# Tézisfüzet a
# Problems in infinite graph theory with finite counterpart
# című doktori disszertációhoz

Joó Attila

MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálás Kutatócsoport

Témavezető: Sági Gábor, Ph.D.

a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos főmunkatársa és a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Algebra Tanszékének docense

Belső konzulens: prof. Komjáth Péter, D.Sc.

a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Matematikai Doktori Iskola

Vezető: prof. Laczkovich Miklós, D.Sc.

a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Doktori Program: Elméleti matematika

Vezető: prof. Szűcs András, D.Sc.

a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja

Budapest, 2017

# Tartalomjegyzék

## Bevezető

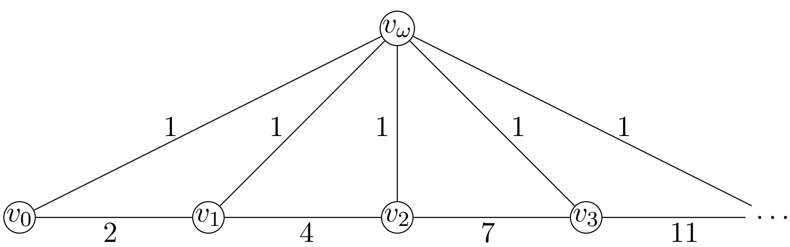
A végtelen gráfok kutatásának nagy tradíciója van Magyarországon. Ez volt az egyik kedvenc területe Erdős Pálnak, a magyar matematika egyik legkülönlegesebb, legnagyobb hatású képviselőjének. Erdős ezen kutatásainak gyakori kiindulópontja volt véges gráfelméleti tételek végtelen általánosításainak a keresése (egy kiváló összefoglaló erről [18]). A terület újabb eredményei közül elsősorban R. Aharoni, R. Diestel, C. Thomassen és S. Shelah munkái inspiráltak minket.

Némely véges gráfelméleti tétel triviális okokból hamis végtelen gráfokra vagy igaz marad ugyan a végtelen esetben (esetleg valamilyen megszorítással) de lényegében ugyanaz a bizonyítás működik mint a véges esetben. Disszertációnkban olyan esetekre koncentrálunk, ahol a végtelen eset tárgyalása a véges esethez képest lényeges új gondolatokat igényel.

A disszertáció hét fejezetének mindegyikében egy-egy különálló, véges gráfelmélet által motivált, végtelen gráfelméleti eredményünk kerül bemutatásra. Jelen tézisfüzetben ezen eredményeket mutatjuk be tömören, bizonyítások nélkül.

## 1. Gomory-Hu fák végtelen, élsúlyozott gráfokban

Legyen $G = (V, E)$ egyszerű gráf és legyen $c : E \to \mathbb{R}_+$ egy költségfüggvény. Hívjuk $V$ részhalmazait vágásoknak. Azt mondjuk, hogy $X$ egy $\boldsymbol{u - v}$ **vágás** ha $u \in X$ és $v \notin X$. Az $X$ vágás szeparálja az $u$ és $v$ csúcsokat ha $X$ egy $u - v$ vágás vagy egy $v - u$ vágás. Legyen $\boldsymbol{d_c(X)} = \sum_{e \in \mathsf{out}_\mathsf{G}(\mathsf{X})} c(e)$ és legyen $\boldsymbol{\lambda_c(u, v)} := \inf\{d_c(X) :\ X \text{ is a } u-v \text{ cut }\}$ ha $u \neq v \in V$. Az $X$ vágás egy **optimális** $u-v$ vágás ha $u-v$ vágás és $d_c(X) = \lambda_c(u, v)$. Egy $T = (V, F)$ fa **Gomory-Hu fa** $(V, E, c)$-re nézve, ha minden $u \neq v \in V$ esetén van $e \in F$, hogy az **$e$-hez tartozó alapvágások** (azaz a $T - e$ gráf komponenseinek csúcshalmazai) optimálisan szeparálják az $u$ és $v$ csúcsot. Gomory és Hu igazolta [15], hogy véges gráf esetén mindig létezik Gomory-Hu fa. Mi általánosítottuk ezen eredményüket végtelen gráfokra [7] azzal a megszorítással, hogy a költségek összege véges (azaz $\sum_{e \in E} c(e) < \infty$). Megmutattuk, hogy ez a megszorítás nem elhagyható. Például a következő élsúlyozott gráfnak nincsen Gomory-Hu fája.




1. ábra. Bármely csúcspár elválasztható véges vágással, de nem létezik Gomory-Hu fa

Valójában egy általánosabb tételt bizonyítottunk, ahol a vágások költségeit nem feltétlenül egy élsúlyozott gráf indukálja:

**1. Tétel.** *Legyen $V$ megszámlálható és $b : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, melyre:*

*0.* $b(X) = 0 \iff X \in \{\varnothing, V\}$,

*1.* $b(X) = b(V \setminus X)$ *ha* $X \subseteq V$ *(b szimmetrikus),*

*2.* $b(X) + b(Y) \geq b(X \cap Y) + b(X \cup Y)$ *ha* $X, Y \subseteq V$ *(b szubmoduláris),*

3. *ha* $(X_n)$ *egy* $\subseteq$*-csökkenő sorozat, akkor* $b(\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n) = \lim b(X_n)$ *(b monoton-folytonos),*

4. *minden* $u \neq v$ *esetén van* $X$*, melyre* $b(X) < \infty$ *és* $X$ *egy* $u - v$ *vágás. (b végesen szeparál).*

*Ekkor létezik egy absztrakt Gomory-Hu fa a b-re nézve, azaz van egy* $T$ *fa a* $V$ *csúcshalmazon, hogy bármely* $u \neq v \in V$ *esetén van olyan* $X$ *alapvágása* $T$*-nek melyre* $b(X) = \inf\{b(Y) : u \in Y \wedge v \notin Y\}$.

## 2. Nagy összefüggőségű végtelen digráfok, melyek nem tartalmaznak egy adott csúcspár között éldiszjunkt oda-vissza utakat

R. Aharoni és C. Thomassen megmutatták egy konstrukcióval sok összefüggőséggel kapcsolatos véges gráfelméleti tételről, hogy végtelen gráfokra már nem igazak.

**2. Tétel** (R. Aharoni és C. Thomassen, [11])**.** *Minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén van egy* $k$*-összefüggő* $G = (V, E)$ *gráf és* $s, t \in V$*, hogy tetszőleges az* $s$ *és* $t$ *csúcsok közötti út éleit törölve a maradék gráf már nem összefüggő.*

Mi a véges digráfoknak a következő élösszefüggőséggel kapcsolatos tulajdonságának megváltozását vizsgáltuk a végtelen esetben. Ha $D$ egy véges, $k$-élösszefüggő digráf, akkor minden $s_1, t_1, \dots, s_k, t_k \in V(D)$ esetén találhatóak páronként diszjunkt $P_1, \dots, P_k$ irányított utak, hogy $P_i$ az $s_i$-ből megy $t_i$-be. Ez a tény azonnal következik Edmond fenyő tételének erős alakjából (16. Tétel illetve [14] 349. oldal 10.2.1 tétel) vagy például Mader alábbi tételéből.

**3. Tétel** (W. Mader, [19])**.** *Legyen* $D = (V, A)$ *egy* $k+1$*-élösszefüggő véges digráf és legyen* $s, t \in V$*. Ekkor van egy olyan* $P$ *irányított út* $s$*-ből* $t$*-be, hogy a* $(V, A \setminus A(P))$ *digráf* $k$*-élösszefüggő.*

Konkrét konstrukcióval igazoltuk, hogy nincs olyan $k \in \mathbb{N}$, ami végtelen digráfok esetén garantálja, hogy bármely $s_1, t_1, s_2, t_2$ csúcsok esetén létezik egy $s_1 \to t$ és egy $s_2 \to t_2$ út, melyek éldiszjunktak. Még abban a speciális esetben sem, amikor $t_1 = s_2$ és $t_2 = s_1$.

**4. Tétel** (A. Joó, [2])**.** *Minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén létezik* $k$*-élösszefüggő* $D$ *digráf, amiben nem léteznek éldiszjunkt oda-vissza utak alkalmas* $s, t \in V(D)$ *csúcsok között.*

**5. Probléma.** *Mi az a legnagyobb* $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*, hogy tetszőleges* $k \in \mathbb{N}$*-re létezik megszámlálható,* $k$*-élösszefüggő* $D = (V, A)$ *digráf és* $s_n, t_n \in V$ $(n < N)$*, hogy* $m < n < N$ *esetén nincsenek* $D$*-ben éldiszjunkt* $s_m \to t_m$ *és* $s_n \to t_n$ *utak?*

A 4. Tétel felhasználásával könnyen megmutatható, hogy $N \geq 3$.

## 3. Egy végtelen digráf éleinek irányított körökre való particionálhatósága

Könnyű belátni, hogy egy véges digráf élhalmaza pontosan akkor partícionálható irányított körökre, ha minden csúcs esetén a ki- és befok egyenlő. Végtelen digráfokra ez már nem igaz, tekintsünk például egy mindkét irányban végtelen irányított utat. Nash-Williams igazolta a következő irányítatlan gráfokról szóló tételt.

**6. Tétel** (Nash-Williams, [20])**.** *Egy irányítatlan gráf élhalmaza pontosan akkor particionálható körökre, ha nincs benne páratlan sok élt tartalmazó vágás.*

Megszámlálható $G$ esetén a probléma könnyű, megszámlálhatónál nagyobb $G$-re válik nehézzé. Soukup Lajos elemi részmodellek segítségével adott Nash-Williams fenti tételére egy jelentősen rövidebb bizonyítást, és általános módszert dolgozott hasonló felbontási problémák kezelésére (lásd [22], 5.1 és 5.4 Tételek). Nash-Williams ismerte az előbbi tételének irányított gráfokra vonatkozó megfelelőjét is, de hozzáférhető bizonyítást nem találtunk hozzá, csak említést.

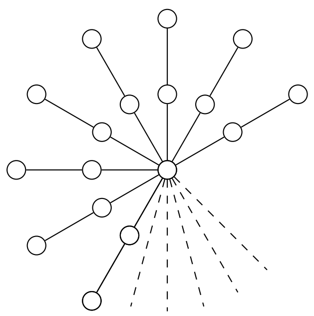
**7. Tétel** (Nash-Williams, [20] 237. old. Tétel 3'). *Egy végtelen digráf élhalmaza pontosan akkor particionálható irányított körökre, ha minden vágásban az egyik és a másik irányba menő élek számossága egyenlő.*

Az irányítatlan eset L. Soukup-féle bizonyítását olvasva megsejtettük és beláttuk a fenti irányított esetet [4]. Ehhez L. Soukup „jól-tükröződő" tulajdonságokon alapuló elemi részmodelles fölbontási technikájának egy módosítását használtuk. A fő nehézség az irányítatlan esethez képest, hogy míg irányítatlan esetben egy páratlan vágás az egy véges tanú a feltétel sérülésére, addig az irányított esetben nem garantálható hasonló véges tanú.

# 4. T-kötések végtelen gráfokban

Legyen $G$ egy irányítatlan gráf és legyen $T \subseteq V(G)$. ***T*-kötés** alatt páronként éldiszjunkt $G$-beli utak egy olyan $\mathcal{P}$ rendszerét értjük, melyre a $\mathcal{P}$-beli utak végpontjai a $T$ halmaz egy kételemű halmazokra való particionálását adják (más szavakkal a $T$-beli csúcsokat párosítjuk éldiszjunkt $G$-beli utakkal). A $T$-kötések hasznos eszköznek bizonyultak kombinatorikus optimalizálási problémákban, egy alapvető példa erre a Kínai postás probléma. Véges $T$ és összefüggő gráf esetén könnyű belátni, hogy $T$-kötés létezésének szükséges és elégséges feltétele $|T|$ párossága.

Mi $T$-kötések létezésével kapcsolatos problémákat vizsgáltunk végtelen gráfokban. Végtelen $T$ esetén nem feltétlenül létezik $T$-kötés egy összefüggő, végtelen gráfban. Tekintsünk például egy végtelen csillagot, osszuk fel minden élét egy új csúccsal, és válasszuk $T$-t a teljes csúcshalmaznak.



2. ábra. Ha egy végtelen csillag minden élét felosztjuk egy csúccsal, akkor a teljes csúcshalmazra nézve nincsen $T$-kötés.

Egyik eredményünk, hogy lényegében ez az egyetlen ellenpélda.

**8. Tétel** (A. Joó, [5]). *Egy végtelen összefüggő $G$ gráfhoz pontosan akkor található végtelen $T \subseteq V(G)$, hogy $G$-ben nincs $T$-kötés, ha $G$-ből élösszehúzásokkal és hurkok törlésével megkapható a 2. ábrán látható felosztott végtelen csillag.*

A másik eredményünk ezen területen ahhoz kapcsolódik, hogy $T$ véges megváltoztatásai hogyan befolyásolják a $T$-kötés létezését. Véges $T$ és összefüggő $G$ esetén ha nem létezik $T$-kötés, akkor ha kidobunk egy csúcsot $T$-ből, vagy beleveszünk egy újat, akkor már lesz. (Ez nyilvánvaló, hiszen ekkor csak $|T|$ paritásától függ a $T$-kötés létezése.) Meglepő módon azonban ez igaz marad a végtelen esetben is.

**9. Tétel** (A. Joó, [5]). *A $\{(G,T) :\ G$ összefüggő gráf és $T \subseteq V(T)\}$ osztály az alábbi három nem üres részosztályra particionálható:*

*(A) $G$ minden olyan $T'$ esetén tartalmaz $T'$-kötést, melyre $|T' \triangle T| < \infty$,*

*(B) $G$ minden olyan $T'$ esetén tartalmaz $T'$-kötést, melyre $|T' \triangle T|$ véges és páros, de egy olyanra sem, melyre páratlan,*

*(C) $G$ minden olyan $T'$ esetén tartalmaz $T'$-kötést, melyre $|T' \triangle T|$ véges és páratlan, de egy olyanra sem, melyre páros.*

## 5. Megszámlálható Menger tétel végeskörű matroidokkal a bemenő éleken

A Menger tétel (él-változat, irányított) a következőt mondja ki.

**10. Tétel** (Menger). *Legyen $D = (V, A)$ egy véges, irányított gráf, ahol $s \neq t \in V$. Ekkor az éldiszjunkt $s \to t$ utak maximális száma egyenlő az $s \to t$ utakat lefogó élek minimális számával.*

Erdős Pál még tanulmányai alatt megfigyelte, hogy a tétel igaz marad végtelen esetben is (számok helyett számosságokat mondva), de érezte, hogy nem ez az „igazi” végtelen általánosítása a tételnek. Megfogalmazta sejtésként az „igazi” végtelen általánosítást (Erdős-Menger sejtés). Megfigyelte, hogy a véges tételben egy maximális méretű $\mathcal{P}$ útrendszer és egy minimális méretű $C$ lefogó élhalmaz szükségképpen úgy viszonyul egymáshoz, hogy $C$ minden $\mathcal{P}$-beli útból pontosan egy élt tartalmaz és $C$ minden eleme valamely $\mathcal{P}$-beli útra esik (komplementaritási feltételek). Az Erdős-Menger sejtés azt állítja, hogy végtelen esetben is mindig létezik a komplementaritási feltételeket teljesítő $(\mathcal{P}, C)$ pár. Részeredmények hosszú sora és évtizedek vezettek a sejtés pozitív megválaszolásához, az első igazán jelentős áttörés a megszámlálható eset igazolása volt.

**11. Tétel** (R. Aharoni, [9]). *Legyen $D = (V, A)$ egy megszámlálható digráf és tegyük fel, hogy $s \neq t \in V$. Ekkor létezik páronként éldiszjunkt $s \to t$ utaknak egy $\mathcal{P}$ rendszere és egy az $s \to t$ utakat lefogó $C \subseteq A$, hogy $C$ minden $\mathcal{P}$-beli útból pontosan egy élt tartalmaz és $C$ minden eleme valamely $\mathcal{P}$-beli útra esik.*

R. Aharoni és E. Berger végül 2009-ben belátták az eredeti sejtést is (lásd [10]), ami a végtelen gráfelmélet egyik csúcsteljesítménye. Mi Ron Aharoni fenti, megszámlálható Menger tételének a következő matroidos erősítését láttuk be.

**12. Tétel** (A. Joó, [8]). *Legyen $D = (V, A)$ egy megszámlálható digráf és tegyük fel, hogy $s \neq t \in V$. Legyen továbbá adva minden $v \in V$ esetén egy végeskörű $\mathcal{M}_v$ matroid a $v$-be belépő éleken és jelölje $\mathcal{M}$ az $\mathcal{M}_v$ matroidok direkt összegét. Ekkor létezik páronként éldiszjunkt $s \to t$ utaknak egy $\mathcal{P}$ rendszere, ahol $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} A(P)$ független $\mathcal{M}$-ben, és létezik egy $C \subseteq A$, melyre $\mathsf{span}_{\mathcal{M}}(C)$ lefogja az $s \to t$ utakat, hogy $C$ minden $\mathcal{P}$-beli útból pontosan egy élt tartalmaz és $C$ minden eleme valamely $\mathcal{P}$-beli útra esik.*

**13. Probléma.** *Elhagyható-e a megszámlálhatósági feltevés $D$-re illetve a végeskörűségi feltevés az $\mathcal{M}_v$ matroidokra a fenti tételben?*

## 6. King-serf duo monokromatikus utakra nézve élszínezett turnamentekben

Ez az eredmény Bérczi Kristóffal közös. Kutatásunkat Erdős Pál következő sejtése motiválta [21, 274. oldal].

**14. Sejtés** (Erdős). *Minden pozitív $k$ egész esetén van egy (legkisebb) $f(k)$ pozitív egész, hogy tetszőleges, véges, $k$-élszínezett $T$ turnamentben létezik $S \subseteq V(T)$, hogy $|S| \leq f(k)$, és minden csúcsból $S$ elérhető monokromatikus úton $T$-ben.*

Ismert, hogy $f(1) = f(2) = 1$, továbbá példák mutatják, hogy ha $f(3)$ jól definiált, akkor $f(3) \geq 3$ (lsd. [21]). Nem ismert viszont $n \geq 3$ esetén, hogy $f(n)$ létezik-e. Erdős azt sejtette, hogy $f(3) = 3$. Az eredeti sejtés egy gyengítése, hogy ha diszjunkt nyelő és forrás halmazokat keresünk csak nyelő halmaz helyett. Ennél azonban tovább megyünk és csak legfeljebb kettő hosszú monokromatikus utakat engedünk meg az eléréseknél. Pontosabban fogalmazva egy **king-serf duo a monokromatikus utakra nézve** egy $K$ és egy $S$ csúcshalmazból áll, ahol $K \cap S = \varnothing$ és minden $v$ csúcsra van egy legfeljebb kettő élből álló monokromatikus út, ami vagy $K$-ból megy $v$-be vagy $v$-ből megy $S$-be. A duo mérete $|K| + |S|$.

Fő eredményünk a következő:

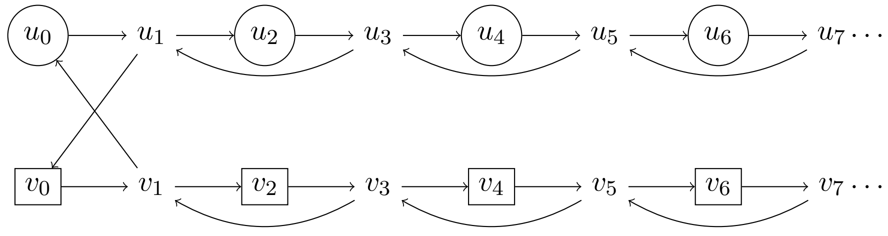
**15. Tétel** (K. Bérczi és A. Joó, [6]). *Minden (véges vagy végtelen) $\kappa > 0$ számossághoz van egy $\lambda_\kappa$ számosság, hogy minden $\kappa$-élszínezett turnamentben létezik egy king-serf duo a monokromatikus utakra nézve, melynek mérete legfeljebb $\lambda_k$. Ha $\kappa$ véges, akkor $\lambda_\kappa \leq \kappa^{62500\kappa}$ garantálható, míg végtelen $\kappa$ esetén a $\lambda_\kappa \leq \mathsf{exp}_{10}(\kappa)$ korlát biztosítható (ahol $\mathsf{exp}_0(\kappa) = \kappa$ és $\mathsf{exp}_{n+1}(\kappa) = 2^{\mathsf{exp}_n(\kappa)}$).*

## 7. Független és maximális fenyves pakolás végtelen, matroid-gyökérzetű digráfokban

Egy $D$ digráfot **fenyvesnek** mondunk ha irányítatlan értelemben erdő, és minden csúcsa elérhető egy egyértelmű irányított úton az $R := \{v \in V(D) : |\mathsf{in}_D(v)| = 0\}$ halmazból. Ez az $R$ a fenyves **gyökérzete**. Egy digráf **feszítőfenyvesének** egy olyan feszítő részgráfját nevezzük, ami fenyves.

**16. Tétel** (Edmonds fenyő tétel (erős alak), [13]). *Legyen $D = (V, A)$ egy véges digráf és $R_i \subseteq V$ nem üres halmazok $i = 1, \ldots, k$. Tegyük fel, hogy minden nem üres $X \subseteq V$ esetén legalább annyi él lép be $X$-be ahány $R_i$ halmaztól $X$ diszjunkt. Ekkor van $D$-ben páronként éldiszjunkt feszítőfenyvesek egy $\{\mathcal{B}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ rendszere, ahol $\mathcal{B}_i$ gyökérzete $R_i$.*

A fenti tétel nem marad igaz végtelen digráfokra, tekintsük például a 4. Tételt $k = 2$ esetén és legyen $R_1 = \{s\}, R_2 = \{t\}$. Olyan példa is adható, ahol minden a gyökérzetekből kilépő él belép egy „veszélyes halmazba":

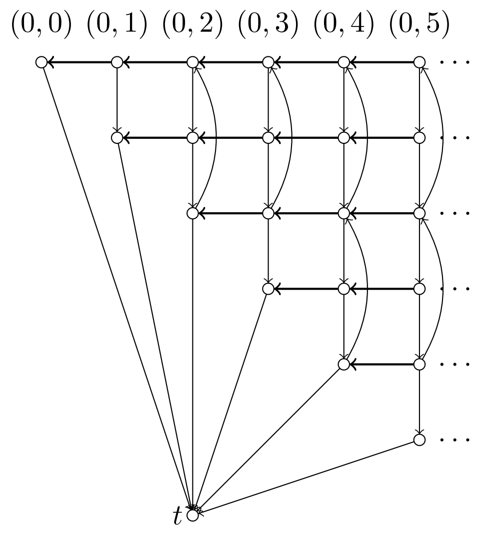



3. ábra. Két gyökérzet van. Az $R_1$ a karikázott, míg $R_2$ keretezett csúcsokból áll. Minden nem üres csúcshalmazba belép legalább annyi él, ahány $R_i$ halmaztól diszjunkt. Ha viszont egy $R_i$-ből kilépő tetszőleges $e$ él végpontjával bővítjük $R_i$-t és a digráfból töröljük $e$-t, akkor ezen feltétel megsérül.

A fenti ellenpéldák ellenére adható értelmes végtelen általánosítás Edmonds fenyő tételére bizonyos megszorítások mellett. Első eredményünk a témában a következő:

**17. Tétel** (A. Joó, [1]). *Edmonds fenyő tételében (16. Tétel) $D$ végessége helyett elegendő feltenni, hogy minden $D$-beli előre-végtelen út találkozik az összes $R_i$ halmazzal. (Ez teljesül például ha $D$-ben egyáltalán nincs előre-végtelen út.)*

Később azt vizsgáltuk, hogy milyen feltételek mellett lehetne végtelen sok feszítő fenyvest pakolni előírt $\{R_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ gyökérzetekkel. Ebben az esetben az Edmonds fenyő tételében szereplő feltétel már azt sem garantálja, hogy a gyökérzetekből minden csúcs szimultán elérhető páronként éldiszjunkt utakkal. Továbbá ha a szimultán elérhetőséget feltesszük, akkor is az előre-végtelen utak kizárása nem elegendő a kívánt feszítőfenyvesek létezéséhez, amit a következő példa is mutat:




4. ábra. A csúcsok az $\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} : m\leq n\}\cup\{t\}$ halmaz elemei. A gyökérzetek: $R_n=\{(0,n)\}$ $(n\in\mathbb{N})$. A vastagított élek végtelen sok párhuzamos élt jelölnek. A $t$ csúcsból minden páratlan sorban lévő csúcsba vezet egy-egy él, amit nem jelöltünk a rajzon.

A következő tételt bizonyítottuk a témában:

**18. Tétel** (A. Joó, [3]). *Legyen $D=(V,A)$ egy digráf és $R_i\subseteq V$ egy előírt halmaz minden $i\in\mathbb{N}$-re. Tegyük fel, hogy minden $v$ csúcshoz van éldiszjunkt utak egy $\{P_i^v\}_{i\in\mathbb{N}}$ rendszere, ahol $P_i^v$ az $R_i$-ből megy $v$-be. Továbbá tegyük fel azt is, hogy tetszőleges hátra-végtelen út $D$-ben az összes $R_i$ halmazzal találkozik. Ekkor van $D$-ben páronként éldiszjunkt feszítőfenyvesek egy $\{\mathcal{B}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ rendszere, ahol $\mathcal{B}_i$ gyökérzete $R_i$.*

Edmonds fenyő tételének a véges esetben sokféle általánosítása ismert. Ezek egyike a matroid gyökerű, elérhetőség alapú fenyvespakolás. A jelenlegi legáltalánosabb végtelen gráfos fenyvespakolási eredményünk közös általánosítása a két említett korábbi cikkünknek (17. és 18. Tétel). Továbbá általánosítása Király Csaba egy véges fenyőpakolási tételének (lásd [17]), ami az úgynevezett Japán fenyő tétel [16] és egy matroid alapú fenyőpakolási tétel [12] közös általánosítása. Eredményünk kimondásához némi előkészületre van szükségünk.

A $\mathfrak{R} = (D, \mathcal{M}, \pi)$ hármast a **matroid-gyökérzetű digráfnak** mondjuk, ha $D = (V, A)$ egy digráf, $\mathcal{M} = (S, \mathcal{I})$ egy matroid és $\pi : S \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\varnothing\}$. Ha $I \in \mathcal{I}$ és $T \subseteq V$ akkor $\boldsymbol{(I,T)}$**-kapcsolás** alatt páronként éldiszjunkt utak egy olyan $\{P_i\}_{i \in I}$ rendszerét értjük, ahol $P_i$ a $\pi(i)$-ből megy a $T$-be. A $\mathcal{B}$ egy **fenyves pakolás** az $\mathfrak{R}$-re vonatkozóan, ha $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_i\}_{i \in S}$, ahol a $\mathcal{B}_i$-k páronként éldiszjunkt fenyvesek $D$-ben és $\mathcal{B}_i$ gyökérzete $\pi(i)$. Ha $X \subseteq V$, akkor legyen $\boldsymbol{\mathcal{S}(X)} = \{i \in S : \pi(i) \cap X \neq \varnothing\}$. Egy matroid-gyökérzetű digráfot **függetlennek** mondunk ha $\mathcal{S}(v) \in \mathcal{I}$ minden $v \in V$. Egy fenyőpakolás független ha a $\mathfrak{B} := (D, \mathcal{M}, \pi_{\mathfrak{B}})$ matroid-gyökérzetű digráf független, ahol $\pi_{\mathfrak{B}}(i) = V(\mathcal{B}_i)$. Álljon $\boldsymbol{\mathcal{N}(X)} \subseteq S$ azokból az elemekből, amiket azon $i$ matroid-elemek generálnak amikhez létezik $\pi(i) \to X$ út $D$-ben. Egy $\mathcal{B}$ fenyves pakolást **maximálisnak** mondunk, ha minden $v \in V$ esetén a $\mathcal{S}_{\mathfrak{B}}(v) := \{i \in S : v \in \pi_{\mathfrak{B}}(i)\}$ halmaz feszíti $\mathcal{N}(v)$-t $\mathcal{M}$-ben. Így tehát egy $\mathcal{B}$ fenyves pakolás független és maximális pontosan, akkor ha $S_{\mathfrak{B}}(v)$ egy bázisa $\mathcal{N}(v)$-nek minden $v \in V$ esetén.

Ahhoz, hogy létezzen független fenyves pakolás egy adott $\mathfrak{R}$-hez nyilvánvalóan szükséges, hogy $\mathfrak{R}$ maga független legyen, hiszen $\mathcal{S}(v) \subseteq \mathcal{S}_{\mathfrak{B}}(v)$ teljesül tetszőleges $\mathcal{B}$ fenyőpakolás esetén. A maximalitás a következő triviális szükséges feltételt adja.

**19. Condition** (kapcsolat-tulajdonság)**.** *Minden $v \in V$ esetén van egy $(B, v)$-kapcsolat $D$-ben, ahol $B$ bázisa $\mathcal{N}(v)$-nek.*

Király Csaba megmutatta [17], hogy véges esetben a függetlenség és a kapcsolat-feltétel együttesen elegendő is maximális és független fenyves pakolás létezéséhez. (Pontosabban szólva a kapcsolat-feltételt mi vezettük be és Cs. Király egy olyan feltételt használt, ami a véges esetben ekvivalens vele, de végtelenben már szigorúan gyengébb.)

Fő eredményünk a következő:

**20. Tétel.** *Legyen $(D, \mathcal{M}, \pi)$ egy független matroid-gyökérzetű digráf, ami teljesíti a kapcsolat-feltételt. Ekkor az alábbi tulajdonságok bármelyike elegendő, hogy létezzen független és maximális fenyves pakolás.*

- *$\mathcal{M}$ véges rangú és $D$-ben minden előre-végtelen $P$ útra teljesül, hogy $\mathcal{N}(V(P)) \subseteq \mathsf{span}_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}(V(P)))$*
- *$\mathcal{M}$ előáll megszámlálható sok véges rangú matroid direkt összegeként és $D$-ben minden hátra-végtelen $P$ útra teljesül, hogy $\mathcal{N}(V(P)) \subseteq \mathsf{span}_{\mathcal{M}}(\mathcal{S}(V(P)))$*

## Lista a disszertáció alapjául szolgáló eredményeimről


[1] Joó, A. Edmonds' branching theorem in digraphs without forward-infinite paths. *Journal of Graph Theory 83*, 3 (2016), 303–311.

[2] Joó, A. Highly connected infinite digraphs without edge-disjoint back and forth paths between a certain vertex pair. Accepted for publication in *Journal of Graph Theory* at 2016.

[3] Joó, A. Packing countably many branchings with prescribed root-sets in digraphs without backward-infinite paths. Accepted for publication in *Journal of Graph Theory* at 2017.

[4] Joó, A. On partitioning of edges of infinite digraphs into directed cycles. Tech. Rep. QP-2015-02, Egerváry Research Group, Budapest, 2015. `www.cs.elte.hu/egres`.

[5] Joó, A. T-joins in infinite graphs. Tech. Rep. TR-2016-07, Egerváry Research Group, Budapest, 2016. `www.cs.elte.hu/egres`.

[6] Bérczi, K., and Joó, A. King-serf duo by monochromatic paths in k-edge-coloured tournaments. Tech. Rep. TR-2016-08, Egerváry Research Group, Budapest, 2016. `www.cs.elte.hu/egres`.

[7] Joó, A. Gomory-hu trees of countably infinite graphs with finite total weight. Tech. Rep. TR-2016-02, Egerváry Research Group, Budapest, 2016. `www.cs.elte.hu/egres`.

[8] Joó, A. Countable menger theorem with finitary matroid constraints on the ingoing edges. Tech. Rep. TR-2016-17, Egerváry Research Group, Budapest, 2016. `www.cs.elte.hu/egres`.

## Hivatkozások

[9] Aharoni, R. Menger's theorem for countable graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B 43*, 3 (1987), 303–313.

[10] Aharoni, R., and Berger, E. Menger's theorem for infinite graphs. *Inventiones mathematicae 176*, 1 (2009), 1–62.

[11] Aharoni, R., and Thomassen, C. Infinite, highly connected digraphs with no two arc-disjoint spanning trees. *Journal of graph theory 13*, 1 (1989), 71–74.

[12] de Gevigney, O. D., Nguyen, V.-H., and Szigeti, Z. Matroid-based packing of arborescences. *SIAM Journal on Discrete Mathematics 27*, 1 (2013), 567–574.

[13] Edmonds, J. Edge-disjoint branchings. *Combinatorial algorithms 9* (1973), 91–96.

[14] Frank, A. *Connections in combinatorial optimization*, vol. 38. OUP Oxford, 2011.

[15] Gomory, R. E., and Hu, T. C. Multi-terminal network flows. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 9*, 4 (1961), 551–570.

[16] Kamiyama, N., Katoh, N., and Takizawa, A. Arc-disjoint in-trees in directed graphs. *Combinatorica 29*, 2 (2009), 197–214.

[17] Király, C. On maximal independent arborescence-packing. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* (in Press, 2016).

[18] Komjáth, P. Erdős's work on infinite graphs. *Erdős Centennial 25* (2014), 325–345.

[19] Mader, W. On a property of n-edge-connected digraphs. *Combinatorica 1*, 4 (1981), 385–386.

[20] Nash-Williams, C. S. J. Decomposition of graphs into closed and endless chains. *Proceedings of the London Mathematical Society 3*, 1 (1960), 221–238.

[21] Sands, B., Sauer, N., and Woodrow, R. On monochromatic paths in edge-coloured digraphs. *Journal of Combinatorial Theory, series B 33*, 3 (1982), 271–275.

[22] Soukup, L. Elementary submodels in infinite combinatorics. *Discrete Mathematics 311*, 15 (2011), 1585–1598.