Prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem de álgebra linear

Higher education students' readiness for the learning of linear algebra

PAULA MARIA BARROS[1]

JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES[2]

CLÁUDIA MENDES ARAÚJO[3]

Resumo

Neste artigo estuda-se a prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem de álgebra linear, salientando a natureza teórica desta área de conhecimento. Participaram no estudo alunos do ensino superior, de uma turma do 1.º ano, de um Instituto Politécnico do norte de Portugal. Os alunos responderam a um teste diagnóstico, cujas questões incorporavam conteúdos lecionados durante os anos escolares anteriores à entrada no ensino superior, considerados como pré-requisito para a aprendizagem de álgebra linear numa vertente mais teórica. Dos resultados do estudo, destacam-se as grandes dificuldades dos alunos em todos os conteúdos avaliados, verificando-se que mais de metade apresentou respostas incorretas ou não respondeu às questões colocadas, donde se conclui que os alunos não apresentam um grau de prontidão adequado para aprendizagem de álgebra linear.

Palavras-chave: *prontidão, álgebra linear, alunos do ensino superior.*

Abstract

In this paper we study the readiness of higher education students for linear algebra learning, emphasizing the theoretical nature of this area of knowledge. Higher education students participated in the study, a class of 1st year of a Polytechnic Institute from the north of Portugal. Students answered a diagnostic test, whose questions incorporated content taught during the previous school years to entry into higher education, considered as a prerequisite for learning linear algebra in a more theoretical approach. From the results of the study, we highlight the great difficulties of the students in all evaluated contents, verifying that more than half had incorrect answers or did not respond to the questions. So we conclude that students do not have an appropriate degree of readiness to learning linear algebra.

Keywords: *readiness; linear algebra; higher education students.*

[1] Instituto Politécnico de Bragança, Portugal – pbarros@ipb.pt
[2] Universidade do Minho, Portugal – jfernandes@ie.uminho.pt
[3] Centro de Matemática da Universidade do Minho, Portugal – clmendes@math.uminho.pt

1. Introdução

Os conhecimentos prévios do aluno constituem uma condicionante fundamental na aquisição de novos conhecimentos em qualquer domínio de conteúdo (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980). Aqueles conhecimentos constituem-se como facilitadores ou obstáculos a uma aprendizagem significativa (CORREIA; FERNANDES, 2014) consoante sejam compatíveis ou conflituem com o conhecimento normativo que à escola compete transmitir.

Subjacente à aprendizagem significativa encontra-se uma visão integrada na aquisição do conhecimento, em contraposição com uma visão cumulativa (MOREIRA, 2012). Nesta perspetiva, a construção do novo conhecimento tem de ligar-se com o conhecimento preexistente e não simplesmente acrescentar-se a esse conhecimento. Ora, essas ligações, conexões ou relações, para além de permitirem desenvolver os significados desses conhecimentos, também contribuem para a sua retenção visto que tais ligações facilitam a evocação de conhecimentos a partir de outros que com eles estão relacionados.

Face à influência dos conhecimentos prévios na aprendizagem dos alunos, compreende-se a sua grande relevância, donde é do maior interesse identificar tais conhecimentos tendo em vista a organização de um processo de ensino-aprendizagem adequado aos alunos. Nesse sentido, no presente artigo, estudam-se os conhecimentos prévios que possuem alunos do ensino superior que frequentam a unidade curricular de álgebra linear, e considerados fundamentais para a aprendizagem significativa dos conteúdos a lecionar neste âmbito.

A área científica de álgebra linear constitui-se como uma temática em que os alunos apresentam grandes dificuldades, com elevadas taxas de insucesso escolar (CELESTINO, 2000; COIMBRA, 2008; DORIER, 2000) e que os alunos consideram difícil de aprender e os professores difícil de ensinar (GUEUDET-CHARTIER, 2004; DORIER; ROBERT; SIERSPINSKA, 2000). Assim, aditando aos aspetos antes referidos, as conclusões e pontos de vista afirmados pelos autores destes estudos reforçam a necessidade da realização de estudos nesta área científica, tal como aquele que aqui se apresenta.

2. Enquadramento Teórico

Unidades curriculares da área de álgebra linear fazem parte de muitos cursos do ensino superior, designadamente de cursos da área de matemática, ciências e engenharia.

Geralmente, essas unidades curriculares são integradas logo no primeiro ano dos respetivos cursos.

Embora muitas temáticas de álgebra linear sejam abordadas essencialmente no ensino superior, as aprendizagem anteriores dos alunos revelam-se importantes na aquisição dos novos conhecimentos na medida em que estes se constroem sobre elas. A este propósito, Day e Kalman (1999) são de opinião que, numa etapa anterior à universitária, é possível abordar a esse nível a seguinte lista de conceitos e procedimentos: operações com matrizes; interpretação de vetores; linearidade e combinações lineares e conhecimentos de geometria, essencialmente retas e planos no espaço tridimensional.

Em Portugal, antes da entrada no ensino superior, os alunos exploram alguns conteúdos sobre álgebra ao longo do ensino básico e secundário[4]. Sobretudo no ensino secundário, relacionado com a álgebra linear, são trabalhados conteúdos sobre sistemas de equações lineares, algumas noções sobre vetores, aspetos de lógica e métodos de prova matemática (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2001).

Como foi antes referido, a álgebra linear é uma fonte de dificuldades para muitos alunos do ensino superior, o que se deve, segundo Dorier (2000), à sua natureza teórica, em que se exigem elevados níveis de abstração e se destacam conhecimentos sobre lógica elementar e métodos de prova. Dorier e Sierspinska (2001) focam, ainda, o facto da álgebra linear ser um “composto explosivo” de linguagens e sistemas de representação e como os professores parecem assumir que essas conversões são naturais e óbvias e não precisam de qualquer trabalho concetual, alternam constantemente entre essas linguagens, registos e modos de representação sem dar o tempo necessário aos alunos para fazer as conversões e discutir a sua validade.

Rogalski (1990, citado em OLIVEIRA, 2005), com base na constatação do fracasso dos estudantes na aprendizagem de álgebra linear em França, descreve e analisa os comentários de estudantes de universidades francesas sobre as dificuldades apresentadas na sua aprendizagem. Partindo da questão: “Quais são para vocês as dificuldades deste domínio (álgebra linear)?”, que colocou aos alunos da sua pesquisa, conclui que as dificuldades estavam relacionadas, sobretudo, com cinco fatores: o elevado grau de abstração; dificuldades apresentadas em certas noções, como a de espaço vetorial, base e dimensão; a grande quantidade de definições e resultados novos; dificuldades resultantes

[4] O sistema de ensino português engloba 12 anos de escolaridade antes da entrada no ensino superior, dos quais os primeiros nove correspondem ao ensino básico e os três últimos ao ensino secundário.

dos cálculos requeridos e, finalmente, os problemas de rigor nas demonstrações e a utilização dos símbolos.

Da sua análise, o autor deduziu algumas das causas destas dificuldades, sendo uma delas o desconhecimento ou a deficiente interpretação da lógica elementar da Matemática, que leva o aluno a ter dificuldades nas demonstrações. Ao citar a dificuldade dos alunos em relação à implicação e equivalência, Rogalski relata que, numa demonstração de independência linear, os alunos concluem: "se os a_i são nulos, ao mostrar que $a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0$, então os u_i são linearmente independentes" (p. 35). Ora, tal não é verdade, pois a demonstração deve ser feita de maneira inversa, isto é, para que $a_1u_1 + ... + a_nu_n = 0$, os a_i devem ser nulos. Deste modo, os alunos não distinguem entre a demonstração de uma proposição e a sua recíproca. Também Barros, Araújo e Fernandes (2013), numa questão sobre matrizes, verificaram que alguns alunos consideram que mostrar que uma afirmação é falsa é equivalente a provar a falsidade da afirmação recíproca.

Sierpinska (2000), ao analisar aspetos do pensamento do estudante de álgebra linear, na universidade de Concórdia, apresenta diversas atividades que ilustram o facto de os alunos, tendencialmente, resolverem as questões segundo uma perspetiva mais prática do que teórica. Neste estudo, ela detetou, nos estudantes, problemas com definições matemáticas, as quais foram apresentadas de forma incorreta ou incompleta. Por exemplo, questionados para formular uma definição de igualdade de vetores geométricos usando termos como 'paralelo' ou 'paralelogramo', os estudantes escreveram frases como: "No paralelogramo, dois vetores paralelos são iguais uns aos outros porque o comprimento, direção e orientação são os mesmos"; "Dois vetores são iguais se eles são paralelos"; "Dois vetores são iguais se eles são os lados opostos de um paralelogramo" (p. 217). Fazendo a análise das respostas, a autora afirma que não houve qualquer definição estruturalmente correta e completa entre as soluções dos alunos. No seu entender, a estrutura gramatical da primeira afirmação não é a de uma definição e as afirmações seguintes, embora tenham essa estrutura, estão incompletas já que a segunda ignora o comprimento e a orientação e a terceira ignora a orientação.

De acordo com Hillel (2000), num determinado nível, as dificuldades dos alunos em álgebra linear resultam simplesmente da sua inexperiência com provas e do não reconhecimento da necessidade de provas. Mais concretamente, este autor afirma que:

> (…) as dificuldades dos alunos relacionadas com as provas incluem: não compreender a necessidade de provas nem as várias técnicas de prova, não sendo capazes de lidar com os quantificadores, muitas vezes implícitos; confundir condições necessárias e suficientes; fazer generalizações apressadas com base em evidências muito instáveis e escassas (p. 191).

No mesmo sentido, Alvarado e González (2009) referem que quando os estudantes começam os seus estudos universitários têm grandes dificuldades no reconhecimento, compreensão e construção de provas. Num estudo, que realizaram com estudantes de matemáticas aplicadas, constataram que estes apresentaram, entre outras, as seguintes dificuldades: utilização indiferenciada da implicação ($p \Rightarrow q$) e da sua recíproca $(q \Rightarrow p)$ ou da fórmula ($\sim p \Rightarrow \sim q$) e a crença de que um simples exemplo é suficiente para provar uma afirmação. Também Barros, Fernandes e Araújo (2012) e Barros et al. (2013) constataram, em tarefas sobre matrizes e sistemas de equações lineares, que alunos do ensino superior apresentaram apenas um exemplo que verifica uma dada propriedade para afirmarem a sua validade.

Hillel (2000) considera, ainda, que numa disciplina de álgebra linear típica existem dois tipos de obstáculos epistemológicos. O primeiro decorre da familiaridade dos alunos com a geometria analítica e coordenadas de um vetor em relação à base canónica. Pensar sobre vetores e transformações em contexto geométrico certamente liga essas noções às mais familiares. Contudo, observa que o nível de pensamento geométrico pode tornar-se num obstáculo ao pensamento sobre base (em vez de eixos) e sobre a necessidade de mudança de base. O outro obstáculo acontece porque as noções específicas relacionadas com IR^n foram aprendidas pelos alunos. Essas noções resolvem uma variedade de problemas que são direta ou indiretamente ligados à noção central de sistemas de equações lineares. Assim, este nível de descrição algébrica torna-se um obstáculo à aprendizagem da teoria geral e à aceitação de outro tipo de objetos, tais como funções, matrizes ou polinómios como vetores.

Corroborando este ponto de vista, Gueudet-Chartier (2004) destaca que a ligação com a geometria ajuda a aprendizagem da álgebra linear, mas que esta não pode ser construída como uma mera generalização da geometria, devendo antes ser abordada em diversos domínios matemáticos e ser associada a outros assuntos como polinómios, funções, sequências, etc.

Face às muitas dificuldades detetadas nos alunos em álgebra linear, a equipa de investigadores franceses do IREM, citada por Artigue, Chartier e Dorier (2000), apresenta as seguintes sugestões para o ensino da disciplina: a) Estabelecer objetivos para a compreensão de algumas noções básicas (por outras palavras, limitar o conteúdo e adiar a formalização de certas noções que só podem ser estudadas numa fase inicial com a ajuda de exemplos); b) Limitar o vocabulário e os símbolos ao que é estritamente necessário e adequado (para evitar sobrecarregar os alunos); c) Usar exemplos que os alunos já conheçam da escola secundária (geometria e equações). Objetos como funções e polinómios são muito complexos para principiantes; d) Escolher exercícios e instrumentos de avaliação que testem a verdadeira compreensão e não apenas a manipulação mecânica dos conceitos; e) Ensinar aos alunos como se estrutura uma demonstração; f) Dar aos alunos as representações; g) Manter esta metodologia de ensino em futuras disciplinas voltadas para a álgebra linear; h) Integrar nas aulas resultados decorrentes da investigação em educação matemática.

3. Método

No presente estudo avalia-se a prontidão de alunos do ensino superior para a aprendizagem da unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica, que se integrava no 1.º ano do curso de Licenciatura em Engenharia Química e Biológica, de um Instituto Politécnica da região norte de Portugal.

No estudo participaram 23 alunos de uma turma que frequentava a unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica, do curso acima referido. Quanto à disciplina de Matemática, que frequentaram pela última vez antes de entrar no ensino superior, à exceção de um aluno, que frequentou a disciplina de Matemática no 12.º ano, em Cabo Verde, todos os outros frequentaram a matemática de um curso de especialização tecnológica. Nesta última disciplina, menos exigente do que outras que dão igualmente acesso ao ensino superior, a classificação mais frequente, numa escala de 0 a 20 valores, foi de 10 valores (27,3%), com média de 12,3 e desvio-padrão de 2,21, donde se conclui que estes alunos não possuíam uma formação muito sólida a matemática.

A avaliação da prontidão dos alunos para a aprendizagem de álgebra linear, no âmbito da unidade curricular em questão, foi realizada através da aplicação de um teste diagnóstico, constituído por 10 questões versando aprendizagens prévias, desenvolvidas ao longo do ensino básico e secundário, e consideradas como propedêuticas da aprendizagem a efetuar no âmbito da unidade curricular do ensino superior. Neste artigo apresentam-se os resultados obtidos relativos a apenas cinco dessas questões, as quais realçam a natureza teórica da álgebra linear, tal como é preconizado por Dorier (2000).

As cinco questões aqui analisadas, que se apresentam na próxima secção de resultados, versam vários conteúdos e aspetos matemáticos vistos como relevantes para a aprendizagem da vertente teórica da álgebra linear, designadamente: na questão 1 questionam-se os alunos sobre propriedades das operações de adição e multiplicação, aspeto estrutural da matemática muito presente na álgebra linear; na questão 2 é solicitado aos alunos a resolução de uma equação que, a ser resolvida pela lei do anulamento do produto, incorpora aspetos lógicos e algorítmicos; na questão 3, os alunos deviam determinar o produto escalar de dois vetores de IR^3, algoritmo que é utilizado, por exemplo, na multiplicação de matrizes; e, finalmente, nas questões 4 e 5 testa-se a validade de raciocínios matemáticos; no primeiro caso com base num exemplo que verifica a propriedade e, no segundo caso, trata-se de distinguir entre uma proposição e a sua recíproca.

O teste diagnóstico foi realizado numa aula da unidade curricular e os alunos puderam dispor de todo o tempo necessário para lhe responderem, o que se concretizou entre 40 a 60 minutos.

Finalmente, em termos de análise de dados, estudaram-se os tipos de respostas, classificadas em corretas e incorretas, e os raciocínios desenvolvidos pelos alunos em algumas dessas questões em termos de frequências, apresentando-se também, quando pertinente, exemplos dos raciocínios exibidos pelos alunos.

4. Resultados

Nesta secção faz-se a apresentação dos resultados segundo cada uma das cinco questões do estudo.

4.1.Questão 1

Em anos anteriores estudou algumas propriedades das operações de adição e multiplicação, designadamente: propriedade comutativa, propriedade associativa, existência de elemento neutro, existência de elemento absorvente, existência de simétrico, existência de inverso e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Identifique as propriedades das operações de adição ou multiplicação utilizadas em cada caso:

a) $6\times 1=6$; **b)** $3\times 5=5\times 3$; **c)** $0\times 9=0$; **d)** $4+0=4$;

e) $3\times\frac{1}{3}=1$; **f)** $3\times(2+4)=3\times 2+3\times 4$; **g)** $5+(-5)=0$; **h)** $5+(1+3)=(5+1)+3$.

Nesta questão avalia-se a capacidade de os alunos identificarem várias propriedades das operações de adição e multiplicação aplicadas em situações numéricas. Na Tabela 1 apresenta-se a distribuição das respostas dos alunos à questão 1, classificadas em corretas, incorretas e não responde.

Tabela 1: Respostas dos alunos nas alíneas da questão 1

	Respostas		
Alíneas	Corretas	Incorretas	Não responde
a)	5 (21,7%)	9 (39,1%)	9 (39,1%)
b)	9 (39,1%)	11 (47,8%)	3 (13,0%)
c)	7 (30,4%)	14 (60,9%)	2 (8,7%)
d)	10 (43,5%)	6 (26,1)	7 (30,4%)
e)	11 (47,8%)	7 (30,4%)	5 (21,7%)
f)	15 (65,2%)	6 (26,1%)	2 (8,7%)
g)	14 (60,9%)	5 (21,7%)	4 (17,4%)
h)	5 (21,7%)	13 (56,5%)	5 (21,7%)

Fonte: dados da pesquisa

Observando os dados da Tabela 1, verifica-se que a percentagem de respostas corretas varia entre 21,7% e 65,2%, o que leva a concluir que os alunos tiveram uma considerável dificuldade em responder a esta questão. Mais de metade dos alunos identificaram corretamente as propriedades “distributiva da multiplicação em relação à adição” e a “existência de simétrico na adição”. Nas restantes propriedades, foram menos de metade os alunos que as identificaram corretamente, revelando-se mais difíceis as propriedades “1 como elemento neutro da multiplicação” e “associativa da adição”, onde apenas cerca de um aluno em cinco as identificaram corretamente.

4.2. Questão 2

> Resolva a equação $(x+1)(x-7)=0$.

Nesta questão pretende-se que os alunos resolvam uma equação em que o primeiro membro é um produto de fatores lineares e o segundo é zero, o que conduz a uma resolução mais simples por aplicação da lei do anulamento do produto. Em termos de respostas dos alunos, classificadas em corretas e incorretas (não se observaram não respostas), 10 alunos (43,5%) apresentaram uma resposta correta e 13 alunos (56,5%) apresentaram uma resposta incorreta.

Embora mais de metade dos alunos tenha dado uma resposta incorreta, o que destaca as dificuldades por eles sentidas, todos eles usaram algum tipo de conhecimento para responder.

Os alunos que responderam corretamente utilizaram como raciocínio a lei do anulamento do produto (2 alunos, **Figura 1**) ou efetuaram primeiro a multiplicação dos fatores e determinaram as raízes da equação do segundo grau, assim obtida, pela fórmula resolvente (8 alunos, **Figura 2**).

Figura 1: Resolução pela lei do anulamento do produto

$$x+1=0 \quad \vee \quad x-7=0$$
$$x=-1 \quad \vee \quad x=7$$

Fonte: dados da pesquisa (A21)

Figura 2: Resolução pela fórmula resolvente

$$x^2-7x+x-7=0$$
$$x^2-6x-7=0$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot(-7)}}{2\cdot1}$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}$$
$$x=\frac{6\pm\sqrt{64}}{2}$$
$$x=\frac{6+8}{2} \vee x=\frac{6-8}{2}$$
$$x=7 \vee x=-1$$

Fonte: dados da pesquisa (A18)

As respostas incorretas resultaram dos alunos efetuarem cálculos incorretos quando tentavam obter a equação do segundo grau (2 alunos) ou aquando da aplicação da fórmula resolvente (8 alunos, Figura 3), por não saberem a fórmula resolvente (2 alunos, Figura 4) ou não darem continuidade à resolução depois de efetuar o produto para obter a equação de segundo grau (1 aluno), eventualmente por não se recordar da fórmula. Por exemplo, o aluno A20 (Figura 3) comete o erro de não considerar que o produto de dois números negativos é um número positivo, erro que foi cometido por vários alunos.

Figura 3: Erro no sinal do produto

$$\Leftrightarrow x-7x+x-7=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x-7=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times(-7)}}{2\times1} \Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}$$

Fonte: dados da pesquisa (A20)

Já o aluno A16 (Figura 4) não identifica corretamente a fórmula resolvente para resolver a equação.

Figura 4: Fórmula resolvente incorreta

$$(x+1)(x-7)=0 \Leftrightarrow x^2-7x+x-7=0 \Leftrightarrow x^2-6x-7=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-b^2 \pm \sqrt{-4ac}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-(-6)^2 \pm \sqrt{-4.1.(-7)}}{2.1} \Leftrightarrow x=\frac{6^2 \pm \sqrt{28}}{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{36+\sqrt{28}}{2} \wedge x=\frac{36-\sqrt{28}}{2}$$

Fonte: dados da pesquisa (A16)

Na globalidade das questões, foi nesta que os alunos demonstraram melhor desempenho, tendo as respostas incorretas origem, fundamentalmente, em erros de cálculo. Contudo, das resoluções dos alunos, salienta-se que 10 deles (43,5%) começaram por efetuar o produto dos dois binómios e obtiveram uma equação do segundo grau que resolveram através da fórmula resolvente, o que constitui um método mais trabalhoso do que aquele que resulta da aplicação da lei do anulamento do produto. Esta opção dos alunos revela uma atitude pouco crítica, ao não serem capazes de analisar a situação-problema tendo em vista a seleção do método de resolução mais eficiente, o que, por sua vez, pode também explicar os muitos erros de cálculo cometidos pelos alunos.

4.3. Questão 3

Determine o produto escalar, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, dos vetores $\vec{u}=(2,4,6)$ e $\vec{v}=(3,0,5)$.

Nesta questão requer-se a determinação do produto escalar de dois vetores de IR^3. Em termos de respostas dos alunos, classificadas em corretas, incorretas e não responde, verificou-se que nenhum aluno respondeu corretamente, 11 alunos (47,8%) responderam incorretamente e 12 alunos (52,2%) não responderam.

Constata-se, assim, que os alunos ou não responderam ou deram uma resposta incorreta. Analisando as respostas incorretas, verifica-se que a maior parte desses alunos tem alguma ideia do algoritmo utilizado no cálculo, pois efetuam devidamente o produto entre as componentes homólogas dos vetores dados. Contudo, eles falham quando consideram que o resultado é um vetor e não um escalar (Figura 5), mesmo quando inicialmente representam a soma relativa a esse escalar (Figura 6).

Figura 5 — Produto escalar como vetor

$$(2,4,6).(3,0,5)=(6,0,30)$$

Fonte: dados da pesquisa (A17)

Figura 6 — Produto escalar como vetor

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2\times 3)+(4\times 0)+(6\times 5)$$
$$= (6, 0, 30)$$

Fonte: dados da pesquisa (A6)

Eventualmente, nestes casos, os alunos podem estar a confundir os conceitos de produto escalar e produto vetorial, uma vez que nesta última operação o resultado é um vetor.

4.4. Questão 4

> Para provar que a afirmação "A soma de dois números pares é um número par" é verdadeira, o João apresentou o seguinte raciocínio:
> "Como 2 e 4 são números pares e $2+4=6$ também é um número par, logo posso concluir que a afirmação é verdadeira."
> Indique, justificando, se considera válido o raciocínio do João.

Nesta questão pretende-se que o aluno reconheça que a verificação de uma propriedade para um caso particular não permite concluir que a propriedade é válida em todos os casos considerados. Em termos de respostas dos alunos, classificadas como corretas, parcialmente corretas, incorretas e não responde, verificou-se que nenhum aluno respondeu corretamente, 1 aluno (4,3%) apresentou uma resposta parcialmente correta, 20 alunos (87,0%) apresentaram uma resposta incorreta e 2 alunos (8,7%) não apresentaram qualquer resposta.

Nesta questão não houve respostas corretas. Os alunos centraram a sua resposta no conhecimento prévio da veracidade da afirmação "a soma de dois números pares é um número par", não questionando e aceitando como válido o raciocínio do João, e acabando por não responder ao que era pedido. Por outro lado, o facto de ser frequente os alunos considerarem uma afirmação válida com base apenas em alguns exemplos, também poderá ter contribuído para este tipo de resposta.

Há porém uma resposta, que se considerou parcialmente correta, que se destaca das outras na medida em que o aluno tenta demonstrar a propriedade para o caso geral (Figura 7). Contudo, este é um tipo de resposta ainda bastante limitado pois considera os dois números pares iguais e não apresenta qualquer conclusão ou explicação sobre o facto de $4n$ ser par.

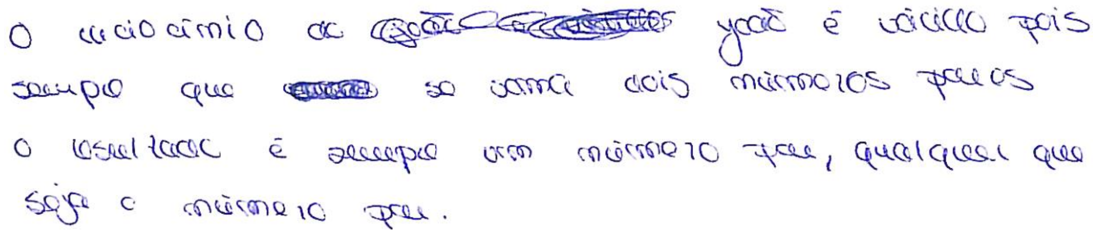
Figura 7 — Tentativa de prova da propriedade

$$2n + 2n = 4n$$

Fonte: dados da pesquisa (A19)

Nas respostas incorretas podem identificar-se dois tipos de resoluções: um em que os alunos reafirmam a validade da afirmação (11 alunos, Figura 8) e outro em que os alunos, para além disso, acrescentam também um ou mais exemplos para enfatizar a sua veracidade (9 alunos, Figura 9 e Figura 10).

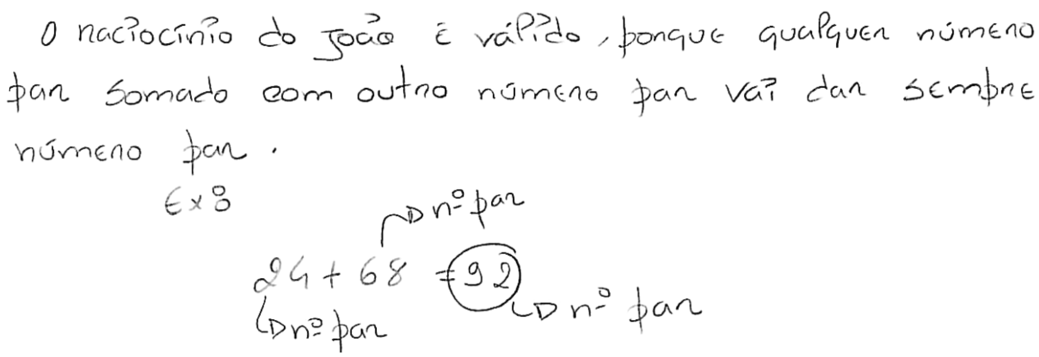
Figura 8: Reafirmar a validade da afirmação



Fonte: dados da pesquisa (A8)

Na sua resposta, o aluno A8 limita-se a reafirmar o que é dito no enunciado da questão, sem acrescentar nada de novo e significativo.

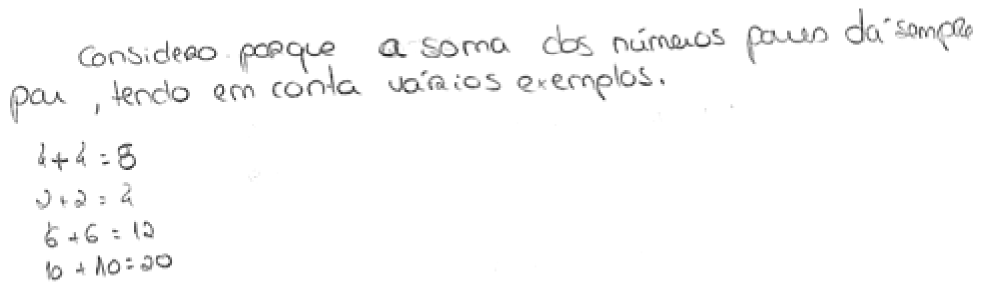
Figura 9: Apresentação de um exemplo



Fonte: dados da pesquisa (A2)

Tal como na resposta anterior, do aluno A8, os alunos A2 e A22 reafirmam também a propriedade referida no enunciado. Todavia, neste caso, o aluno A2 acrescenta um exemplo que verifica a propriedade em questão e o aluno A22 acrescenta quatro exemplos que também a verificam.

Figura 10: Apresentação de vários exemplos



Fonte: dados da pesquisa (A22)

Os resultados obtidos nesta questão mostram que os alunos têm uma visão de prova muito deficiente pois quase metade (48%) deles limita-se a repetir o que é afirmado no enunciado e muitos outros (39%) validam a propriedade com base num ou mais exemplos que a verificam.

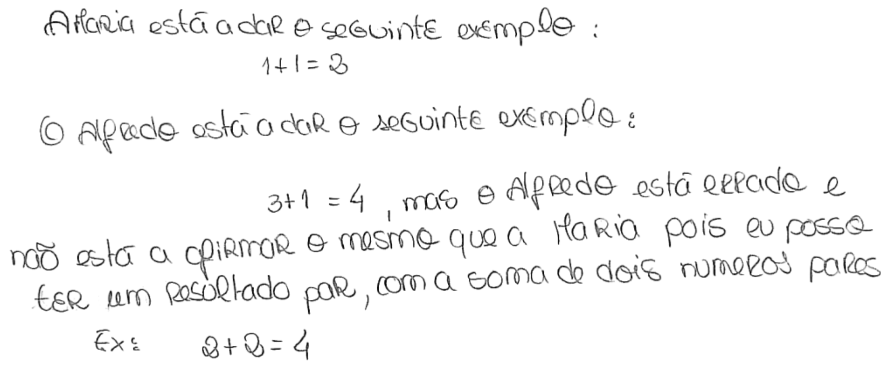
4.5. Questão 5

Considere a propriedade: A soma de dois números ímpares é um número par. Maria e Alfredo reescreveram esta propriedade da seguinte forma: Maria: – Se dois números são ímpares, a sua soma é um número par. Alfredo: – Se a soma de dois números é um número par, esses dois números são ímpares. Indique, justificando, se a Maria e o Alfredo estão a afirmar o mesmo.

Nesta questão requer-se que o aluno identifique a reescrita de um enunciado verbal na forma de implicação e que a distinga da sua recíproca. Em termos de respostas dos alunos, classificadas como corretas, incorretas e não responde, 10 alunos (43,5%) apresentaram a resposta correta, 11 alunos (47,8%) apresentaram uma resposta incorreta e 2 alunos (8,7%) não responderam.

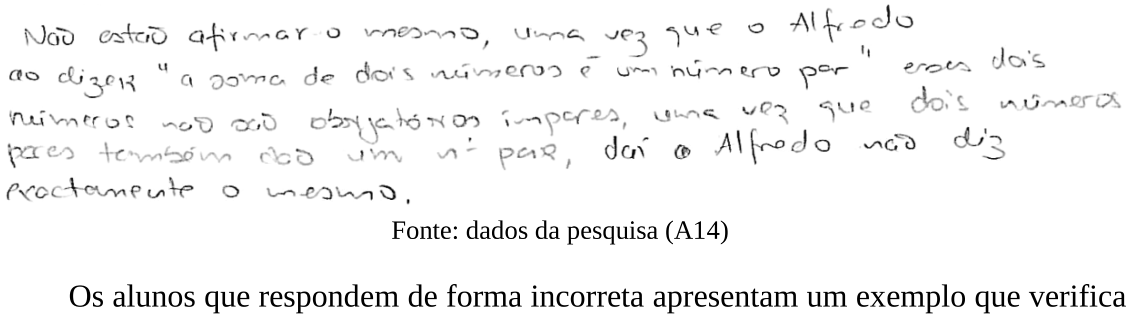
Os alunos que apresentam respostas consideradas corretas contestam a veracidade da afirmação recíproca através de contraexemplos (Figura 11) ou citando propriedades gerais (Figura 12). Em todos estes casos, os alunos concluem que como a primeira implicação é verdadeira e a sua recíproca é falsa, as afirmações não traduzem a mesma informação.

Figura 11: Apresentação de um contraexemplo


A Maria está a dar o seguinte exemplo :
1+1 = 2
O Alfredo está a dar o seguinte exemplo:
3+1 = 4 , mas o Alfredo está errado e não está a afirmar o mesmo que a Maria pois eu posso ter um resoltado par, com a soma de dois numeros pares
Ex: 2+2 = 4

Fonte: dados da pesquisa (A17)

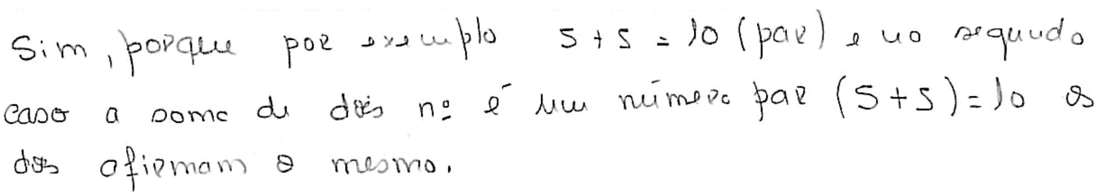
Figura 12: Utilização de propriedades gerais


Não estão afirmar o mesmo, uma vez que o Alfredo ao dizer "a soma de dois números é um número par" esses dois números não são obrigatórios ímpares, uma vez que dois números pares também dão um nº par, daí o Alfredo não diz exactamente o mesmo.

Fonte: dados da pesquisa (A14)

Os alunos que respondem de forma incorreta apresentam um exemplo que verifica ambas as afirmações, a implicação e a sua recíproca, ou um exemplo diferente para cada afirmação, concluindo com base nos exemplos apresentados, que as duas afirmações traduzem a mesma informação (Figuras 13 e 14).

Figura 13: Exemplo que verifica ambas as afirmações

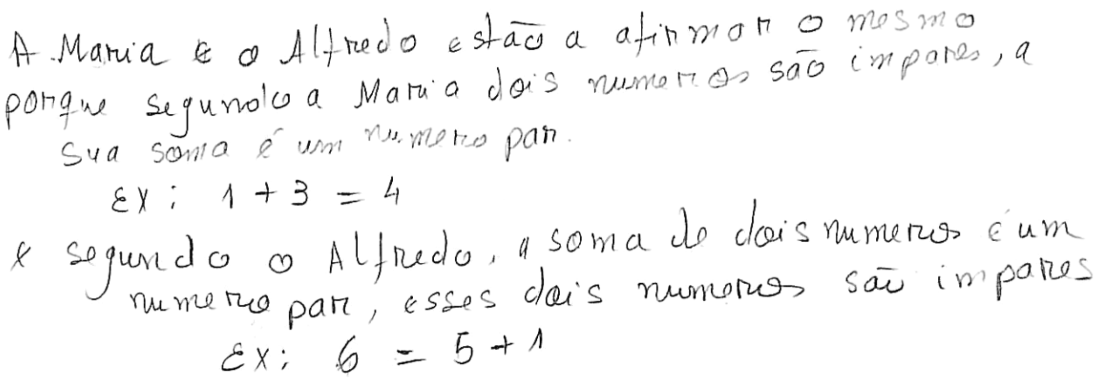


Sim, porque por exemplo 5 + 5 = 10 (par) e no segundo caso a soma de dois nº é um número par (5 + 5) = 10 os dois afirmam o mesmo.

Fonte: dados da pesquisa (A10)

Nesta resposta, o aluno A10 usa os mesmos valores para verificar ambas as implicações, o que parece indiciar que o aluno em questão não terá distinguido claramente o significado das duas afirmações, a implicação e a sua recíproca.

Figura 14: Exemplos diferentes para verificar cada uma das afirmações



A Maria e o Alfredo estão a afirmar o mesmo, a porque segundo a Maria dois numeros são impares, a sua soma é um numero par.
Ex: 1 + 3 = 4
e segundo o Alfredo, a soma de dois numeros é um numero par, esses dois numeros são impares
Ex: 6 = 5 + 1

Fonte: dados da pesquisa (A4)

Já na resposta do aluno A4 parece mais clara a distinção entre as duas afirmações, a implicação e a sua recíproca, falhando o aluno em verificar que, no caso da recíproca, existem pares de números pares cuja soma é igualmente um número par.

5. Conclusão e discussão

Os resultados da avaliação diagnóstica revelam um panorama muito problemático face às possibilidades destes alunos terem sucesso na aprendizagem de álgebra linear. Excetuando duas alíneas da questão 1, em todas as outras alíneas e questões a maioria dos alunos, sistematicamente, apresentou uma resposta incorreta ou simplesmente não apresentou qualquer resposta.

Esta situação agrava-se mais no caso das questões 3 e 4, em que se pretendia que os alunos determinassem o produto escalar de dois vetores de IR^3 e a validade de uma propriedade com base num exemplo que a verificava, onde nenhum aluno apresentou a resposta correta.

A validação de uma proposição a partir de um exemplo consolida o mesmo resultado observado nos estudos de Barros et al. (2012, 2013), obtido quando os alunos já tinham estudado os conteúdos de álgebra linear. Face a esta constatação, conclui-se que esta dificuldade dos alunos tem uma origem anterior à aprendizagem da álgebra linear e que o seu ensino não foi suficiente para a ultrapassar. Uma situação semelhante, embora menos acentuada, verifica-se na questão 5, em que se trata de distinguir entre uma proposição e a sua recíproca (BARROS ET AL., 2013).

O mesmo se verificou na questão 1, em que a maioria dos alunos não foi capaz de reconhecer propriedades das operações de adição e multiplicação, e na questão 2, em que se tratava de resolver uma equação. Nesta última questão revela-se ainda a fraca capacidade crítica dos alunos, quando quase todos eles optaram pela aplicação da fórmula resolvente em vez da lei do anulamento do produto, que seria um método de resolução da equação muito mais simples e imediato.

Em conclusão, os resultados do teste diagnóstico mostram que os alunos não exibem um nível de prontidão adequado para a aprendizagem de álgebra linear, pelo menos relativamente à sua vertente teórica (DORIER, 2000). Uzuriaga López, Arias Mendoza e Manco Silva (2010) chegaram a uma conclusão similar num estudo em que, com base numa prova sobre conceitos e conhecimentos prévios para frequentar álgebra linear, observaram que 84% dos alunos não a conseguiram superar. Também Celis, Kurdobrin, Pérez, Sabatinelli e Guzmán (2012), no seu trabalho com alunos dos anos iniciais de engenharia de uma Universidade da Argentina, observaram dificuldades que revelavam a falta de articulação entre o que os alunos aprenderam no ensino médio e as exigências da educação superior, em particular na matemática, que na sua opinião necessita de um domínio adequado dos conhecimentos e habilidades precedentes para os alunos poderem enfrentar com êxito os novos conteúdos.

Assim, perante as muitas dificuldades reveladas pelos alunos, torna-se indispensável desenvolver algum tipo de remediação que lhes permita vencê-las, seja no âmbito da aprendizagem da álgebra linear ou num curso introdutório prévio ao ensino da unidade curricular de álgebra linear.

Quer numa unidade curricular introdutória quer na própria unidade curricular de álgebra linear, os alunos devem ser questionados sobre os conhecimentos prévios considerados decisivos na aprendizagem da álgebra linear, como aqueles aqui avaliados, para que se consciencializem dos seus conhecimentos limitados, ou mesmo errados, e invistam na sua superação com a ajuda do professor.

Agradecimento. Este trabalho contou com o apoio de Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto PEst-OE/CED/UI1661/2014 do CIEd-UM.

Referências

ALVARADO, A.; GONZÁLEZ, M. T. A study of university student' performance with proof. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Matematiche)*, Suplemento 2, 2009, p. 348-352.

ARTIGUE, M.; CHARTIER, G.; DORIER, J.-L. Presentation of other research works. In Dorier, J.-L. (Ed.). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 247-271.

AUSUBEL, D.; NOVAK, J.; HANESIAN, H. *Psicologia educacional*. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

BARROS, P. M.; ARAÚJO, C. M.; FERNANDES, J. A. Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes. In FERNANDES, J. A.; MARTINHO, M. H.; TINOCO, J.; VISEU, F. (Orgs.). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2013, p. 295-308.

BARROS, P. M.; FERNANDES, J. A.; ARAÚJO, C. M. Raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares. In Pinto, H.; Jacinto, H.; Henriques, A.; Silvestre, A.; Nunes, C. (Orgs.). *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2012, p. 333-347.

CELESTINO, M. R. *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo, 2000.

CELIS, M. B.; KURDOBRIN, A. I.; PÉREZ, M.V; SABATINELLI, P. A.; GUZMÁN, M. E. Una propuesta para evaluar la comprensión de algunos conceptos básicos del álgebra lineal. In Veiga, D. (Ed.). *Acta de la IX Conferencia Argentina de Educación Matemática*. Argentina, Buenos Aires: SOAREM - Sociedad Argentina de Educación Matemática, 2012, p. 263-267.

COIMBRA, J. L. *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará, 2008.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A. Intuições de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada no contexto de extração de bolas de um saco. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 16, n. 2, p. 295-321, 2014.

DAY, J. M.; KALMAN, D. Teaching linear algebra: what are the questions? American University, USA, Washington, 1999. Consultado em julho 4, 2011, em www1.american.edu/academic.depts/cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/questions.pdf

DORIER, J.-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra.* Kluwer Academic Publishers, 2000.

DORIER, J.-L.; ROBERT, A.; SIERPINSKA, A. Conclusion. In Dorier, J.-L. (Ed.). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 273-276.

DORIER, J.-L.; SIERPINSKA, A. Research into the teaching and learning of linear algebra. In Holton, D. (Ed.). *The teaching and learning of mathematics at university level.* Kluwer Academic Publishers, 2001, p.255-273.

GUEUDET-CHARTIER, G. Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and its Applications*, 379, p. 491-501, 2004.

HILLEL, J. Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In Dorier, J.-L. (Ed.). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 191-207.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Programa de Matemática A (10.º, 11.º e 12.º anos).* Lisboa: Autor, 2001.

MOREIRA, M. A. O que é afinal aprendizagem significativa? *Qurriculum*, n. 25, p. 29-56, 2012.

OLIVEIRA, L. C. *Como funcionam os recursos-meta em aula de álgebra linear?*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SIERPINSKA, A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In Dorier, J.-L. (Ed.). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 209-246.

UZURIAGA LÓPEZ, V. L.; ARIAS MENDOZA, J. J.; MANCO SILVA, D.G. Algunas causas que determinan el bajo rendimiento académico en el curso de álgebra lineal. *Scientia et Technica*, n. 44, p. 286-291, 2010.

Enviado: 05/09/2015
Aceito: 28/01/2016