REVISTA DE ESTUDIOS E INVESTIGACIÓN
EN PSICOLOGÍA Y EDUCACIÓN
eISSN: 2386-7418, 2015, Vol. Extr., No. 6.
DOI: 10.17979/reipe.2015.0.06.605

O conceito de fração – o conhecimento de professores do 1.º ciclo

Paula Cardoso, Ema Mamede
CIEC – Universidade do Minho

Resumo

As orientações curriculares recentes antecipam o ensino das frações para o 2.º ano de escolaridade e preconizam uma abordagem mais aprofundada a este tópico ainda durante o 1.º ciclo do ensino básico. O conceito de fração é um conceito reconhecidamente complexo, por um lado, e considerado essencial para a aprendizagem matemática futura da criança, por outro. Dominar o conceito de fração pressupõe compreender as suas propriedades e os seus diferentes significados. Face a todo este cenário e à escassez de estudos neste âmbito procurou-se, com este estudo, analisar o conhecimento dos professores do 1.º ciclo sobre o conceito de fração.

Palavras-chave: frações, significados de fração, conhecimento do professor.

Sobre o ensino de frações

O conceito de fração é considerado complexo, mas simultaneamente um conceito basilar na aprendizagem matemática das crianças. Possuir um completo conceito de fração implica, nomeadamente, saber representar e operar com frações em diferentes significados ou interpretações (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Nunes, Bryant, Pretzlik, Wade, Evans & Bell, 2004).

É possível encontrar na literatura diferentes classificações de significados ou interpretações de fração. Kieren (1976), baseado no conceito de subconstructo, distingue sete interpretações para o conceito de fração, a saber: quociente; medida (inclui o modelo parte-todo); razão; operador. Posteriormente, Behr *et al.* (1983), baseados na classificação inicial de Kieren, distinguiram as mesmas situações embora considerando medida e parte-todo como dois modelos distintos. Marshall (1993), baseada no conceito de 'schema', apresenta uma classificação muito idêntica à de Behr e colegas, distinguindo situações com a mesma designação. Mais recentemente Nunes *et al.* (2004), apoiados no conceito de situação de Vergnaud (1997), apresentaram uma classificação baseada no significado dos valores envolvidos na escrita de frações, distinguindo as situações quociente, parte-todo, operador e quantidades intensivas.

Apesar da diversidade de classificações existente sobre as interpretações de frações, em todas se encontram os significados parte-todo, quociente e operador. Na interpretação parte-todo, o denominador designa o número de partes iguais em que o todo foi dividido e o denominador designa o número dessas partes consideradas. Assim, $\frac{2}{3}$ na interpretação parte-todo significa que um todo – por exemplo uma barra de chocolate foi dividida em três partes iguais e duas foram consideradas (Nunes *et al.*, 2004). Na interpretação operador, o denominador designa o número de grupos iguais em que um conjunto inicial foi dividido e o numerador designa o número desses grupos a ser considerados. Na interpretação operador, a ligação entre o número descrito na situação e a fração é estabelecida operando sobre este número. Por exemplo, o Rui tem 12 caramelos e come $\frac{2}{3}$ deles, os números 2 e 3 não são diretamente percetíveis da situação; isto significa que se tem de dividir o conjunto de caramelos em 3 grupos iguais e considerar 2 destes grupos (Nunes *et al.*, 2004). Finalmente, na interpretação quociente, o denominador representa o número de recipientes e o numerador representa o número de itens a serem partilhados. Nesta interpretação, $\frac{2}{3}$ pode indicar a relação existente entre o número de itens a partilhar (por exemplo, barras de chocolate) e o número de recipientes (por exemplo, 3 crianças), mas também indica a quantidade de item que cada recipiente vai receber (exemplo, cada criança recebe $\frac{2}{3}$ da barra de chocolate) (Nunes *et al.*, 2004).

Na prática de sala de aula, é frequente abordar-se o conceito de fração reduzindo-o apenas às interpretações parte-todo e operador (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Kerslake, 1986; Cardoso & Mamede, 2013; Monteiro & Pinto, 2005). Nesta abordagem, tradicionalmente, o professor apresenta aos alunos uma figura (um retângulo ou um círculo) dividida num certo número de partes iguais, onde é assinalada uma parte delas, aparecendo a fração como uma relação entre a parte selecionada e o todo da figura. Porém, este tipo de ensino limita o conceito de fração dos alunos (Kerslake, 1986). Limita, por exemplo, o desenvolvimento da ideia de que uma fração pode ser maior do que 'um'. Efetivamente, o procedimento de começar com um 'todo' que é dividido em várias partes iguais das quais algumas são retiradas não se adapta facilmente à fração $\frac{4}{3}$, por exemplo (Kerslake, 1986).

As orientações curriculares recentes preconizam a abordagem ao conceito de fração de uma forma mais aprofundada ainda durante o 1.º ciclo do ensino básico. De acordo com estas orientações, os alunos deverão tomar contato, em particular, com diferentes significados de fração (quociente, parte-todo, medida e operador). No processo de ensino aprendizagem, o papel do professor assume-se como crucial na implementação do currículo.

Para proporcionar aos alunos uma aprendizagem matemática significativa, o professor deverá possuir um sólido conhecimento matemático (Ball, Hill & Bass,

Correspondência: Paula Cardoso, pccardoso17@hotmail.com
Selección y *peer-review* bajo responsabilidad del Grupo de Investigación G000422-GIPDAE, Universidade da Coruña, España.

2005; Connel, 2009). Desejavelmente, e tendo em conta as orientações curriculares recentes, o professor do 1.º ciclo deve dominar os aspetos essenciais do conceito de fração, tais como propriedades do conceito, significados de fração, representação e comparação de frações.

Face à escassez de estudos neste âmbito, analisa-se aqui o conhecimento do professor do 1.º ciclo sobre o conceito de fração. Para tal procurou-se responder às seguintes questões: 1) Que conhecimentos têm os professores sobre o conceito de fração? 2) Que conhecimentos têm sobre os significados quociente, parte-todo e operador?

Metodologia

Foram conduzidas entrevistas semi-estruturadas e individuais a professores do 1.º ciclo. Optou-se pela entrevista semi-estrturada pois neste tipo de entrevista não existe uma imposição inflexível das questões, tendo o entrevistado liberdade para discorrer sobre o tema com base na informação que possui (Lüdke & André, 1986).

Participantes

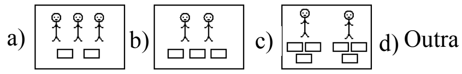
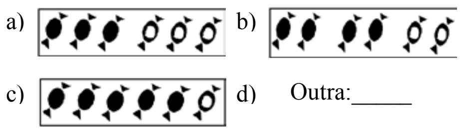
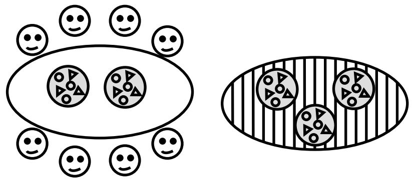
Participaram deste estudo 30 professores a lecionar em escolas públicas do distrito de Braga. Para garantir alguma diversidade da amostra, selecionaram-se professores com diferente tempo de serviço, diversidade na frequência de formação contínua em Matemática, e diversidade nos anos de escolaridade que lecionam.

A entrevista

A entrevista era constituída por três grupos de questões: um grupo focado no conceito de fração; outro grupo na representação de frações e na resposta a problemas envolvendo diferentes significados de fração (quociente, parte-todo, medida e operador); outro grupo focado na comparação de frações. As questões foram apresentadas aos professores utilizando diferentes tipos de representação – verbal, simbólica e pictórica.

Neste artigo são discutidos os resultados obtidos apenas nos dois primeiros grupos de questões. A Tabela 1 apresenta alguns exemplos de questões em cada um destes grupos (ver Tabela 1).

Tabela 1.
Alguns exemplos de questões da entrevista.

	Questões
	Como definiria o conceito de fração?
	Quantas frações existem entre 0 e 1?
Fração – conceito de propriedades	Verdadeiro ou Falso? a) Numa fração o numerador é sempre 1. b) Entre 0 e 1 existem 8 frações unitárias. c) Todo o número decimal pode ser escrito como uma fração. d) Numa fração o numerador é sempre menor do que o denominador.
	Que figura(s) pode(m) representar a fração $\frac{2}{3}$? 
	Que figura(s) pode(m) representar a fracção $\frac{2}{3}$? 
Significados de fração	Um grupo de amigos foi a uma pizaria e distribui-se por 2 mesas. Todos os amigos comeram a mesma quantidade de piza. Quantos amigos comeram na mesa da toalha de riscas? 

Procedimentos

Foi elaborado um guião com as questões que seriam colocadas aos professores. Procurou-se evitar influenciar respostas, não emitindo opiniões, deixando tempo para a resposta e evitando interrupções (Cohen *et al.*, 2007). O principal objetivo era promover uma conversa fluida no sentido de obter o máximo de informação. Cada entrevistado tinha uma folha de papel para utilizar se necessário, durante a entrevista.

Foi realizada uma gravação digital em formato áudio e preenchidas grelhas de notas individuais.

Resultados

Fração - conceito e propriedades

Quando os professores foram questionados sobre como definiriam o conceito de fração, apenas 10% dos professores apresentou uma resposta correta, referindo que a fração representa uma divisão entre dois números inteiros em que na qual o denominador é um número diferente de zero. Cerca de 63% dos professores afirmaram que "a fração representa uma divisão" e cerca de 27% dos professores afirmaram que a fração representa uma parte de um todo.

Quando questionados sobre como representar a fração *dois terços*, cerca de 73% dos professores selecionou corretamente as opções $\frac{2}{3}$ e $2 \div 3$ de entre de um conjunto de possibilidades de resposta; cerca de 17% assinala apenas a opção $\frac{2}{3}$.

Quando questionados sobre quantas frações existem entre 0 e 1, apenas cerca de 37% dos professores respondeu corretamente à questão; 10% dos professores afirmou que não existe nenhuma fração entre 0 e 1 "porque é impossível dividir o zero"; cerca de 47% dos afirmou que "existe um número finito de frações entre 0 e

1"; 10% afirmou que "existe apenas a fração 1/1" e 3.3% acredita que "existe apenas uma fração: 1/0"; 10% dos professores afirmaram que existem dez frações (dois professores apresentaram as frações "1/1, 1/2 … 1/10" e um professor apresentou as frações "0/1, 0/2 … 0/10"). Quatro professores afirmaram que existem 9 frações, 2 dos professores consideraram que essas frações são "1/2, 1/3, …, 1/10" e outros 2 professores consideraram que essas frações são "0.1, 0.2, … 0.9"; 6.7% dos professores disseram não saber responder à questão.

Numa das questões era solicitado aos professores que classificassem um conjunto de afirmações de verdadeira ou falsa. Cerca de 97% considerou que "Numa fração o numerador é sempre 1" é uma afirmação falsa. Apenas 20% dos professores considerou a afirmação "Entre 0 e 1 existem 8 frações unitárias" uma afirmação falsa. Cerca de 67% considerou verdadeira a seguinte afirmação "Todo o número decimal pode ser escrito por uma fração". Cerca de 73% considerou falsa a seguinte afirmação "Numa fração o numerador é sempre menor do que o denominador".

Os professores participantes deste estudo não dominam o conceito de fração, nem algumas das suas propriedades. Com efeito, os professores revelaram dificuldades com a definição do conceito de fração. Alguns associam o conceito de fração ao significado parte-todo, revelando um conhecimento limitado deste conceito. Esta fragilidade ficou também em evidência nos resultados obtidos no âmbito da escrita simbólica de uma fração. Neste caso, os professores reconheceram uma fração como $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), mas cerca de 17% não considera $a \div b$ como uma outra forma de escrever essa mesma fração.

Os professores parecem também estar longe de compreender a propriedade da densidade do conjunto dos números racionais, aspeto fulcral da compreensão do conceito de fração na medida em que há propriedades do conjunto dos números inteiros não negativos que não se aplicam aos números racionais.

Ainda no âmbito das propriedades das frações, vários professores consideram que o numerador tem sempre de ser inferior ao denominador para que uma fração exista. Também de forma errónea, muitos professores consideram que existir números decimais que não podem ser escritos por uma fração. Estes aspetos constituem indícios das fragilidades dos professores relativamente ao conceito de número racional.

Significados de fração

Dominar plenamente o conceito de fração pressupõe também reconhecer os significados deste conceito, dominando a representação, equivalência e ordenação de frações em cada um deles. Porém, os resultados do presente estudo revelam algumas fragilidades dos professores neste domínio. A Tabela 2 apresenta a percentagem de respostas corretas nas questões sobre a representação de frações, de acordo com os significados de fração (quociente, parte-todo e operador).

Tabela 2.
Percentagem respostas corretas nas questões sobre representação de frações, de acordo com o significado.

	Respostas corretas (%)
Quociente	4
Parte-todo	93
Operador	83

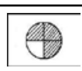
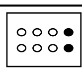
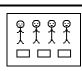
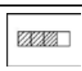
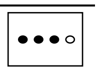
A percentagem de respostas corretas nas questões sobre a representação de frações no significado quociente é bem representativa das fragilidades dos professores. Com efeito, apenas cerca de 4% dos professores associam corretamente a representação simbólica de uma fração à sua representação pictórica e verbal no significado quociente. Em cerca de 35% das respostas apresentadas os professores consideraram que os valores do numerador e denominador da fração neste significado eram comutáveis, admitindo que o numerador e o denominador podem representar arbitrariamente os itens a repartir e os recipientes. A justificação mais comum entre os professores para não responderem a esta questão foi a de que não conhecem representações pictóricas de frações que envolvam duas variáveis de natureza diferente.

A percentagem de respostas corretas a questões sobre a representação de frações no significado parte-todo, por sua vez, vem sublinhar o que os resultados de outros estudos indicam. Ou seja, que o significado parte-todo é aquele com que os professores se sentem mais familiarizados, pelo menos no que à representação pictórica de frações diz respeito.

A percentagem de respostas corretas no significado operador, apesar de não ser tão alta quanto a percentagem de respostas no parte-todo, é também reflexo da maior familiaridade dos professores com este significado. Porém, as respostas incorretas apresentadas a esta questão prendiam-se, na sua maioria, com as dificuldades dos professores em identificar a representação pictórica de uma fração no significado operador quando o número de elementos é múltiplo do valor do denominador da fração dada. Assim, não obstante a familiaridade dos professores com o significado operador, os resultados sugerem que os professores não dominam este significado plenamente.

A Tabela 3 apresenta a percentagem de respostas corretas na questão sobre a representação pictórica da fração $\frac{3}{4}$, envolvendo os três significados de fração: quociente, parte-todo e operador.

Tabela 3.
Percentagem de respostas corretas sobre a representação pictórica de $\frac{3}{4}$.

					
Respostas corretas (%)	100	23.3	13.3	100	80

O desempenho dos professores nesta questão reflete uma vez mais a familiaridade dos professores com o significado parte-todo. Revela-se, no entanto, desconforto, por um lado, com o significado quociente, este registando apenas 13.3% de respostas corretas e, por outro, com o significado operador, este registando apenas 23.3% de sucesso numa das questões.

A Tabela 4 apresenta a percentagem de respostas corretas nos problemas envolvendo frações nos significados quociente, parte-todo e operador.

Tabela 4.
Percentagem respostas corretas nos problemas nos diferentes significados.

	Respostas corretas (%)
Quociente	83.3
Parte-todo	13.3
Operador	16.7

Apenas cerca de 17% das respostas a problemas envolvendo o significado quociente foram incorretas. Em contraste com este resultado, 13% das respostas a questões envolvendo o significado parte-todo foram corretas. Relativamente aos problemas envolvendo o significado operador, apenas cerca de 17% das respostas foram consideradas corretas.

Os resultados obtidos nos problemas envolvendo frações nos diferentes significados de fração (quociente, parte-todo e operador) contrastam com os resultados obtidos nas questões sobre a representação de frações. Com efeito, os resultados sugerem que o desempenho dos professores nas questões envolvendo os significados parte-todo e operador é superior quando se trata de representar frações. Este resultado baixa drasticamente quando estes significados surgem no âmbito de problemas. Por conseguinte, a maior familiaridade dos professores com os significados parte-todo e operador não traduz um domínio do conceito de fração nestes significados. Pois, os professores apenas revelam maior segurança nestes significados quando está envolvida a representação pictórica de frações no mesmo. Por outro lado, o desempenho dos professores às questões no significado quociente sugere que os professores de facto não estão familiarizados com a representação de frações neste contexto. No entanto, face a problemas no significado quociente, mobilizam conhecimentos que garantem um resultado mais satisfatório. Este facto pode ser mais um indício daquilo que a literatura vem demonstrando (ver Nunes *et al.*, 2004; Mamede, 2007), ou seja, de que raciocinar num contexto quociente pode ser mais intuitivo, na medida em que se raciocina sobre variáveis de natureza distinta e facilmente se aplicam esquemas de correspondência.

Discussão e conclusões

Os professores manifestam dificuldades em apresentar uma definição correta do conceito de fração. Alguns professores tendem a associar o conceito de fração ao significado parte-todo, excluindo outros significados. Mais ainda, os professores não associam a fração à expressão $a \div b$. Os resultados sugerem ainda que os professores não dominam plenamente o conceito de fração e suas propriedades. Designadamente, não reconhecem o conjunto dos números racionais como um conjunto denso. Este tipo de dificuldades foi também identificado por Alves e Gomes (2009a, 2009b) quando conduziram uma investigação com o objetivo de analisar o conhecimento e conceções de professores do 1.º ciclo no âmbito do ensino e aprendizagem dos números decimais.

Para alguns dos professores entrevistados uma fração só existe quando o valor do numerador é inferior ao valor do denominador, o que evidencia as fragilidades dos professores com o conceito de fração. Este aspeto constitui uma lacuna inaceitável para quem tem de ensinar frações.

Os professores manifestaram igualmente dificuldades com os diferentes significados de fração. No que concerne ao significado quociente, a perspetiva dos professores sobre este significado é condicionada pelo facto de não considerarem que uma fração pode representar uma relação entre duas variáveis de natureza diferente (itens e recipientes). No que concerne ao significado parte-todo, os professores revelaram conhecimentos na representação de frações, sugerindo ser este o significado com o qual se sentem mais familiarizados. Com efeito, de acordo com Monteiro, Pinto e Figueiredo (2005), nas escolas portuguesas, a primeira (e por vezes única) abordagem às frações é feita através das interpretações parte-todo e operador**.**

Apesar da familiaridade dos professores com o significado operador, os mesmos revelaram não dominar a representação pictórica de frações neste contexto. Efetivamente, alguns professores não identificaram a representação pictórica de uma fração quando o número de elementos é múltiplo do valor do denominador da fração dada. Os professores não equacionaram a possibilidade de constituir grupos de elementos. As dificuldades manifestadas sugerem que os professores não dominam o significado operador de fração na sua forma mais simples – a representação pictórica.

A reconhecida familiaridade dos professores com o significado parte-todo (ver Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Cardoso & Mamede, 2013; Kerslake, 1986; Monteiro & Pinto, 2005), não garante, como poderia pensar-se, que os professores dominam o conceito de fração neste significado. De facto, os professores parecem seguros a interpretar frações como a parte de um todo, mas manifestam muitas dificuldades em responder a problemas envolvendo o significado parte-todo. Também no significado operador os resultados sugerem que os professores não dominam o conceito de fração, apesar de terem sucesso na representação de frações neste significado.

Já no que respeita ao significado quociente, os resultados parecem confirmar a menor familiaridade dos professores com a representação de frações neste significado. No entanto, o sucesso na resolução de problemas neste significado sugere que os esquemas de ação nele envolvidos são mais intuitivos. Nunes e Bryant (2007) comparam os esquemas de ação utilizados nos significados parte-todo e quociente, concluindo que neste último se utilizam esquemas de correspondência que são mais intuitivos do que os esquemas de divisão utilizados no primeiro. No significado parte-todo o raciocínio é baseado numa relação inversa entre as quantidades envolvidas no problema, enquanto que no significado quociente o raciocínio baseia-se no aumento proporcional do número de itens.

Em suma, os resultados deste estudo sugerem que o desempenho dos professores é influenciado pelo tipo de significado envolvido na questão. Sugerem ainda que o domínio da representação de frações num significado não garante a compreensão do conceito para resolver problemas com sucesso. O estudo sugere ainda que há maior familiaridade dos professores com o significado parte-todo.

Face às dificuldades manifestadas pelos professores relativamente ao conceito de fração e às exigências das alterações recentes ao currículo para o 1.º ciclo, afigura-se premente a promoção de formação que vise colmatar estas dificuldades. Tal deverá não só debruçar-se sobre as fragilidades no conhecimento matemático dos professores, mas também atender às necessidades dos professores relativamente às estratégias educativas que reflitam as orientações curriculares em vigor. Caso contrário, pode desde já antever-se uma continuidade de práticas de ensino que não são reflexo do que é preconizado no currículo, dado não haver por parte dos professores conhecimento matemático nem didático suficientemente sólidos para ensinar frações corretamente aos alunos do 1.º ciclo do ensino básico.

Referências

Alves, B. & Gomes, A. (2009a). O conhecimento de professores do 1º ciclo do Ensino Básico sobre a densidade do conjunto dos números decimais. In Gomes, A. (Ed.), *Elementary Mathematics Education. Proceedings of the 3rd International Meeting* (pp. 73-85). Braga: AEME-Universidade do Minho.

Alves, B. & Gomes, A. (2009b). Conhecimento matemático para o ensino: exploração de tarefas envolvendo números decimais. In Gomes, A. (Ed.), *Elementary Mathematics Education. Proceedings of the 3rd International Meeting* (pp. 363-369). Braga: AEME-Universidade do Minho.

Ball, D., Hill, H., and Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(3), 14-46.

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. In Douglas A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.296-333). New York: MacMillan Publishing Company.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh and M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 92-127). New York: Academic Press.

Cardoso, P. & Mamede, E. (2013). Teaching fractions - primary school teachers' difficulties on the quotient interpretation of fractions. *Quaderni di Ricerca in Didattica / Mathematics (QRDM)*, Quaderno N.23, Supplemento n.1, 203-212.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in education*. New York: Routledge.

Connell, M. (2009). Teaching Mathematics. In L. J. Saha & A. G. Dworkin (Eds), *International Handbook of Research on Teachers* and *Teaching* (pp. 967-974). New York: Springer Science + Business Media LLC.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors – A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project.* Berkshire: NFER-NELSON.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Paper from a Research workshop*, (pp.101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Lüdke, M., & André, M. (1986). Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. Sao Paulo: EPU. *Mathematics Teaching in the Middle School, 12* (5), 244-250.

Mamede, E. (2007). A compreensão do conceito de fracção – Que papel têm as situações? *Actas do XVIII SIEM.* Lisboa: APM.

Marshall, S. (1993). Assessment of Rational Number Understanding: A Schema-Based Approach. In T. Carpenter, E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers – An Integration of Research* (pp. 261-288). Hillsdale, New Jersey: LEA.

DGE (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Documento recuperado em 09/01/2010 em http://dge.mec.pt/metascurriculares/index.php?s=directorio&pid=17

DGIDC (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular. Ministério da Educação. Acedido em 4 de Janeiro, 2008, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/PressReleases/Paginas/ProgramadeMatematicadoEnsinoBasico.aspx

Monteiro, C. & Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, 14(1), 89-104.

Monteiro, C. & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM

Monteiro, C., Pinto, H. & Figueiredo, N. (2005). As fracções e o desenvolvimento do sentido de número racional. *Educação e Matemática*, 84, 47-51.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris : 28-31, January.

Nunes, T. & Bryant, P. (2007). Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. *Key understandings in mathematics learning.* London: Nuffield Foundation.

Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes and P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics – An International Perspective* (pp. 5-28). East Sussex: Psychology Press.