne et al. (1994) consideraram todos os estágios do ciclo de vida das espécies (um hospedeiro e um parasitóide), incluindo diferentes estádios para a fase de larva do hospedeiro.

No modelo proposto a seguir consideram-se todas as fases principais do ciclo de vida diretamente envolvidas no processo de parasitismo, ou seja, as fases de larva, pupa e inseto adulto. As demais fases são englobadas

em parâmetros apropriados (por exemplo, ao considerar apenas os compartimentos de larva e inseto adulto para uma determinada espécie, a taxa de passagem da fase de larva para adulto inclui o tempo de duração da fase de pupa). Tal simplificação permite a manipulação algébrica do sistema de equações diferenciais resultante e a consequente obtenção de importantes resultados analíticos.

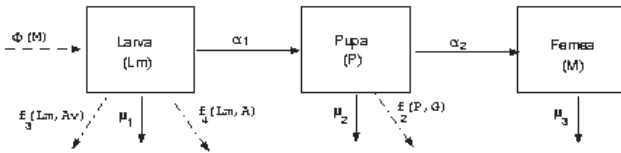
Na construção do modelo e definição dos compartimentos considerou-se que:

- o modelo representa a população de fêmeas ao longo do tempo, sendo que a população total, que inclui os machos, pode ser estimada usando-se a razão sexual de cada espécie;
- o inimigo natural nativo é um parasito generalista, de tal modo que a população dessa espécie mantém um crescimento natural independente do nível da população da praga;
- o inimigo natural exótico é um parasito específico e o crescimento da sua população só é possível na presença da praga, devido ao benefício decorrente do parasitismo;
- uma vez que a competição expressa-se indiretamente pela disponibilidade do alimento (praga), não se considera competição direta entre os dois parasitos;
- os períodos de cópula, pré-oviposição, maturação e viabilidade dos ovos estão considerados conjuntamente na taxa de natalidade. Assim, a fase de ovo não é representada num compartimento em separado nos modelos, contribuindo para a simplificação dos mesmos; e
- a fase de larva não é subdividida em estádios, ou seja, é considerada uma fase larval única que engloba todos os estádios. De modo semelhante, as fases de pré-pupa e pupa são consideradas como única.

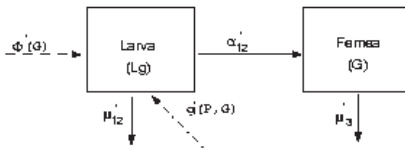
Com base nessas hipóteses, as variáveis dinâmicas consideradas no modelo são as fases de larva ( $L_m$ ), pupa (P) e adulta (M) para o inseto-praga; as fases de larva ( $L_y$ ) e adulta (G) para o parasito nativo e as fases de larva ( $L_a$ ), fêmea virgem ( $A_v$ ) e fêmea acasalada (A) para o parasito exótico.

A Fig. 1 mostra o esquema de compartimentos do modelo proposto. As setas tracejadas representam o ganho nos compartimentos  $L_m$ ,  $L_g$  e  $L_a$  devido ao crescimento natural das populações, ou seja, decorrente da oviposição do inseto adulto. As setas contínuas horizontais representam a mudança de indivíduos entre dois compartimentos consecutivos e as verticais representam a saída do compartimento devido à mortalidade natural de cada estágio de desenvolvimento. As setas na diagonal (ponto e linha) representam perda ( $L_m$  e  $P$ ) ou ganho ( $L_g$  e  $L_a$ ) ao compartimento, devido ao processo de parasitismo. Como o modelo representa apenas a população de fêmeas de cada espécie, o compartimento  $L_a$  é beneficiado apenas pelo parasitismo decorrente de  $A$  sobre  $L_m$ .

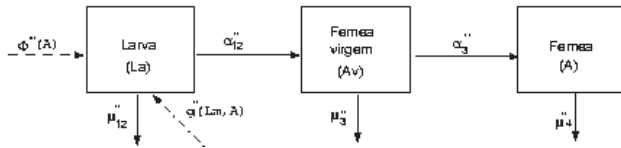
*Phyllocnistis citrella:*



*Galeopsomyia fausta:*



*Ageniaspis citricola:*



**Fig. 1.** Esquema de compartimentos do modelo matemático.

Os parâmetros relacionados ao inseto-praga são as taxas de larvas que originam pupas ( $\alpha_1$ ), pupas que dão origem a adultos ( $\alpha_2$ ), mortalidade das fases de larva ( $\mu_1$ ), pupa ( $\mu_2$ ) e fêmea adulta ( $\mu_3$ ). A função  $\Phi(M)$  corresponde à taxa per capita de crescimento da população do inseto-praga. As funções  $f_2(P,G)$ ,  $f_3(L_m, A_v)$  e  $f_4(L_m, A)$  correspondem ao parasitismo de fêmeas do inimigo natural nativo (G) e de fêmeas virgens ( $A_v$ ) e acasaladas (A) do inimigo natural exótico sobre o inseto-praga, respectivamente. A fase ovo foi incorporada na função  $\Phi(M)$ .

Os parâmetros relacionados ao parasito nativo são as taxas de larvas do parasito nativo que, passando pela fase de pupa, vão originar indivíduos adultos ( $\alpha'_{12}$ ), mortalidade das fases de larva e pupa ( $\mu'_{12}$ ), e mortalidade do indivíduo adulto ( $\mu'_3$ ). As funções  $\Phi'(G)$  e  $g'(P,G)$  representam a taxa per capita de crescimento da população do parasito nativo e o crescimento da população do parasito nativo decorrente do parasitismo, respectivamente. A fase de pupa está embutida nos parâmetros  $\alpha'_{12}$  e  $\mu'_{12}$ .

Os parâmetros relacionados ao parasito exótico são as taxas de larvas do parasito que, passando pela fase de pupa, vão originar fêmeas virgens ( $\alpha''_{12}$ ), fêmeas pós acasalamento ( $\alpha''_3$ ), mortalidade das fases de larva e pupa ( $\mu''_{12}$ ), mortalidade de fêmeas virgens ( $\mu''_3$ ) e mortalidade de fêmeas acasaladas ( $\mu''_4$ ). As funções  $\Phi''(A)$  e  $g''(L_m,A)$  representam, respectivamente, a taxa per capita de crescimento da população do parasito exótico e o crescimento da população do inimigo exótico decorrente do parasitismo. A fase de pupa está embutida nos parâmetros  $\alpha''_{12}$  e  $\mu''_{12}$ .

As funções  $f_2(\cdot)$ ,  $f_3(\cdot)$ ,  $f_4(\cdot)$ ,  $g'(\cdot)$  e  $g''(\cdot)$  descrevem a interação entre as espécies do inseto-praga e dos parasitos e são aproximadas pelas expressões (1.1). É assumido existir um encontro aleatório (Severo, 1969) entre a fêmea de *G. fausta* e a pupa do inseto-praga, e entre as fêmeas virgens e acasaladas de *A. citricola* e a larva do inseto-praga. Assim, devido a esses encontros, ocorre um decréscimo na população de pupas e larvas da *P. citrella*, proporcional às taxas  $k_2$ ,  $k_3$  e  $k_4$ , respectivamente. Em contraposição, as populações de pupas do parasito nativo e de larvas do parasito exótico são beneficiadas por este encontro aleatório, de modo proporcional às taxas  $k'_1$  e  $k''_1$ , respectivamente. Essas aproximações são razoavelmente boas quando as populações são abundantes, o que



pode não ocorrer na prática. Porém, a utilização de expressões simples para descrever tais funções facilita a obtenção de resultados analíticos.

$$\begin{cases} f_2(P, G) = k_2 PG \\ f_3(L_m, A_v) = k_3 L_m A_v \\ f_4(L_m, A) = k_4 L_m A \\ g'(P, G) = k_1' PG \\ g''(L_m, A) = k_1'' L_m A, \end{cases} \quad (1.1)$$

As taxas de crescimento natural  $\Phi(\cdot)$ ,  $\Phi'(\cdot)$  e  $\Phi''(\cdot)$  caracterizam as diferentes considerações sobre a dinâmica vital. O modelo considera que as três populações crescem da mesma forma e são controladas pela capacidade de saturação do meio ambiente, ou seja, seguem o crescimento logístico de Verhulst (Edelstein-Keshet, 1988; Murray, 1993),

$$\begin{cases} \Phi(M) = \phi \left( 1 - \frac{M}{c} \right) \\ \Phi'(G) = \phi' \left( 1 - \frac{G}{c'} \right) \\ \Phi''(A) = \phi'' \left( 1 - \frac{A}{c''} \right) \end{cases} \quad (1.2)$$

onde  $\Phi(\cdot)$ ,  $\Phi'(\cdot)$  e  $\Phi''(\cdot)$  correspondem à taxa de, respectivamente, ovos da fêmea do inseto-praga que originam larvas, de ovos da fêmea do parasito nativo que originam pupas e de ovos da fêmea acasalada do parasito exótico que originam larvas. Os parâmetros  $c > 0$  e  $c' > 0$  referem-se aos limites superiores que as populações  $M$ ,  $G$  e  $A$ , respectivamente, atingem decorrentes da capacidade de saturação do meio-ambiente.

Para o estudo analítico das três populações em interação considera-se ainda que:

- a hipótese de que o crescimento da população do parasito exótico só é possível na presença do inseto-praga, por ser um parasito específico, corresponde a se ter  $\Phi'' = 0$ , ou seja, o crescimento intrínseco da população é nulo;

- a capacidade de parasitismo das fêmeas virgens ( $A_v$ ) do parasito exótico é semelhante à capacidade das fêmeas acasaladas ( $A$ ). Tal hipótese corresponde a  $k_3 = k_4$ ;
- o benefício do processo de parasitismo na população de larvas do parasito nativo é proporcional ao prejuízo na população de pupas do inseto-praga, ou seja,  $k_1' = ak_2$ , com  $0 < a < 1$ ; e
- de modo semelhante, o benefício do processo de parasitismo na população de larvas do parasito exótico é proporcional ao prejuízo na população de larvas do inseto-praga, ou seja,  $k_1'' = ak_4$ , com  $0 < a < 1$ .

Assim, considerando as hipóteses anteriores e as equações (1.1) e (1.2), o modelo matemático incorporando a dinâmica vital das três populações em interação, representado na Fig. 1, é descrito por um sistema composto de 8 equações diferenciais ordinárias não-lineares dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL_m}{dt} = \phi \left( 1 - \frac{M}{c} \right) M - (\alpha_1 + \mu_1) L_m - k_4 L_m (A_v + A) \\ \frac{dP}{dt} = \alpha_1 L_m - (\alpha_2 + \mu_2) P - k_2 PG \\ \frac{dM}{dt} = \alpha_2 P - \mu_3 M \\ \frac{dL_g}{dt} = \phi' \left( 1 - \frac{G}{c'} \right) G - (\alpha'_{12} + \mu'_{12}) L_g + ak_2 PG \\ \frac{dG}{dt} = \alpha'_{12} L_g - \mu'_3 G \\ \frac{dL_a}{dt} = -(\alpha''_{12} + \mu''_{12}) L_a + ak_4 L_m A \\ \frac{dA_v}{dt} = \alpha''_{12} L_a - (\alpha'_3 + \mu'_3) A_v \\ \frac{dA}{dt} = \alpha'_3 A_v - \mu'_4 A \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Esse sistema é explorado analiticamente no próximo item.

## Resultados e Discussão

O sistema de equações (1.3) representa a dinâmica das populações de fêmeas do inseto-praga, parasito nativo e parasito exótico em interação. Tal sistema é estudado em regime estacionário e seus pontos de equilíbrio, com respectivas condições de existência e estabilidade local, são determinados analiticamente (Edelstein-Keshet, 1988).

A análise em regime estacionário do sistema (1.3) para as populações em interação ( $k_2 \neq 0$  e  $k_4 \neq 0$ ) apresenta 6 pontos de equilíbrio. O primeiro é a solução trivial, que representa a ausência ou extinção das populações, com condição de existência e estabilidade dada por  $R < 1$  e  $R' < 1$ , com

$$R = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \phi}{\mu_3 (\alpha_1 + \mu_1) (\alpha_2 + \mu_2)} \quad e \quad R' = \frac{\alpha'_{12} \phi'}{\mu'_3 (\alpha'_{12} + \mu'_{12})}$$

onde  $R$  refere-se à população do inseto-praga e  $R'$  ao parasito nativo (Ternes, 2001). Tais parâmetros representam a capacidade de produção de descendentes viáveis para cada espécie.

Os demais pontos de equilíbrio referem-se ao domínio de uma população (e extinção das demais espécies) e à coexistência entre 2 ou 3 espécies. O estudo analítico de tais pontos é apresentado a seguir.

### Domínio de uma única população

O primeiro ponto de equilíbrio não trivial para as populações em interação refere-se à presença única do inseto-praga e à extinção da população dos dois parasitos. Tal ponto é dado por

$$N_1^* = \left( \frac{c\mu_3(\alpha_2 + \mu_2)}{\alpha_1\alpha_2} \left(1 - \frac{1}{R}\right), \frac{c\mu_3}{\alpha_2} \left(1 - \frac{1}{R}\right), c \left(1 - \frac{1}{R}\right), 0, 0, 0, 0 \right)$$

com condições de existência e estabilidade dadas por  $R > 1$  e  $R' < 1$ .

O segundo ponto de equilíbrio não-trivial refere-se à presença única do parasito nativo e extinção das populações do inseto-praga e parasito exótico. Esse ponto é expresso por

$$N_2^* = \left( 0, 0, 0, \frac{c'\mu'_3}{\alpha'_{12}} \left( 1 - \frac{1}{R'} \right), c' \left( 1 - \frac{1}{R'} \right), 0, 0, 0 \right)$$

com condições de existência e estabilidade dadas por  $R < 1$  e  $R' > 1$ .

Observe a inexistência do ponto de equilíbrio representando a presença única do parasito exótico, pois tal população só cresce na presença do inseto-praga, devido ao ganho no processo de parasitismo.

### Coexistência entre populações

O sistema (1.3) possui o ponto de equilíbrio  $N_3^*$ , que representa a coexistência entre o inseto-praga e parasito nativo, e o ponto de equilíbrio  $N_4^*$ , que representa a interação entre o inseto-praga e parasito exótico. Além desses, há no máximo dois pontos de equilíbrio para representar as três populações vivendo conjuntamente.

A solução não trivial  $N_3^* \equiv (L_{m3}, P_3, M_3, L_{g3}, G_3, 0, 0, 0)$  é dada por (2.1). Observa-se que se deve ter  $L_{m3} > 0$ ,  $P_3 > 0$ ,  $M_3 > 0$ ,  $L_{g3} > 0$  e  $G_3 > 0$ , implicando, pela manipulação algébrica do termo à direita na expressão de  $M_3$ , nas seguintes condições:

- se  $R < 1$  e  $R' < 1$ , ambas as populações se extingüem devido à baixa capacidade de reprodução das espécies e  $N_3^* \equiv (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ ;
- se  $R < 1$  e  $R' > 1$ , a população do inseto-praga se extingüe devido à sua baixa capacidade de reprodução e  $N_3^* \equiv N_2^*$ ;
- se  $R > 1$ ,  $R' > 1$  e  $k_2 > R'(1 - R)(\alpha_2 + \mu_2)[c'(1 - R')]^{-1}$ , a população do inseto-praga se extingüe devido ao alto grau de parasitismo e  $N_3^* \equiv N_2^*$ ;
- se  $R > 1$ ,  $R' > 1$  e  $k_2 < R'(1 - R)(\alpha_2 + \mu_2)[c'(1 - R')]^{-1}$ , a existência do ponto de equilíbrio  $N_3^*$  é satisfeita e as populações mantêm-se em coexistência;
- se  $R > 1$  e  $R' < 1$ , a condição de existência de  $N_3^*$  é sempre satisfeita.

$$\begin{cases}
 \overline{L_{m3}} = \frac{1}{(\alpha_1 + \mu_1)} \left[ \phi \left( 1 - \frac{\overline{M_3}}{c} \right) \overline{M_3} \right] \\
 \overline{P_3} = \frac{\mu_3}{\alpha_2} \overline{M_3} \\
 \overline{M_3} = \frac{\alpha_2}{a\mu_3 k_2} \left[ 1 + \frac{\alpha_1 \alpha_2^2 \phi \phi'}{ac' \mu_3 k_2^2 (\alpha_1 + \mu_2)} \right]^{-1} \left[ \frac{\alpha_1 \alpha_2 \phi \phi'}{c' \mu_3 k_2 (\alpha_1 + \mu_1)} + \frac{\mu_3' (\alpha_{12}' + \mu_{12}')}{\alpha_{12}'} - \frac{\phi' (\alpha_2 + \mu_2)}{ck_2} - \phi' \right] \\
 \overline{L_{g3}} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mu_3' \phi}{\alpha_{12}' \mu_3 k_2 (\alpha_1 + \mu_1)} \left( 1 - \frac{\overline{M_3}}{c} \right) - \frac{(\alpha_2 + \mu_2)}{k_2} \\
 \overline{G_3} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \phi}{\mu_3 k_2 (\alpha_1 + \mu_1)} \left( 1 - \frac{\overline{M_3}}{c} \right) - \frac{(\alpha_2 + \mu_2)}{k_2}
 \end{cases} \quad (2.1)$$

A estabilidade local da solução estacionária  $N_3^*$  é avaliada pelo Método do Autovalor-Autovetor (Edelstein-Keshet, 1988), através das raízes  $\lambda$  do polinômio característico.

$$\Psi(\lambda) = \det(J[N_3^*] - \lambda I) = 0 \quad (2.2)$$

onde  $J[N_3^*]$  é a matriz jacobiana do sistema de equações (1.3) calculada no ponto  $N_3^*$  e  $I$  é a matriz identidade de ordem 8. Para que o termo independente do polinômio em  $\lambda$  seja estritamente positivo deve-se ter

$$k_4 < \frac{\mu_4'' (\alpha_{12}'' + \mu_{12}'') (\alpha_3'' + \mu_3'')}{a \alpha_{12}'' \alpha_3'' \overline{L_{m3}}}$$

e, conseqüentemente,  $N_3^*$  é localmente e assintoticamente estável (Leite et al., 2000).

Esse ponto de equilíbrio não é biologicamente satisfatório, pois na prática, percebe-se que o inseto-praga, quando parasitado apenas pelo inimigo natural nativo, pode atingir altos picos populacionais em determinadas épocas do ano. Isso mostra que apenas a presença do parasito nativo não é suficiente para manter a população da *P. citrella* abaixo de ND, justificando a introdução de um parasito exótico.

A solução não trivial  $N_4^* \equiv (L_{m4}, P_4, M_4, 0, 0, L_{a4}, A_{v4}, A_4)$  é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{L_{m4}} = \frac{\mu_3(\alpha_2 + \mu_2)}{\alpha_1\alpha_2} \overline{M_4} \\ \overline{P_4} = \frac{\mu_3}{\alpha_2} \overline{M_4} \\ \overline{M_4} = \frac{\alpha_1\alpha_2\mu_4''(\alpha_{12}'' + \mu_{12}'')(\alpha_3'' + \mu_3'')}{a\alpha_{12}''\alpha_3''\mu_3k_4(\alpha_2 + \mu_2)} \\ \overline{L_{a4}} = \frac{\mu_4''(\alpha_{12}'' + \mu_{12}'')}{\alpha_{12}''\alpha_3''} \overline{A_4} \\ \overline{A_{v4}} = \frac{\mu_4''}{\alpha_3''} \overline{A_4} \\ \overline{A_4} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3''}{\mu_3k_4(\alpha_2 + \mu_2)(\alpha_3'' + \mu_4'')} \left[ \phi - \frac{\phi}{c} \overline{M_4} - \frac{\mu_3(\alpha_1 + \mu_1)(\alpha_2 + \mu_2)}{\alpha_1\alpha_2} \right] \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Para que  $L_{m4} > 0$ ,  $P_4 > 0$ ,  $M_4 > 0$ ,  $L_{a4} > 0$ ,  $A_{v4} > 0$  e  $A_4 > 0$  em (2.3), pela manipulação algébrica do termo à direita da expressão de  $A_4$ , deve-se ter

$$k_4 < \frac{\phi\alpha_1^2\alpha_2^2(\alpha_{12}'' + \mu_{12}'')(\alpha_3'' + \mu_3'')}{a\alpha_2''\alpha_3''\mu_3''k_4(\alpha_1 + \mu_1)(\alpha_2 + \mu_2)^2(R-1)}$$

Assim, se  $R > 1$  e  $k_4$  obedece a expressão acima, a condição de existência do ponto de equilíbrio  $N_4^*$  é satisfeita. Devido à complexidade da análise da estabilidade local desse ponto, semelhante ao citado em (2.2), verificou-se numericamente que quando tais condições de existência são satisfeitas, o ponto  $N_4^*$  é localmente e assintoticamente estável.

Biologicamente, esse ponto de equilíbrio não é satisfatório, pois o parasito nativo é deslocado pelo exótico. Então, caso tal espécie não consiga se estabelecer no decorrer do tempo devido a fatores ambientais, a inexistência de inimigos naturais faria com que a população do inseto-praga voltasse a crescer rapidamente, podendo alcançar ND.

As soluções não-triviais para o sistema (1.3) em regime estacionário, com  $k_2 \neq 0$  e  $k_4 \neq 0$ , representando a coexistência entre as três espécies, são obtidas em termos de raízes de um polinômio de terceiro grau em  $\overline{M}_5$ , e expressões para  $\overline{L}_{m5}$ ,  $\overline{P}_5$ ,  $\overline{L}_{g5}$ ,  $\overline{G}_5$ ,  $\overline{L}_{a5}$ ,  $\overline{A}_{v5}$  e  $\overline{A}_5$  em função de  $\overline{M}_5$ , dadas pela expressão (2.4).

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{L}_{m5} = \frac{\phi \alpha'_3}{\gamma(\overline{A}_5)} \left( 1 - \frac{\overline{M}_5}{c} \right) \overline{M}_5 \\ \overline{P}_5 = \frac{\mu_3}{\alpha_2} \overline{M}_5 \\ \overline{L}_{g5} = \frac{\mu'_3}{\alpha'_{12}} \left[ c' \left( 1 - \frac{1}{R'} \right) + \frac{ac' \mu_3 k_2}{\phi' \alpha_2} \overline{M}_5 \right] \\ \overline{G}_5 = c' \left( 1 - \frac{1}{R'} \right) + \frac{ac' \mu_3 k_2}{\phi' \alpha_2} \overline{M}_5 \\ \overline{L}_{a5} = \frac{a \phi \alpha''_3 k_4 \overline{A}_5}{(\alpha''_{12} + \mu'_{12}) \gamma(\overline{A}_5)} \left( 1 - \frac{\overline{M}_5}{c} \right) \overline{M}_5 \\ \overline{A}_{v5} = \frac{\mu'_4}{\alpha'_3} \overline{A}_5 \\ \overline{A}_5 = d_0 + d_1 \overline{M}_5 + d_2 \overline{M}_5^{-1} \\ Pol(\overline{M}_5) = e_3 \overline{M}_5^3 + e_2 \overline{M}_5^2 + e_1 \overline{M}_5 + e_0 = 0, \end{array} \right. \quad (2.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma(\overline{A}_5) &= \alpha_3''(\alpha_1 + \mu_1) + k_4(\alpha_3'' + \mu_4'')\overline{A}_5 \\ d_0 &= -cd_1 - \frac{1}{c}d_2 - \frac{\alpha_3''(\alpha_1 + \mu_1)}{k_4(\alpha_3'' + \mu_4'')} \\ d_1 &= \frac{\phi\phi'\alpha_2\alpha_1''(\alpha_3'')^2 \left[ \mu_3(\alpha_2 + \mu_2) - c'\mu_3k_2 \left( 1 - \frac{1}{R'} \right) \right]}{cc'\mu_3^2\mu_4''k_2^2(\alpha_3'' + \mu_4'')(\alpha_3'' + \mu_3'')(\alpha_1'' + \mu_{12}'')} \\ d_2 &= \frac{\phi\phi'\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3''}{ac'\mu_3^2k_2^2k_4(\alpha_3'' + \mu_4'')} \\ e_0 &= \frac{\phi\phi'\alpha_1\alpha_2^2\mu_4''(\alpha_3'' + \mu_3'')} {ac'\mu_3^2k_2^2} \\ e_1 &= \frac{\mu_4''k_4(\alpha_3'' + \mu_4'')(\alpha_3'' + \mu_3'')} {c\alpha_3''}d_2 + \frac{c\mu_4''k_4(\alpha_3'' + \mu_4'')(\alpha_3'' + \mu_3'')} {\alpha_3''}d_1 \\ e_2 &= \frac{\mu_4''k_4(\alpha_3'' + \mu_4'')(\alpha_3'' + \mu_3'')} {\alpha_2\alpha_3''}d_1 - \frac{a\phi\alpha_1''\alpha_3''k_4} {(\alpha_{12}'' + \mu_{12}'')} \\ e_3 &= \frac{a\phi\alpha_1''\alpha_3''k_4} {c(\alpha_{12}'' + \mu_{12}'')} \end{aligned}$$

Observa-se que  $e_0, e_3 > 0$  e  $e_1, e_2 < 0$  e, portanto, o polinômio em  $M_5$  possui no máximo 2 raízes reais positivas (Regra de Sinal de Descartes). Através de um algoritmo numérico é possível obter as raízes reais positivas do polinômio em  $M_5$  e os valores correspondentes às demais variáveis pela equação (2.4). Cada solução corresponde a um ponto de equilíbrio do modelo proposto.

Mais uma vez, devido à complexidade do estudo da estabilidade local desse ponto como em (2.2), verificou-se numericamente que, conforme os valores utilizados para os parâmetros biológicos do modelo, é possível obter duas raízes reais positivas para o polinômio em  $M_5$ . Nestes casos, a menor raiz possui equilíbrio instável (*breaking point*) e a maior representa um ponto de equilíbrio localmente e assintoticamente estável.



A interação entre as três espécies, representada pelos pontos de equilíbrio expressos em (2.4), é a solução mais adequada ao controle biológico, pois as populações podem coexistir com um risco mínimo de ocorrência de prejuízos econômicos (alcance de ND).

## Conclusões

1. O modelo matemático descrito mostra que é possível a coexistência entre as espécies *Phyllocnistis citrella* (inseto-praga), *Galeopsomyia fausta* (parasito nativo) e *Ageniaspis citricola* (parasito exótico). Tal coexistência está condicionada a valores de  $k_2$  e  $k_4$ , que se referem, respectivamente, à capacidade de parasitismo dos inimigos naturais nativo e exótico;
2. como, por hipótese, a população do parasito exótico só cresce devido ao ganho no parasitismo ( $k_4$ ), são necessários altos níveis populacionais do inseto-praga para iniciar o crescimento de sua população;
3. durante este período, a presença do parasito nativo é fundamental para o controle do inseto-praga;
4. como o parasito exótico ataca uma fase anterior àquela do ciclo de vida da praga atacada pelo parasito nativo, logo após o início do crescimento de sua população ele tende a vencer a competição pelo alimento e a população do parasito nativo passa a oscilar em níveis próximos à capacidade de saturação do meio (parâmetro  $c$ ); e
5. os valores dos parâmetros biológicos, determinados pelas condições do agroecossistema (em função da temperatura e umidade), são fundamentais para o estabelecimento do parasito exótico, para o não deslocamento da população do parasito nativo e, conseqüentemente, para o eficiente controle da população do inseto-praga, mantida abaixo do nível de dano econômico.

## Referências Bibliográficas

AMARO, A. A.; MAIA, M. L.; GHILARDI, A. A. Custos de produção na atual conjuntura da citricultura. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE CITROS – TRATOS CULTURAIS, 5., 1998, Bebedouro. **Anais...** Bebedouro: Fundação Cargill, 1998. p. 481-500.

BOSCH, R. van den; MESSENGER, P. S.; GUTIERREZ, A. P. **An introduction to biological control**. New York: Plenum Press, 1985. 247 p.

CHAGAS, M. C. M. das. ***Phyllocnistis citrella* Stainton, 1856 (Lepidoptera: Gracilariidae)**: bioecologia e relação com o cancro cítrico. 1999. 67 p. Tese (Doutorado em Ciências) – Escola Superior de Agronomia Luís de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba.

CHAGAS, M. C. M.; PARRA, J. R. P.; MILANO, P.; YAMAMOTO, P. T.; GRAVENA, S.; PAIVA, P. E. B.; SÁ, L. A. N. de. Introduction of *Ageniaspis citricola* (Hymenoptera: Encyrtidae) in Brazil: rearing techniques and its release in the State of São Paulo, Brazil. In: INTERNATIONAL ENTOMOPHAGUS INSECTS WORKSHOP, 12., 1999, Pacific Grove. **Abstracts...** Pacific Grove: [s.n.], 1999.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical models in biology**. Boston: McGraw-Hill, 1988. 586 p. (Birkhäuser Mathematics Series).

EDWARDS, O. R.; HOY, M. A. Biology of *Ageniaspis citricola* (Hymenoptera: Encyrtidae), a parasitoid of the leafminer *Phyllocnistis citrella* (Lepidoptera: Gracilariidae). **Annals of the Entomological Society of America**, v. 91, n. 5, p. 654-660, 1998.

FUNDECITRUS. **Principais doenças e pragas**: larva minadora do citros. Disponível em: <<http://www.fundecitrus.com.br/minador.html>>. Acesso em: 23 fev. 2001.

GRAZIANO, F. **Os números da citricultura**. São Paulo: IEA, 1997. 28 p.

GODFRAY, H. C. J.; WAAGE, J. K. Predictive modelling in biological control: the mango mealy bug (*Rastrococcus invadens*) and its parasitoids. **Journal of Applied Ecology**, v. 28, p. 434-453, 1991.

HEARNE, J. W.; VAN COLLER, L. M.; CONLONG, D. E. Determining strategies for the biological control of the sugarcane stalk borer. **Ecological Modelling**, v.73, p.117-133, 1994.

LEITE, M. B. F.; BASSANEZI, R. C.; YANG, H. M. The basic reproduction ratio for a model of directly transmitted infections considering the virus charge and the immunological response. **Journal of Mathematics Applied in Medicine and Biology**, v. 17, p. 15-31, 2000.

LASALLE, J.; PEÑA, J. E. A new species of *Galeopsomyia* (Hymenoptera: Eulophidae: Tetrastichinae): a fortuitous parasitoid of the citrus leafminer, *Phyllocnistis citrella* (Lepidoptera: Gracilariidae). **Florida Entomologist**, v. 80, p. 461-470, 1997.

MURDOCH, W. W. Ecological theory and biological control. In: BAKER, R. R.; DUNN, P. E. (Ed.). **New directions in biological control: alternatives for suppressing agricultural pests and diseases: proceedings of a UCLA Colloquium...** New York: A.R. Liss, 1990. p. 49-55.

MURRAY, J. D. **Mathematical biology**. 2<sup>nd</sup>.ed. Berlin: Springer, 1993. 769 p.

SÁ, L. A. N. de; COSTA, V. A.; DE NARDO, E. A. B.; ARELLANO, A.; FUINI, L. C. Parasitismo da larva minadora da folha de citros, *Phyllocnistis citrella*, no município de Jaguariúna, SP. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENTOMOLOGIA, 17., 1998, Rio de Janeiro. **Resumos...** [S.l.: s.n.], 1998. Livro 1, p. 65.

SEVERO, N. C. The probabilities of some stochastic epidemic models. **Biometrika**, v. 56, p. 197-201, 1969.

SILVEIRA NETO, S.; NAKANO, O.; BARBIN, D.; NOVA, N. A. V. **Manual de ecologia dos insetos**. São Paulo: Ceres, 1976. 416 p.

TERNES, S. **Modelagem e simulação da dinâmica populacional da larva-minadora-da-folha-dos-citros em interação com seus inimigos naturais**. 2001. 153 p. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade

**Embrapa**

---

*Informática Agropecuária*