



LA ARGUMENTACIÓN EN LOS TEXTOS DE BACHILLERATO: EL EJEMPLO DE LA CORRELACIÓN Y REGRESIÓN

María M. Gea¹ – Carmen Batanero¹ – J. António Fernandes² – Gustavo R. Cañadas¹
mmgea@ugr.es – batanero@ugr.es – jfernandes@ie.uninho.pt – grcanadas@ugr.es
¹Universidad de Granada (España), ²Universidad de Minho (Portugal)

Tema: Pensamiento probabilístico estadístico.

Modalidad: Comunicación breve.

Nivel educativo: Medio (11 a 17 años) y Terciario.

Palabras clave: Argumentación, libros de texto, correlación y regresión.

Resumen

Se analizan las argumentaciones de la correlación y regresión en ocho libros de texto de Bachillerato de Ciencias y Tecnología. En los textos se encuentran diversas formas de argumentación, como el uso de ejemplos y contraejemplos, la representación gráfica para apoyar una argumentación, los argumentos informales, la reducción al absurdo y las demostraciones deductivas. El nivel de argumentación es razonable, aunque algunas justificaciones en los textos pueden inducir conflictos semióticos en el estudiante.

Introducción

La correlación y regresión son ideas fundamentales por su utilidad en la predicción en diversos campos científicos. Su enseñanza se incluye en España en primer curso de Bachillerato, en las modalidades de *Ciencias y Humanidades* y *Ciencias Sociales*, siendo la correlación introducida desde cuarto curso de educación secundaria (MECD, 2015).

Para la enseñanza del tema se diseñan libros de texto, que son útiles para validar y hacer comprensibles a los estudiantes los procedimientos, propiedades, definiciones y representaciones que se enlazan en la resolución de problemas. Nos interesamos por el libro de texto, como elemento del sistema educativo que determina con frecuencia el discurso matemático escolar (Cordero y Flores, 2007), siendo una característica en ellos la presencia de justificaciones, que se usan con fines de verificación, sistematización o comunicación de los mismos (de Villiers, 1993). El objetivo de este trabajo es analizar dichas justificaciones sobre la correlación y regresión en una muestra de libros de texto de Bachillerato de Ciencias, para describir su presentación y sugerir posibles mejoras.

Marco Teórico

El estudio realizado se basa en el Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino y Batanero, 1994; 1999; Godino, Batanero y Font, 2007), que asume que un objeto matemático (en nuestro caso la correlación y regresión) emerge de las prácticas (operativas y discursivas) que realiza un sujeto al solucionar situaciones problemáticas. El sujeto construye de modo progresivo el significado sobre el objeto matemático, enmarcado en una institución determinada (encargada de transmitir dicho conocimiento). En la medida en que dicho significado personal se ajuste al significado pretendido por la institución decimos que el estudiante alcanza conocimiento del tema (Godino, Batanero y Font, 2007).

El EOS distingue distintos elementos matemáticos en la práctica, que denomina primarios: situación-problema, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos, y argumentos; y advierte de la posibilidad de que el significado de alguno de ellos sea tratado de modo limitado o impreciso (por el sujeto o por la institución), en cuyo caso se puede presentar una disparidad o discordancia en su significado que se denomina en el EOS con el término de *conflicto semiótico* (Godino, 2002).

Nos interesamos por las argumentaciones incluidas en el libro de texto, que se utilizan principalmente para validar o explicar el procedimiento y los resultados en una tarea o el uso de una propiedad, las cuales son esenciales en matemáticas, y debieran ser desarrolladas por los alumnos a partir de la etapa secundaria (Crespo y Farfán, 2005). Los estándares del NCTM (2000) indican la necesidad de incluirla a lo largo de la escolaridad, para desarrollar la capacidad de argumentación de los estudiantes. En España, se contemplan como contenidos propios de la modalidad de Ciencias, en primer curso de Bachillerato, los siguientes contenidos (MECD, 2015, p. 414):

Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc. Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc.

Razonamiento deductivo e inductivo.

Lenguaje gráfico, algebraico, otras formas de representación de argumentos.

Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático.

Tomamos conciencia de la variedad de significados atribuidos al término demostración pues, como indican Godino y Recio (2001), las propiedades y teoremas de los libros de

texto de matemáticas se consideran necesariamente verdaderos y las argumentaciones utilizadas para justificarlos suelen ser informales o no deductivas, por lo que consideramos una categorización más amplia que aquella que sólo contempla las demostraciones formales deductivas.

Antecedentes

La investigación sobre libros de texto en el tópico de la argumentación es bien escasa. En cuanto a investigaciones sobre el libro de texto en correlación y regresión destacamos la de Sánchez Cobo (1999), quien estudia las definiciones relacionadas con la correlación y regresión en once libros de texto de Bachillerato. Sus resultados muestran una presentación basada en el esquema teoría-práctica, reforzada por la ubicación de ejemplos con relación al concepto que ejemplifican. En cuanto a las demostraciones, el autor muestra una marcada función explicativa y de convicción en los textos, sin prestar atención a la necesidad de desarrollar en nuestros alumnos la capacidad de argumentar de un modo lógico.

Lavalle, Micheli y Rubio (2006) analizan la correlación y regresión en siete libros de texto orientados al nivel medio de enseñanza, considerando los conceptos y procedimientos asociados, así como sus relaciones. Clasifican los libros en niveles de profundidad; el uso de la tecnología; y analizan la deducción de fórmulas, donde sólo uno de los textos incluye la demostración de la fórmula de cálculo de la covarianza y la deducción del ajuste mínimo cuadrático de la recta de regresión a través de una representación gráfica. Por su parte, Gea, Batanero, Cañadas y Contreras (2013) identifican tres situaciones que permiten dotar de significado al tema: a) la organización de datos bivariantes; b) el estudio de la dependencia y c) el ajuste de un modelo a los datos y analizan, en los mismos textos, la presentación de la distribución bidimensional y sus representaciones (Gea, Batanero, Fernandes y Gómez, 2014).

Resultados y discusión

Se analizaron ocho libros de textos de primer curso de Bachillerato en Ciencias, elegidos por ser los más utilizados en la enseñanza pública en Andalucía y estar

publicados en editoriales de gran tradición y prestigio (Anexo 1). Seguimos la categorización de Godino y Recio (2001), que describimos a continuación.

A1. Ejemplos o contraejemplos. Este tipo de prueba ayuda a desarrollar el pensamiento inductivo (examen de ejemplos) para posteriormente generalizar, como recomienda el NCTM (2000). Según Crespo y Farfán (2005), en la mayoría de las ciencias se parte de la inducción como método para enunciar proposiciones. Este tipo de argumento se usa con frecuencia para mostrar la organización tabular de una distribución bidimensional, con la intención de generalizar el caso particular que se explica al resto de celdas de la tabla. En particular, los textos validan las definiciones de las distribuciones marginales o condicionadas utilizando justificaciones basadas en ejemplos, como por ejemplo ocurre en [T7]. Por otra parte, la introducción al estudio de la existencia de dependencia aleatoria, funcional o independencia también hace uso de este tipo de argumentación:

Si se dejan caer dos piedras desde 1 metro de altura ambas tardan el mismo tiempo en llegar al suelo. Y también, si otra piedra se deja caer desde 1,5 metros siempre tarda más en llegar al suelo que las anteriores. La ley de la gravitación se cumple siempre. Por tanto, conocida la altura desde la que se deja caer un objeto se puede saber cuánto tardará en llegar al suelo, con una certeza absoluta ([T5], p. 357).

Igualmente se utilizan para justificar propiedades de la correlación, como por ejemplo en [T6], para mostrar una dependencia exponencial en el diagrama de dispersión con los datos ajustados por una curva, o también en [T5] para validar que el coeficiente de correlación lineal tan sólo mide la dependencia lineal entre dos variables.

A2. Uso de representaciones gráficas para apoyar una argumentación. Es muy frecuente en los textos incluir representaciones gráficas para corroborar una argumentación, al igual que ocurría en el estudio de Sánchez Cobo (1999). Suelen emplearse para argumentar propiedades de la correlación y regresión, así como para el análisis de la dependencia entre dos variables aleatorias (tipo, intensidad y signo). Por ejemplo, [T3] explica cómo analizar la dependencia entre variables y apoya sus justificaciones con gráficas. La fuerza que ejerce el apoyo gráfico a este tipo de argumentación queda reflejada en el siguiente enunciado: “La relación existente entre dos variables queda reflejada en los diagramas de dispersión” ([T3], p. 272).

Cuando los textos justifican el significado de la fórmula de la covarianza también lo hacen de este modo, similar al establecido por Holmes (2001). Por ejemplo, [T1]

muestra la división del diagrama de dispersión en cuatro cuadrantes a través de las medias marginales (paralelas a los ejes y que pasan por el centro de gravedad de la distribución) y según la disposición de los datos en la nube de puntos, utiliza el gráfico para mostrar el signo de la covarianza. Estos gráficos se suelen usar para relacionar los conceptos de covarianza, recta de regresión y coeficiente de correlación lineal.

Finalmente, la mayoría de los textos justifican la pertinencia del método de mínimos cuadrados para el ajuste de la recta de regresión apoyándose en gráficas donde se visibiliza la superficie de los cuadrados determinados por los valores reales y estimados.

A3. Razonamientos verbales deductivos. Se hace uso de propiedades, axiomas o teoremas conocidos por el alumno para realizar demostraciones siguiendo un esquema lógico y de forma deductiva. Este tipo es el más utilizado en los textos analizados, como ocurre en el trabajo de Sánchez Cobo (1999). Son generalmente poco formalizados, utilizando principalmente el lenguaje verbal. Por ejemplo, se utilizan para la justificación de la bondad de las estimaciones:

Las estimaciones son buenas porque la correlación $r = 0,9994$ es muy fuerte. Además, $x_0 = 55$ °C está entre los valores manejados (entre 0 °C y 75 °C); No sería buena la estimación para $x_0 = 100$ °C, y mucho menos para $x_0 = 200$ °C ([T4], p.340).

A4. Demostración por reducción al absurdo. Se parte de la situación contraria a la que se quiere demostrar y por medio de un razonamiento deductivo, se muestra una contradicción, que lleva a negar la premisa inicial (Crespo y Farfán, 2005). Sólo lo encontramos en [T3], a modo de tarea resuelta en que se pide demostrar que dos rectas dadas no se corresponden con las rectas de regresión de X sobre Y e Y sobre X en una determinada distribución bidimensional.

A5. Argumento algebraico deductivo. Rara vez algún texto incluye argumentos deductivos a partir de lenguaje algebraico. Se suelen utilizar para demostrar algunas fórmulas de cálculo de la covarianza, del coeficiente de correlación lineal y de los coeficientes de regresión.

En la Tabla 1 se resumen los resultados del análisis. Observamos que todos los textos utilizan ejemplos y contraejemplos o gráficos como soporte de la argumentación, así como razonamientos verbales deductivos, en general, con poca formalización.

Tabla 1. Argumentos en los textos analizados

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
A1.Ejemplos y contraejemplos	x	x	x	x	x	x	x	x
A2.Gráficos auxiliares	x	x	x	x	x	x	x	x
A3.Verbales deductivos	x	x	x	x	x	x	x	x
A4.Reducción al absurdo			x					
A5.Algebraicos deductivos	x		x		x	x	x	x

Más de la mitad de los textos incluyen argumentaciones algebraicas deductivas, aunque son muy pocas las que se presentan, lo cual puede generar un conflicto en el estudiante si el profesor pide que argumente con justificaciones de este tipo sin haberle preparado previamente mediante ejemplos o tareas resueltas. Un ejemplo lo encontramos en el texto [T7], donde se pide al estudiante investigar sobre la propiedad de que el coeficiente de correlación es uno o menos uno si la pendiente de las rectas de regresión es la misma, ya que el alumno debe identificar los coeficientes de regresión, concepto que no se define en el tema, por lo que puede resultarle mucho más complicado, a pesar de que se explique que las rectas de regresión son diferentes y se incluya su fórmula. Destacamos el texto [T3], que es el único que utiliza todas las formas de argumentación que hemos analizado, y el más formalizado en sus argumentos.

Conclusiones

En general, los textos poseen un nivel de argumentación aceptable, ya que incluyen argumentaciones variadas e incluyen los diferentes tipos de argumentos considerados por Godino y Recio (2001). Hay una preferencia por argumentos informales, basados en el uso de ejemplos-contraejemplos y lenguaje gráfico, lo que nos parece adecuado, dado el nivel de enseñanza. Son más escasos los argumentos simbólicos o por reducción al absurdo. También son escasas las propuestas para que sea el alumno el que construya una argumentación, que sería particularmente interesante para los alumnos del Bachillerato de Ciencias.

Finalmente, se ha observado que algunos textos piden argumentar al alumno o presentan argumentos que podrían inducir conflictos semióticos en los estudiantes. Un ejemplo lo encontramos en [T5] (p. 363), al estudiar la bondad de ajuste, sugiriendo que la varianza de la variable dependiente que no es explicada por la variable independiente será debida a otras causas: “el coeficiente de determinación $r^2=0,88$. Esto significa en los niños de

nuestro ejemplo, el 88% de la altura se explica por la edad. El resto hasta el 100% será debido a otras causas; altura de sus padres, dieta, etc.”. Este tipo de explicación podría inducir la concepción causal, que consiste en considerar asociación entre variables estadísticas solamente cuando exista causa y efecto entre ellas (Estepa, 1994). Otro ejemplo es el comentado anteriormente ([T7]) en cuanto a la propiedad de que el coeficiente de correlación es uno o menos uno si la pendiente de las rectas de regresión es la misma.

En consecuencia, recomendamos al profesor reforzar los textos, respecto al uso de la demostración, para facilitar el aprendizaje y la creatividad del estudiante; en particular, pidiéndole que realice sus propias demostraciones informales, como se recomienda en las directrices curriculares (MECD, 2015).

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141 (MEC) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

- Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Relime*, 10(1), 7-38.
- Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socio epistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Relime*, 8(3), 287-317.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, 15-30.
- Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Bilbao: SEIEM.
- Gea, M. M., Batanero, C., Fernandes, J. A. y Gómez, E. (2014). La distribución de datos bidimensionales en los libros de texto de matemáticas de Bachillerato. *Cuadrante*, 23(1), 43-61.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.

- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1999). Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En I. Vale, y J. Portela (Eds.), *Actas de la IX Reunión de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Educación Matemática (SIEM)* (pp. 47-62). Guimarães (Portugal): Sociedad Portuguesa de Profesores de Matemáticas.
- Godino, J. D. y Recio, A. M. (2001). Significados Institucionales de la demostración: Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Holmes, P. (2001). Correlation: From picture to formula. *Teaching Statistics*, 23(3), 67-71.
- Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Relime*, 9(3), 383-406.
- M.E.C.D. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA.
- Sánchez Cobo, F.T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Anexo: Textos utilizados en el análisis

- [T1] Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas I*. Madrid: Grupo Anaya.
- [T2] Arias, J. M. y Maza, I. (2011). *Matemáticas I*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.
- [T3] Biosca, A., Doménech, M., Espinet, M. J., Fandos, M. J. y Jimeno, M. (2008). *Matemáticas I*. Barcelona: Guadiel - Grupo Edebé.
- [T4] Monteagudo, M. F. y Paz, J. (2008). *1º Bachillerato. Matemáticas. Ciencias y Tecnología*. Zaragoza: Edelvives (Editorial Luis Vives).
- [T5] Martínez, J. M., Cuadra, R. y Barrado, F. J. (2007). *Matemáticas 1º Bachillerato*. Madrid: McGraw-Hill.
- [T6] Bescós, E. y Pena, Z. (2009). *Matemáticas. 1º Bachillerato*. Navarra: Oxford University Press España.
- [T7] Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente, M. (2008). *Matemáticas I. 1º Bachillerato*. Madrid: Santillana Educación.
- [T8] Vizmanos, J. R., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas I*. Madrid: Ediciones SM.