MEMORIAM

IOANNIS AUGUSTI ERNESTII

D. XII. SEPTEMBRIS HOR. IX.

SOLEMNI ORATIONE

ILLUSTRIS ICTORUM ORDINIS CONCESSU

IN AUDITORIO IURIDICO

CELEBRANDAM

INDICIT

MAURITIUS GUILIELMUS DROBISCH

ORD. PHILOS. H. T. DECANUS.

Quaestionum mathematico - psychologicarum

Specimen V.

QUAESTIONUM MATHEMATICO-PSYCHOLOGICARUM
SPECIMEN V. MECHANICI ARGUMENTI.

IX. *De immediata notionum resurrectione.*

55.

In quarto, quod duos abhinc et quod excurrit annos a nobis editum est, specimine gravioris momenti caput ita explanavimus, ut appareret, nos in quibusdam singulis quidem a celeberrimo harum rationum inventore recedere, in ipsa summa rei autem optime cum eo consentire. Iam vero, quamquam, si ea retractare velimus, quae illo tempore de statica mentis exposita sunt, facile plura nunc essent, in quibus aliam viam ingredi conaremur, haec tamen tanti non sunt, ut plane novam doctrinam staticam proponendam esse putemus, multo minus vero mechanicam mentis tangunt, ita ut immutato cursu eodemque tramite in componendo critico commentario iam pergere nos liceat.

56.

Ponamus, notionem c vi notionum a et b, quarum respectu habito valore liminari inferior sit, ex animo evanuisse; iam quaeritur, quid fieri oporteat, ut e statu depressionis et extinctionis ad conditionem liberam resuscitetur.

Sine dubio via quam maxime plana et directa hoc problema resolvetur, si notionem quamdam γ accidere statuimus, quae, quod ad qualitatem, cum c omnino congruat. Etenim haec, quum eodem gradu quo ipsum c notionibus a et b opposita sit, eas, ut ad inferiorem quam huc usque obtinebant locum descendant, coget, agendoque patiens partem ponderis, quo c in limine cohibetur, in se suscipiet, quo id efficietur, ut depressa notio c ab oneris certe parte liberetur et ad altiora adscendendi nisu, qui nunquam ex ea expulsus erat, agitata resurgat. Ipsa enim notio γ, quippe quae notioni c quoad qualitatem aequalis est, hanc non solum, quo minus adscendat non impediet, verum etiam, quum brevi tempore connexum cum ea initura sit, adiuvabit et augebit, cuius tamen connexus singularem rationem in sequentibus non habebimus.

57.

Statuamus nunc, ab eo temporis momento, quo γ in animum intravit, praeterlapsum esse tempus $=t$, eoque a et b coniunctim depressas esse quantitate $=x$, notionem c autem resuscitatam quantitate $=y$, in quibus per se apparet, esse oportere x et y functiones temporis t, et ab initio certe ponendum esse $x>y$, quum x vacuum quasi spatium sit, quod y ex parte tantum implebit. Quo facto apparet, hoc temporis momento distantiam eius puncti, ad quod evehi liceat c, aequare $x-y$, eique differentiae proportionalem vim eam esse, quae ad adscendendum impellat. Quapropter erit

$$dy = (x-y)\,dt\,; \text{ sive } dy + y\,dt = x\,dt,$$

unde integrando investigatur

$$(1) \quad y = e^{-t} \int x e^{t}\, dt;$$

in qua formula restat, ut, qua ratione x a t pendeat, determinetur.

58.

Quod ut fiat, distinguendum erit inter valores notionis γ liminari valore superiores et inferiores. Tota hac priori quaestionis parte ponamus, γ valorem liminarem non excedere. Iam vero hoc posito e Spec. IV. §. 41. apparet, si $S_1 - S$ iacturam accessu ipsius γ natam, Σ partem eiusdem tempore t vere factam, $q'\Sigma$, $q''\Sigma$, $q\Sigma$ portiones notionibus a, b, γ imponendas denotant, quia

$$x = (q' + q'')\Sigma = (1-q)\Sigma,$$

ab initio futurum esse

(2)
$$x = \frac{(1-q)}{q}\,(S_1 - S)\,(1 - e^{-qt})$$

sive, factorem constantem per Q designando,

$$x = Q\,(1 - e^{-qt}).$$

Hoc valore in form. (1) substituto et integratione rite peracta, sequitur

$$y = Q - \frac{Q}{1-q}\, e^{-qt} + C e^{-t},$$

unde, simul Constante ita determinata, ut posito $t=0$, sit $y=0$,

$$y = Q + \frac{Q}{1-q}(qe^{-t} - e^{-qt}),$$

sive, restituto ipsius Q valore,

$$y = \frac{S_1 - S}{q} \left\{ (1-e^{-qt}) - q(1-e^{-t}) \right\}. \qquad (3)$$

In seriem evoluta haec formula dat

$$y = (S_1 - S) \left\{ (1-q)\frac{t^2}{2} - (1-q^2)\frac{t^3}{2.3} + (1-q^3)\frac{t^4}{2.3.4} - \ldots \right\}. \qquad (4)$$

Convergit haec series, dato quovis temporis t valore finito. Si enim terminus eius generalis $(n+1)$-tus per antecedentem dividitur, prodit

$$\frac{(1-q^n)}{(1-q^{n-1})} \cdot \frac{t}{n+1},$$

quod, t finite et n infinite sumto, evanescit.

Posito quantitatis t valore satis minuto, superiorum ordinum potestates merito negliguntur, apparetque, resuscitatum c primo temporis momento ratione *quadrata* temporis, deinde vero, quia secundum membrum negativum, tardius adscensurum esse. Vidimus supra (Spec. III. §. 35.), notionem ultra punctum aequilibrii depressam, demtis impedimentis, resurgere secundum formulam

$$s = D\,(1 - e^{-t}); \text{ quae evoluta dat}$$

$$s = D\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2.3} - \ldots\right);$$

hic igitur resurgit notio primo tempore *simplici* ratione temporis. Utriusque conditionis comparatio docet, *notionem, cui data est facultas ad adscendendum ab initio exigua quidem, sed crescens, rapidiori cursu moveri quam aliam, cui terminus adscendendi certus, quamquam ab initio longe remotus positus est.*

59.

Valet haec motus lex ad eum usque terminum, quo iactura vere facta erit, quod fiet (Spec. IV. §. 41.) praeterlapso tempore finito

$$t_1 = \frac{1}{q} \log. \frac{1}{1-q}. \qquad (5)$$

Quod si valores quantitatum x et y ad hoc tempus pertinentes per x_1, y_1 denotamus, erit

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= (1-q)\,(S_1 - S) \\ y_1 &= (1-q)^{\frac{1}{q}}\,(S_1 - S). \end{aligned}\right\} \qquad (5^*)$$

Tum vero a et b iterum crescunt, ergo x decrescit, et quidem secundum regulam supra (Spec. IV. §. 42.) expositam, ita ut ponere liceat

(6) $$x = x_1 - \sigma' - \sigma'' = (1-q)\,(S_1 - S)\,e^{-t'};$$

ubi igitur t' nova temporis mensura, talis nempe, ut sit $t' = 0$, ubi $t = t_1$ et $x = x_1$, h. e. finito primo motus stadio.

Iam vero substituto hoc altero quantitatis x valore in form. (1), in qua simul t cum t' commutandum erit, prodibit

$$y = (1-q)\,(S_1 - S)\,(t' + \text{Const.})\,e^{-t'},$$

sive, Constante ita determinata, ut simul sit $t' = 0$ et $y = y_1$,

(7) $$\begin{aligned} y &= y_1 + (1-q)\,(S_1 - S)\,t' e^{-t'} \\ &= (1-q)^{\frac{1}{q}}\,(S_1 - S)\left\{1 + (1-q)^{-\frac{(1-q)}{q}}\,t' e^{-t'}\right\}. \end{aligned}$$

Haec quantitas ad y_1 reducitur, posito tum $t' = 0$, tum $t' = \infty$. Inter utrumque terminum valorem maximum attingit, qui, secundum methodum notissimam, evolvendo $\frac{dy}{dt}$ eiusque valorem $= 0$ ponendo, invenitur pertinere ad $t' = 1$, et aequare

(8) $$\begin{aligned} y = y_2 &= y_1 + (1-q)\,(S_1 - S)\,e^{-1} \\ &= (1-q)^{\frac{1}{q}}\,(S_1 - S)\left\{1 + (1-q)^{-\frac{(1-q)}{q}}\,e^{-1}\right\}. \end{aligned}$$

Ibidem erit

$$x = x_2 = (1-q)\,(S_1 - S)\,e^{-1};$$

denique

$$t = t_2 = 1 + t_1.$$

Docent hae formulae cum form. (5) et (5*) coniunctae, quantitates y_1, y_2, eo maiores, t_1 et t_2 eo minores esse futuras, quo minus q, h. e. quo maior notio γ. *Eo altiorem igitur locum resuscitata notio recuperabit et quidem eo breviori tempore, quo validior notio resuscitans erat.*

60.

Habemus igitur iam dua motus stadia, duasque leges eius, quae deinceps valent. Prius stadium circumscriptum est tempore $t_1 = \frac{1}{q} \log. \frac{1}{1-q}$; neque vero alterum, ut primo quidem adspectu videtur, in infinitum excurrit.

Etenim deficit omnis resurgendi potestas notioni c data ab eo momento, quo $x = y$ sive $x - y = 0$ factum fuerit. Quod tempus ut determinetur, aequiparandae sunt formulae (6) et (7), quo facto fit

(9) $$(1-q)\,(S_1 - S)\,(1 - t')\,e^{-t'} = y_1;$$

quae quidem aequatio non nisi approximando resolvi potest, sed tamen, realem continere radicem, facile prodit. Scilicet posito $t' = 0$, e form. (6) et (7) sequitur

$$x = x_1 = (1-q)(S_1 - S);$$

$$y = y_1 = (1-q)^{\frac{1}{q}}(S_1 - S);$$

ergo $$x > y.$$

Posito autem $t' = 1$, e form. (8) apparet, esse

$$x = x_2 = (1-q)(S_1 - S)e^{-1};$$

$$y = y_2 = (1-q)(S_1 - S)e^{-1} + (1-q)^{\frac{1}{q}}(S_1 - S);$$

ergo $$x < y;$$

ergo propter functionum x et y continuitatem inter $t' = 0$ et $t' = 1$ oportet exstet valor realis $t = t'_1$, ad quem pertineat aequatio $x = y$. Finito igitur ab initio resurrectio notionis c tempore

$$t = t_1 + t'_1, \qquad (10)$$

(qua in relatione t'_1 quam proxime ex aequatione (9) investigandum est) secundum motus stadium ad finem perducitur. Inde ab hoc igitur momento notioni c omnis amplius adscendendi demta est potestas. Etenim nunc notiones a et b oppositionem non solum in γ, verum etiam in c denuo exercere incipiunt, contra quam defendere notioni γ ulterius datum non est, quum iam ipsa sub reliquarum pressu nimis patiatur. Simul quum hic stadii secundi terminus inter $t' = 0$ et $t' = 1$ interpositus sit, sequitur, resurgentem notionem c semper maximo valore y_2 inferiorem esse remansuram, ultimamque quam contingat metam eam esse, ubi y aequat x. Caeterum theorema ad finem §i antecedentis enunciatum eo non turbatur.

61.

Venimus igitur in tertium ultimumque stadium, quo motus notionis c, iam ad obscuriorem conditionem revertentis, a quantitate x pendere desiit et ex alio principio quam eo, cui formula (1) superstructa est, determinandus erit. Et hic quidem ante reliqua omnia dignum videtur, quod annotetur, fieri nunc posse, ut notionum omnium statica puncta subito immutentur. Quamquam enim singularum notionum c et γ puncta aequilibrii in ipso limine sita sunt, poterunt tamen in altiorem locum transferri, si coniunctim cum reliquis comparantur, *etiamsi connexus inter utramque notionem oriundi ratio nulla habita fuerit.* Videtur hoc HERBARTUM effugisse, qui puncti statici post resurrectionem exstinctae notionis c elationem bene quidem novit, sed tantummodo e connexus efficacite derivat*).

Haec igitur propositio ut rite demonstretur, primum datae sint quatuor notiones a, b, c, γ, oppositae gradibus, quos insequens schema indicat:

$$\begin{array}{ccccc} \gamma & & p & & c \\ & & \cdot & & \\ & k & & m & \\ l & & \cdot & & n \\ & & & & \\ a & & i & & b \end{array}$$

Quo posito, si S iactura communis, pars eius ad c referenda erit

$$z = \frac{\left(\frac{p+k+n}{c}\right) S}{\frac{i+k+l}{a} + \frac{n+m+i}{b} + \frac{p+k+n}{c} + \frac{l+m+p}{\gamma}};$$

ergo, si $l=k$, $m=n$, $p=0$, uti oportet, si γ eandem ac c habet qualitatem,

$$z = \frac{\left(\frac{k+m}{c}\right) S}{\frac{i+2k}{a} + \frac{2m+i}{b} + \frac{k+m}{c} + \frac{k+m}{\gamma}};$$

et si insuper $k=i=m=1$ et $S=b+c+\gamma$**) ponitur,

$$z = \frac{2\left(\frac{b+c+\gamma}{c}\right)}{\frac{3}{a} + \frac{3}{b} + \frac{2}{c} + \frac{2}{\gamma}}.$$

Contra, posita notionum a, b, c contrarietate quam maxima, tertiae depressio esset

$$z' = \frac{\frac{b+c}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}.$$

---

*) *Psychol.* I., p. 285.

**) Quod certe concessum erit, si $b > c+\gamma$, quia, hoc posito, prima e quatuor summis $b+c+\gamma$, $a+c+\gamma$, $a+b$, $a+b$, minima est.

Iam vero facile enucleatur, futurum esse $z' > z$,

$$\text{si } \gamma^2 < \frac{b+c}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}};$$

qui quotus minor valore liminari $\dfrac{b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, si c hoc ipso maior non est, id quod hoc loco vere supposuimus, quum ex hypothesi tum c tum γ valore liminari minores sint. Hac igitur conditione data, respectu adiectae notionis γ punctum staticum in c altiorem occupabit locum quam obtineret illa reclusa. Sed tamen quaeritur porro, an haec altitudo etiam limen superet, id quod affirmandum erit, si

$$c - z > 0,$$

quod idem est ac

$$c^2 > \frac{2(b+c+\gamma)}{\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{2}{c}+\frac{2}{\gamma}},$$

sive evolvendo et reducendo

$$c^2 > \frac{2ab\gamma\,(b+\gamma)}{2ab+3ac+3bc}. \qquad (11)$$

Eo magis satis fiet huic conditioni, quo minor notio γ. *Quamquam igitur minor notio resuscitans tardius agit et ad minorem altitudinem cognatam notionem c trahit, tamen altiori loco eam in animo retinet*, quod sine opera eo intelligitur, quod notiones roboris inversa ratione onus commune ferunt. Sumto $c^2 \leqq \dfrac{ab^2}{a+b}$, erit

$$\frac{b}{a+b} > \frac{2\gamma\,(b+\gamma)}{2ab+3a\gamma+3b\gamma},$$

sive

$$\gamma^2 - \frac{b\gamma}{2} < \frac{ab^2}{a+b}, \qquad (11^*)$$

quae inaequalitas, quia ex hypothesi γ^2 per se iam dextra parte minus, $\dfrac{b\gamma}{2}$ vero semper negativum, utique concedenda est atque igitur inaequalitatis $c - z > 0$ veritatem confirmat. Exempli causa sit $a = 20$, $b = 10$, $c = 8$. His positis esset $z' = 8{,}18 > 8$. Si vero accedit $\gamma = 7$, erit $z = 6{,}34 < 8$; si $\gamma = 6$, erit $z = 5{,}81$; si denique $\gamma = 8$, $z = 6{,}84$.

62.

Ex hac demonstratione porro sine omni calculi ope elucet, punctum aequilibrii non minus in reliquis notionibus alium, et quidem, quod ad γ attinet, elatiorem, quod vero ad a et b, humiliorem locum occupaturum esse. Ad haec igitur puncta tendunt notiones omnes: a et b adscendendo, c et γ descendendo, secundum motus regulas, iis, quae §. 42. Spec. IV. explicitae sunt, simillimas. Quare excurret hic motus in infinitum imbecillioresque notiones c et γ vel ad limen deducet vel in animo retinebit.

63.

E tribus motus legibus, quarum duas §§. 58. et 59. formulis illustravimus, secunda abrogari potest, ea nempe conditione, quod x primo stadio quantitatem c ipsius resurgentis notionis exaequet. Est enim x potestas notioni c ad adscendendum data, quae huius notionis ipso robore maior esse nequit, quia nulla notio suam ipsius claritatem originariam transcendere vel potest, vel etiam id agendi nisum habet. Etiamsi igitur x limitem c transcendat, quo impeditum non est, nullus tamen ulterioris huius incrementi in determinanda potestate adscendendi, quae nunquam maior quam c est, usus erit. Necessario autem tum demum x hunc limitem transcendet, quum ea pars iacturae accessu notionis γ faciendae, quae ab a et b ferenda est, c, si non superat, tamen aequat, id quod semper supponit, esse $\gamma > c$, quamquam haec conditio tantummodo negativa, quae quidem nunquam desiderari potest, sed tamen etiam per se nondum sufficit. Si, simplicitatis causa, ponimus, notiones maxime contrarias esse, erit $S_1 - S = \gamma$, et pars huius iacturae in a et b imponenda, i. e. valor maximus quantitatis x

$$= \frac{(a+b)\,\gamma^2}{ab + (a+b)\,\gamma};$$

quem si oportet non minorem esse quam c, transpositis transponendis habebimus inaequalitatem hanc:

$$\gamma^2 - \gamma c \geqq \frac{abc}{a+b},$$

ex qua sequitur

$$(12) \quad \Big\{ \quad \gamma \geqq \frac{c}{2} + \sqrt{\left[\frac{c^2}{4} + \frac{abc}{a+b}\right]}.$$

Quum tamen simul, per hypothesin, sit

$$\gamma \quad b\sqrt{\left[\frac{a}{a+b}\right]},$$

coniunctis his limitibus derivatur

$$c \leqq \frac{b\sqrt{\left[\frac{a}{a+b}\right]}}{1+\sqrt{\left[\frac{a}{a+b}\right]}}\,; \qquad (12^*)$$

quae formula indicat quantitatem valore liminari minorem, sub qua, si c positum est, caeterumque y ad c eam habet relationem, quam formula (12) exhibet, $x \geqq c$ fieri poterit.

64.

Iam vero si exstant relationes, quae $x \geqq c$ admittant, facile determinatur tempus, quo x ad hanc altitudinem evectum erit. Quod si enim hoc tempus per $t^{(1)}$ denotamus, e form. (2) deducitur

$$c = Q\,(1 - e^{-qt^{(1)}});$$

unde

$$\left.\begin{aligned} t^{(1)} &= \frac{1}{q}\log.\frac{Q}{Q-c} \\ &= \frac{1}{q}\log.\frac{1}{1-\frac{qc}{(1-q)\,(S_1-S)}} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

qui valor, quia $(1-q)(S_1-S) \geqq c > qc$ (§. praeced.), realis caeterumque finitus eoque maior erit, quo maior quantitas c. Simul luculenter apparet, *esse hoc tempus* $t^{(1)} < t_1$ (§. 59.); *h. e. primi stadii finibus vere contineri.*

Valore $t^{(1)}$ in form. (3) substituto, evolvitur valor quantitatis y ad hoc tempus pertinens, nempe

$$y = y^{(1)} = \frac{1}{1-q}\left\{ c - qQ\left[1 - \left(\frac{Q-c}{Q}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\right\}. \qquad (14)$$

Huc ubi perventum est, iam nova motus lex incipit. Etenim quum inde ab hoc temporis momento y ad fixum punctum adscendere tendat, hoc fiet secundum simplicem regulam

$$dy = (c-y)\,dt;$$

ex qua

$$t = \log.\frac{Const.}{c-y},$$

et, si Constans ita determinatur, ut, posito $t = t^{(1)}$, sit $y = y^{(1)}$,

$$\left.\begin{aligned} t &= t^{(1)} + \log.\frac{c-y^{(1)}}{c-y}\,; \\ y &= c - (c-y^{(1)})\,e^{-t+t^{(1)}}\,; \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

vel paulo brevius, si $t-t^{(1)}=t''$, $c-y^{(1)}=c''$ et $y-y^{(1)}=y''$ ponimus,

(15*) $$\left\{\begin{aligned} t'' &= \log.\frac{c''}{c''-y''}; \\ y'' &= c''\,(1-e^{-t''}). \end{aligned}\right.$$

Crescente demum in infinitum t, y aequabit c; nullo igitur tempore finito resuscita notio claritatem originariam recuperabit. Caeterum hoc stadio celeritas eo maior erit quo maius c, a quo antea non pendebat, *ita ut validiores et imbecilliores notiones, caeteris paribus, aequali celeritate resurgant.* Sed haec quoque lex certum terminum suum habet, ultra quem nullus ei conceditur usus, eum nempe, quo fiet $x=y$. Facturum hoc esse serius quam tempore t_1, facile ostenditur. Form. (6) enim, posito $t'=t-t_1$, ita scribitur:

$$x=(1-q)\,(S_1-S)\,e^{-(t-t_1)},$$

datque, quum $t=t_1$, valorem $x_1>c$. E form. (15) vero sequitur, eodem tempore t_1 esse $y<c$; ergo hic $x>y$ erit. At vero posito $t=\infty$, formula praecedens dat $x=0$, et, ut antea iam dictum, form. (15) $y=c$, ergo hic $x<y$. Ergo inter $t=t_1$ et $t=\infty$, $x=y$ sit oportebit. Inde ab hoc termino reliqua similiter ac in §. 61. descripta sunt succedent.

65.

Reliquum est, ut videamus, qua ratione ea, quae praecedunt, immutentur, si resuscitans γ, quod huc usque valore liminari inferius positum est, hunc limitem superat.

Patet e Spec. IV. §. 45., ab initio motus valituram esse formulam simpliciorem quam form. (2), nempe hanc:

(16) $$x=(1-q)\,(S_1-S)\,(1-e^{-t}),$$

quae in form. (1) substituta dat

$$y=(1-q)\,(S_1-S)\,(1-te^{-t})+\text{Const.}\,e^{-t},$$

sive, posito simul $t=0$ et $y=0$,

(17) $$y=(1-q)\,(S_1-S)\,[1-(1+t)\,e^{-t}].$$

In seriem evoluta haec series transformatur in

$$y=(1-q)\,(S_1-S)\left\{\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{8}t^4-\ldots\right\};$$

unde elucet, nunc quoque resurgentem notionem c ratione duplicata s. quadrata temporis adscendere.

Hoc primum motus stadium excipiet secundum et tertium, uti Spec. IV. §. 46. sqq. expositum est, quibus vero x per formulas exprimitur ei omnino similes, quam form. (2) exhibet, unde sequitur, etiam resurgentis notionis motum similibus legibus ac iis obtemperaturum esse, quas supra iam investigavimus.

In reliquis nihil mutatur. Notari tamen operae pretium erit, conditioni §. 61. (11*) investigatae, quae efficit, ut notio resurrecta in animo remaneat, etiam si γ valorem liminarem superet, satis fieri posse. Resoluta enim inaequalitas illa dat

$$\gamma < b + \sqrt{\left[\frac{ab^2}{a+b} + b^2\right]},$$

qui limes valorem liminarem longe excedit.

Si denique ad correctiones, quae connexus notionum tum c et γ, tum a, b et γ ratione habita desiderantur, respicere velimus, revertendum nobis esset ad formulas staticas, de quibus, ex parte certe, nunc aliter sentimus ac eo tempore, quo prima Specimina a nobis edita sunt. De his vero, si Deo placet, alias.

X. *De motu notionum libere adscendentium.*

66.

Ad finem capitis quarti mechanices mentis*) primae lineae disquisitionis descriptae sunt, quam, ut continuaremus et amplificaremus, Ill. Herbartus ante aliquot iam annos nos hortabatur. Narrabat idem, se non nisi magno fructu ad rem animum advertisse, coactum vero rei difficultate partim ad speciales casus calculos restrinxisse, partim integrationibus, quae completae dicuntur, frustra tentatis, deficientem solutionem generalem, ut computationibus numericis suppleret, studuisse. Spes nobis data est, fore ut vir illustris ipse commentatione brevi tempore edenda de hac materia fusius disserat. Iam vero haec scriptiuncula nostra plurimum quidem abest, ut cum commentatione illa proxime proditura aemulari velit, quod iam propter arctos, quibus cincta est, fines ineptum esset, sed tamen hoc intendit, ut doceat, nos proprio Marte, et quidem duplici ratione, quarum alteram iam ante hos duos annos investigavimus, quum primum severiorem operam in rem converteremus, hanc theoriam aliquantulum promovisse.

*) *Psychol. I.*, §. 93.

67.

Statuamus, tres notiones a, b, c secundum insequens schema gradibus m, n, p oppositas,

$$\begin{array}{ccccc} & & c & & \\ & n & & m & \\ a & & p & & b \end{array}$$

e quibus a maxima, c minima sit, quibuscunque de causis omnino oppressas esse, sed ab hoc onere repente liberari. Hoc si fit, notiones resurgent quidem, sed nec secundum leges simplices Spec. III. §. 35. propositas, nec secundum magis complicitas, quas in hoc ipso Specimine enucleavimus. Quum enim *subito omnis* pressio cesset, regulis, quae in antecedentibus continentur, locus nullus concessus erit, non minus vero simpliciores quoque regulae non sufficiunt, quia *plures* nunc datae sunt notiones, *quarum contrarietate*, *eadem ratione*, *qua in animum redeant*, *iactura nascitur*, quae adscendentibus resistit earumque motum liberum turbat. Novae igitur normae motus hic investigandae erunt.

68.

Denotemus eas notionum a, b, c partes, quae elapso ab initio tempore t resurrexerunt, deinceps per x, y, z. Ex his iactura orietur, quae minimam e summis $py + nz$, $px + mz$, $nz + my$ aequabit: etenim eae tantum partes notionum, quae iam in animum intrarunt, iacturam efficient, quum antequam plane nullus inter notiones nexus supponatur, ita ut nullo modo mutua ipsarum contrarietate sed alienis viribus oppressae cogitandae sint. Iam primum ponamus, iacturam (nunc variabilem) aequare $py + nz$, eamque inversa roboris notionum ratione, in a, b, c distribui secundum normam numerorum q', q'', q'''. Quo facto quia a iactura facienda pressio proficiscitur, qua adscensus notionum primum tantummodo retardatur, denique vero sistitur, nisus singularum notionum ad adscendendum proportionalis erit residuis tantum, quae restant, subductis iacturae portionibus ab iis notionum partibus, quae iam adscenderunt. Sic ducimur in aequationes differentiales

$$(1)\quad \begin{cases} dx = [a - x - q'(py + nz)]\,dt \\ dy = [b - y - q''(py + nz)]\,dt \\ dz = [c - z - q'''(py + nz)]\,dt; \end{cases}$$

quarum integratio primum ita effici posset. Brevitatis causa sit

$$1 + pq'' = B;\; nq'' = C;\; pq''' = B';\; 1 + nq''' = C';$$

quo facto altera et tertia ex aequationibus praemissis ita transcribuntur:

$$\left.\begin{aligned} dy &= (b - By - Cz)\, dt \\ dz &= (c - B'y - C'z)\, dt. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Porro si prior ex his secundum t differentiatur et quoto $\frac{dz}{dt}$ valor e posteriori, nec minus quantitati z valor e priori substituitur, prodit aequatio haec:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (B + C')\frac{dy}{dt} + (BC' - B'C)\, y + (Cc - C'b) = 0; \quad (3)$$

quae, posito $\quad (BC' - B'C)\, y + (Cc - C'b) = y'$,
facile transformatur in hanc aequationem

$$\frac{d^2y'}{dt^3} + (B + C')\frac{dy'}{dt} + (BC' - B'C)\, y' = 0; \quad (3^*)$$

quae denique ponendo $y' = e^{\int u\, dx}$ in aequationem differentialem primi gradus

$$\frac{du}{u^2 + Au + A'} + dx = 0 \quad (4)$$

mutatur, si in (3^*) brevius coefficientes quantitatum $\frac{dy'}{dt}$ et y' deinceps per A et A' denotamus.

Sed sufficiat indigitavisse hanc viam: paucioribus enim ambagibus ad finem perducimur, usuri methodo integrandi, quam D'Alembert docuit.

69.

Etenim multiplicetur posterior aequatio sub (2) per quantitatem indeterminatum Θ, et addatur productum ad priorem; summa erit

$$dy + \Theta dz = [b + c\Theta - (B + B'\Theta)\, y - (C + C'\Theta)\, z]\, dt. \quad (5)$$

Iam ponatur $\quad dy + \Theta dz = du$, sive $y + \Theta z = u$;
quo praecedens aequatio transformatur in hanc:

$$du = \{b + c\Theta - (B + B'\Theta)\, u + [B\Theta^2 + (B - C')\,\Theta - C]\, z\}\, dt; \quad (6)$$

in qua Θ ita determinari poterit, ut coefficiens variabilis z evanescat, id quod dat

$$\Theta = \frac{C' - B + \sqrt{[4B'C + (C' - B^2)]}}{2B'},$$

et quantitatum B, B', C, C' valoribus hic restitatis, binos exhibet ipsius Θ valores

$$\Theta_1 = \frac{n}{p} \text{ et } \Theta_2 = -\frac{q''}{q'''}. \quad (7)$$

Qua igitur determinatione aequatio (6) contrahitur in hanc

$$(6^*)\quad du = \{ b + c\Theta - (B + B'\Theta)\, u \}\, dt,$$

quae integrata exhibet

$$\text{Const.} - (B + B'\Theta)\, t = \log.\, [b + c\Theta - (B + B'\Theta)\, u],$$

sive, si $t = 0$ ponitur, assumto $u = 0$, h. e. $y = 0$, $z = 0$,

$$(8)\quad \begin{cases} t = \dfrac{1}{B + B'\Theta} \log.\, \dfrac{b + c\Theta}{b + c\Theta - (B + B'\Theta)\, u} \\[2ex] u = \dfrac{b + c\Theta}{B + B'\Theta}\, [1 - e^{-(B + B'\Theta)\, t}]. \end{cases}$$

Denique restituantur y et z et substituantur deinceps valores ipsius Θ speciales Θ_1, Θ_2; quo facto erit

$$(9)\quad \begin{cases} y + \Theta_1 z = \dfrac{b + c\Theta_1}{B + B'\Theta_1}\, [1 - e^{-(B + B'\Theta_1)\, t}] \\[2ex] y + \Theta_2 z = \dfrac{b + c\Theta_2}{B + B'\Theta_2}\, [1 - e^{-(B + B'\Theta_2)\, t}], \end{cases}$$

et si inter binas has aequationes, quas brevitatis causa scribamus:

$$(9^*)\quad \begin{cases} y + \Theta_1 z = \dfrac{m_1}{M_1}\, (1 - e^{-M_1 t}) \\[2ex] y + \Theta_2 z = \dfrac{m_2}{M_2}\, (1 - e^{-M_2 t}), \end{cases}$$

deinceps eliminatur z, y, sequitur

$$(10)\quad \begin{cases} y = \dfrac{M_1 m_2 \Theta_1\, (1 - e^{-M_2 t}) - M_2 m_1 \Theta_2\, (1 - e^{-M_1 t})}{M_1 M_2\, (\Theta_1 - \Theta_2)} \\[2ex] z = \dfrac{M_2 m_1\, (1 - e^{-M_1 t}) - M_1 m_2\, (1 - e^{-M_2 t})}{M_1 M_2\, (\Theta_1 - \Theta_2)}; \end{cases}$$

sive, restitutis primis valoribus omnibus,

$$(11)\quad \begin{cases} y = \dfrac{q''\, (pb + nc)\, [1 - e^{-(1 + pq'' + nq''')\, t}] + n\, (q'''b - q''c)\, (1 + pq'' + nq''')\, (1 - e^{-t})}{(pq'' + nq''')\, (1 + pq'' + nq''')} \\[2ex] z = \dfrac{q'''\, (pb + nc)\, [1 - e^{-(1 + pq'' + nq''')\, t}] - p\, (q'''b - q''c)\, (1 + pq'' + nq''')\, (1 - e^{-t})}{(pq'' + nq''')\, (1 + pq'' + nq''')} \end{cases}$$

Ex his porro substituendo in prima aequatione sub (1) deducitur

$$dx = \left[a - x - \frac{q'\, (pb + nc)}{1 + pq'' + nq'''}\, [1 - e^{-(1 + pq'' + nq''')\, t}] \right] dt,$$

sive $dx + x\, dt = \left[a - \dfrac{q'\, (pb + nc)}{1 + pq'' + nq'''}\, [1 - e^{-(1 + pq'' + nq''')\, t}] \right] dt,$

cuius aequationis differentialis integrale hanc formam habet:

$$x = e^{-t} \left\{ \int \left[a - \frac{q'(pb+nc)}{1+pq''+nq'''} \left[1 - e^{-(1+pq''+nq''')t}\right] \right] e^{t} dt + \text{Const.} \right\},$$

quae si explicatur et Constans ita determinatur, ut posito $t=0$ sit $x=0$, dat

$$x = a - \frac{q'(pb+nc)}{1+pq''+nq'''} \left[a - \frac{q'(pb+nc)}{pq''+nq'''} \right] e^{-t} - \frac{q'(pb+nc)\, e^{-(1+pq''+nq''')t}}{(1+pq''+nq''')(pq''+nq''')}. \quad (12)$$

70.

Iam ex his formulis de motu notionum a, b, c haec colliguntur. Primum notiones tres omnes, crescente in infinitum t, ad limites constantes convergunt, scilicet

a ad limitem $a - \dfrac{q'(pb+nc)}{1+pq''+nq'''}$

b ad limitem $b - \dfrac{q''(pb+nc)}{1+pq''+nq'''}$

c ad limitem $c - \dfrac{q'''(pb+nc)}{1+pq''+nq'''}$.

Eaedem notiones, si mutua contrarietate coactae e conditione libera ad aequilibrium usque deprimerentur, haec relinquerent residua,

a residuum $a - q'(pb+nc)$

b residuum $b - q''(pb+nc)$

c residuum $c - q'''(pb+nc)$.

Evidentissime igitur apparet, *notiones oppressionis servitute liberatas non solum eundem locum recuperare, quem secundum leges aequilibrii obtinuerint, si e statu libero mutuae contrarietatis effectu descenderint, sed ex legibus aequilibrii nunc altiori loco in animo retineri*, id quod congruit cum communi experientia, quae, *repetitione notiones tenaciores fieri* docet. Ad hanc observationem ea quoque referenda sunt, quae §. 61. e formula (11) collegimus.

Porro notatu dignum videtur, in genere semper unam ex imbecillioribus notionibus b, c definito tempore quodam valorem maximum acquirere et posthac ad ultimum limitem descendere, alteram vero uno tenore adscendendo ad limitem suum appropinquare. Etenim si quotus $\frac{dy}{dt}$ formatur et nihilo exaequatur, conditionem evanescentis quoti deprehenditur esse tempus

$$t'' = \frac{1}{pq''+nq'''} \log. \frac{q''(pb+nc)}{n(q''c-q'''b)}.$$

Hinc respectu notionis c simplici literarum mutatione invenitur

$$t''' = \frac{1}{pq'' + nq'''} \log. \frac{q''' (pb + nc)}{p (q''' b - q'' c)}.$$

Ex his vero quantitatibus, quia denominatores sub signo logarithmi oppositi sunt, semper una tantum realis esse potest. Si $q''' b = q'' c$, utraque fractio sub signo logarithmi in infinitum abit, evanescit igitur Maximum.

Quod ad a attinet, tempus t', aequationem $\frac{dx}{dt} = 0$ resolvens, investigatur esse

$$t' = \frac{1}{pq'' + nq'''} \log. \frac{q' (pb + nc)}{p (q' b - q'' a) + n (q' c - q''' a)},$$

de quo utrum reale sit an imaginarium, generaliter diiudicari nequit. Posito $m \geqq n \geqq p$ (quae hypothesis propter suppositam iacturam $py + nz$ huc pertinet) facile intelligitur, denominatorem sub signo logarithmi negativum, ergo totam quantitatem imaginariam fieri, et Maximum dari nullum.

Denique etiam hoc e formulis apparet, convergere quidem portiones iacturae singularum notionum ad relationes iis aequales, secundum quas e legibus aequilibrii iactura in ipsas distribunenda est, sed quovis tempore definito relationes partium, quae in animum redierunt, multo magis complicitas esse.

71.

In antecedentibus paragraphis iactura $py + nz$ supposita est. (§. 68.) Commutetur haec cum $px + mz$; quo facto aequationes differentiales hanc induent formam:

$$dx = [a - x - q' (px + mz)]\, dt$$
$$dy = [b - y - q'' (px + mz)]\, dt$$
$$dz = [c - z - q''' (px + mz)]\, dt.$$

Patet, mediam ex his, quae tres variabiles omnes sola continet, eum nunc occupare locum, quem §o 68. sub (1) prima tenebat, reliquas autem, primam nempe et tertiam, eadem methodo tractari posse, qua loco citato secunda et tertia, unde sequitur, leges motus in toto easdem futuras esse ac antea, unicamque diversitatem eo contineri, quod illae leges modo ad has modo ad illas notiones applicandae sint.

72.

Coronidis loco solvamus hanc quaestionem: data sit notio a, ex oppressione ad quantitatem α usque resucitata, resurgere nunc incipiat altera notio b illi gradu p opposita; inveniantur utriusque notionis leges motus.

Denotetur, ut antea, pars notionis b, elapso tempore t pressione liberata per y, ea vero, ad quam eodem tempore a evectum erit, per $\alpha + x$. Iactura facienda sine dubio aequabit py, ergo erit

$$dx = [a-\alpha-x-q'py]\,dt$$
$$dy = [b-(1+q''p)y]\,dt.$$

Ex his aequationibus altera facillime integratur ratione solita, quae, si simul Constantem ita determinamus, ut sit $t=0$, quando $y=0$, dabit

$$y = \frac{b}{1+q''p}\left[1-e^{-(1+q''p)t}\right]; \qquad (13)$$

quae formula docet, resurgentem notionem b in infinitum appropinquare ad limitem

$$b - \frac{q''pb}{1+q''p},$$

altiori igitur loco ac illo, quem obtineret, si simul cum a e libertate in statum depressionis descenderet, in animo retineri, caeterumque motum hunc a quantitate α nullo modo pendere, ita ut, an serius post priorem resurrexerit an ocius, ex ipsius motu cognosci non possit. Quod ad priorem formulam attinet, ea transformatur in hanc:

$$dx + x\,dt = (a-\alpha-q'py)\,dt,$$

cuius integrale erit

$$x = e^{-t}\left\{\int (a-\alpha-q'py)\,e^{t}dt + \text{Const.}\right\},$$

e quo, si e formula (13) valor quantitatis y depromitur, deinde integratio efficitur, denique Constans ita determinatur, ut, posito $x=0$, sit $t=0$, prodit

$$x = \left(a-\alpha-\frac{q''pb}{1+q''p}\right)-\left(a-\alpha-\frac{q'b}{q''}\right)e^{-t}-\frac{q'pb}{(1+q''p)\,q''p}\,e^{-(1+q''p)t} \qquad (14)$$

Convergit haec formula ad valorem,

$$a-\alpha-\frac{q'pb}{1+q''p},$$

qui magnam singulorum casuum varietatem admittit. Posito $\alpha=0$, h. e. notionibus a et b ab initio simul adscendentibus, limes iste erit

$$a-\frac{q'pb}{1+q''p}.$$

Posito contra $\alpha=a$, h. e. notione hac primum quidem ab omni pressione libera, idem limes aequabit

$$-\frac{q'pb}{1+q''p},$$

ergo negativus erit, quod non mirandum, quia hoc casu, uti etiam e form. (14) apparet, adscensio in descensionem mutatur; ita ut re vera hic limes eandem ac antecedens altitudinem notionis resurrectae supra limine exprimat. Caeterum quaeritur, an loco quodam definito Maximum habeat. Ratione consueta quaestionem hanc tractando, conditionem Maximi investigatur esse

$$(15)\quad t_1 = \frac{1}{q''p} \log. \frac{-q'b}{q''a - q'b - q''\alpha},$$

quae valorem realem exprimit, si $q''(a-\alpha) < q'b$. Substituto hoc t_1 in form. (14), ipsum Maximum x_1, reductionibus omnibus rite peractis, deprehenditur aequare

$$(16)\quad x_1 = a - \alpha - \frac{q'pb}{1+q''p} \left\{1 - \left[1 - \frac{q''(a-\alpha)}{q'b}\right]^{\frac{1+q''p}{q''p}}\right\},$$

quod, posito $\alpha = a$, nihilum exaequat, uti oportet, quia quantitates negativae nihilo minores recte habentur, ubi comparatio inter ipsas et positivas instituenda est.

Scripta haec sunt, ut indicamus orationem academicam in recordationem IO. AUG. ERNESTII d. XII. Septembris h. IX. habendam. Illius enim viri, olim nostratis, promovendo literarum humaniorum studio veraque quam docuit scripturam sacram interpretandi ratione immortalis, caeterumque, ut inter omnes constat, de scholis patriis ipsaque academia nostra praeclare meriti, memoriam pie recolet vir clarissimus ROBERTUS OTTO GILBERT, Ph. Dr. AA. LL. M., Theologiae Licent. et concionator vespertinus ad aedem Paulinam, qui die indicto in auditorio iuridico de *duobus vitiis, quae in rhetorica sacra evitanda sint*, verba faciet. Ad hanc igitur solemnitatem celebrandam RECTOREM ACADEMIAE MAGNIFICUM, PRINCIPEM CELSISSIMUM, PROCERES UTRIUSQUE REIPUBLICAE GRAVISSIMOS, COMMILITONES HUMANISSIMOS omnesque, qui liberalioribus studiis bene cupiunt, ea qua par est observantia invitamus.

P. P. in Univ. Lips. Dom. XV. p. F. Trin. A. S. MDCCCXXXIX.

TYPIS STARITZII, TYPOGR. ACAD.