http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n1p24

A atividade de alunos do 9.º ano com tarefas de modelação no estudo de funções

The activity of 9th grade students with modeling tasks in the study of functions

Floriano Viseu
fviseu@ie.uminho.pt

Resumo

A natureza das tarefas determina a dinâmica das atividades da sala de aula. Entre a tipologia de tarefas, as características das de modelação proporcionam aos alunos a oportunidade de se envolverem na construção do conhecimento matemático. Partindo deste pressuposto, pretende-se caracterizar a atividade que os alunos do 9.º ano de escolaridade realizam com tarefas de modelação, com recurso à calculadora gráfica e a sensores, no estudo de funções e as dificuldades que revelam nessas atividades. Trata-se de um estudo qualitativo de natureza interpretativa que recolheu a informação através da gravação de aulas, da análise de produções dos alunos e de um questionário.

Os resultados mostram que os alunos realizam uma diversidade de atividades com tarefas de modelação, tais como interpretação das situações dadas, recolha de dados e sua organização em tabelas, tradução da informação desses dados através de gráficos e de expressões analíticas. Nestas atividades emerge algumas dificuldades, tais como distinguir a variável dependente da independente, utilizar escalas na subdivisão dos eixos cartesianos, restringir o domínio que contextualiza as situações dadas, encontrar o melhor modelo que se ajuste à situação dada e em distinguir os conceitos de proporcionalidade direta e inversa.

Palavras-Chave: Ensino de Matemática; Funções; Tarefas de modelação; Atividade.

Abstract

The nature of tasks constrains the dynamic of the activities in the class. Among the typology of tasks, those of modelling, by their characteristics, give students the opportunity to engage in the construction of mathematical knowledge. Based on this assumption, we aim to characterize the activities that 9th grade students perform with modelling tasks in the study of functions, using the graphic calculator and sensors. We also aim to identify students' difficulties in these activities. In this study, of qualitative and interpretative nature, data were collected by recording the classes, by analysing students' productions, and by a questionnaire. Results show that students perform a diversity of activities with modelling tasks, such as interpretation of the situations provided, data collection and its organization in tables, and translation of those data into graphics and analytical expressions. In these activities, students reveal some difficulties, such as to differentiate dependent from independent variable, to use of scales in the subdivision of cartesians axes, to restrict the domain to one that contextualize the situations given, to find the better model that adjusts to the situation provided, and to differentiate the concepts of direct and inverse proportionality.

Key-words: Teaching of mathematics; functions; modelling tasks; activities.

Introdução

Na organização dos temas que estruturam os programas de Matemática, o de Álgebra é um dos que surge contemplado em todos os programas dos vários ciclos escolares. Embora tenha um tratamento mais aprofundado a partir do 10.º ano de escolaridade, começa a ser tratado desde o 1.º ciclo com a preocupação de desenvolver nos alunos o pensamento algébrico. Para este desenvolvimento ganha relevo o trabalho dos alunos com estruturas multiplicativas e com os números racionais, o que promove neste ciclo escolar o desenvolvimento das noções de proporcionalidade, sequência numérica e padrão geométrico (Ministério da Educação, 2007).

No 2.º ciclo, o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos resulta da exploração de padrões, da determinação de termos de uma sequência a partir da sua lei de formação, da determinação de uma lei de formação através da relação entre os termos e da exploração de várias situações que envolvem os conceitos de proporcionalidade direta, razão e proporção.

No 3.º ciclo, a evolução do pensamento algébrico advém do aprofundamento do estudo das sequências e regularidades, equações do 1.º e do 2.º grau a uma incógnita, equações literais, operações com polinómios, sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas, inequações e das funções. É neste ciclo escolar que surge o conceito de função nas suas diferentes representações (diagrama de Venn, gráfico, tabela e expressão analítica), que é ampliado com o estudo da proporcionalidade direta e inversa como funções, das funções linear e afim e das funções quadráticas incompletas definidas só com o termo do 2.º grau. No desenvolvimento da compreensão destes conceitos algébricos desempenham um papel preponderante a natureza das tarefas e os materiais didáticos a adotar na sala de aula. Em relação às tarefas, as recomendações atuais da educação matemática apontam para a resolução de problemas e de tarefas de modelação de situações do quotidiano, que façam com que os alunos se apercebam da utilidade do estudo das funções na interpretação, compreensão e na resolução de determinados fenómenos com que se deparam (APM, 1988; NCTM, 2007). Com estas sugestões pretende-se desenvolver a capacidade dos alunos de recorrer "às várias representações (algébrica, gráfica e tabular) de uma função na interpretação e resolução de problemas e na modelação de situações" (Ministério da Educação, 2007, p. 56).

Os modelos definidos por funções de proporcionalidade direta e inversa assumem peculiar destaque no 3.º ciclo do ensino básico[1]. No trabalho com estes modelos, os materiais

[1] O sistema de ensino português engloba 12 anos antes da entrada no ensino superior, assim como a generalidade dos países do mundo. Desses anos, os primeiros nove correspondem ao ensino básico e os três últimos ao ensino secundário. No ensino básico (formado por três ciclos: o primeiro de quatro anos, e com professor único, o segundo de dois anos, e o terceiro ciclo de três anos), o currículo da disciplina de Matemática é igual para todos os alunos. Nos tês anos de ensino secundário, no qual os alunos começam a ser encaminhados para um grupo de cursos do ensino superior, os currículos da disciplina de Matemática divergem, de acordo com os cursos de Ciências, Humanísticos, Tecnológicos ou de Artes.

tecnológicos, como por exemplo, o computador e a calculadora gráfica, podem apoiar a atividade dos alunos no estabelecimento de relações entre a linguagem algébrica e os métodos gráficos (Ministério da Educação, 2007). Tais materiais possibilitam a realização de tarefas de modelação que sem eles se tornariam inacessíveis e permitem que os alunos trabalhem em níveis mais elevados, como os da generalização e abstração, do que efetuar cálculos fastidiosos (NCTM, 2007). Ao conciliarem-se estas potencialidades, pretende-se caracterizar a atividade que os alunos do 9.º ano de escolaridade realizam com tarefas de modelação, com recurso à calculadora gráfica e a sensores, no estudo de funções e as dificuldades que revelam nessas atividades.

Funções no currículo de Matemática do ensino básico

Nas sucessivas reformulações dos programas da disciplina de matemática de todos os níveis de escolaridade, a álgebra, onde se integra as funções, é um dos temas que tem vindo a ganhar especial destaque. São reconhecidas várias razões que justificam a inclusão da álgebra, em geral, e das funções, em particular, no currículo por ser um sistema simbólico de grande valor para comunicar informação quantitativa e relações que se estabelecem entre essa informação e por contribuir para a resolução de problemas nas diferentes disciplinas e do dia-a-dia (Fey, 1989).

No pensamento algébrico dá-se importância aos objetos, mas também às relações existentes entre estes, representando e raciocinando sobre estas relações de modo geral e abstrato (Ponte, 2006). Desde os primeiros anos de escolaridade, as crianças contactam com representações de "máquinas de funções" que fazem com que os números de entrada sejam transformados num número de saída, o que lhes permite descobrir a operação aritmética que é realizada pela máquina (Herscovics, 1989). À medida que avançam no ciclo de estudos, os alunos desenvolvem a capacidade de identificar relações e de usar a linguagem simbólica para as descrever (Ministério da Educação, 2007), através da conexão entre gráficos, tabelas e expressões analíticas. Associado a este desenvolvimento surge o uso de simbologia e o conceito de variável. Schoenfeld e Arcavi (1988) consideram o conceito de variável central no ensino e na aprendizagem da matemática. Compreender este conceito, segundo estes autores, fornece a base para a transição da aritmética para a álgebra e para o uso com significado de muitos conceitos matemáticos. Porém, a transição do concreto para o abstrato não se torna fácil para muitos alunos (Herscovics, 1989). Para Ponte (2005a), existem alunos que, embora tenham um nível de desempenho razoável no trabalho com números e com operações numéricas, sentem dificuldades no estudo de conceitos algébricos. Algumas destas dificuldades estão sobretudo relacionadas com o uso das letras para representar variáveis e incógnitas no lugar de números desconhecidos, o que não ajuda, segundo Herscovics (1989), a tradução da informação fornecida em linguagem corrente para linguagem algébrica. A presença de mais do que uma variável dificulta a atividade de muitos alunos na modelação de situações da vida real.

No estudo de funções do 3.º ciclo, Kieran (1992) identificou dificuldades de aprendizagem, principalmente quando se tratam de funções definidas por uma constante, por segmentos e por um conjunto de pontos discretos. Para esta autora, estas dificuldades devem-se por os alunos desenvolverem um reportório limitado sobre as funções, quer na forma algébrica quer na forma gráfica; às abordagens de ensino que valorizam mais a transferência da informação da forma algébrica para a gráfica do que ao contrário e que evidenciam sobretudo exemplos de funções lineares. Kieran (1992) considera que a falta de experiências com gráficos dificulta a interpretação da informação contida num gráfico e que as primeiras aprendizagens sobre gráficos e funções são fundamentais para usar estas representações como um meio de compreender as transformações algébricas. A autora também considera que as dificuldades de aprendizagem sobre gráficos podem resultar de um ensino que incentive os alunos a preencher tabelas, colocar pontos num sistema de eixos cartesianos e a ler as coordenadas de pontos de um gráfico, muitas vezes com a finalidade de resolver uma equação ou sistema de equações, o que retira aos alunos a perceção do significado da tarefa e a oportunidade de interpretarem gráficos sobre situações do dia-a-dia.

No estudo de funções, Markovits, Eylon e Bruckeimer (1998) indicam outras dificuldades que os alunos costumam manifestar: (1) localizar objetos e imagens numa representação gráfica; questionados a localizar o elemento do conjunto de chegada que é imagem de um dado objeto, os alunos tendem a indicar o ponto sobre o gráfico que corresponde ao par (objeto dado, imagem procurada); (2) identificar imagens e pares (objeto, imagem) em funções definidas na forma algébrica; os alunos conseguem identificar se determinados valores são objetos de uma função, verificando se esses valores pertencem ao domínio. O mesmo não acontece quando têm de verificar se uma lista de números são imagens de uma função, porque em vez de calcular o objeto através da expressão analítica que representa a função tendem a verificar se esses números pertencem ao universo que caracteriza o conjunto de chegada. A mesma tendência acontece quando têm de verificar se um par ordenado pertence ou não ao gráfico de uma função; (3) distinguir entre o contradomínio e o conjunto de chegada; (4) ignorar o domínio e o conjunto de chegada de uma função; os alunos quando têm que proceder a várias etapas na resposta a uma questão tendem a ignorar a expressão analítica que representa a função, como também definem função como uma regra, ignorando o domínio e o conjunto de chegada; (5) conceção errada de linearidade; os alunos por vezes ficam com a ideia de que o gráfico de uma função é uma reta, que poderá dever-se à predominância no ensino de gráficos deste tipo. Os autores referem que, no seu estudo, os alunos referiam a existência de uma infinidade de retas que passam por um dado ponto, mas, perante dois ou três pontos identificam uma só função e perante situações com mais de quatro pontos para a maioria deles não existe nenhuma função que traduza esses pontos.

De modo a ultrapassar estas dificuldades, Markovits, Eylon e Bruckeimer (1998) sugerem que no estudo de funções se abordem representações gráficas de funções de diferentes graus. Os autores consideram que se torna mais fácil para os alunos trabalhar com funções na forma gráfica do que na forma algébrica, porque a representação gráfica é mais visual, o domínio, o conjunto de chegada e a expressão da correspondência surgem em simultâneo, e por traduzir visualmente o comportamento da função. Como as representações algébricas tendem a ser ensinadas antes da representação gráfica, os autores defendem que este tipo de representação deve surgir o mais cedo possível no desenvolvimento dos conceitos de funções.

A atividade dos alunos na sala de aula é determinante, o que, por vezes, depende das tarefas que o professor propõe ao aluno e à forma como considera o envolvimento deste nas atividades da aula. Como defende o NCTM (1994), os alunos na sala de aula devem ter a oportunidade de usar ferramentas diversificadas para raciocinar, estabelecer conexões, resolver problemas e comunicar matematicamente e ter iniciativa de formular problemas e colocar questões. Importa dinamizar a atividade dos alunos de modo que, em pequenos grupos ou com toda a turma, discutam os seus processos e os seus resultados.

Tarefas e atividade

Na dinamização do processo educativo, em geral, e na disciplina de matemática, em particular, as tarefas que o professor integra nas suas estratégias de ensino e as atividades que os alunos realizam sobre elas são fatores determinantes do que acontece na sala de aula (Stein & Smith, 1998; Viseu & Ponte, 2009; Viseu & Ponte, 2012; Viseu & Menezes, 2014). Entre as tarefas e a atividade existe uma estreita relação, sendo a tarefa o objetivo da atividade do aluno, que é o que resulta da realização da tarefa proposta pelo professor (Ponte, 2005b). As tarefas regulam a interação dos alunos com o professor, com os seus colegas, com os conteúdos matemáticos e com os materiais didáticos, como também regulam os métodos de ensino do professor dos conteúdos matemáticos. Atendendo ao propósito das tarefas, dos recursos a utilizar e dos procedimentos a aplicar, Ponte (2005b) classifica as tarefas em exercícios, problemas, investigações, projetos e jogos. Cada um destes tipos de tarefas circunscreve uma determinada atividade.

Os exercícios servem essencialmente para o aluno praticar e consolidar os conhecimentos adquiridos. São tarefas geralmente de resolução mecânica e repetitiva, em que o aluno aplica uma fórmula ou um algoritmo que conduz diretamente a uma determinada resposta já conhecida. Pelo seu lado, os problemas traduzem situações não rotineiras, às quais o aluno não dispõe de um processo imediato de resolução, que podem ser resolvidos por vários métodos. Para Ponte (2005b), a atividade de resolução de problemas surge associada ao raciocínio e à comunicação, ao desafio das capacidades matemáticas do aluno e ao gosto pela descoberta, fatores que podem levar o aluno a ter uma visão mais ampla da natureza da Matemática e a desenvolver o gosto por esta disciplina.

Estas características também estão presentes nas investigações que, segundo Ponte (2005b), requerem que o aluno participe na "formulação específica das próprias questões a resolver" (p. 15). Neste tipo de tarefa, o aluno explora uma situação aberta, procura regularidades, estabelece e testa conjeturas, argumenta e comunica oralmente ou por escrito as suas conclusões. Para Ruthven (2001), esta atividade favorece o desenvolvimento nos alunos das capacidades de pesquisa e de argumentação e da compreensão de conceitos matemáticos na sua aplicação a situações não familiares. Pelo seu lado, os projetos proporcionam aos alunos uma atividade de longa duração que, normalmente, inclui trabalho dentro e fora da sala de aula e é realizada em grupo até à apresentação dos resultados. Por fim, o jogo consiste numa atividade que alia raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição de uma forma lúdica. A prática de jogos de estratégia, observação e memorização contribui para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e para o desenvolvimento pessoal e social dos alunos.

Ao caracterizar cada um destes tipos de tarefa, Ponte (2005b) destaca duas dimensões fundamentais: o grau de desafio matemático (elevado/reduzido), como os problemas e os exercícios, que se relaciona com a perceção da dificuldade da tarefa, e o grau de estrutura (aberta/fechada), como as tarefas de exploração e de investigação. As tarefas em que os alunos realizam um determinado procedimento que foi memorizado de uma forma rotineira, denominadas de baixo nível cognitivo, são para Stein e Smith (1998) muito menos enriquecedoras do que as tarefas de alto nível cognitivo, em que os alunos são desafiados a estabelecer conexões entre os conceitos matemáticos, a raciocinar e a comunicar matematicamente. Osana, Lacroix, Tucker e Desrosiers (2006) destacam as tarefas de natureza aberta por considerarem que favorecem o envolvimento dos alunos nas suas atividades, os encorajam a explorar e a investigar, aumentam a sua motivação para generalizar, procurar padrões e conexões, comunicar, discutir e identificar alternativas e contribuem para que o professor possa avaliar a aprendizagem matemática dos alunos.

Tarefas de modelação

Em Portugal, as sugestões metodológicas dos programas de Matemática dos diferentes anos de escolaridade apontam para a inclusão das tarefas de modelação nas estratégias de ensino (Ministério da Educação, 1991, 2007). Trata-se de tarefas de natureza desafiante, sob a forma de problema ou investigação conforme o grau de estrutura do seu enunciado, que procuram identificar a Matemática presente numa situação do dia-a-dia e dar resposta às questões formuladas (Ponte, 2005b). Kaiser e Maaß (2007) descrevem a modelação como um processo no qual uma dada situação é resolvida através da aplicação da Matemática. Um ambiente de aprendizagem que incentiva a explorar e a questionar envolve os alunos em atividades de "esquematizar, desenvolver operações aritméticas, gerar equações, fazer desenhos, traçar gráficos, e, principalmente, produzir discursos" (Silva & Barbosa, 2011, p. 199). Ao nível da sala de aula, a atividade de modelar consiste em analisar e evidenciar os elementos e as relações presentes numa dada situação, solucionar a situação com base na Matemática, interpretar os resultados e confrontá-los com o fenómeno em estudo e tirar as respetivas conclusões. Nesta atividade, Verschaffel, Greer e De Corte (2000) identificam a seguinte sequência de fases:

Fase 1: *Compreensão da situação em estudo*: analisar uma dada situação para considerar e decidir que elementos são relevantes e que relações e condições se podem estabelecer (como por exemplo através da recolha de dados experimentais com recurso à calculadora e aos sensores);

Fase 2: *Construção de um modelo matemático*: analisar os elementos relevantes, as relações e as condições disponíveis na situação para traduzir a situação na forma matemática;

Fase 3: *Trabalhar com o modelo*: obter alguns resultados;

Fase 4: *Interpretação dos resultados*: chegar a uma solução para a situação que deu origem ao modelo matemático;

Fase 5: *Avaliar o modelo*: verificar se a solução é matematicamente adequada e razoável para o problema original;

Fase 6: *Comunicar* a solução do problema original.

Quando nos deparamos com um dado problema, precisa-se de escolher uma estrutura matemática para o representar, construindo assim um modelo matemático (Niss, 1992). Este modelo matemático constitui uma representação "quase sempre parcial e que comporta exigências de precisão que a situação real pode não satisfazer plenamente, mas que são indispensáveis à eficácia do raciocínio" (Revuz, 1980, p. 90). Logo que o problema esteja representado matematicamente, procura-se utilizar conteúdos matemáticos disponíveis para o analisar, de modo a chegar a novas conclusões, tendo em atenção que estas conclusões têm de ser interpretadas de acordo com a situação real de que se partiu. Assim, procede-se à avaliação do modelo, decidindo se este é ou não adequado. Em caso negativo, procura-se redefinir o problema, considerar novas variáveis e estabelecer novas relações entre variáveis. Repete-se o ciclo até se julgar que o resultado obtido é satisfatório (Ponte, 1992). Deste modo, a modelação matemática é um processo cíclico complexo "que consiste em estruturar, gerar factos do mundo real e dados, matematizar, trabalhar matematicamente e interpretar/validar" (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007, pp. 9–10). Este ciclo pode ser repetido várias vezes até que se obtenha um resultado satisfatório.

Niss (1992) considera que a modelação continua a ser escassa na aula de Matemática. São vários os motivos que o justificam. Em particular, as tarefas de modelação são cognitivamente exigentes, ao envolverem a tradução entre a matemática e a realidade, sendo para isso necessário ter ideias matemáticas apropriadas e conhecimento da realidade. Por outro lado, a modelação está intimamente ligada a outras competências matemáticas, como, por exemplo, a conceção e aplicação de estratégias de resolução de problemas, leitura de textos, bem como a capacidade de raciocínio (Jurkiewicz & Fridemann, 2007; Matos, 1995).

A inclusão de tarefas de modelação na sala de aula de matemática coloca questões ao ensino, ao aluno e ao professor, umas que resultam em dificuldades e outras em elementos catalisadores. Em relação ao ensino, a dificuldade mais notória é o cumprimento do programa (Carreira, 2011), uma vez que, para se desenvolverem tarefas desta natureza na sala de aula, é necessário tempo para as compreender, executar e avaliar. Quanto ao aluno, visto que na construção de um modelo matemático é necessário ter em conta vários aspetos simultaneamente, aumenta a complexidade na compreensão da experiência e na interpretação de resultados. Relativamente ao professor, exige-se capacidade para gerir conhecimentos matemáticos e também relativos a outras ciências, de modo a assegurar a transdisciplinaridade de saberes. As tarefas de modelação constituem, assim, desafios para o professor, principalmente pela dinâmica da aula de matemática perante a diversidade de estratégias que os alunos podem gerar (Oliveira & Barbosa, 2011). Em termos de elementos catalisadores, Júnior e Santo (2006) apontam a modelação matemática como um instrumento para a "desfragmentação dos currículos matemáticos tradicionais" (p. 5), na introdução de temas, favorecendo o currículo flexível e transdisciplinar. O desenvolvimento de um currículo compartimentado e assente na imitação do que o professor faz dá lugar, através deste tipo de propostas, a um currículo baseado na conexão de saberes e em atividades de exploração e investigação.

A realização deste tipo de atividades tem despertado o interesse de estudos no âmbito da educação matemática. Exemplo desses estudos é o que foi realizado por Lança (2007) com o objetivo de compreender as potencialidades das tarefas de modelação matemática na aprendizagem de funções de alunos do 9.º ano de escolaridade num ambiente exploratório e com recurso à calculadora gráfica e a sensores. Apesar de esta experiência ser realizada numa turma, apenas um grupo de quatro alunos é que foi objeto de estudo. Nesta experiência, os alunos consideraram que as tarefas de modelação despertam motivação, o que fez com que os mais fracos participassem mais nas atividades do que nas aulas anteriores, e lhes proporcionou a oportunidade de trabalhar com situações do dia-a-dia. A autora conclui que as atividades com tarefas de modelação matemática favorecem a compreensão de conceitos das funções. A utilização da calculadora gráfica e de sensores ajudou a desenvolver atitudes positivas nos alunos face à disciplina de Matemática e permitiu que os alunos trabalhassem as funções numa perspetiva mais dinâmica do que é veiculada nos manuais escolares.

Metodologia de investigação

Neste estudo pretende-se caracterizar as atividades de alunos do 9.º ano com tarefas de modelação, com recurso à calculadora gráfica e a sensores, no estudo de funções e as dificuldades que revelam nessas atividades. Adotou-se uma abordagem qualitativa para compreender os significados que os alunos dão às ações em que se envolvem (Bogdan & Biklen, 1994). O estudo decorreu com 25 alunos de uma turma, 14 raparigas e 11 rapazes, de uma Escola Básica dos 2.º e 3.º ciclos. As suas idades variam entre os 14 e os 17 anos de idade, com uma idade média aproximadamente de 14 anos. Os alunos trabalharam em grupos de 4 elementos (cinco grupos) e de 5 elementos (um grupo). A distribuição diferenciada dos alunos pelos grupos deveu-se ao número de calculadoras gráficas e de sensores que foi possível disponibilizar.

A recolha de dados foi feita através da gravação em vídeo das aulas, da resolução dos alunos às tarefas propostas e de uma entrevista no final da experiência de ensino. A gravação das aulas permitiu transcrever os diálogos entre os alunos e entre estes e a professora na resolução das tarefas de modelação. A informação proveniente por este método é apresentada por AnGm, em que n designa o número do aluno no seu grupo ($n \in \{1,2,3,4,5\}$) e m indica o número do grupo do alunos ($m \in \{1,2,3,4,5,6\}$), e a informação proveniente da professora é designada por Prof. A resolução dos alunos a cada uma das tarefas propostas culminava com a avaliação da atividade, que é apresentada por AA seguida da identificação do número da tarefa (por exemplo, AATn, em que n é o número da tarefa) e da identificação do aluno no respetivo grupo. No final da experiência realizou-se uma entrevista aos alunos de cada grupo para recolher as suas perceções sobre o contributo das tarefas de modelação e dos materiais tecnológicos utilizados na sua aprendizagem e sobre as dificuldades que sentiram nas suas atividades. A informação proveniente da entrevista é apresentada por (E) e pela identificação do aluno no seu grupo, como por exemplo (E, A1G4).

Após a organização dos dados recolhidos, a sua leitura permitiu reduzi-los em torno de duas dimensões que procuram, segundo Miles e Huberman (1994), ordenar, organizar e sistematizar a informação. A primeira dimensão, descrição da atividade dos alunos com tarefas de modelação, resulta da análise da atividade dos alunos mediante as fases de modelação propostas por Verschaffel *et al* (2000): (i) Recolha e organização de dados; (ii) Definição do modelo matemático; e (iii) Validação do modelo matemático. Em cada uma destas fases apresentam-se extratos dos diálogos que surgiram no decorrer das aulas com a preocupação de não distorcer o sentido que tiveram para os intervenientes no decorrer das aulas. Relativamente à segunda dimensão, perspetivas dos alunos sobre a atividade com tarefas de modelação, foram analisados os registos efetuados pelos alunos em todas as aulas e a entrevista realizada aos alunos no final da experiência. A análise dos dados contém citações das palavras dos alunos e da professora, o que permite ao leitor ter uma perceção mais próxima dos acontecimentos e dos contextos do estudo realizado.

Descrição da atividade dos alunos com tarefas de modelação

Foram propostas aos alunos sete tarefas, sendo duas delas modeladas pela função de proporcionalidade direta, três pela função de proporcionalidade inversa, uma pela função quadrática e outra pela função cúbica (Tabela 1).

Tabela 1: Tabela das tarefas.

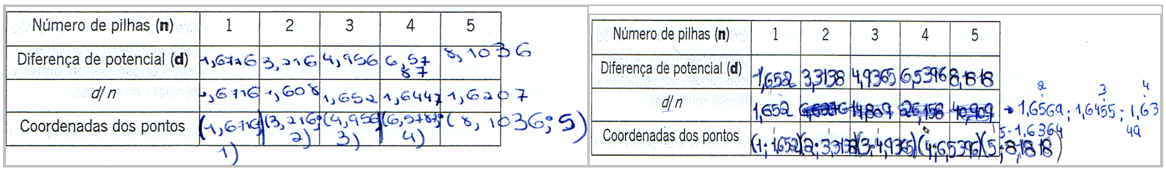
Tarefas	**Conteúdo**
A chama da vela de aniversário	Proporcionalidade direta
Pilhas em série	Proporcionalidade direta
Sob pressão	Proporcionalidade inversa
Alavanca interfixa	Proporcionalidade inversa
Matemática por um canudo	Proporcionalidade inversa
Repuxo da água	Função quadrática
Volume de uma caixa	Função cúbica

Destas tarefas, analisam-se a atividade dos alunos nas tarefas "Pilhas em série", "Sob pressão" e "Volume de uma caixa". Cada uma destas tarefas era apresentada ao aluno sob a forma de um problema.

Pilhas em série

> O João recebeu de prenda de Natal um mp3, mas para que este funcione são necessárias duas pilhas de tamanho AAA. O pai explicou-lhe que um aparelho eletrónico só funciona quando se cria uma diferença de potencial entre os pontos em que as pilhas estão ligadas. Esta diferença de potencial ou tensão elétrica é dada pela voltagem das pilhas. O João ao verificar que cada pilha AAA tem 1,5 volts ficou curioso por encontrar a relação existente entre o número de pilhas e a diferença de potencial entre estas.

Recolha e organização de dados. Da leitura do problema, os alunos não manifestaram a relação de linearidade existente entre o número de pilhas e a diferença de potencial que se obtém. O modelo teórico não foi considerado pelos alunos, o que se deveu à experiência que se pretendia realizar com a recolha de dados através da calculadora gráfica, o CBL e um sensor de diferença de potencial. Os dados obtidos foram registados pelos alunos numa tabela (Figura 1):



Número de pilhas (**n**)	1	2	3	4	5
Diferença de potencial (**d**)	1,6716	3,216	4,956	6,5787	8,1036
d/*n*	1,6716	1,608	1,652	1,6447	1,6207
Coordenadas dos pontos	(1,6716; 1)	(3,216; 2)	(4,956; 3)	(6,5787; 4)	(8,1036; 5)

Número de pilhas (**n**)	1	2	3	4	5
Diferença de potencial (**d**)	1,652	3,3138	4,9365	6,5396	8,1818
d/*n*	1,652	~~6,6276~~	~~14,809~~	~~26,158~~	~~40,909~~
Coordenadas dos pontos	(1; 1,652)	(2; 3,3138)	(3; 4,9365)	(4; 6,5396)	(5; 8,1818)

→ 1,6569; 1,6455; 1,6349
5 - 1,6364

Figura 1: Preenchimento da tabela pelos grupos G3 e G6.

No preenchimento da tabela, os alunos não relacionaram os valores obtidos com os valores esperados em função da voltagem de cada pilha. Na identificação das coordenadas dos pontos que representam os valores determinados alguns alunos manifestaram dificuldade em distinguir a variável independente da variável dependente, como se constata na tabela preenchida pelo grupo G6.

Definição do modelo matemático. Os dados recolhidos foram inseridos nas listas estatísticas da calculadora gráfica, o que permitiu obter, a partir da curva de regressão que melhor se ajusta aos dados experimentais, o gráfico que traduz a situação dada. Na transcrição desse gráfico no seu caderno, alguns alunos usaram escalas diferentes na subdivisão dos eixos e não restringiram a parte do gráfico que contextualiza a situação dada, como exemplifica o gráfico construído pelo grupo G1:

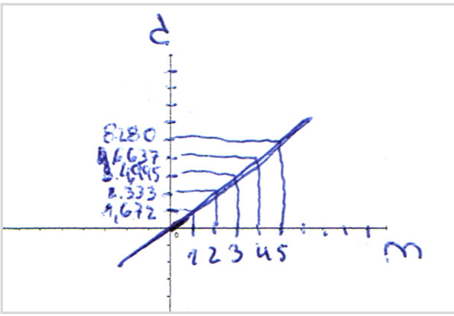


Figura 2: Gráfico elaborado pelo grupo G1.

A1G4: O d é no eixo dos x ou no eixo dos y?
Prof: Qual é a variável dependente?
A2G4: É a diferença de potencial.
Prof: No gráfico, onde é que fica a variável independente?
A2G4: No eixo dos x.
A2G2: Está mal porque não tem a mesma escala nos dois eixos.
A1G3: Há uma coisa no gráfico que não concordo.

Para mostrar a sua discordância, o aluno A1G3 apresentou no quadro o esboço do gráfico efetuado no seu grupo:

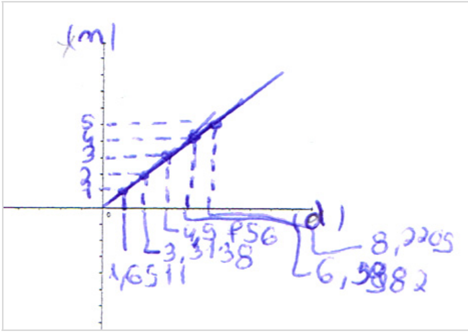
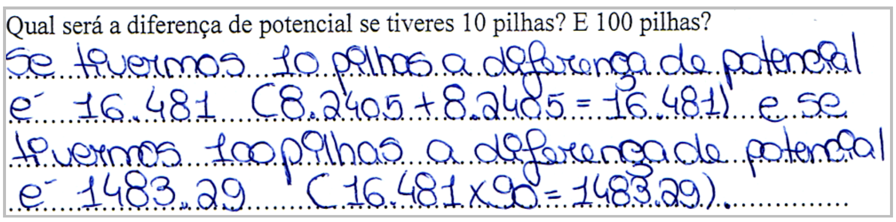


Figura 3: Gráfico elaborado pelo grupo G3.

A dificuldade que surgiu na identificação das variáveis, dependente e independente, revela que os alunos não têm clarificada a noção de função. O hábito de trabalhar com escalas monométricas faz com que a maior parte dos alunos não distinga a subdivisão dos eixos coordenados. Por outro lado, nas intervenções dos alunos sobre os gráficos representados ressalta o hábito de referirem o eixo das abcissas por x e o das ordenadas por y em vez das letras que representam o contexto destas variáveis.

Na procura do modelo matemático que se ajusta aos dados do problema, os alunos só tiveram que concretizar a indicação dada na tabela para determinar a razão entre os valores recolhidos $\left(\frac{d}{n}\right)$, o que lhes retirou a possibilidade de conjeturarem esta relação. Atendendo à natureza experimental da recolha dos dados, os grupos obtiveram diferentes valores para representar a constante que traduz o quociente entre as grandezas. Por exemplo, o grupo G2 obteve 1,6; o grupo G6 obteve o valor 1,652 e o grupo G1 obteve 1,672.

Validação do modelo matemático. A maior parte dos grupos usou o modelo matemático que encontrou para determinar a diferença de potencial de 10 pilhas e de 100 pilhas. Porém, um dos grupos, G4, para determinar a diferença de potencial de 10 pilhas recorreu à tabela para saber a diferença de potencial que tinha 5 pilhas e depois adicionou esse mesmo valor.



Qual será a diferença de potencial se tiveres 10 pilhas? E 100 pilhas?

se tivermos 10 pilhas a diferença de potencial e´ 16.481 (8.2405+8.2405=16.481) e se tivermos 100 pilhas a diferença de potencial e´ 1483.29 (16.481x90=1483.29).

Para determinarem a diferença de potencial de 100 pilhas, os alunos deste grupo multiplicaram o valor da diferença de potencial de 10 pilhas por 90, número de pilhas que falta perfazer as 100, o que revela, por um lado, que não distinguiram a diferença de potencial de grupos de 10 pilhas da diferença de potencial de cada uma das pilhas e, por outro lado, que valorizaram mais o raciocínio numérico do que o algébrico. Obtiveram assim um valor elevado para a situação apresentada, o que não lhes despertou a atenção de o questionar. Os restantes grupos usaram o modelo matemático para responder à questão.

Alguns alunos de outros grupos acharam estranho encontrar um número decimal na procura do número de pilhas necessário para obter 15,9 volts, como exemplifica a questão de uma aluna: "vai-se partir a pilha a meio?" (A4G4). Na resolução desta questão, alguns alunos sentiram dificuldade em resolver a equação literal tendo alguns aceite o valor encontrado e outros não sabiam justificar porque os valores que encontravam eram estranhos:

A3G5: Não pode ser!
Prof: E porque é que não pode ser?
A1G3: É porque foi mal medido.
Prof: Não, não estou a falar em diferença de potencial, o número de pilhas é 9,4.
A4G5: Uma pilha mais pequena.
A4G4: Porque não dá um valor certo… dá 9,4.
Prof: E tinha que dar?
A1G3: Tinha de dar 9 ou 10.
Prof: Imaginem este valor [ponto em que o número de pilhas é negativo], qual é o valor de n?
Alunos: –1.
Prof: Existe menos uma pilhas?
Alunos: Não
Prof: Outra questão que se aplica aqui, imaginem que eu quero saber quantas pilhas é que tem esta diferença de potencial como é que eu faço?
A1G1: Vamos ver na reta.
Prof: Quantas pilhas são?
Alunos: Entre dois e três.
Prof: E pode ser neste contexto? Então não tem sentido colocar aqui uma reta. A única coisa que podemos ter aqui é o quê?
A4G1: Pontos.

Apesar de os alunos terem encontrado o modelo adequado, alguns deles não responderam corretamente à questão em que se pretendia determinar a diferença de potencial de 100 pilhas, porque não conseguiram resolver corretamente a equação em ordem a *n*.

Sob pressão

Quando um gás contido num recipiente é comprimido o volume e a pressão variam. Se exerceres pressão sobre o êmbolo de uma seringa tapando o orifício com o dedo de modo a não deixar sair o ar, aumentas a pressão (em atmosferas – *atm*). Será que o volume (em cm^3) contido na seringa dependerá dessa pressão exercida? O que acontece ao volume à medida que a pressão aumenta?

Recolha e organização de dados. Os dados desta experiência foram recolhidos com um sensor de pressão, organizados numa tabela e representados num gráfico, como exemplifica a atividade efetuada pelo grupo G4:

Volume **v** (em cm³)	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
Pressão **p** (em atmosfera)	0,95285	0,99769	1,0425	1.1053	1,1681	1,2421	1,3183	1.4214	1.529	1,6523
v x p	19.057	18.956	18.766	18,79	18.689	18.631	18.456	18.478	18.348	18.176
Coordenadas dos pontos	(20;0,95285)	(19; 99769)	(18; 1.0425)	(17; 1.1053)	(16; 1.1681)	(15; 1.2421)	(14; 1.3183)	(13; 1.4214)	(12; 1.529)	(11; 1.6523)

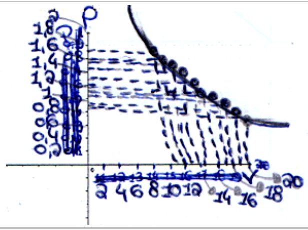


Figura 4: Tabela preenchida pelo grupo G4 e correspondente esboço gráfico.

A tendência de se registarem valores inteiros, ou com uma casa decimal, num gráfico cartesiano tende a explicar a forma desorganizada como os alunos do grupo G4 efetuaram o esboço gráfico que representa a pressão em função do volume de um gás comprimido num recipiente.

Definição do modelo matemático. A dificuldade que os alunos revelam de representar valores decimais verifica-se também na escala que alguns deles estipulam na subdivisão dos eixos coordenados, como ilustra o gráfico elaborado pelo grupo G1:

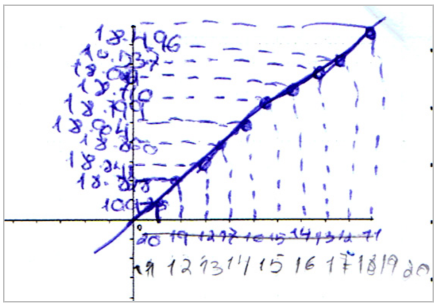


Figura 5: Gráfico elaborado pelo grupo G1.

Os alunos do grupo G1 colocam no eixo das abcissas os valores segundo a ordem como estavam registados na tabela. A forma desorganizada como representam e unem os pontos correspondentes aos dados obtidos leva a obter um esboço gráfico mais próximo de uma reta do que um ramo de hipérbole.

A maioria dos grupos considerou um número inteiro para a constante de proporcionalidade inversa e não manifesta capacidade crítica na escolha do modelo matemático, ficando satisfeitos por o gráfico que representaram se aproximar da maioria dos pontos:

Prof: Como chegaram ao $v \times p$ igual a um valor?
A4G4: Vê-se na tabela.
Prof: E agora temos três valores diferentes. Aquele 19 é o quê?
A1G3: Constante de proporcionalidade inversa.

Prof:	Outro grupo tem 18 e o outro 19,088. Cada um de vocês encontrou…
A1G3:	Uma constante diferente.
Prof:	Deu sempre 19 em todos ou 18 em todos?
Alunos:	Não.
Prof:	Então é novamente um valor…
A1G5:	Aproximado.
Prof:	Vocês efetuaram uma experiência. Já que estamos a falar de valores aproximados, porque é que em vez de 19 não colocamos 18,9 ou 19,1 ou ainda outro valor? Então vão novamente ao editor de funções e escrevam um outro modelo para verificarem se o modelo que encontraram é o melhor.

Ao aperceberem-se que podiam explorar outros valores para a constante de proporcionalidade, cada grupo procurou outros modelos que melhor traduzissem a situação apresentada.

Validação do modelo matemático. A partir da curva de regressão do modelo que encontraram, os alunos determinaram o valor da pressão quando o volume do ar é de $10\,\text{cm}^3$. O que se realçou mais nesta atividade foi a discussão sobre a dispersão entre a constante de proporcionalidade que determinaram e a constante de proporcionalidade obtida numa experiência "perfeita", como exemplifica a intervenção de um aluno do grupo G4: "Na experiência que efetuamos o resultado que encontramos na terceira linha da tabela é diferente de 19,2 porque ao fazermos a experiência não temos a certeza que colocamos mesmo os valores da seringa". O aluno indicia ter-se apercebido da imprevisibilidade inerente aos valores obtidos numa experiência e da importância de trabalhar com valores aproximados.

Volume de uma caixa sem tampa

> A Pastelaria DOCE, numa hora de muito movimento, ficou sem caixas para responder às encomendas. Para remediar a situação, um dos empregados construiu caixas sem tampa através de folhas de cartão no formato A4 (de dimensões 21cm×29,7cm). Cortou quatro pequenos quadrados geometricamente iguais nos cantos e por dobragem obteve uma caixa.

Recolha e organização de dados. Dada a importância da linguagem gráfica, os alunos analisaram e interpretaram outros gráficos que traduzem situações da vida real para além dos gráficos que representam funções de proporcionalidade direta ou inversa. Nesta tarefa, os alunos analisaram a variação do volume de caixas, sem tampa, obtidas a partir de uma folha A4 e do corte nos seus cantos de quadrados com as mesmas dimensões. Os alunos consideraram que as caixas construídas a partir dos cortes de quadrados de diferentes dimensões de uma folha A4 têm volumes diferentes:

Prof: Obtemos caixas com o mesmo volume ou com volumes diferentes?
Alunos: Volumes diferentes.
A4G1: Porque a medida das caixas é diferente logo o volume desta não pode ser igual.
A4G4: As caixas que se vão obter vão ter volumes diferentes pois o volume das caixas diminui quanto mais se cortar.
A1G5: Se vamos cortar quadrados diferentes, vamos ter volumes diferentes.
Prof: E acham que eu posso cortar diferentes quadrados e obter caixas com o mesmo volume?
A4G5: Não.
Prof: Vou distribuir por cada grupo uma folha A4, cada grupo vai construir uma caixa com o recorte que eu disser. E depois vamos discutir se as caixas têm o mesmo volume ou volumes diferentes. O grupo G2 corta quadrados de lado 1 cm, o grupo G1 corta quadrados de lado 2 cm, o grupo G3 de 4,5 cm, o grupo G5 recorta quadrados de 7 cm, o grupo G4 com 6 cm e o grupo G6 fica com 6,4 cm.

Após a construção das caixas, estas foram colocadas em cima de uma mesa para que os alunos indicassem a ordem crescente dos seus volumes:

Prof: Qual é a caixa que tem menor volume?
Alunos: A caixa de lado 1.
A4G4: A caixa de lado 7.
A1G3: Eu acho que todas têm o mesmo volume.

A turma dividiu-se em dois grupos, um que defendia que a caixa de menor volume era a que foi obtida com o corte de quadrados de lado de 1 cm e outro, o mais numeroso, que defendia que era a que foi obtida com o corte de quadrados de lado de 7 cm. Cada um destes grupos indicou a sua sequência:

Alunos: 1→2→4,5→6→7→6,4
Alunos: 7→6,4→6→4,5→2→1
Prof: Agora vamos verificar, enchendo as caixas com arroz.
Prof: Então qual é a sequência correta?
Alunos: 1→2→7→6,4→6→4,5.
Prof: E aquela ideia que o grupo G4 tinha inicialmente que era quanto maior for o quadrado que retiramos menor é o volume, acham que está correta ou não?
Alunos: Não.
Prof: Porquê?
A1G5: Porque eu aqui cortei 7 cm e a caixa tem maior volume do que a que se cortou 2 cm.

Com o enchimento das caixas que construíram com arroz, os alunos puderam confrontar as respostas que deram sobre a sequência com que ordenaram os volumes das mesmas.

Definição do modelo matemático. A maioria dos grupos sentiu dificuldade em encontrar o modelo matemático que traduz a variação do volume das caixas obtidas:

Prof: Quais são as dimensões de uma folha A4?
A1G6: 21 e 29,7.
Prof: Agora quero que determinem uma expressão que nos dê o volume de uma caixa de que recortamos o quadrado, mas que não sei qual é a medida do seu lado.
A4G3: x.
Prof: x, pode ser, então que expressão representa a largura da caixa?
A1G5: 21–2x.
Prof. E quanto é o outro lado do retângulo?
Alunos: 29,7–2x.
Prof: E o que queremos saber?
Alunos: O volume.
A1G1: Área da base vezes altura.

Os alunos definiram a expressão $V=(21-2x)(29{,}7-2x)x$ que representa o volume da caixa obtida em função do corte nos cantos de uma folha A4 de um quadrado de lado x, que a inseriram no editor de funções da calculadora gráfica. Ao transcreverem para os seus cadernos um esboço gráfico que traduz a variação do volume das caixas, os alunos não têm em consideração o domínio de validade dos valores da variável independente em função do contexto do problema, como ilustra o gráfico representado pelo grupo G2:

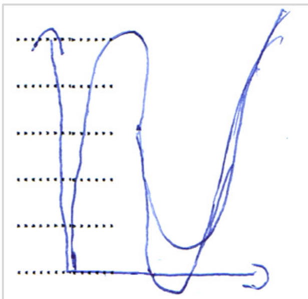


Figura 6: Gráfico elaborado pelo grupo G2.

Na apresentação do esboço gráfico no quadro, um dos alunos do grupo G2 desenhou a curva sem os eixos sem se aperceber que a representação dos eixos cartesianos da calculadora não estava ativa. Regularizada esta opção da calculadora, o aluno alterou o esboço por forma a intersetar o eixo das abcissas, mas sem questionar a possibilidade do volume assumir valores negativos. A ausência da determinação dos valores que validam a expressão encontrada fez com os alunos não se apercebessem de que o gráfico obtido pela calculadora teria que ser restringido a valores positivos inferiores a 10,5 para contextualizar a situação dada.

Validação do modelo matemático. Com a representação na calculadora gráfica do gráfico da variação do volume em função do lado do quadrado cortado nos cantos de uma folha A4, os alunos validaram a sequência que tinham formado por ordem crescente dos volumes mediante a observação do enchimento das caixas que construíram com arroz. Para isso, recorreram à calculadora gráfica e determinaram o volume das caixas quando lhes era retirado nos cantos de uma folha A4, um quadrado de lado 1 cm, 2 cm, 4,5 cm, 6 cm, 6,4 cm e 7 cm, confrontando os valores que encontraram com a sequência que tinham definido. O valor máximo desse volume foi determinado a partir da análise da representação gráfica na calculadora.

Prof:	Qual foi o valor de x que encontraram?
A4G4:	4,042.
Prof:	E o valor de y?
A4G4:	1128,495.
Prof:	Então o que é que é este x e o que é este y?
A1G3:	O valor do lado do quadrado.
A1G1:	O volume máximo.
Prof:	Esta parte do gráfico, faz sentido falarmos?
Alunos:	Não.
Prof:	Porquê?
Alunos:	Não há quadrados de lados negativos.
Alunos:	Não tem sentido falar em quadrados de comprimento negativo, o que me interessa é esta parte. Lembram-se quando eu perguntei se eu podia recortar quadrados de tamanhos diferentes e obter o mesmo volume? E a resposta foi obviamente não. Continuam com essa ideia?
A4G5:	Não.
Prof:	Porquê? Nós aqui temos um certo volume, aqui temos o mesmo volume, certo? Acham que os valores são iguais?
A1G3:	Aí são diferentes mas em cima são iguais.
A4G4:	O mesmo volume.
A4G4:	Podemos cortar quadrados diferentes e obter o mesmo volume da caixa.
A1G4:	O volume varia.
Prof:	Como é que varia?
A4G5:	Conforme o valor cortado.

Os alunos verificaram que a sua resposta inicial, cortando quadrados de lados diferentes numa folha não se obtinha caixas com o mesmo volume, estava errada.

Perspetivas dos alunos sobre a atividade com tarefas de modelação

A atividade com tarefas de modelação despertou a atenção da maior parte dos alunos por trabalhar com situações de contexto real, tal como referem os alunos do grupo G3: “com esta tarefa aprendi que a matemática está interligada com o dia-a-dia (AA, T1, A1G3); “em qualquer ato podemos encontrar algo relacionado com a matemática, neste caso com uma situação de proporcionalidade inversa” (AA, T5, A1G3). O envolvimento dos alunos na exploração das tarefas de modelação eleva mais os índices de motivação do que resolver exercícios descontextualizados, como afirma um aluno do grupo G5: “recolher os dados e aplicar o que aprendo, realmente a matemática até é divertida, já vi repuxos de água e nunca pensei que por de trás existisse matemática" (AA, T6, A4G5).

No final da experiência, os alunos consideram que as tarefas de modelação incentivam a "pensar em situações que se podem encontrar no dia-a-dia sem nos apercebermos" (E, A1G3), "são mais difíceis do que os exercícios que resolvemos na aula" (E, A2G4) e "obrigam-nos a pensar mais" (E, A4G4). Alguns alunos salientam o teor dos enunciados, por contextualizarem situações "que já tínhamos ouvido falar, mas que nunca imaginámos que podiam estar ligadas à matemática" (E, A1G6). Para a maior parte dos alunos, as tarefas de modelação ajudaram a compreender alguns conceitos e a despertar o interesse pela disciplina de Matemática, como exemplificam as seguintes afirmações: "ajudou-nos a compreender o que é a proporcionalidade direta e inversa" (E, A2G2); "alterou o interesse pela matemática porque é divertido trabalhar com a matemática assim" (E, A3G3); "a trabalhar a matemática de maneira diferente. Eu acho que foi uma motivação. Olhava para a matemática de uma maneira que não era tão maçadora" (E, A4G1).

Até ao início da experiência, a utilização de materiais tecnológicos na disciplina de Matemática reportava-se, sobretudo, aos cálculos na calculadora científica. Ao longo da experiência, alguns alunos ponderam que os materiais tecnológicos usados foram relevantes na recolha de dados, por lhes permitir "chegar aos valores para preenchermos a tabela e para conseguirmos resolver a tarefa (AA, T2, A1G6). Depois da experiência, alguns alunos diferenciam as aulas com tarefas de modelação das aulas que estavam habituados. Enquanto nas aulas ditas 'normais' trabalham com "caneta e lápis" (E, A4G6), sobre situações que "já temos os valores, é só calcular" (E, A4G1), nas aulas desta experiência salientam que "tínhamos que ir buscar os valores através da "recolha dos dados" (E, A1G4) com os "materiais que nos ajudaram a resolver as situações" (E, A1G6). Os alunos reconhecem a importância dos materiais usados na fase de recolha de dados, como salienta o aluno A2G1: "sem os materiais era muito complicado resolver as tarefas, algumas nem conseguíamos" (E, A2G1). A maior parte deles salienta a oportunidade que tiveram de serem eles próprios a mexer nos materiais e a recolher os dados, como ilustra a afirmação do aluno A3G2: "tocar nos materiais e sabermos que os resultados são aqueles e donde vieram" (E, A3G2). Por serem eles os intervenientes na recolha de dados, significa que, para alguns alunos, "sabemos o que estamos a fazer, somos nós a descobrir os valores" (E, A2G2). A compreensão de alguns dos conceitos tratados pode dever-se, segundo a perspetiva da aluna A1G3, à possibilidade de “conseguirmos ver o que acontece realmente, não é só ler e pensar” (E, A1G3).

Dos materiais que usaram nas suas atividades, os alunos destacam a calculadora, por os “ajudar a fazer gráficos” (E, A1G2), por lhes permitir recorrer “às listas para buscar os valores” (E, A1G3) de modo “a obter o melhor modelo matemático” (E, A4G5). O recurso à calculadora e aos outros materiais fez com que alguns alunos se envolvessem nas atividades propostas e apreciassem mais a disciplina de Matemática, como afirma a aluna A1G6: “trabalhar com materiais tecnológicos já se torna diferente, já estamos a trabalhar com uma coisa de que gostamos, ajudaram a gostar de uma disciplina que não gostamos muito” (E).

Durante a experiência, os alunos sentiram dificuldades na compreensão de alguns conceitos abordados, tais como determinar e usar o modelo que se ajusta a uma dada situação e aplicar alguns conceitos aprendidos em anos letivos anteriores, como ilustram as seguintes afirmações:

> Senti algumas dificuldades na proporcionalidade direta (AA, T1, A1G2);
>
> Senti dificuldade em encontrar uma equação que relacionasse o volume em função da pressão (AA, T3, A2G5);
>
> Senti dificuldades em chegar à conclusão de qual era a variável dependente e independente (AA, T4, A4G4);
>
> Senti dificuldade em encontrar a expressão analítica (AA, T4, A4G6)

No final da experiência, alguns alunos referem algumas vantagens do trabalho em grupo, tal como a possibilidade de serem eles próprios a resolver as tarefas, o que contribui significativamente para a sua aprendizagem:

> Descobrir os conceitos matemáticos sozinhos, tentamos resolver os erros sozinhos, aprendemos mais (E, A2G3);
>
> Estarmos nós a raciocinar sempre desenvolve melhor as nossas capacidades (E, A1G3);
>
> Se tivéssemos dúvidas perguntávamos aos outros elementos do grupo para aprender uns com os outros (E, A2G2);
>
> É uma forma mais prática de aprender (E, A3G6);
>
> É completamente diferente ser a professora a explicar tudo do que sermos nós a trabalhar, as aulas assim são uma forma mais divertida de aprender, foi uma forma diferente para uma pessoa ter obrigatoriamente de trabalhar (E, A4G1).

De um modo geral, a maior parte dos alunos prefere trabalhar em grupo do que individualmente. Como exemplificam as afirmações de alguns deles, reconhecem que o trabalho de grupo é uma estratégia em que “estamos mais ativos a trabalhar” (E, A2G3), o que “faz com que a matemática não seja tão cansativa, as aulas são mais interessantes” (E, A4G4).

Conclusões

Na exploração das tarefas propostas, os alunos realizaram várias atividades, entre as quais a leitura de enunciados das tarefas, recolha e organização de dados e definição e validação do modelo matemático. Os enunciados não forneciam aos alunos dados que lhes permitisse definir uma dada estratégia de resolução, os quais foram obtidos através das experiências que realizaram. Para tratarem a informação proveniente dos dados recolhidos, os alunos organizaram-nos em tabelas, o que lhes permitiu evidenciar uma das representações das funções, relacionar os dados através de pares ordenados e desenvolver a noção de função. Na realização das atividades iniciais com tarefas de modelação, a maior parte dos alunos sentiu dificuldades, em algumas das tarefas, devido a uma interpretação pouco cuidada dos enunciados. Nem sempre tiveram em atenção alguns dados importantes do problema, o que confirma os resultados que Santos (1998) obteve no seu estudo. Tal como esta autora, os alunos sentiram dificuldades na interpretação do enunciado por se esquecerem dos dados e das condições que são importantes para conseguirem chegar a uma solução adequada da tarefa proposta. Essas dificuldades podem-se dever por os alunos não estarem habituados a resolver tarefas de modelação, nem saber, principalmente no início, o que se pretendia que fizessem. Tais dificuldades tiveram implicações na recolha de dados que nem sempre foi adequada para a situação que se pretendia. Aos poucos, os alunos começaram a compreender melhor o que deviam fazer e a manifestar uma atitude mais autónoma na recolha dos dados e mais crítica dos valores que obtinham do que nas tarefas anteriores. Este resultado é sustentado por Abrantes (1995) ao referir que os alunos em atividades de modelação manifestam mais autonomia do que na resolução de outro tipo de tarefas.

O envolvimento dos alunos na recolha de dados fez com que se apercebessem do significado dos valores obtidos e trabalhassem com situações próximas da realidade em que vivem. Salientou-se o envolvimento dos alunos que revelavam dificuldades de aprendizagem na realização das tarefas. Esse envolvimento deveu-se à motivação que sentiram por poderem trabalhar com os materiais tecnológicos na realização das experiências, tomando, por vezes, a 'chefia' do grupo, o que corrobora os resultados obtidos no estudo de Lança (2007). As tarefas de modelação e o uso da tecnologia incentivam os alunos, em particular os que têm dificuldades de aprendizagem, a interessarem-se pelas atividades da aula, procurarem por sua iniciativa o que necessitam, a manifestarem gosto de aprender e hábito de trabalho e de persistência, assim como desenvolverem hábitos de colaboração nos trabalhos de grupo.

A utilização dos materiais tecnológicos foi essencial na resolução das tarefas propostas. Salienta-se a calculadora gráfica e os sensores, não só para efetuar cálculos como também para recolher dados, organizar esses dados nas listas estatísticas, consultar as listas onde se encontravam os dados, criar uma nova lista com o quociente ou produto dos valores das duas listas e para construir o gráfico que moldava a situação em estudo. A calculadora gráfica permitiu-lhes ainda validar o modelo encontrado e verificar se era um bom modelo, tal como aconteceu nos estudos de Lança (2007). Inicialmente os alunos encontravam um modelo e aceitavam-no como se fosse o melhor. Com a experiência, alguns alunos tomavam a iniciativa de procurar o melhor modelo que se ajustava à situação que estavam a estudar. Os alunos constataram a influência que os materiais que estavam a usar tinham na recolha dos dados, apercebendo-se que nem sempre chegavam a uma constante de proporcionalidade e que necessitavam de trabalhar com valores aproximados de modo a obter um modelo que se ajustasse melhor aos pontos experimentais, o que também se verificou no estudo de Lança (2007).

A representação gráfica dos dados recolhidos e a discussão dos modelos encontrados permitiu que os alunos questionassem os resultados obtidos pelos seus colegas de outros grupos. A norma instituída de que o que resultava da sua atividade poderia ser questionado desafiou os alunos a estarem seguros das suas decisões, tomadas em grupo, e fez com que os elementos do grupo participassem pois qualquer um deles poderia ser questionado quer pela professora quer pelos colegas dos restantes grupos. Trata-se de uma norma que incute no aluno a responsabilidade de regular a forma como se envolve nas atividades da aula (NCTM, 2007). O modo como participam nas atividades do grupo e pensam sobre o que fazem são fatores apontados pelos alunos como promotores das suas capacidades, bem distintos da atitude passiva de terem que passar para o caderno o que o professor diz e faz. Ao resolverem as tarefas sem que a professora lhes diga como fazer fez com que obtivessem, por vezes, diferentes respostas. A divergência de resultados faz com que os alunos fiquem com uma perspetiva diferente da matemática, daquela que é formada através de tarefas que só têm uma resposta correta e um único processo de a obter (Ponte 2005b).

Na realização das tarefas propostas os alunos manifestaram algumas dificuldades. Uma dessas dificuldades consistiu na identificação das variáveis dependente e independente. Depois dessa identificação, na construção do gráfico nem sempre representavam as variáveis nos respetivos eixos e colocavam os valores nos eixos por ordem crescente sem respeitar a mesma escala na subdivisão do mesmo eixo.

Uma outra dificuldade que foi comum a todos os grupos foi a representação de um modelo que se ajustasse à situação que estavam a estudar. Apesar de terem o esboço do gráfico na calculadora gráfica através dos dados obtidos na fase de recolha de dados, sentiram dificuldades em encontrar uma expressão algébrica que traduzisse o gráfico obtido. Esta dificuldade é confirmada por Markovits et al. (1998), que consideram que para os alunos torna-se mais difícil passar de uma representação gráfica para uma representação algébrica do que ao contrário, porque a primeira traduz visualmente o comportamento da função. Os alunos depois de obterem a representação algébrica nem sempre conseguem determinar o valor de uma das variáveis dado o valor da outra, umas vezes por dificuldade de resolver equações literais, outras por não substituírem a variável pelo valor dado. Estes resultados devem-se, segundo Ponte (2005a), por alguns alunos não serem capazes de ver a letra como representação de um número desconhecido.

Nem sempre os alunos distinguem a proporcionalidade direta da inversa. Manifestaram confusão na designação do tipo de proporcionalidade e só conseguiram distinguir através da representação gráfica da função para decidirem qual das duas hipóteses era a mais correta. Em algumas tarefas os alunos não calculavam o produto ou quociente das variáveis, pois não tinham em atenção qual a variável do denominador e do numerador. Estes resultados evidenciam a importância que as diferentes representações têm na aprendizagem de conteúdos das funções (Markovits et al., 1998; NCTM, 2007). A informação gráfica complementa, muitas das vezes, a que é apresentada numericamente ou analiticamente.

Algumas das dificuldades que os alunos sentiram deveram-se à natureza experimental das tarefas. Por mais cuidado que tivessem, os valores que obtinham nem sempre traduziam uma dada regularidade. O facto da constante de proporcionalidade não ser um valor constante dificultou, principalmente nas primeiras tarefas, o desenvolvimento da atividade dos alunos por estarem à espera de que o produto ou o quociente fosse um valor constante. Este resultado leva a concluir que esta reação dos alunos pode dever-se ao tipo de tarefas que se habituam a trabalhar durante a sua escolaridade. Perante tarefas de estrutura fechada, como a dos exercícios, de resposta única e que não implicam discussão de processos, parece que os alunos ficam com a ideia de que a sua atividade consiste em aplicar o que aprendem sem questionar o quer que seja, que os resultados que obtêm são exatos e iguais aos dos seus colegas. As tarefas como as de modelação desafiam os alunos a envolverem-se numa atividade que caracteriza a atividade matemática, que desenvolve a capacidade do aluno em interpretar uma dada situação, recolher informação, experimentar, conjeturar, discutir e argumentar os seus resultados e processos.

Os alunos consideram que por os enunciados descreverem situações que lhes eram familiares e por poderem efetuar a recolha de dados, percebendo assim como é que os valores surgiam, fez com que se sentissem mais participativos e interessados nas atividades desenvolvidas nas aulas, o que corrobora os resultados obtidos por Lança (2007). A natureza experimental das tarefas trabalhadas na disciplina de Matemática com o recurso a materiais tecnológicos constituem fatores determinantes na motivação que os alunos mostraram na realização da maior parte das tarefas. Ponte (1992) defende que a introdução de conceitos a partir de situações reais tem um significativo papel motivador, especialmente se as situações forem de natureza problemática e do interesse do aluno. Os alunos desinteressados e desmotivados pela disciplina de Matemática mostraram-se mais empenhados nas aulas em que decorreu esta experiência do que nas outras. No final da experiência, a maioria dos alunos considera que esta experiência lhe alterou a visão que tinham da Matemática, tal como também se verificou no estudo de Lança (2007). Para esta autora, os materiais tecnológicos, como a calculadora gráfica e os sensores, ajudam a desenvolver atitudes positivas nos alunos face à disciplina de Matemática. Esta posição é sustentada por Ruthven (2001), para quem a utilização das calculadoras provoca mudanças nas atitudes dos alunos face à Matemática. De acordo com os resultados deste estudo, conclui-se que nas atividades desenvolvidas nas aulas os alunos devem ser habituados desde bem cedo a pensar sobre as tarefas propostas, a discutir os seus processos e resultados com os seus colegas para que possam ser validados, em detrimento de esperar que seja o professor a dizer o que devem fazer.

Referências bibliográficas

ABRANTES, P. (1995). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a Matemática: a experiência do projecto MAT789* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa, 1994). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

APM (1988). *Renovação do Currículo da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

BLUM, W., GALBRAITH, P. L., HENN, H. W., & NISS, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education - The 14th ICMI Study*. Berlin, Germany: Springer.

BOGDAN, R., & BIKLEN, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto. Porto Editora.

CARREIRA, S. (2011). Looking Deeper into Modelling Processes: Studies with a Cognitive Perspective – Overview. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri & G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (Vol. 1, pp. 159-163). New York, United States of America: Springer. doi: 10.1007/978-94-007-0910-2_17

FEY, J. T. (1989). School algebra for the year 2000. In S. Wagner, C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 199-213). *Reston: National Council of teachers of mathematics.*

HERSCOVICS, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 60-86). Reston: National Council of teachers of mathematics.

JÚNIOR, A. G. M., & SANTO, A. O. E. (2006). *A modelagem como caminho para "fazer matemática" na sala de aula*. Acedido em 5 de Novembro de 2008 de http://www.ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/A%20Modelagem.PDF

JURKIEWICZ, S., & FRIDEMANN, C. (2007). Modelagem matemática na escola e na formação do professor. *ZETETIKÉ*, 15(28), 11-26.

KAISER, G., & MAAß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom-problems and opportunities. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education - The 14 th ICMI Study* (pp. 99-108). Berlin, Germany: Springer.

KIERAN, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

LANÇA, C. (2007). *Potencialidades das tarefas de modelação matemática com recurso a calculadoras gráficas e sensores na aprendizagem matemática dos alunos*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

MARKOVITS, Z., EYLON, B., & BRUCKEIMER, M. (1998) Difficulties students have with the function concept. In A. T. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra: K-12* (pp. 43-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MATOS, J. F. (1995). *Modelação Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

MILES, M. B., & HUBERMAN, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. Thousand Oaks:SAGE.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (1991). *Programa de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico* (vol. II). Lisboa: Imprensa Nacional.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituo de Inovação Educacional.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM e Instituto de Inovação Educacional.

NISS, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na matemática escolar. *Educação e Matemática, 23*, 1-2.

OLIVEIRA, A. M. P., & BARBOSA, J. C. (2011). Modelagem matemática e situações de tensão na prática pedagógica dos professores. *Boletim de Educação Matemática*, 24(38), 265-296.

OSANA, H., LACROIX, G., TUCKER, B. J., & DESROSIERS, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(4), 347-380.

PONTE, J. P. (1992). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática, 23*, 15-19.

PONTE, J. P. (2005a). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42.

PONTE, J. P. (2005b). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

PONTE, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática na formação de professores* (pp. 65-92). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação Secção de Educação Matemática.

REVUZ, A. (1980). *Matemática moderna Matemática viva* (2.ª ed.). Lisboa: Livros Horizonte.

RUTHVEN, K. (2001). Mathematics teaching, teacher education, and educational research: developing "practical theorising" in initial teacher education. In Fou-Lai & Thomas J. Cooney (Eds.), *Making Sense of Mathematics Teacher Education*, 165-183. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

SANTOS, F. (1998). *A actividade de aplicação e modelação matemática com recurso a ferramentas computacionais um estudo de caso com alunos do 1º ano do ensino superior*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade de Lisboa.

SCHOENFELD, A., & ARCAVI, A. (1988). On the meaning of the variable. In *Mathematics Teacher, 81* (6), 420-427.

SILVA, J. N. D., & BARBOSA, J. C. (2011). Modelagem matemática: as discussões técnicas e as experiências prévias de um grupo de alunos. *Boletim de Educação Matemática*, 24(38), 197-218.

STEIN, M. K., & SMITH, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: from research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B., & DE CORTE, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse. The Netherlands: Swets & Zeitlinger.

VISEU, F., & PONTE, J. P. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didático do futuro professor de Matemática com apoio das TIC's. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 12(3), 383-413.

VISEU, F., & PONTE, J. P. (2012). The role of ICT in supporting the development of professional knowledge during teaching practice. *Mathematics Teacher Education and Development*, 14(2), 137-158.

VISEU, F., & MENEZES, L. (2014). Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: o confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(3), 347-375. DOI: 10.12802/relime.13.1734.