

Algebra Lineare e Geometria. Laurea in Astronomia
Esame scritto del 16-01-2018

Tempo: 2 ore. Giustificare sempre le risposte. Il punteggio relativo ad ogni domanda compare tra parentesi quadre. Svolgere gli esercizi 1-2 su un foglio mentre 3-4 su un altro

Nome e Cognome _____ Matricola _____

1) [5 pti] Si dimostri che il sottoinsieme di $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ formato dalle matrici che hanno la somma degli elementi sulla diagonale principale uguale a zero è un sottospazio vettoriale. Se ne calcoli una base e la sua dimensione.

2) Siano dati in \mathbb{R}^3

$$\pi : 2x - 3y + 3z + 6 = 0, \quad r_k : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 5 + kt \\ z = 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

a) [5 pti] Si discuta, al variare di k , la posizione reciproca tra π e r_k .

b) [3 pti] Sia $k = 2$, trovare una retta sghemba con r_2 .

3) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) [6 pti] Trovare una base ortonormale di autovettori di A e una matrice diagonale simile ad A .

b) [6 pti] Dire a quale famiglia di quadriche è congruente la quadrica

$$\mathcal{Q} : \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ponendo

$$\mathcal{Q}' : \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

\mathcal{Q} e \mathcal{Q}' sono congruenti alla stessa famiglia di quadriche?

4) Siano $z_1 = -1 - i$ e $z_2 = 2 + 3i$.

a) [2 pti] Calcolare $\|z_1^{-1}z_2\|$.

b) [3 pti] Calcolare le radici quarte di z_1 .