

Algebra Lineare e Geometria. Laurea in Astronomia  
Esame scritto del 25-01-2018

**Tempo: 2 ore. Giustificare sempre le risposte. Il punteggio relativo ad ogni domanda compare tra parentesi quadre. Svolgere gli esercizi 1-2 su un foglio mentre 3-4 su un altro**

Nome e Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1) Siano  $V = \mathbb{R}^3$  e  $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ .

- [2 pti] Si può costruire un'applicazione lineare suriettiva da  $V$  a  $W$ ?
- [3 pti] Si può costruire un'applicazione lineare iniettiva  $f$  da  $V$  a  $W$  tale che  $\text{Im } f = \langle x, 2 + x + x^2, 6 + 5x + 3x^2 \rangle$ ?

2) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$

$$\pi_k : (k+1)x - y + z + 2 = 0, \quad r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$$

- [5 pti] Si discuta, al variare di  $k$ , la posizione reciproca tra  $\pi_k$  e  $r$ .
- [3 pti] Esiste un valore di  $k$  per cui retta e piano sono perpendicolari?

3) Sia

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- [6 pti] Trovare una base ortonormale di autovettori di  $A$  e una matrice diagonale simile ad  $A$ .
- [6 pti] Sia  $\mathcal{C}$  la quadrica di equazione

$$\mathcal{C} : (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 = 0.$$

A quale famiglia di quadriche è congruente  $\mathcal{C}$ ? Cosa si ottiene se si interseca la quadrica  $\mathcal{C}$  con il piano  $y = 0$ ?

4) [5 pti] Sia  $\mathbb{C}$  il campo complesso. Chi sono gli  $z \in \mathbb{C}$  tali che  $z\bar{z} = 1$ ?