

Algebra Lineare e Geometria. Laurea in Astronomia  
Esame scritto del 16-01-2018

**Tempo: 2 ore. Giustificare sempre le risposte. Il punteggio relativo ad ogni domanda compare tra parentesi quadre. Svolgere gli esercizi 1-2 su un foglio mentre 3-4 su un altro**

Nome e Cognome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

1) [5 pti] Si dimostri che il sottoinsieme di  $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  formato dalle matrici che hanno la somma degli elementi sulla diagonale principale uguale a zero è un sottospazio vettoriale. Se ne calcoli una base e la sua dimensione.

2) Siano dati in  $\mathbb{R}^3$

$$\pi : 2x - 3y + 3z + 6 = 0, \quad r_k : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 5 + kt \\ z = 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

a) [5 pti] Si discuta, al variare di  $k$ , la posizione reciproca tra  $\pi$  e  $r_k$ .

b) [3 pti] Sia  $k = 2$ , trovare una retta sghemba con  $r_2$ .

3) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) [6 pti] Trovare una base ortonormale di autovettori di  $A$  e una matrice diagonale simile ad  $A$ .

b) [6 pti] Dire a quale famiglia di quadriche è congruente la quadrica

$$\mathcal{Q} : \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ponendo

$$\mathcal{Q}' : \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

$\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{Q}'$  sono congruenti alla stessa famiglia di quadriche?

4) Siano  $z_1 = -1 - i$  e  $z_2 = 2 + 3i$ .

a) [2 pti] Calcolare  $\|z_1^{-1}z_2\|$ .

b) [3 pti] Calcolare le radici quarte di  $z_1$ .