SULLA LEZIONE DEL 09/03/2018

NICOLA ARCOZZI

1. Esercizi sulle derivate di composizioni

Ricordiamo che se le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ hanno derivate paziali continue, allora $g \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g = (g_1, \dots, g_p)$, ha derivate parzial continue e vale che

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(x) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(x), \;\; i = 1, \dots, p; \;\; k = 1, \dots, n.$$

(i) Calcolare la matrice jacobiana di $F(x, y, z) = (x^2yz, x^2 - y^2)$.

(ii) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come $h(r, t) = f(r \cos(t), r \sin(t))$. Calcolare $\nabla h(r, t)$ supponendo di conoscere le derivate parziali di f.

(iii) Sia $r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ e sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $h(t) = f(r(r))$. Calcolare h' supponendo di conoscere le derivate parziali di f e r'.

(iv) Siano $\alpha, \beta, \gamma \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Si definisca $h(x, y) = f(\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y))$. Calcolare ∇h supponendo di conoscere le derivate parziali di f.

(v) Sia $r \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ e sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ come $H(x, y) = r(f(x, y))$. Calcolare la matrice jacobiana JH di H supponendo di conoscere le derivate parziali di f e r'.

(vi) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come $h(x, y) = x \cdot f(x + y, xy)$. Calcolare $\partial_x h(x, y)$ e $\partial_y h(x, y)$ supponendo di conoscere le derivate parziali di f.

Date: March 10, 2018.