Algebra Lineare e Geometria
Soluzioni al secondo fac-simile di esame.
Laurea in Astronomia

1) a) In questo caso tale f non esiste. Se per assurdo esistesse avremmo infatti che

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = x$$

Ma le tre matrici non sono linearmente indipendenti, dovrebbe allo stesso tempo quindi valere

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = f\left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) =$$

(per linearità della f)

$$= 2f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) - 2f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

b) Anche in questo caso tale applicazione non esiste. Se per assurdo f esistesse dovrebbe valere

$$\dim\ker f + \dim \mathrm{Im} f = dim V_1 = 4$$

Se per assurdo la mappa fosse suriettiva l'insieme delle immagini dovrebbe coincidere con V_2 che ha anch'esso dimensione 4. Dunque la dimensione del nucleo sarebbe 0, ovvero una mappa iniettiva.

c) Per costruire una tale applicazione lineare basta definirla sugli elementi di una base di V_1 e poi estendere per linearità. Usiamo la base canonica, ovvero le matrici 2×2 $E_{i,j}$ che hanno 1 nel posto (i, j) e zero altrove.

$$\begin{array}{cccc} f: & V_1 & \to & V_2 \\ & E_{1,1} & \mapsto & x \\ & E_{1,2} & \mapsto & x + x^2 \\ & E_{2,1} & \mapsto & 0 \\ & E_{2,2} & \mapsto & 0 \end{array}$$

estendendo per linearità si ottiene una applicazione lineare non iniettiva (due matrici non nulle appartengono al nucleo) e, sapendo che le immagini di una base sono un insieme di generatori per $\mathrm{Im} f$, con l'insieme delle immagini cercato.

2) a) I tre vettori che generano V_1 (che chiameremo nell'ordine v_1, v_2, v_3) non sono linearmente indipendenti, infatti

$$v_3 = 3v_1 - \frac{3}{2}v_2.$$

Poiché v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti essi rappresentano una base per V_1 che quindi ha dimensione 2.
Per quanto riguarda V_2 notiamo che sono presenti due variabili libere (per esempio y e t) e due variabili vincolate, dunque anch'esso avrà dimensione 2. Una base di V_2 è quindi ottenibile ponendo prima $y = 1 \wedge t = 0$ e poi $y = 0 \wedge t = 1$ ottenendo i due vettori, w_1 e w_2 rispettivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Per trovare una base dello spazio somma occorre unire una base di V_1 con una base di V_2 e trovare un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti in questa unione. w_2 è un multiplo di v_3 e quindi, come visto precedentemente, può essere espresso come combinazione lineare di v_1 e v_2, quindi può essere scartato, viceversa w_1 è indipendente da v_1 e v_2, infatti tutti i vettori di V_1 hanno 0 nella seconda componente, poiché w_1 ha un elemento diverso da zero nella seconda componente non potrà mai essere combinazione di v_1 e v_2. Quindi v_1, v_2 e w_1 rappresentano una base per $V_1 + V_2$, che avrà quindi dimensione 3. Tramite la formula

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

otteniamo quindi che la dimensione dell'intersezione deve essere 1. Basta quindi trovare un vettore non nullo che stia nell'intersezione perché questo rappresenti una base. Abbiamo notato prima che w_2 è combinazione di elementi di V_1 quindi apparterrà a $V_1 \cap V_2$.

3) a) Anzitutto studiamo il determinante della matrice:

$$\det A_k = k^2 - 5k + 6 = (k-2)(k-3)$$

Dunque per i valori diversi da 2 e da 3 questa matrice ha rango massimo. Studiamo ora il determinante di due minori

$$\det(A_k)_{3,3} = 2 - k, \quad \det(A_k)_{1,1} = 6 - 2k$$

Dunque poiché non si annullano mai contemporaneamente la matrice A_k ha sempre rango maggiore o uguale a 2. Ne consegue che

$$\text{rank } A_k \begin{cases} 3 & k \neq 2, 3 \\ 2 & k = 2 \vee k = 3 \end{cases}$$

b) Cerchiamo quindi le radici del polinomio caratteristico:

$$p_{A_2}(t) = -t^3 + 6t^2 - t = -t(t - 3 - 2\sqrt{2})(t - 3 + 2\sqrt{2})$$

Le radici sono quindi gli autovalori di A_2. Avendone tre distinte (in $\mathbb{R}^3$) per un corollario possiamo concludere che la matrice è diagonalizzabile.

4) a) Per rispondere occorre studiare le giaciture dei due spazi:

$$\text{Giac } r = < \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} >, \quad \text{Giac } \pi_k = \left\{ y = \frac{kz - 3x}{2} \right\} = < \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2 \end{pmatrix} >$$

Gli spazi saranno incidenti se i tre vettori risulteranno linearmente indipendenti, paralleli nell'altro caso.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & k \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6k - 2$$

Quindi se $k \neq \frac{1}{3}$ i due spazi sono incidenti, paralleli altrimenti. Inoltre in quest'ultimo caso la retta è disgiunta da $\pi_{\frac{1}{3}}$ poiché il punto $(1, 2, 0)$ appartiene alla retta ma non al piano.

b) Per vedere se esiste un valore di k per cui piano e retta sono ortogonali tra loro è sufficiente discutere la relazione tra n_k, il vettore ortogonale al piano, e v_r ovvero il vettore direzione di r (un qualunque vettore non nullo della sua giacitura). La retta sarà ortogonale al piano solo se v_r e n_k saranno linearmente dipendenti.

$$n_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -k \end{pmatrix}, \quad v_r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Notiamo che questi due vettori sono sempre linearmente indipendenti (mettendoli in riga in una matrice il determinante del minore non contenente la terza colonna è non nullo). Dunque non esiste un tale k.

c) Costruiamo tale retta in forma parametrica, ci occorre trovare il vettore direzione e un punto da cui passa per renderla unica. Per il punto possiamo prendere direttamente P, perché sia ortogonale a π_2 come detto precedentemente deve avere il vettore di direzione linearmente dipendente a

$$n_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Quindi la retta cercata (unica perché ho un'unica giacitura e deve passare per un punto preciso) è

$$s_1 : \begin{cases} x = & 1 + 3t \\ y = & 3 + 2t \\ z = & 7 - 2t \end{cases}$$

d) Anche in questo caso useremo la forma parametrica. Perché questa retta s_2 sia parallela a r occorre che la giacitura delle due rette sia la stessa. Possiamo quindi prendere il vettore direzione di s_2 uguale al vettore direzione di r, imponendo poi il passaggio per P si ottiene

$$s_2 : \begin{cases} x = & 1 + t \\ y = & 3 - t \\ z = & 7 + 3t \end{cases}$$