



FACULTAD DE MATEMÁTICA ASTRONOMÍA Y FÍSICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

TESIS DOCTORAL DE FÍSICA:

**Sobre la estabilidad de Kerr extremo ante  
perturbaciones gravitacionales lineales**

IVAN GENTILE DE AUSTRIA

Marzo 2016

DIRECTOR:  
SERGIO A. DAIN

---



Este trabajo está bajo una Licencia Creative Commons Atribución 4.0  
Internacional



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Descomposición de las ecuaciones de Einstein</b>	<b>9</b>
2.1. Formalismo $(2+1)+1$ . . . . .	9
2.2. <i>Gauge</i> maximal isotérmico . . . . .	11
2.3. Ecuaciones lineales . . . . .	14
<b>3. Perturbaciones axiales en Minkowski</b>	<b>21</b>
<b>4. Perturbaciones axiales en Kerr extremo</b>	<b>31</b>
4.1. Positividad y conservación de la masa . . . . .	31
4.2. Estimaciones . . . . .	37
<b>5. Estimaciones para <math>q</math> y <math>\beta^A</math></b>	<b>49</b>
<b>6. Comentarios finales</b>	<b>53</b>
<b>A. Agujero negro de Kerr en el <i>gauge</i> maximal isotérmico</b>	<b>55</b>
<b>B. Estimación tipo Sobolev</b>	<b>59</b>



# Capítulo 1

## Introducción

La estabilidad de la métrica de Kerr es uno de los problemas aún sin resolver más importantes dentro del marco de la relatividad general.

La métrica de Kerr, fue descubierta en 1963 por el matemático neozelandés Roy Patrick Kerr. Dicha métrica es una solución de las ecuaciones de Einstein en vacío con momento angular no nulo. Esta solución representa el campo gravitatorio de un agujero negro o el del exterior de un cuerpo en rotación que tengan masa  $M$  y momento angular  $J$ . Por esto, la métrica de Kerr se ha convertido en el modelo ideal para describir la gravedad de los cuerpos celestes observados.

Como toda solución matemática la métrica de Kerr no tiene por qué ser físicamente real. Para que pueda considerarse como una solución física debe ser estable ante perturbaciones. Por lo cual, el análisis de la estabilidad de Kerr ha sido el trabajo y dedicación de muchas personas, que durante las últimas décadas han logrado considerables progresos.

El análisis de la estabilidad consiste en tomar una métrica  $g_{ab}$  que sea solución de las ecuaciones de Einstein y sumarle alguna perturbación, digamos  $h_{ab}$ . Reemplazando esta construcción en las ecuaciones de Einstein obtendremos un sistema de ecuaciones para la perturbación  $h_{ab}$ . Luego, de este conjunto de ecuaciones se trata de obtener información sobre el comportamiento de la perturbación  $h_{ab}$ . Este comportamiento puede darse de dos formas. Caso estable, la perturbación permanece acotada para todo tiempo. Caso inestable, la perturbación crece indefinidamente con el tiempo.

A lo largo de los años el estudio de la estabilidad de agujeros negros, no solo el de Kerr, ha brindado un amplio campo de investigación en distintas direcciones.

Nuestro trabajo se desarrolla en este campo de investigación y está motivado por los siguientes tres aspectos relacionados al problema de la estabilidad de agujeros negros.

**(i) Estabilidad no modal de perturbaciones gravitacionales lineales**

La estabilidad no modal para perturbaciones gravitacionales lineales del agujero negro de Kerr sigue siendo un problema abierto. En los trabajos de Regge, Wheeler [40], Zerilli [49] [50] y Moncrief [37] se determina la estabilidad modal

de perturbaciones gravitacionales para el agujero negro de Schwarzschild descartando la posibilidad de crecimiento exponencial en el tiempo para cada modo individual. La estabilidad modal del agujero negro de Kerr fue probada por Whiting [48] usando la ecuación de Teukolsky [45]. Sin embargo, la estabilidad modal no alcanza para excluir el hecho de que las perturbaciones gravitacionales lineales puedan crecer indefinidamente con el tiempo (ver la discusión al respecto en [46] y [14]). El estudio de la estabilidad no modal comenzó con los trabajos de Kay y Wald [46] [33]. Estos trabajos prueban que la solución a la ecuación de ondas sobre Schwarzschild permanece acotada para todo tiempo por una constante. Lo importante de esta prueba es el uso de energías conservadas para controlar la norma de la solución. En cuanto al caso del agujero negro de Kerr, existe un resultado análogo al de Kay y Wald demostrado por Dafermos y Rodnianski en [15]. Para un repaso completo sobre estos resultados puede verse [14] [13] [28]. Todos estos resultados son referidos a la ecuación de onda. En cuanto a las perturbaciones gravitacionales el único resultado de estabilidad no modal es el obtenido por Dotti [26] para el agujero negro de Schwarzschild. Aclaremos, que aun, no hay resultados no modales para el agujero negro de Kerr ante perturbaciones gravitacionales.

**(ii) Estabilidades e inestabilidades de los agujeros negros extremos**

La relevancia de los agujeros negros extremos viene del hecho de que son la frontera entre los agujeros negros y las singularidades desnudas, por lo que se espera que su estudio de un mayor entendimiento sobre la conjetura de censura cósmica. En los trabajos [2] y [3] Aretakis ha descubierto un tipo de inestabilidad para agujeros negros extremos. Estas inestabilidades están relacionadas con derivadas transversales de la perturbación sobre el horizonte de eventos: existe una ley de conservación que asegura que la primera derivada transversal de la perturbación sobre el horizonte no siempre decae, esto implica que la segunda derivada transversal comúnmente crece con el tiempo en el horizonte. Estas inestabilidades fueron descubiertas primero para la ecuación de onda en el agujero negro de Reissner-Nordström extremo, también existe un resultado similar para el agujero negro de Kerr extremo [5] [4]. Estos trabajos se ampliaron en diferentes direcciones: para agujeros negros extremos comunes y perturbaciones gravitacionales lineales [36], para cierto tipo de agujeros negros extremos en dimensiones más altas [38], para campos escalares masivos y para perturbaciones gravitacionales lineales y electromagnéticas acopladas [35], para un campo escalar con auto interacción no lineal en la métrica de Kerr extremo [6]. En [8] Bizon y Friedrich estudian una interesante relación entre estas inestabilidades y la constante de Newman-Penrose. Esta relación fue observada, de forma independiente, por Lucietti, Murata, Reall y Tanahashi [35]. Por último, mencionamos el estudio numérico para la evolución no lineal de este tipo de inestabilidad para perturbaciones con simetría esférica en el agujero negro de Reissner-Nordström extremo realizado por Murata, H. S. Reall, y N. Tanahashi en [39].

Una cuestión importante respecto a la dinámica de los agujeros negros extremos es saber si un agujero negro no extremo puede evolucionar hacia uno extremo. Reiris [41] probó que existe una perturbación arbitrariamente pequeña para

un agujero negro extremo inicial que no decae a ningún agujero negro extremo. Por otro lado, en [39] se construye de modo sutil un dato inicial que decae en un agujero negro de Reissner-Nordström extremo. Estos trabajos no están en contradicción siendo que utilizan distintos tipos de datos iniciales. Es interesante el hecho de que la construcción en [41] se basa en desigualdades geométricas entre área y carga en superficies atrapadas (véase [19], y las referencias en el mismo), por el contrario en el espacio usado en [39] no hay superficies atrapadas.

La discusión anterior hace referencia a inestabilidades de agujeros negros extremos. Sin embargo, también hay resultados de estabilidad para este tipo de agujeros negros. El más importante de ellos es que la solución de la ecuación de onda está acotada punto a punto en la región exterior de un agujero negro [2] (ver además [22]).

**(iii) Estabilidad no lineal**

El problema de la estabilidad no lineal de agujeros negros sigue estando en gran parte sin solución (ver la discusión en [14] y las referencias que allí se citan). Se espera que los estudios de perturbaciones lineales discutidos anteriormente provean alguna idea para abordar el problema no lineal. Esto sería posible solo si los argumentos de estabilidad lineal pueden ser extendidos al régimen no lineal. Uno de los métodos más importantes de estas técnicas es la estimación mediante energías conservadas. Este es el método que utilizaremos en este trabajo.

El resultado principal que hemos obtenido es el siguiente

*Para perturbaciones gravitacionales lineales con simetría axial de la métrica de Kerr extremo, existe una energía que es positiva definida y conservada. Además, esta energía provee estimaciones integrales para la perturbación.*

La primer parte de este resultado está descrito de modo preciso en el Teorema 4.1.1 y la segunda en el Teorema 4.2.1. A continuación discutiremos su relación con los puntos (i), (ii) y (iii) anteriores.

(i) La energía conservada para perturbaciones lineales tiene una estructura similar a la de la energía correspondiente a la ecuación de onda: ésta es una integral sobre una superficie espacial de términos que involucran los cuadrados de las primeras derivadas de la perturbación. Esta energía esta relacionada con la expansión a segundo orden de la masa ADM. Sin embargo, es importante mencionar que la positividad de la esta energía no puede ser deducida fácilmente de la positividad de la masa de ADM. De hecho, como veremos, este resultado es consecuencia de identidades no triviales. Además es notable el hecho de que esta energía es positiva incluso dentro de la ergo-esfera.

La expresión de la energía y su conservación no requiere ninguna expansión en modos de la perturbación. Esta energía conservada da un criterio básico de estabilidad no modal para las perturbaciones lineales con simetría axial en Kerr extremo. Como las ecuaciones son lineales y sus coeficientes no dependen del tiempo, se puede construir un número infinito de energías conservadas de orden más alto. Por similitud, es posible que estas energías den una estimación puntual parecida a la dada en [22]. En ese trabajo se prueba que la solución

de la ecuación de onda sobre Reissner-Nörstrom extremo está acotada punto a punto utilizando estimaciones con energías de distintos órdenes. Por el momento no pudimos extender ese resultado al caso de Kerr extremo. Por otro lado, en el caso de Minkowski probamos una cota puntual para las perturbaciones lineales de un modo que destaca por su simpleza. Comparando con Minkowski, las dificultades que se presentan en el caso de Kerr son las siguientes: en primer lugar, las ecuaciones para la norma del vector de Killing axial y de su potencial de *twist* son acopladas (veremos las definiciones de estas funciones en el siguiente capítulo, también veremos que estas funciones representan los dos grados de libertad que poseen las perturbaciones con simetría axial), este acoplamiento hace imposible separarlas como en el caso de Minkowski. En segundo lugar, los coeficientes de las ecuaciones son singulares en el horizonte y por lo tanto no se pueden usar desigualdades de Sobolev normales.

Esta energía conservada está estrechamente relacionada con la energía estudiada por Hollands y Wald en [31] (ver también [34]). Esperamos que las técnicas usadas en nuestro trabajo para probar la positividad de la energía sea útil en el contexto de la referencia anterior. Además, las condiciones de borde en el horizonte propuestas en [31] parecen ser útiles para generalizar los resultados al caso no extremo.

(ii) La existencia de esta energía conservada y el criterio de estabilidad que provee no están en contradicción con las inestabilidades de Aretakis. La situación es similar a la discutida en [22] para el caso de la ecuación de onda. La energía está definida solo en la región exterior del agujero negro, por lo tanto no controla ninguna derivada transversal al horizonte.

(iii) Como hemos dicho, la energía conservada esta relacionada con la masa ADM la cual es conservada incluso en el régimen no lineal (puede verse la discusión al respecto en [24]). Esto quiere decir, que las estimaciones de energía usadas en este trabajo pueden ser útiles para el caso no lineal.

Con respecto a la segunda parte del resultado principal, podemos decir que las estimaciones integrales obtenidas incluyen términos que contienen los cuadrados de la perturbación y de sus dos primeras derivadas espaciales. Por lo tanto, estas estimaciones contienen, en principio, todos los ingredientes necesarios para utilizar las desigualdades de Sobolev y dar cotas puntuales. Sin embargo, las integrales mencionadas, contienen también coeficientes que dependen de la métrica de fondo. En particular, uno de estos coeficientes es nulo en el horizonte, lo que indica que las estimaciones degeneran en el horizonte y por lo tanto no es posible encontrar una cota puntual mediante desigualdades de Sobolev normales. Aun así es esperable encontrar algún tipo de desigual de Sobolev con peso que permita realizar una estimación puntual de la perturbación. Así mismo, la degeneración se da solo en el horizonte, por lo que las estimaciones brindan una cota puntual para las perturbaciones lineales en toda la región exterior del agujero negro de Kerr extremo. Este último resultado se expresa de forma precisa en el Corolario 4.2.2.



## Capítulo 2

# Descomposición de las ecuaciones de Einstein

Para describir las ecuaciones de las perturbaciones usaremos una descomposición particular para espacios con simetría axial llamada formalismo  $(2+1)+1$ . Esta descomposición fue desarrollada por Geroch [29] y hace uso de la existencia de un vector de Killing axial. También haremos uso del *gauge* maximal isotérmico.

En este capítulo revisaremos el formalismo  $(2+1)+1$  y el *gauge* maximal isotérmico, dando como resultado las ecuaciones de evolución, vínculo y *gauge* para espacios con simetría axial. Seguimos el desarrollo dado en [24] (para más información de este formalismo ver [17, 10, 42]).

### 2.1. Formalismo $(2+1)+1$

Sea  $(M, g_{\mu\nu})$  una solución de las ecuaciones de Einstein en vacío de signatura  $(-+++)$  con simetría axial. Llamemos  $\eta^\mu$  al vector de Killing axial. Se definen la norma y el *twist* de  $\eta^\mu$  como

$$\eta = \eta^\mu \eta^\nu g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$\omega_\mu = \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \eta^\nu \nabla^\lambda \eta^\gamma. \quad (2.2)$$

Debido a que  $g_{\mu\nu}$  es solución de vacío tenemos que

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.3)$$

y de esta ecuación se puede demostrar, en particular, que el *twist* es el gradiente de una función escalar

$$\omega_\mu = \nabla_\mu \omega. \quad (2.4)$$

Descomponemos la métrica  $g_{\mu\nu}$  del siguiente modo

$$\eta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_\mu \eta_\nu, \quad (2.5)$$

donde  $h_{\mu\nu}$  es la métrica inducida sobre la 3-variedad  $N$  que representa la colección de todas las posibles trayectorias de  $\eta^\mu$ .

Las ecuaciones de Einstein para esta descomposición son

$$\square\eta = \frac{1}{\eta}(\nabla^a \nabla_a \eta - \nabla^a \omega \nabla_a \omega), \quad (2.6)$$

$$\square\omega = \frac{2}{\eta} \nabla^a \omega \nabla_a \eta, \quad (2.7)$$

$${}^{(3)}R_{ab} = \frac{1}{2\eta^2}(\nabla_a \eta \nabla_b \eta - \nabla_a \omega \nabla_b \omega), \quad (2.8)$$

donde  ${}^{(3)}R_{ab}$  es el tensor de Ricci de  $h_{ab}$ , y las letras en latín  $a, b$  denotan los índices 3-dimensionales para la métrica  $h_{ab}$ , además  $\nabla_a$  es la derivada covariante asociada a la métrica  $h_{ab}$  y  $\square = \nabla^a \nabla_a$ .

Ahora realizamos la foliación estándar con superficies a  $t = cte$ .

$$h_{ab} = -n_a n_b + q_{ab}, \quad (2.9)$$

donde  $q_{ab}$  es la métrica inducida y  $n^a$  es el vector normal a las superficies a  $t = cte$ .

De (2.8) se obtienen las siguientes ecuaciones de vínculo

$${}^{(2)}R - \chi^{AB} \chi_{AB} + \chi^2 = \mu, \quad (2.10)$$

$$D^A \chi_{AB} - D_B \chi = J_B, \quad (2.11)$$

donde  ${}^{(2)}R$  es el escalar de Ricci para  $q_{AB}$ ,  $\chi_{AB}$  es la segunda forma fundamental y  $\chi = q^{AB} \chi_{AB}$  su traza,  $D^A$  es la derivada covariante de  $q_{AB}$ , las letras mayúsculas  $A, B$  representan los índices 2-dimensionales para la métrica  $q_{AB}$ . La densidad  $\mu$  y la corriente  $J_b$  están definidas por

$$\mu = 2{}^{(3)}R_{ab} n^a n^b + {}^{(3)}R, \quad (2.12)$$

$$J_b = -q_b^c n^a {}^{(3)}R_{ca}, \quad (2.13)$$

siendo  ${}^{(3)}R = {}^{(3)}R_{ab} h^{ab}$  la traza de  ${}^{(3)}R_{ab}$ . Usando la ecuación (2.8) se reescriben estas cantidades como

$$\mu = \frac{1}{2\eta^2}(\eta'^2 + \omega'^2 + |D\eta|^2 + |D\omega|^2), \quad (2.14)$$

$$J_A = -\frac{1}{2\eta^2}(\eta' D_A \eta + \omega' D_A \omega), \quad (2.15)$$

donde definimos la siguiente notación  $|D\eta|^2 = D^A\eta D_A\eta$  y la prima es la derivada en la dirección de  $n^a$

$$\eta' = n^a \nabla_a \eta = \frac{1}{\alpha} (\partial_t \eta - \beta^A D_A \eta), \quad (2.16)$$

siendo  $\alpha$  es el lapso y  $\beta$  es el vector de corrimiento dados por

$$t^a = \alpha n^a + \beta^a. \quad (2.17)$$

Las ecuaciones de evolución para la métrica y la segunda forma fundamental vienen dadas por

$$\partial_t q_{AB} = -2\alpha \chi_{AB} + \mathcal{L}_\beta q_{AB}, \quad (2.18)$$

$$\partial_t \chi_{AB} = \mathcal{L}_\beta \chi_{AB} - D_A D_B \alpha + \alpha \tau_{AB}, \quad (2.19)$$

donde

$$\tau_{AB} = \chi \chi_{AB} + {}^{(2)}R_{AB} - {}^{(3)}R_{AB} - 2\chi_{AC} \chi_B^C, \quad (2.20)$$

$${}^{(3)}R_{AB} = \frac{1}{2\eta^2} (\partial_A \eta \partial_B \eta + \partial_A \omega \partial_B \omega) \quad (2.21)$$

y  $\mathcal{L}$  es la derivada de Lie. Las ecuaciones (2.10)-(2.11) y (2.18)-(2.19) son la descomposición de la ecuación (2.8). Las ecuaciones para  $\eta$  y  $\omega$  se obtienen de la descomposición de (2.6) y (2.7)

$$-\Sigma'' + \Delta_q \Sigma + D_A \Sigma \frac{D^A \alpha}{\alpha} + \Sigma' \chi = \frac{1}{\eta^2} (\omega'^2 - |D\omega|^2) \quad (2.22)$$

$$-\omega'' + \Delta_q \omega + D_A \Sigma \frac{D^A \alpha}{\alpha} + \omega' \chi = \frac{2}{\eta^2} (D_A \omega D^A \eta - \omega' \eta') \quad (2.23)$$

donde  $\Sigma = \log \eta$  y  $\Delta_q$  es el Laplaciano para la métrica  $q_{AB}$ .

## 2.2. Gauge maximal isotérmico

Ahora pasaremos al *gauge* maximal isotérmico el cual fija el lapso  $\alpha$  y el vector corrimiento  $\beta^A$ . Este *gauge* consiste de dos condiciones: primero, la condición de maximalidad que fija al lapso  $\alpha$  mediante el requerimiento de que la traza de la curvatura extrínseca sea nula

$$\chi = 0, \quad (2.24)$$

la segunda condición fija el vector de corrimiento  $\beta$  mediante la imposición de que la métrica  $q_{AB}$  tenga la siguiente forma

$$q_{AB} = e^{2u} \delta_{AB}, \quad (2.25)$$

donde  $u$  es una función suave que definiremos luego, y  $\delta_{AB}$  es la métrica plana

$$\delta = d\rho^2 + dz^2, \quad (2.26)$$

cabe aclarar que toda métrica de dos dimensiones es conforme a la métrica plana.

La parte relevante de la geometría que resulta de la descomposición y *gauge* descritos antes, son los semiplanos  $\mathbb{R}_+^2$  (definido por  $-\infty < z < \infty$ ,  $0 \leq \rho < \infty$ ) para el caso de Minkowski o  $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$  si el espacio presenta un agujero negro. En este último caso el origen representa la ubicación del horizonte. Para ambos casos  $\rho = 0$  representa el eje de simetría.

Los grados de libertad dinámicos del campo gravitacional están comprendidos en las funciones  $\eta$  y  $\omega$ . Debido al comportamiento en el eje, en vez de  $\eta$ ,  $\alpha$  y  $u$  es mejor trabajar con las funciones auxiliares  $\sigma$ ,  $\bar{\alpha}$  y  $q$  definidas por

$$\eta = \rho^2 e^\sigma, \quad \alpha = \rho \bar{\alpha}, \quad u = \log \rho + \sigma + q. \quad (2.27)$$

Para escribir las ecuaciones vamos a utilizar frecuentemente los siguientes operadores. El Laplaciano 2-dimensional  $\delta$  definido por

$$\Delta q = \partial_\rho^2 q + \partial_z^2 q, \quad (2.28)$$

y el operador  $^{(3)}\Delta$  definido por

$$^{(3)}\Delta \sigma = \Delta \sigma + \frac{\partial_\rho \sigma}{\rho}. \quad (2.29)$$

Este último operador es el Laplaciano plano en tres dimensiones escrito en coordenadas cilíndricas aplicado a funciones con simetría axial.

Las ecuaciones de Einstein para espacios con simetría axial en el *gauge* maximal isotérmico son:

#### **Ecuaciones de evolución**

Las ecuaciones de evolución para  $\sigma$  y  $\omega$

$$-e^{2u} \sigma'' + ^{(3)}\Delta \sigma + \partial_A \sigma \frac{\partial^A \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} - 2e^{2u} (\log \rho)'' + 2 \frac{\partial_\rho \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} \rho} = \frac{(e^{2u} \omega'^2 - |\partial \omega|^2)}{\eta^2}, \quad (2.30)$$

$$-e^{2u} \omega'' + ^{(3)}\Delta \omega + \partial_A \omega \frac{\partial^A \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} = \frac{2(\partial_A \omega \partial^A \eta - e^{2u} \omega' \eta')}{\eta}. \quad (2.31)$$

Las ecuaciones de evolución de la métrica  $q_{AB}$  y de la segunda forma  $\chi_{AB}$  vienen dadas por

$$2\dot{u} = \partial_A \beta^A + 2\beta^A \partial_A u, \quad (2.32)$$

$$\dot{\chi}_{AB} = \mathcal{L}_\beta \chi_{AB} - F_{AB} - \alpha G_{AB} - 2\alpha \chi_{AC} \chi_B^C, \quad (2.33)$$

donde el punto indica derivada respecto del tiempo y hemos definido

$$F_{AB} = \partial_A \partial_B \alpha - \frac{1}{2} \delta_{AB} \Delta \alpha - 2 \partial_{(A} \alpha \partial_{B)} u + \partial_C \alpha \partial^C u \delta_{AB}, \quad (2.34)$$

$$G_{AB} = {}^{(3)}R_{AB} - \frac{1}{2} \delta_{AB} {}^{(3)}R_{CD} \delta^{CD}, \quad (2.35)$$

$${}^{(3)}R_{AB} = \frac{1}{2\eta^2} (\partial_A \eta \partial_B \eta + \partial_A \omega \partial_B \omega). \quad (2.36)$$

### Ecuaciones de vínculo

Las ecuaciones para los vínculos del momento y del Hamiltoniano son

$$\partial^B \chi_{AB} = -\frac{e^{2u}}{2\eta^2} (\eta' \partial_A \eta + \omega' \partial_A \omega), \quad (2.37)$$

$${}^{(3)}\Delta \sigma + \Delta q = -\frac{\varepsilon}{4\rho}, \quad (2.38)$$

en donde definimos la densidad de energía  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \left( \frac{e^{2u}}{\eta^2} (\eta'^2 + \omega'^2) + |\partial \sigma|^2 + \frac{|\partial \omega|^2}{\eta^2} + 2e^{-2u} \chi^{AB} \chi_{AB} \right) \rho. \quad (2.39)$$

Notar que  $\varepsilon$  es positivo definido.

### Ecuaciones de *gauge*

Las ecuaciones para el lapso y el corrimiento son

$$\Delta \alpha = \alpha \left( e^{-2u} \chi^{AB} \chi_{AB} + e^{2u} \frac{1}{2\eta^2} (\eta'^2 + \omega'^2) \right), \quad (2.40)$$

$$(\mathcal{L}\beta)_{AB} = 2\alpha e^{-2u} \chi_{AB}. \quad (2.41)$$

donde el operador  $\mathcal{L}$  esta dado por

$$\mathcal{L}\beta_{AB} = \partial_A \beta_B + \partial_B \beta_A - \delta_{AB} \partial_C \beta^C \quad (2.42)$$

La propiedad mas importante de este *gauge* es que la masa ADM viene dada por la siguiente integral en el plano  $\mathbb{R}_+^2$  de la densidad de energía positiva  $\varepsilon$

$$m = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varepsilon \, d\rho dz, \quad (2.43)$$

además, como se demuestra en [17] es conservada a lo largo de la evolución. Aclaremos que el dominio de integración es  $\mathbb{R}_+^2$  incluso para el caso de un agujero negro.

Para seguimiento de las cuentas, mencionamos que los índices son movidos con la métrica plana  $\delta_{AB}$ .

### Condiciones de borde

Para el infinito espacial asumimos las condiciones de decaimiento usuales para espacio-tiempos asintóticamente planos para  $r \rightarrow \infty$

$$\sigma, \beta^A, \chi_{AB}, \dot{\sigma}, \dot{\beta}^A, \dot{\chi}_{AB} = o_1(r^{-1/2}), \quad \bar{\alpha} - 1 = o_1(1), \quad (2.44)$$

donde definimos que  $f = o_j(r^k)$  si  $f$  satisface  $\partial^\alpha f = o(r^{k-|\alpha|})$ , para  $|\alpha| \leq j$ , siendo  $\alpha$  un multi-índice, donde  $r$  es el radio esférico  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ . En los siguientes capítulos también haremos uso de una notación similar para  $f = O_j(r^k)$ . La diferencia entre las dos definiciones es la siguiente. Para  $f = o_j(r^k)$  tenemos que  $\lim_{r \rightarrow 0, \infty} \frac{f}{r^k} = 0$ , mientras que para  $f = O_j(r^k)$  tenemos que  $\lim_{r \rightarrow 0, \infty} \frac{f}{r^k} = C$ , con  $C \neq 0$ .

En el eje se satisfacen las siguientes condiciones de paridad [24]

$$\eta, \omega, \bar{\alpha}, u, q, \sigma, \chi_{\rho\rho}, \beta^z \text{ son funciones pares de } \rho, \quad (2.45)$$

$$\alpha, \chi_{\rho z}, \beta^\rho \text{ son funciones impares de } \rho. \quad (2.46)$$

Por lo tanto las funciones impares se anulan en el eje, mientras que para las funciones pares es su derivada según  $\rho$  la que anula en el eje.

En el caso del agujero negro de Kerr extremo tenemos una condición extra en el origen. Para este caso asumimos las siguientes condiciones para  $r \rightarrow 0$

$$\sigma, \beta^A, \chi_{AB}, \dot{\sigma}, \dot{\beta}^A, \dot{\chi}_{AB} = o_1(r^{-1/2}), \quad \bar{\alpha} - 1 = o_1(1). \quad (2.47)$$

Estas condiciones abarcan toda la información sobre el comportamiento asintótico cilíndrico típico de un agujero negro extremo en el horizonte (para una discusión respecto de este tema, puede verse [18] y [23]).

El comportamiento del *twist* es más sutil ya que contiene información sobre el momento angular. Este comportamiento es explicado en el Capítulo 4.

### 2.3. Ecuaciones lineales

En esta sección linealizamos las ecuaciones obtenidas en la sección anterior.

Para generalizar llamamos  $\psi$  a cualquiera de las funciones anteriores ( $\sigma, \omega, \alpha, \beta$ , etc.). Considere una familia mono-paramétrica de soluciones  $\psi(\lambda)$ . Linealizamos las ecuaciones tomando derivada respecto de  $\lambda$  y evaluando en  $\lambda = 0$ . Usamos la siguiente notación para el fondo y el primer orden de la linealización

$$\psi_0 = \psi(\lambda)|_{\lambda=0}, \quad \psi_1 = \left. \frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (2.48)$$

Asumimos que la solución de fondo es estacionaria, es decir

$$\dot{\psi}_0 = 0. \quad (2.49)$$

También asumimos las siguientes condiciones para el corrimiento y la segunda forma fundamental de la métrica de fondo

$$\beta_0^A = 0, \quad \chi_{0AB} = 0. \quad (2.50)$$

La condición (2.50) se cumple para la solución de Kerr para cualquier elección de los valores de la masa y el momento angular, ver Apéndice A. Esta condición simplifica considerablemente las ecuaciones. En particular, de (2.49) y (2.50) se deduce que

$$\psi'_0 = 0. \quad (2.51)$$

Como primera consecuencia importante de estas suposiciones (2.50) tenemos que el primer orden de la ecuación para el lapso es trivial. Es decir, el lado derecho de la ecuación (2.40) es de segundo orden en  $\lambda$ , de lo que tenemos

$$\Delta\alpha_0 = 0, \quad \Delta\alpha_1 = 0. \quad (2.52)$$

Como la condición de contorno para el lapso  $\alpha$  es independiente de  $\lambda$ , se deduce que la perturbación a primer orden  $\alpha_1$  satisface condiciones de borde homogéneas tanto en el eje como en el infinito, y por lo tanto de la ecuación (2.52) obtenemos

$$\alpha_1 = 0. \quad (2.53)$$

Por otro lado, el orden cero del lapso  $\alpha_0$  satisface condiciones de borde no triviales. El valor de  $\alpha_0$  depende de la métrica de fondo elegida. Notablemente, para Minkowski y Kerr extremo se cumple que  $\alpha_0 = \rho$ .

De (2.53), (2.50) y (2.49) obtenemos las siguientes formulas

$$\psi'_1 = \frac{1}{\alpha_0} \left( \dot{\psi}_1 - \beta_1^A \partial_A \psi_0 \right), \quad (2.54)$$

$$\psi''_1 = \frac{1}{\alpha_0^2} \left( \ddot{\psi}_1 - \dot{\beta}_1^A \partial_A \psi_0 \right). \quad (2.55)$$

Además, como consecuencia de la definición (2.27) tenemos las siguientes relaciones

$$\eta_0 = \rho^2 e^{\sigma_0}, \quad \eta_1 = \eta_0 \sigma_1. \quad (2.56)$$

Con todas estas suposiciones y definiciones, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones linealizadas.

#### **Ecuaciones de evolución**

De (2.30) y (2.31) tenemos las ecuaciones de evolución para  $\sigma_1$  y  $\omega_1$

$$-\frac{e^{2u_0}}{\alpha_0^2} \dot{p} + {}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \frac{\partial_A \sigma_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} = \frac{2}{\eta_0^2} (\sigma_1 |\partial\omega_0|^2 - \partial_A \omega_1 \partial^A \omega_0), \quad (2.57)$$

$$-\frac{e^{2u_0}}{\alpha_0^2} \dot{d} + {}^{(3)}\Delta\omega_1 + \frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_0} = 4 \frac{\partial_\rho \omega_1}{\rho} + 2 \partial_A \omega_1 \partial^A \sigma_0 + 2 \partial_A \omega_0 \partial^A \sigma_1, \quad (2.58)$$

donde definimos

$$p = \dot{\sigma}_1 - \beta_1^A \partial_A \sigma_0 + 2 \frac{\beta^\rho}{\rho}, \quad (2.59)$$

$$d = \dot{\omega}_1 - \beta_1^A \partial_A \omega_0. \quad (2.60)$$

Para las ecuaciones de evolución (2.32) y (2.33) de la métrica y la curvatura extrínseca tenemos

$$2\dot{u}_1 = \partial_A \beta_1^A + 2\beta_1^A \partial_A u_0, \quad (2.61)$$

$$\dot{\chi}_{1AB} = -(F_{1AB} + \alpha_0 G_{1AB}), \quad (2.62)$$

donde

$$F_{1AB} = -2\partial_{(A} \alpha_0 \partial_{B)} u_1 + \delta_{AB} \partial_C \alpha_0 \partial^C u_1, \quad (2.63)$$

y

$$\begin{aligned} G_{1AB} = & \frac{1}{2\eta_0^2} (\partial_A \eta_1 \partial_B \eta_0 + \partial_A \eta_0 \partial_B \eta_1 + \partial_A \omega_1 \partial_B \omega_0 + \partial_A \omega_0 \partial_B \omega_1) \\ & - \frac{\sigma_1}{\eta_0^2} (\partial_A \eta_0 \partial_B \eta_0 + \partial_A \omega_0 \partial_B \omega_0) \\ & - \frac{\delta_{AB}}{2} \left[ \frac{1}{\eta_0^2} (\partial_C \eta_0 \partial^C \eta_1 + \partial_C \omega_0 \partial^C \omega_1) - \frac{\sigma_1}{\eta_0^2} (|\partial \eta_0|^2 + |\partial \omega_0|^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

### Ecuaciones de vínculo

Las ecuaciones de vínculo (2.37) y (2.38) del momento y del Hamiltoniano son

$$\partial^B \chi_{1AB} = -\frac{e^{2u_0}}{2\alpha_0} \left( p \left( \partial_A \sigma_0 + 2 \frac{\partial_A \rho}{\rho} \right) + \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2} d \right), \quad (2.65)$$

$${}^{(3)}\Delta \sigma_1 + \Delta q_1 = -\frac{\varepsilon_1}{4\rho}, \quad (2.66)$$

donde  $\varepsilon_1$  es el orden lineal de la densidad de masa

$$\varepsilon_1 = \left( 2\partial_A \sigma_0 \partial^A \sigma_1 + \frac{2\partial_A \omega_0 \partial^A \omega_1}{\eta_0^2} - \frac{2\sigma_1 |\partial \omega_0|^2}{\eta_0^2} \right) \rho. \quad (2.67)$$

### Ecuaciones de gauge

Ya vimos que el primer orden del lapso es cero. Para el vector corrimiento tenemos

$$(\mathcal{L}\beta_1)^{AB} = 2e^{-2u_0} \alpha_0 \chi_1^{AB}. \quad (2.68)$$



Este es el sistema de ecuaciones a primer orden para perturbaciones gravitacionales con simetría axial en el *gauge* maximal isotérmico.

La energía conservada para este sistema de ecuaciones es la integral de la segunda variación de la densidad, y se obtiene del siguiente modo. Asumimos que  $\psi(\lambda)$  tienen la forma

$$\psi(\lambda) = \psi_0 + \lambda\psi_1 \quad (2.69)$$

Es decir, asumimos que la segunda derivada respecto de  $\lambda$  de  $\psi(\lambda)$  evaluada en  $\lambda = 0$  es cero. Para este tipo de perturbaciones lineales definimos la segunda variación de  $\varepsilon$  como

$$\varepsilon_2 = \left. \frac{d^2\varepsilon(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0}. \quad (2.70)$$

Entonces de (2.39) obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & \left( \frac{2e^{2u_0}}{\alpha_0^2} \left( p^2 + \frac{d^2}{\eta_0^2} \right) - 8 \frac{\sigma_1 \partial_A \omega_0 \partial^A \omega_1}{\eta_0^2} + \right. \\ & \left. + 2|\partial\sigma_1|^2 + 4e^{-2u_0} \chi_1^{AB} \chi_{1AB} + 2 \frac{|\partial\omega_1|^2}{\eta_0^2} + 4 \frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2} \sigma_1^2 \right) \rho, \end{aligned} \quad (2.71)$$

notar que a diferencia de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_2$  no es definida positiva.

Para tener mayor referencia, escribimos la densidad de masa a orden cero

$$\varepsilon_0 = \left( |\partial\sigma_0|^2 + \frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2} \right) \rho, \quad (2.72)$$

y las masas asociadas a los diferentes órdenes de la densidad de masa

$$m_0 = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varepsilon_0 d\rho dz, \quad (2.73)$$

$$m_1 = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varepsilon_1 d\rho dz, \quad (2.74)$$

$$m_2 = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}_+^2} \varepsilon_2 d\rho dz. \quad (2.75)$$

Más adelante probaremos que  $m_1$  es cero y que  $m_2$  es conservada y positiva. Como estamos interesados en el estudio de la estabilidad lineal, es importante para nuestro presente propósito (y también para trabajos futuros en el mismo tema), probar estas afirmaciones utilizando solo las ecuaciones lineales, sin hacer referencia al sistema original no lineal. En los siguientes capítulos probaremos de ese modo dichas afirmaciones. Sin embargo, desde un punto de vista conceptual y para posibles aplicaciones al problema de estabilidad no lineal, es importante deducir las propiedades mencionadas de  $m_1$  y  $m_2$  usando las ecuaciones originales. Discutimos esto a continuación.

Considere una familia mono-paramétrica de soluciones exactas  $\psi(\lambda)$  (es decir, que no asumimos la forma particular (2.69)). Para esta familia calculamos la masa exacta  $m(\lambda)$  dadas por la ecuación (2.43). Esta cantidad es conservada, o sea

$$\frac{dm(\lambda)}{dt} = 0, \quad (2.76)$$

esta ecuación vale para todo  $\lambda$ . Tomando derivadas respecto de  $\lambda$  de la ecuación (2.76) y evaluando en  $\lambda = 0$  obtenemos

$$\frac{d}{dt} m|_{\lambda=0} = 0, \quad (2.77)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{dm}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = 0, \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{d^2m}{d\lambda^2} \Big|_{\lambda=0} = 0. \quad (2.79)$$

Por supuesto, podemos tomar mas derivadas, pero esto no da ninguna cantidad conservada útil para las ecuaciones lineales.

Las ecuaciones (2.77) y (2.78) son precisamente

$$\frac{dm_0}{dt} = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{dm_1}{dt} = 0, \quad (2.81)$$

donde  $m_0$  y  $m_1$  vienen dadas por (2.73) y (2.74) respectivamente.

La ecuación (2.80) nos dice que la masa de la métrica de fondo es conservada. Esto también es válido incluso cuando la métrica de fondo no es estacionaria. En nuestro caso, como la métrica de fondo es estacionaria, no solo  $m_0$  es conservada sino también el integrando  $\varepsilon_0$  dado por (2.72), por lo que la conservación implicada por la ecuación (2.80) es trivial.

Como  $m_1$  solo depende de la solución de fondo  $\psi_0$  y del primer orden de la perturbación  $\psi_1$  definidas en la ecuación (2.48), entonces la ecuación (2.81) afirma que  $m_1$  es una cantidad conservada para las ecuaciones lineales. O sea que, de la ley de conservación global (2.76) hemos deducido la conservación de  $m_1$  para las ecuaciones lineales.

En general  $m_1$  es distinto de cero. Sin embargo, usando la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General, es posible demostrar que la primera variación de la masa ADM es nula para soluciones estacionarias (ver [7] y las referencias citadas en el mismo). En el capítulo 4 haremos el calculo explícito de esto adaptado a nuestra configuración.

Para la ecuación (2.79) la situación es diferente. Esta ecuación nos indica que la cantidad

$$\hat{m}_2 = \left. \frac{d^2 m}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0} \quad (2.82)$$

es conservada,

$$\frac{d\hat{m}_2}{dt} = 0. \quad (2.83)$$

De todas formas,  $\hat{m}_2$  depende de la solución de fondo  $\psi_0$ , la perturbación lineal  $\psi_1$  pero también de la perturbación a segundo orden

$$\psi_2 = \left. \frac{d^2 \psi(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0}, \quad (2.84)$$

por lo tanto  $\hat{m}_2$  no puede ser calculada solo en términos de  $\psi_0$  y de  $\psi_1$ , entonces no puede ser utilizada para las ecuaciones lineales.

A diferencia, la  $m_2$  definida en (2.75) se calcula usando solo el primer orden de la perturbación (donde asumimos (2.69) para calcularla). En principio,  $m_2$  y  $\hat{m}_2$  son distintas. Entonces la ley de conservación

$$\frac{dm_2}{dt} = 0, \quad (2.85)$$

no se puede deducir directamente de (2.83). Pero, como probaremos, si el fondo es estacionario (por lo que la primera variación  $m_1$  se anula) tenemos que  $m_2 = \hat{m}_2$ .

Calculamos  $\hat{m}_2$  explícitamente. Definimos

$$\hat{\varepsilon}_2 = \left. \frac{d^2 \varepsilon(\lambda)}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=0}. \quad (2.86)$$

Notar que (2.86) es distinto de (2.70) ya que no estamos asumiendo (2.69). La diferencia entre  $\hat{\varepsilon}_2$  y  $\varepsilon_2$  es

$$\hat{\varepsilon}_2 - \varepsilon_2 = \left( 2\partial_A \sigma_0 \partial^A \sigma_2 + \frac{2\partial_A \omega_0 \partial^A \omega_2}{\eta_0^2} - \frac{2\sigma_2 |\partial \omega_0|^2}{\eta_0^2} \right) \rho. \quad (2.87)$$

Para este calculo hemos asumido que el fondo es estacionario en este *gauge*. Notar que el lado derecho de (2.87) es igual a la primera variación  $\varepsilon_1$  (2.67) reemplazando  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  por  $\sigma_2$  y  $\omega_2$ . Por lo tanto, como  $m_1$  es nula para soluciones estacionarias, tenemos que  $\hat{m}_2 = m_2$  (es decir, la integral de (2.87) es cero). De hecho, este resultado es sabido del calculo de variaciones con variaciones no lineales (véase por ejemplo [30] p. 267).

Por último, vamos a discutir el signo de la segunda variación  $m_2$ . En Minkowski, el teorema de la positividad de la masa implica que la segunda variación de la masa debe ser positiva ya que el espacio plano es un mínimo global de la masa. Mientras que para el caso de Kerr extremo no existe una conexión obvia entre la positividad de la masa y de su segunda variación. Aun así, ha sido probado que la masa tiene un mínimo en Kerr extremo para variaciones

con momento angular constante [16][18]. Para probar la positividad de la segunda variación  $m_2$  en Kerr extremo haremos uso de técnicas similares a las de las dichas referencias. Como dijimos anteriormente, para nuestro propósito, es importante probar esto en términos de las ecuaciones lineales.

## Capítulo 3

# Perturbaciones axiales en Minkowski

Naturalmente, la primer aplicación de las ecuaciones lineales obtenidas en el capítulo anterior es el estudio de la estabilidad lineal de Minkowski ante perturbaciones con simetría axial. El problema de la estabilidad lineal de Minkowski, sin asumir ninguna simetría para las perturbaciones, fue resuelto en [11] y la estabilidad no lineal de Minkowski fue probada en [12]. En este capítulo vamos a dar una prueba alternativa de la estabilidad lineal de Minkowski para perturbaciones con simetría axial. Este resultado está dado en el Teorema 3.0.1.

En comparación con los resultados de [11], el Teorema 3.0.1 tiene la desventaja de que únicamente vale para perturbaciones con simetría axial. Además en este teorema sólo se prueban cotas punto a punto para la perturbación y no decaimiento para las mismas como en [11]. De todos modos, la ventaja de nuestro resultado es que sólo hace uso de estimaciones de energía, por lo que puede ser generalizado para el caso de un agujero negro como se muestra en el capítulo 4.

Este sistema de ecuaciones lineales ha sido estudiado numéricamente en [24] y analíticamente en [25]. La principal dificultad es que el sistema es formalmente singular en el eje de simetría donde  $\rho = 0$ . El Teorema 3.0.1 es una generalización de estos trabajos, en el sentido de que incluye el *twist* y, aun más importante, da una cota punto a punto de la perturbación en términos de las energías conservadas.

Para Minkowski tenemos las siguientes cantidades de fondo

$$\omega_0 = q_0 = \sigma_0 = 0, \quad u_0 = \ln \rho, \quad \eta_0 = \rho^2, \quad \alpha_0 = \rho. \quad (3.1)$$

Las ecuaciones lineales para Minkowski son

### **Ecuaciones de evolución**

Las ecuaciones de evolución de  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  son

$$-\dot{p} + {}^{(3)}\Delta\sigma_1 = 0, \quad (3.2)$$

$$-\ddot{\omega}_1 + {}^{(3)}\Delta\omega_1 = 4\frac{\partial_\rho\omega_1}{\rho}, \quad (3.3)$$

donde

$$p = \dot{\sigma}_1 - \frac{2\beta_1^\rho}{\rho}. \quad (3.4)$$

Las ecuaciones de evolución para la métrica y la curvatura extrínseca son

$$2\dot{u}_1 = \partial_A\beta_1^A + 2\frac{\beta_1^\rho}{\rho}, \quad (3.5)$$

$$\dot{\chi}_{1AB} = 2\partial_{(A}q_1\partial_{B)}\rho - \delta_{AB}\partial_\rho q_1. \quad (3.6)$$

#### Ecuaciones de vínculos

Las ecuaciones de vínculo del momento y del Hamiltoniano están dadas por

$$\partial^A\chi_{1AB} = -p\partial_A\rho, \quad (3.7)$$

$$\Delta q_1 + {}^{(3)}\Delta\sigma_1 = 0. \quad (3.8)$$

#### Ecuaciones de gauge

Como hemos visto en el capítulo anterior el primer orden del lapso es cero. El corrimiento a primer orden está dado por la ecuación

$$(\mathcal{L}\beta_1)^{AB} = \frac{2}{\rho}\chi_1^{AB}. \quad (3.9)$$

Para las densidades y las masas encontramos que

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 0, \quad m_0 = m_1 = 0, \quad (3.10)$$

mientras que para el segundo orden de la densidad de masa tenemos

$$\varepsilon_2 = \left( 2p^2 + 2\frac{\dot{\omega}_1^2}{\rho^4} + 2|\partial\sigma_1|^2 + 2\frac{|\partial\omega_1|^2}{\rho^4} + 4\frac{\chi_1^{AB}\chi_{1AB}}{\rho^2} \right) \rho. \quad (3.11)$$

Notar que para el caso de Minkowski,  $\varepsilon_2$  es positiva definida.

Antes de presentar el resultado principal discutiremos dos propiedades importantes de este conjunto de ecuaciones. La primer propiedad (que solo es válida en Minkowski) es que la ecuación para el *twist* (3.3) está totalmente desacoplada del resto de las ecuaciones <sup>1</sup>. Por lo tanto, es útil separar la densidad  $\varepsilon_2$  en dos partes

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_\sigma + \varepsilon_\omega, \quad (3.12)$$

siendo

---

<sup>1</sup>Agradecemos a O. Rinne por mostrarnos esta propiedad antes de comenzar nuestro trabajo.

$$\varepsilon_\sigma = \left( 2\rho^2 + 2|\partial\sigma_1|^2 + 4\frac{\chi_1^{AB}\chi_{1AB}}{\rho^2} \right) \rho, \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_\omega = 2\frac{\dot{\omega}_1^2}{\rho^3} + 2\frac{|\partial\omega_1|^2}{\rho^3}, \quad (3.14)$$

tenemos las correspondientes masas

$$m_2 = m_\sigma + m_\omega, \quad (3.15)$$

donde

$$m_\sigma = \int_{\mathbb{R}_+^2} \varepsilon_\sigma d\rho dz, \quad m_\omega = \int_{\mathbb{R}_+^2} \varepsilon_\omega d\rho dz. \quad (3.16)$$

Notar que todas las densidades son positivas.

La ecuación (3.3) es equivalente a la ecuación de ondas

$$-\ddot{\bar{\omega}}_1 + {}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1 = 0, \quad (3.17)$$

donde  ${}^{(7)}\Delta$  es el Laplaciano de 7-dimensiones actuando sobre funciones de simetría axial <sup>2</sup>

$${}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1 = \Delta\bar{\omega}_1 + 5\frac{\partial_\rho\bar{\omega}_1}{\rho}, \quad (3.18)$$

donde definimos

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\rho^4}. \quad (3.19)$$

Entonces la dinámica del *twist* está determinada por una ecuación de onda, por lo que es claro como obtener estimaciones de decaimiento para la solución, discutiremos luego este punto. A diferencia, las ecuaciones de  $\sigma_1$  son acopladas y tienen un comportamiento singular en el eje (puede verse la discusión al respecto en [24] y [25]).

La ecuación (3.17) es una ecuación de ondas para  $\bar{\omega}$ , por lo tanto tiene asociada la correspondiente densidad de energía

$$\varepsilon_{\bar{\omega}} = 2(\dot{\bar{\omega}}_1^2 + |\partial\bar{\omega}_1|^2)\rho^5, \quad (3.20)$$

y energía

$$m_{\bar{\omega}} = \int_{\mathbb{R}^3} \varepsilon_{\bar{\omega}} d\rho dz. \quad (3.21)$$

El factor  $\rho^5$  viene del elemento de volumen en 7-dimensiones expresado en coordenadas cilíndricas  $dx^7 = \rho^5 d\rho dz$ .

---

<sup>2</sup>El método de escribir la ecuaciones 2-dimensionales que resultan en simetría axial (las cuales son singulares en el eje) como ecuaciones regulares en dimensiones más altas es muy útil. De hecho ha sido utilizado en contextos similares en [47] y [1].

En principio  $m_\omega$  y  $m_{\bar{\omega}}$  no tienen porque ser las mismas, pero, su diferencia está dada por un término de borde

$$\varepsilon_{\bar{\omega}} - \varepsilon_\omega = -4\partial_\rho \left( \frac{\omega_1}{\rho^4} \right), \quad (3.22)$$

entonces, asumiendo que  $\omega_1$  satisface condiciones de borde apropiadas, al integrar (3.22) tenemos

$$m_{\bar{\omega}} = m_\omega. \quad (3.23)$$

La segunda propiedad que discutiremos (la cual es válida también en Kerr extremo y en general para toda métrica estacionaria) es la siguiente. Los coeficientes de la ecuaciones no dependen del tiempo, entonces si derivamos respecto del tiempo todas las ecuaciones obtenemos un nuevo conjunto de ecuaciones para la derivada temporal de las perturbaciones a primer orden (es decir para todas las funciones con subíndice 1) que formalmente son iguales a las originales. O sea, las funciones  $\sigma_1, \omega_1, u_1, \beta_1, \chi_1$  satisfacen las mismas ecuaciones que las funciones  $\dot{\sigma}_1, \dot{\omega}_1, \dot{u}_1, \dot{\beta}_1, \dot{\chi}_1$ . Y por supuesto lo mismo es válido para cualquier cantidad de derivadas temporales que tomemos. En particular, si  $m$  es una cantidad conservada, entonces de este modo obtenemos un número infinito de cantidades conservadas que tienen la misma forma que  $m$  pero en términos de la  $n$ -ésima derivada temporal de  $\sigma_1, \omega_1, u_1, \beta_1, \chi_1$ . Por ejemplo, consideremos la masa definida por (3.12) y (3.16). Ésta depende de las funciones  $p, \sigma_1$  y  $\chi_1$ , para enfatizar esta dependencia usaremos la notación  $m_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1]$ . Por lo tanto definimos  $m_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1]$  por

$$m_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1] = \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( 2\dot{p}^2 + 2|\partial\dot{\sigma}_1|^2 + 4\frac{\dot{\chi}_1^{AB}\dot{\chi}_{1AB}}{\rho^2} \right) \rho d\rho dz. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, si  $m_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1]$  es conservada durante la evolución entonces  $m_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1]$  también es conservada. Todo este argumento también se aplica para  $m_\omega[\omega_1]$  y  $m_{\bar{\omega}}[\bar{\omega}_1]$ , por ejemplo

$$m_{\bar{\omega}}[\dot{\bar{\omega}}_1] = \int_{\mathbb{R}_+^2} (\ddot{\bar{\omega}}_1^2 + |\partial\dot{\bar{\omega}}_1|^2) \rho^5 d\rho dz. \quad (3.25)$$

Ahora presentamos el resultado obtenido para Minkowski

**Teorema 3.0.1.** *Considere una solución suave del sistema de ecuaciones lineales (3.2)-(3.9) que satisface las condiciones de borde (2.44)-(2.47). Suponga además que*

$$\dot{\bar{\omega}}_1, \bar{\omega}_1 = O_1(1) \quad (3.26)$$

en el eje y

$$\dot{\bar{\omega}}_1, \bar{\omega}_1 = o_1(r^{-5/2}) \quad (3.27)$$



en el infinito, donde definimos

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\rho^4}. \quad (3.28)$$

Entonces, se cumple lo siguiente

- i) Las masas  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$  y  $m_{\bar{\omega}}$  definidas en (3.16) y (3.21) son conservadas a lo largo de la evolución y  $m_\omega = m_{\bar{\omega}}$ . Y todas las masas provenientes de derivadas temporales de la perturbación también son conservadas.
- ii) La solución  $\sigma_1$ ,  $\omega_1$  satisface las siguientes cotas (independientes del tiempo)

$$C|\sigma_1| \leq m_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1] + m_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1], \quad (3.29)$$

$$C \frac{|\omega_1|}{\rho^4} \leq m_\omega[\ddot{\omega}_1] + m_\omega[\ddot{\bar{\omega}}_1], \quad (3.30)$$

donde  $C > 0$  es una constante.

El momento angular esta determinado por el valor de  $\omega$  en el eje [18], la condición de borde (3.26) implica que la perturbación no afecta al momento angular de la métrica de fondo.

La conservación de  $m_\sigma$  está probada en [24], aquí daremos una prueba diferente que es la forma apropiado para el caso de Kerr extremo tratado en el siguiente capítulo.

Como vimos la ecuación para  $\omega_1$  está desacoplada y puede llevarse a una ecuación de onda en 7 dimensiones, por lo tanto la dinámica de  $\omega_1$  es bien conocida. En particular se tiene la siguiente estimación punto a punto para la solución de la ecuación de ondas en 7 dimensiones  $|\bar{\omega}_1| \leq t^{-3}C$ , siendo  $C$  una constante que depende solo del dato inicial (ver [44]). Nosotros damos la cota (3.30) que es más débil pero puede probarse usando solo las energías conservadas, además en el caso de Kerr extremo no es posible reducir la ecuación de  $\omega_1$  a una ecuación de ondas, por lo tanto es de esperar que el uso de las corrientes conservadas sea el método apropiado para dar una cota a  $\omega_1$  en Kerr extremo.

El resultado mas relevante del Teorema 3.0.1 es la estimación (3.29). En el trabajo [25] fue probada la existencia de solución para el sistema de ecuaciones, en el mencionado trabajo se utilizó una representación explícita de la solución en términos de transformadas integrales. En contraste, la estimación (3.29) es probada en términos de las masas conservadas de un modo notablemente simple. Además se espera que esta estimación sea útil para el análisis no lineal.

*Demostración.* (i) Como las ecuaciones son desacopladas vamos a tratar la conservación de  $m_\sigma$  y  $m_\omega$  por separado. Comenzamos con  $m_\sigma$ . Tomamos la derivada respecto del tiempo de  $\varepsilon_\sigma$

$$\dot{\varepsilon}_\sigma = 4\rho p \dot{p} + 4\rho \partial_A \sigma_1 \partial^A \dot{\sigma}_1 + 8 \frac{\chi_1^{AB} \dot{\chi}_{1AB}}{\rho}. \quad (3.31)$$

La estrategia es usar las ecuaciones lineales para probar que el lado derecho de (3.31) se puede escribir como la divergencia de un vector y entonces su integral es cero debido a condiciones de borde apropiadas las cuales asumimos. Trataremos por separado cada término de (3.31).

Para el primer término usamos la definición de  $p$  dada por (3.4), obtenemos

$$4\rho p \dot{p} = 4\rho \dot{\sigma}_1 \dot{p} - 8\beta_1^\rho \dot{p} \quad (3.32)$$

El segundo término puede reescribirse como

$$4\rho \partial_A \sigma_1 \partial^A \dot{\sigma}_1 = 4\partial^A (\rho \dot{\sigma}_1 \partial_A \sigma_1) - 4\dot{\sigma}_1 \partial^A (\rho \partial_A \sigma_1), \quad (3.33)$$

$$= 4\partial^A (\rho \dot{\sigma}_1 \partial_A \sigma_1) - 4\rho \dot{\sigma}_1 {}^{(3)}\Delta \sigma_1, \quad (3.34)$$

$$= 4\partial^A (\rho \dot{\sigma}_1 \partial_A \sigma_1) - 4\rho \dot{\sigma}_1 \dot{p}, \quad (3.35)$$

para obtener (3.34) usamos la definición de  ${}^{(3)}\Delta$  dada por (2.29), luego hicimos uso de (3.2) para llegar a (3.35).

Para el tercer término tenemos

$$8 \frac{\chi_1^{AB} \dot{\chi}_{1AB}}{\rho} = 4(\mathcal{L}\beta_1)^{AB} \dot{\chi}_{1AB}, \quad (3.36)$$

$$= 8\partial^A \beta_1^B \dot{\chi}_{1AB}, \quad (3.37)$$

$$= 8\partial^A (\beta_1^B \dot{\chi}_{1AB}) - 8\beta_1^B \partial^A \dot{\chi}_{1AB}, \quad (3.38)$$

$$= 8\partial^A (\beta_1^B \dot{\chi}_{1AB}) + 8\dot{p} \beta_1^\rho, \quad (3.39)$$

donde usamos (3.9) para obtener (3.36), la ecuación (3.37) se deduce del hecho de que  $\chi_{1AB}$  tiene traza cero, por último usamos la (3.7) para obtener (3.39).

Entonces sumando los tres términos tenemos

$$\dot{\varepsilon}_\sigma = \partial_A t^A, \quad (3.40)$$

donde

$$t_A = 4\rho \dot{\sigma}_1 \partial_A \sigma_1 + 8\beta_1^B \dot{\chi}_{1AB}. \quad (3.41)$$

Integramos (3.40) en el el medio disco  $D_L$  de radio  $L$  en  $\mathbb{R}_+^2$ , siendo  $C_L$  el semicírculo de radio  $L$ , ver figura 3.1. Luego, usando el teorema de la divergencia obtenemos

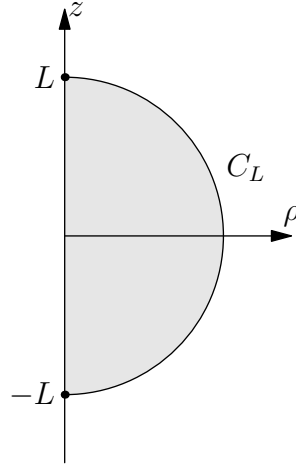


Figura 3.1: Dominio de integración en  $\mathbb{R}_+^2$ .

$$\int_{D_L} \dot{\epsilon}_\sigma d\rho dz = \int_{D_L} \partial_A t^A d\rho dz, \quad (3.42)$$

$$= \int_{\partial D_L} t^A n_A ds, \quad (3.43)$$

$$= - \int_{-L}^L t^\rho|_{\rho=0} dz + \int_{C_L} t^A n_A ds. \quad (3.44)$$

donde  $n^A$  es el vector unitario normal saliente y  $ds$  es el elemento de línea de  $C_L$ .

El integrando del primer término de (3.44) viene dado por

$$t_\rho = 4\rho\dot{\sigma}_1\partial_\rho\sigma_1 + 8\beta_1^\rho\dot{\chi}_{1\rho\rho} + 8\beta_1^z\dot{\chi}_{1\rho z}. \quad (3.45)$$

El primer término claramente se anula en el eje  $\rho = 0$ , el segundo y tercer término se anulan debido a las condiciones (2.46) las cuales implican que  $\beta_1^\rho$  y  $\chi_{a\rho z}$  se anulan en el eje.

Para el segundo término de (3.44) tomamos el límite  $L \rightarrow \infty$  y usamos las condiciones (2.44) con lo que obtenemos que el integrando se anula, por lo tanto llegamos a que  $\dot{m}_\sigma = 0$  (notar que en  $C_L$  tenemos  $ds = r d\theta$ , donde  $\tan \theta = z/\rho$  y  $r^2 = \rho^2 + z^2$ ).

La conservación de  $m_\omega$  se demuestra de forma similar. Tomamos la derivada temporal de  $\epsilon_\omega$

$$\dot{\epsilon}_\omega = 4\frac{\dot{\omega}_1\ddot{\omega}_1}{\rho^3} + 4\frac{\partial_A\omega_1\partial^A\dot{\omega}_1}{\rho^3}. \quad (3.46)$$

Usando (3.3) obtenemos para el primer término

$$4\frac{\dot{\omega}_1\ddot{\omega}_1}{\rho^3} = 4\frac{\dot{\omega}_1}{\rho^3} \left( \partial^A \partial_A \omega_1 - \frac{3\partial_\rho \omega_1}{\rho} \right), \quad (3.47)$$

mientras que el segundo término se puede escribir como

$$4\frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \dot{\omega}_1}{\rho^3} = 4\partial^A \left( \frac{\dot{\omega}_1 \partial_A \omega_1}{\rho^3} \right) - 4\frac{\dot{\omega}_1}{\rho^3} \left( \partial^A \partial_A \omega_1 - \frac{3\partial_\rho \omega_1}{\rho} \right). \quad (3.48)$$

Entonces tenemos

$$\dot{\epsilon}_\omega = \partial_A t^A, \quad (3.49)$$

donde

$$t_A = 4\frac{\dot{\omega}_1 \partial_A \omega_1}{\rho^3}. \quad (3.50)$$

Luego, integrando en el mismo dominio que antes y usando las condiciones (3.26) en el eje y (3.27) en el infinito se deduce que  $\dot{m}_\omega = 0$ . Por último, la igualdad  $m_\omega = m_{\bar{\omega}}$  se deduce a partir de (3.22) y la condición (3.26).

(ii) Para probar la cota (3.29) notamos que de (3.16) y (3.24) tenemos la siguientes estimaciones

$$m_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1] \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \sigma_1|^2 \rho \, d\rho dz, \quad (3.51)$$

$$m_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1] \geq 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \dot{p}^2 \rho \, d\rho dz = 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( {}^{(3)}\Delta \sigma_1 \right)^2 \rho \, d\rho dz, \quad (3.52)$$

donde en (3.52) usamos (3.2) para obtener la última igualdad. El lado derecho de (3.52) se puede escribir del siguiente modo

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \left( {}^{(3)}\Delta \sigma_1 \right)^2 \rho \, d\rho dz = \int_{\mathbb{R}^3} (\Delta \sigma_1)^2 \, dx^3, \quad (3.53)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} |\partial^2 \sigma_1|^2 \, dx^3. \quad (3.54)$$

En (3.53) cambiamos de coordenadas cilíndricas  $(\rho, z)$  a cartesianas  $(x, y, z)$  en  $\mathbb{R}^3$ , siendo  $x = \rho \cos \phi$ ,  $y = \rho \sin \phi$ . Para funciones con simetría axial, es decir que no dependen de  $\phi$ , tenemos que  $dx^3 = \rho d\rho dz$ . El Laplaciano en coordenadas cartesianas viene dado por

$${}^{(3)}\Delta \sigma_1 = \partial_x^2 \sigma_1 + \partial_y^2 \sigma_1 + \partial_z^2 \sigma_1. \quad (3.55)$$

En (3.54) integramos por partes, los términos de borde se anulan debido a las condiciones de decaimiento asumidas para  $\sigma_1$ . El símbolo  $|\partial^2 \sigma_1|^2$  se entiende

como la suma del cuadrado de todas las segundas derivadas en coordenadas cartesianas, es decir

$$|\partial^2 \sigma_1|^2 = (\partial_x^2 \sigma_1)^2 + (\partial_y^2 \sigma_1)^2 + (\partial_z^2 \sigma_1)^2 + (\partial_x \partial_y \sigma_1)^2 + (\partial_x \partial_z \sigma_1)^2 + (\partial_y \partial_z \sigma_1)^2. \quad (3.56)$$

Entonces, de (3.51), (3.52) y (3.54) obtenemos la siguiente estimación

$$m_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1] + m_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1] \geq \int_{\mathbb{R}^3} (|\partial^2 \sigma_1|^2 + |\partial \sigma_1|^2) dx^3. \quad (3.57)$$

Notamos que en el lado derecho de (3.57) no hay términos con  $\sigma_1^2$  por lo tanto no podemos usar directamente las desigualdades de Sobolev estándar para dar una cota punto a punto de  $\sigma_1$ . Sin embargo, usando la estimación dada por el Lema B.0.1 con  $n = 3$  y  $k = 2$  obtenemos el resultado (3.29) del Teorema 3.0.1.

La estimación (3.30) para  $\bar{\omega}_1$  se obtiene de modo similar. De la definición de  $m_{\bar{\omega}}$  tenemos

$$m_{\bar{\omega}} \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \bar{\omega}_1|^2 \rho^5 d\rho dz = \int_{\mathbb{R}^7} |\partial \bar{\omega}_1|^2 dx^7, \quad (3.58)$$

donde hemos usado que  $dx^7 = \rho^5 d\rho dz$ . De (3.25) obtenemos la siguiente estimación

$$m_{\bar{\omega}}[\dot{\bar{\omega}}_1] \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} \ddot{\bar{\omega}}_1^2 \rho^5 d\rho dz, \quad (3.59)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^7} ({}^{(7)}\Delta \bar{\omega}_1)^2 dx^7, \quad (3.60)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^7} |\partial^2 \bar{\omega}_1|^2 dx^7, \quad (3.61)$$

donde en (3.60) usamos la ecuación de onda (3.17) y para obtener (3.61) integramos por parte y usamos el decaimiento de  $\bar{\omega}_1$  en el infinito. Del mismo modo obtenemos que las energías con  $n$ -derivadas temporales de  $\bar{\omega}_1$  controlan la  $n + 1$ -derivadas espaciales de  $\bar{\omega}_1$ , en particular

$$m_{\bar{\omega}}[\ddot{\bar{\omega}}_1] \geq \int_{\mathbb{R}^7} |\partial^3 \bar{\omega}_1|^2 dx^7, \quad (3.62)$$

$$m_{\bar{\omega}}[\dddot{\bar{\omega}}_1] \geq \int_{\mathbb{R}^7} |\partial^4 \bar{\omega}_1|^2 dx^7. \quad (3.63)$$

De estas dos últimas estimaciones obtenidas y del Lema B.0.1 con  $n = 7$  y  $k = 4$  se obtiene el resultado (3.30) del Teorema 3.0.1.  $\square$



## Capítulo 4

# Perturbaciones axiales en Kerr extremo

### 4.1. Positividad y conservación de la masa

Ahora estudiaremos las perturbaciones lineales en Kerr extremo. La principal diferencia con el caso de Minkowski es que las cantidades de fondo  $q_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\omega_0$  no son cero. Aun así, seguimos teniendo (como se ve en el Apéndice A)

$$\alpha_0 = \rho, \quad (4.1)$$

ésta es la primera simplificación considerable del caso de Kerr extremo respecto del no extremo.

La forma explícita de  $q_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\omega_0$  puede verse en el Apéndice A, estas funciones dependen de dos parámetros, la masa  $m_0$  (la cual está dada por la ecuación (2.73)) y el momento angular por unidad de masa  $a$  del agujero negro. Más adelante haremos uso de las siguientes ecuaciones estacionarias

$${}^{(3)}\Delta\sigma_0 = \frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2}, \quad (4.2)$$

$$\partial^A \left( \frac{\rho\partial_A\omega_0}{\eta_0^2} \right) = 0. \quad (4.3)$$

Notar que (4.2) es equivalente a

$${}^{(3)}\Delta(\ln \eta_0) = -\frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2}, \quad (4.4)$$

donde hicimos uso de que

$${}^{(3)}\Delta(\ln \rho) = 0. \quad (4.5)$$

Además las funciones de fondo satisfacen las condiciones de decaimiento (2.44)-(2.47). En [16] se demuestra que se satisfacen las siguientes desigualdades en  $\mathbb{R}_+^2$  (incluido tanto el origen como el infinito)

$$\frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2} \leq \frac{C}{r^2}, \quad (4.6)$$

$$|\partial\sigma_0|^2 \leq \frac{C}{r^2}, \quad (4.7)$$

$$e^{-2(\sigma_0+q_0)} \frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2} \leq C, \quad (4.8)$$

$$e^{-2(\sigma_0+q_0)} |\partial\sigma_0|^2 \leq C, \quad (4.9)$$

donde  $C$  es una constante que depende solo de  $m_0$ . Por último, en el eje tenemos

$$\frac{\partial_\rho\omega_0}{\eta_0} = O(\rho). \quad (4.10)$$

Las ecuaciones lineales para Kerr extremo son las siguientes

#### **Ecuaciones de evolución**

Las ecuaciones de evolución para  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  son

$$-\frac{e^{2u_0}}{\rho^2} \dot{p} + {}^{(3)}\Delta\sigma_1 = \frac{2}{\eta_0^2} (\sigma_1 |\partial\omega_0|^2 - \partial_A\omega_1 \partial^A\omega_0), \quad (4.11)$$

$$-\frac{e^{2u_0}}{\rho^2} \dot{d} + {}^{(3)}\Delta\omega_1 = 4 \frac{\partial_\rho\omega_1}{\rho} + 2\partial_A\omega_1 \partial^A\sigma_0 + 2\partial_A\omega_0 \partial^A\sigma_1, \quad (4.12)$$

donde definimos

$$p = \dot{\sigma}_1 - 2 \frac{\beta_1^\rho}{\rho} - \beta_1^A \partial_A\sigma_0, \quad (4.13)$$

$$d = \dot{\omega}_1 - \beta_1^A \partial_A\omega_0. \quad (4.14)$$

A diferencia de Minkowski en este caso no ocurren simplificaciones importantes en las ecuaciones de evolución de la métrica y de la segunda forma fundamental con respecto a las generales (2.61) y (2.62), además no haremos uso de estas ecuaciones, por lo tanto no las escribimos.

#### **Ecuaciones de vínculos**

Las ecuaciones de vínculo del momento y del Hamiltoniano están dadas por

$$\partial^B \chi_{1AB} = -\frac{e^{2u_0}}{2\rho} \left( p \left( 2 \frac{\partial_A\rho}{\rho} + \partial_A\sigma_0 \right) + \frac{\partial_A\omega_0}{\eta_0^2} d \right), \quad (4.15)$$

$${}^{(3)}\Delta\sigma_1 + \Delta q_1 = -\frac{\varepsilon_1}{4\rho}, \quad (4.16)$$



donde  $\varepsilon_1$  esta dado por

$$\varepsilon_1 = \left( 2\partial_A\sigma_0\partial^A\sigma_1 + \frac{2\partial_A\omega_0\partial^A\omega_1}{\eta_0^2} - \frac{2\sigma_1|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2} \right) \rho. \quad (4.17)$$

### Ecuaciones de gauge

Para el vector corrimiento tenemos

$$(\mathcal{L}\beta_1)^{AB} = 2e^{-2u_0}\rho\chi_1^{AB}. \quad (4.18)$$

Para la densidad de energía  $\varepsilon_2$  tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = \left( 2\frac{e^{2u_0}}{\rho^2}p^2 + 2\frac{e^{2u_0}}{\rho^2\eta_0^2}d^2 + 4e^{-2u_0}\chi_1^{AB}\chi_{1AB} + \right. \\ \left. + 2|\partial\sigma_1|^2 + 2\frac{|\partial\omega_1|^2}{\eta_0^2} + 4\frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2}\sigma_1^2 - 8\frac{\partial_A\omega_0\partial^A\omega_1\sigma_1}{\eta_0^2} \right) \rho \end{aligned} \quad (4.19)$$

Notar que esta densidad de energía no es definida positiva y por lo tanto no podemos deducir directamente que  $m_2$  sea positiva.

Damos a continuación nuestro primer resultado para Kerr extremo

**Teorema 4.1.1.** *Considere una solución suave de las ecuaciones lineales descritas antes, tal que satisfaga las condiciones de decaimiento en el infinito (2.44), las condiciones de decaimiento en el origen (2.47) y las condiciones de paridad en el eje (2.45) y (2.46). Asuma además que  $\omega_1$  satisface las siguientes condiciones. En el eje tenemos que*

$$\dot{\bar{\omega}}_1, \bar{\omega}_1 = O_1(1), \quad (4.20)$$

además para el infinito y el origen imponemos que

$$\dot{\bar{\omega}}_1, \bar{\omega}_1 = o_1(r^{-1/2}), \quad (4.21)$$

donde hemos definido

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\omega_1}{\eta_0^2}. \quad (4.22)$$

Entonces, se cumple lo siguiente

- (i) La masa a primer orden  $m_1$  definida en (2.74) con  $\varepsilon_1$  dado por (4.17) se anula  $m_1 = 0$ . La masa a segundo orden  $m_2$  definida en (2.75) con  $\varepsilon_2$  dado por (4.19) es igual a la siguiente expresión, la cual es definida positiva

$$\bar{m}_2 = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}_+^2} \bar{\varepsilon}_2 \, d\rho dz, \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_2 = & \left( 2 \frac{e^{2u_0}}{\rho^2} p^2 + 2 \frac{e^{2u_0}}{\rho^2 \eta_0^2} d^2 + 4e^{-2u_0} \chi_1^{AB} \chi_{1AB} + \right. \\ & + (\partial \sigma_1 + \omega_1 \eta_0^{-2} \partial \omega_0)^2 + (\partial (\omega_1 \eta_0^{-1}) - \eta_0^{-1} \sigma_1 \partial \omega_0)^2 + \\ & \left. + (\eta_0^{-1} \sigma_1 \partial \omega_0 - \omega_1 \eta_0^{-2} \partial \eta_0)^2 \right) \rho. \end{aligned} \quad (4.24)$$

(ii) La masa  $m_2$  es conservada durante la evolución.

Notar que la condición de borde (4.20) en el eje (fuera del origen) es la misma que la impuesta para el caso de Minkowski, ya que  $\eta_0$  se comporta como  $\rho^2$  cerca del eje.

*Demostración.* (i) Primero probaremos que  $m_1 = 0$ .

Para el primer término de  $\varepsilon_1$  tenemos

$$2\rho \partial_A \sigma_0 \partial^A \sigma_1 = 2\partial^A (\rho \sigma_1 \partial_A \sigma_0) - 2\sigma_1 \partial^A (\rho \partial_A \sigma_0), \quad (4.25)$$

$$= 2\partial^A (\rho \sigma_1 \partial_A \sigma_0) - 2\rho \sigma_1 {}^{(3)}\Delta \sigma_0, \quad (4.26)$$

$$= 2\partial^A (\rho \sigma_1 \partial_A \sigma_0) - 2\rho \sigma_1 \frac{|\partial \omega_0|^2}{\eta_0^2}, \quad (4.27)$$

donde en (4.26) usamos la definición de  ${}^{(3)}\Delta$  dada por (2.29) y en (4.27) usamos la ecuación estacionaria (4.2).

Para el segundo término tenemos

$$\frac{2\rho \partial_A \omega_0 \partial^A \omega_1}{\eta_0^2} = 2\partial^A \left( \frac{\rho \omega_1 \partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right) - 2\omega_1 \partial^A \left( \frac{\rho \partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right), \quad (4.28)$$

$$= 2\partial^A \left( \frac{\rho \omega_1 \partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right), \quad (4.29)$$

donde en (4.29) hicimos uso de la ecuación estacionaria (4.3). Sumando los términos tenemos

$$\varepsilon_1 = \partial_A t^A, \quad (4.30)$$

siendo

$$t_A = 2\rho \sigma_1 \partial_A \sigma_0 + 2\rho \omega_1 \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2}. \quad (4.31)$$

Ahora integramos (4.30) en el dominio mostrado en la figura 4.1 para algún  $\delta$  y algún  $L$  finitos tales que  $0 < \delta < L$ . El primer término de (4.31) es claramente nulo en el eje. El segundo término también se anula debido a la suposición (4.20) y por la propiedad (4.10) en el eje. Por lo tanto, en la integral solo quedan los

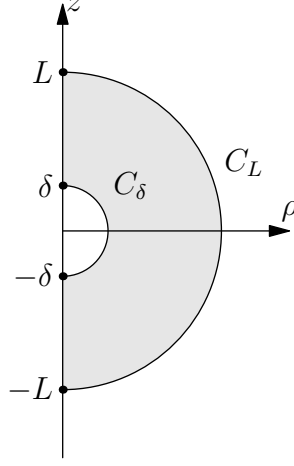


Figura 4.1: Dominio de integración en  $\mathbb{R}_+^2$  para el agujero negro de Kerr extremo.

términos de borde  $C_\delta$  y  $C_L$ . Ahora tomamos los límites  $\delta \rightarrow 0$  y  $L \rightarrow \infty$ . Usando las suposición (4.21) para  $\bar{\omega}_1$ , las condiciones (2.44) y (2.45) para  $\sigma_1$  y el decaimiento (4.6), se obtiene que estas integrales son cero. Por lo tanto, tenemos que  $m_1 = 0$ .

A continuación probaremos la positividad de  $m_2$ . Esta prueba es igual a la dada en la sección 3 de [16], la cual se basa en la identidad de Carter [9]. Los últimos cuatro términos en (4.19) son iguales al integrando de la ecuación (24) de [16] (identificamos la notación con la mencionada referencia,  $\sigma_1 = \alpha$ ,  $\omega_1 = y$ ,  $\eta_0 = X$  and  $\omega_0 = Y$ ). Luego, la identidad de Carter dada por la ecuación (57) de [16] la podemos escribir con nuestra notación como

$$\bar{\epsilon}_2 - \epsilon_2 = \partial_A t^A, \quad (4.32)$$

donde

$$t_A = 2\rho \left( 2\sigma_1 \partial_A \sigma_1 + \omega_1 \frac{\partial_A \omega_1}{\eta_0^2} - 2\sigma_1 \omega_1 \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2} + \frac{\omega_1}{\eta_0} \partial_A \left( \frac{\omega_1}{\eta_0} \right) \right) \quad (4.33)$$

y  $\bar{\epsilon}_2$  está dado por (4.24).

Integrando (4.32) y usando las condiciones de decaimiento en el infinito y en el eje se ve que esta integral es cero, por lo tanto  $m_2$  está dada por la ecuación (4.23).

(ii) Para probar la conservación de  $m_2$  tomamos la derivada temporal de la densidad de masa (4.19)

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_2 = & 4 \frac{e^{2u_0}}{\rho} p \dot{p} + 4 \frac{e^{2u_0}}{\rho \eta_0^2} d \dot{d} + 8e^{-2u_0} \rho \chi_1^{AB} \dot{\chi}_{1AB} + \\
& + 4\rho \partial_A \sigma_1 \partial^A \dot{\sigma}_1 + 4\rho \frac{\partial_A \omega_1 \partial^A \dot{\omega}_1}{\eta_0^2} - 8\rho \sigma_1 \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \partial^A \dot{\omega}_1 + 8\rho \frac{|\partial \omega_0|^2 \sigma_1 \dot{\sigma}_1}{\eta_0^2} - 8\rho \dot{\sigma}_1 \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \partial^A \omega_1.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Al igual que en el caso de Minkowski usaremos las ecuaciones lineales para demostrar que el lado derecho de (4.34) se puede escribir como la divergencia de un vector y luego que su integral es cero debido a las condiciones de borde, la diferencia es que en este caso las cuentas son un poco más extensas. En este caso también calculamos cada término por separado.

Para los dos primeros términos usamos las definiciones de  $p$  y  $d$  dadas en (4.13) y (4.14) respectivamente, obtenemos

$$4 \frac{e^{2u_0}}{\rho} p \dot{p} = 4 \frac{e^{2u_0}}{\rho} \dot{p} \left( \dot{\sigma}_1 - \frac{2\beta_1^\rho}{\rho} - \beta_1^A \partial_A \sigma_0 \right), \tag{4.35}$$

$$4 \frac{e^{2u_0}}{\rho \eta_0^2} d \dot{d} = 4 \frac{e^{2u_0}}{\rho \eta_0^2} \dot{d} (\dot{\omega}_1 - \beta_1^A \partial_A \omega_0). \tag{4.36}$$

Para el tercer término tenemos

$$8e^{-2u_0} \rho \chi_1^{AB} \dot{\chi}_{1AB} = 8\dot{\chi}_1^{AB} \partial_A \beta_{1B}, \tag{4.37}$$

$$= 8\partial_A (\beta_{1B} \dot{\chi}_1^{AB}) - 8\beta_{1B} \partial_A \dot{\chi}_1^{AB}, \tag{4.38}$$

$$= 8\partial_A (\beta_{1B} \dot{\chi}_1^{AB}) + 4 \frac{e^{2u_0}}{\rho} \left( \dot{p} \left( 2 \frac{\beta_1^\rho}{\rho} + \beta_1^A \partial_A \sigma_0 \right) + \dot{d} \frac{\beta_1^A \partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right), \tag{4.39}$$

donde en la línea (4.37) usamos la ecuación (4.18) y que la traza de  $\chi_1^{AB}$  es nula, para obtener la (4.39) usamos la derivada temporal de la ecuación (4.15).

Para el cuarto término obtenemos

$$4\rho \partial_A \sigma_1 \partial^A \dot{\sigma}_1 = 4\partial_A (\rho \dot{\sigma}_1 \partial^A \sigma_1) - 4\dot{\sigma}_1 \partial^A (\rho \partial_A \sigma_1), \tag{4.40}$$

$$= 4\partial_A (\rho \dot{\sigma}_1 \partial^A \sigma_1) - 4\dot{\sigma}_1 \rho^{(3)} \Delta \sigma_1, \tag{4.41}$$

$$= 4\partial_A (\rho \dot{\sigma}_1 \partial^A \sigma_1) - 4 \frac{\dot{\sigma}_1 \dot{p} e^{2u_0}}{\rho} + 8 \frac{\dot{\sigma}_1}{\eta_0^2} \rho \partial_A \omega_1 \partial^A \omega_0 - 8 \frac{\dot{\sigma}_1 \sigma_1 \rho |\partial \omega_0|^2}{\eta_0^2}, \tag{4.42}$$

en (4.41) usamos la definición de  $^{(3)}\Delta$  dada por (2.29), para llegar a la ecuación (4.42) hemos usado la (4.11).

Para el quinto término obtenemos

$$4\rho \frac{\partial_A \dot{\omega}_1 \partial^A \omega_1}{\eta_0^2} = 4\partial^A \left( \frac{\rho \dot{\omega}_1 \partial_A \omega_1}{\eta_0^2} \right) - 4\dot{\omega}_1 \partial^A \left( \frac{\rho \partial_A \omega_1}{\eta_0^2} \right), \quad (4.43)$$

$$= 4\partial^A \left( \frac{\rho \dot{\omega}_1 \partial_A \omega_1}{\eta_0^2} \right) - 4 \frac{\rho \dot{\omega}_1}{\eta_0^2} \left( {}^{(3)}\Delta \omega_1 - \frac{4\partial_\rho \omega_1}{\rho} - 2\partial_A \omega_1 \partial^A \sigma_0 \right), \quad (4.44)$$

$$= 4\partial^A \left( \frac{\rho \dot{\omega}_1 \partial_A \omega_1}{\eta_0^2} \right) - 4 \frac{e^{2u_0}}{\rho \eta_0^2} \dot{\omega}_1 - 8 \frac{\rho \dot{\omega}_1 \partial_A \omega_0 \partial^A \sigma_1}{\eta_0^2}, \quad (4.45)$$

donde en (4.44) usamos la definición del operador  ${}^{(3)}\Delta$  dada en (2.29) y la definición de  $\eta_0$  dada por (2.56). En (4.45) usamos la ecuación de evolución (4.12).

Por último para el sexto término tenemos

$$-8\rho \sigma_1 \frac{\partial_A \omega_0 \partial^A \dot{\omega}_1}{\eta_0^2} = -8\partial^A \left( \rho \dot{\omega}_1 \sigma_1 \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right) + 8\dot{\omega}_1 \partial^A \left( \rho \sigma_1 \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right), \quad (4.46)$$

$$= -8\partial^A \left( \dot{\omega}_1 \sigma_1 \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right) + 8\rho \dot{\omega}_1 \frac{\partial_A \omega_0 \partial^A \sigma_1}{\eta_0^2} + 8\dot{\omega}_1 \sigma_1 \partial^A \left( \frac{\rho \partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right), \quad (4.47)$$

$$= -8\partial^A \left( \dot{\omega}_1 \sigma_1 \frac{\partial_A \omega_0}{\eta_0^2} \right) + 8\rho \dot{\omega}_1 \frac{\partial_A \omega_0 \partial^A \sigma_1}{\eta_0^2}, \quad (4.48)$$

donde para obtener (4.48) usamos la ecuación estacionaria (4.3).

Sumando estos seis términos junto con los últimos dos de (4.34) que no hemos modificado, obtenemos

$$\dot{\varepsilon}_2 = \partial_A t^A, \quad (4.49)$$

donde

$$t^A = 4\rho \dot{\sigma}_1 \partial^A \sigma_1 + 8\beta_{1B} \dot{\chi}_1^{AB} + 4 \frac{\rho \dot{\omega}_1 \partial^A \omega_1}{\eta_0^2} - 8\dot{\omega}_1 \sigma_1 \frac{\partial^A \omega_0}{\eta_0^2}. \quad (4.50)$$

Al integrar la ecuación (4.49) en el dominio mostrado en la figura 4.1, se ve que los términos de borde en el eje se anulan debido a la hipótesis (2.46). Luego tomamos los límites  $\delta \rightarrow 0$  y  $L \rightarrow \infty$ , los otros dos términos de borde también se anulan a consecuencia de las condiciones (2.44)-(2.47) y (4.20)-(4.21).  $\square$

## 4.2. Estimaciones

En esta sección daremos cotas para las perturbaciones utilizando las masas conservadas de la sección anterior. Cabe remarcar que en el caso de Kerr las estimaciones obtenidas no son cotas punto a punto para las funciones  $\sigma_1$  y  $\omega_1$

como lo eran para Minkowski, en este caso el resultado es más débil dando estimaciones integrales para los cuadrados de las mismas y sus dos primeras derivadas espaciales. La razón de esta diferencia, como se mencionó al final de la introducción, es debida a la presencia del horizonte de eventos, en el cual las estimaciones degeneran y no es posible encontrar una cota puntual mediante desigualdades de Sobolev usuales.

Para estas estimaciones usaremos la masa  $m_2$  definida en (4.23) y la masa  $\bar{m}_2$  que se obtiene de tomar la derivada temporal de las ecuaciones lineales

$$\bar{m}_2 = \frac{1}{16} \int_{\mathbb{R}_+^2} \bar{\varepsilon}_2 \, d\rho dz, \quad (4.51)$$

estando  $\bar{\varepsilon}_2$  dado por

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\rho} = & 2e^{2(\sigma_0+q_0)} \dot{p}^2 + 2 \frac{e^{2(\sigma_0+q_0)}}{\eta_0^2} \dot{d}^2 + 4e^{-2u_0} \dot{\chi}_1^{AB} \dot{\chi}_{1AB} + \\ & + (\partial \dot{\sigma}_1 + \dot{\omega}_1 \eta_0^{-2} \partial \omega_0)^2 + (\partial (\dot{\omega}_1 \eta_0^{-1}) - \eta_0^{-1} \dot{\sigma}_1 \partial \omega_0)^2 + (\eta_0^{-1} \dot{\sigma}_1 \partial \omega_0 - \dot{\omega}_1 \eta_0^{-2} \partial \eta_0)^2. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Damos a continuación nuestro segundo teorema obtenido para Kerr extremo

**Teorema 4.2.1.** *Considere una solución de las ecuaciones lineales descritas en la sección anterior que cumple con las hipótesis del Teorema (4.1.1), entonces se satisfacen las siguientes desigualdades*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \frac{1}{2} \eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 + |\partial \eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2 + |\partial \sigma_1|^2 + \frac{\sigma_1^2}{r^2} \right) \rho d\rho dz \leq C m_2, \quad (4.53)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \left( {}^{(3)}\Delta \sigma_1 \right)^2 + \eta_0^2 \left( {}^{(7)}\Delta \bar{\omega}_1 \right)^2 \right) e^{-2(q_0+\sigma_0)} \rho d\rho dz \leq C (\bar{m}_2 + m_2), \quad (4.54)$$

donde  $C$  es una constante que depende solo de la masa  $m_0$  de Kerr extremo.

La masa  $m_2$  involucra primeras derivadas espaciales de  $\sigma_1$  y  $\omega_1$ , mientras que  $\bar{m}_2$  involucra además derivadas segundas. Notar que estos términos aparecen de forma complicada, por lo cual no es obvio que  $m_2$  y  $\bar{m}_2$  satisfagan las cotas (4.53) y (4.54).

Como hemos visto, las perturbaciones gravitacionales involucran más funciones además de  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  (el vector  $\beta_1$ , la función  $q_1$ , etc.). Estas otras funciones en principio pueden ser calculadas a partir de  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  usando las ecuaciones lineales. Es notable que las estimaciones (4.53) y (4.54) pueden escribirse puramente con las cantidades  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  (las cuales son justamente los grados de libertad del sistema) sin involucrar las otras funciones.

Como sabemos las funciones  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  satisfacen las ecuaciones (4.11) y (4.12). Estas ecuaciones tienen la conocida estructura de un mapa de onda acoplado con una métrica de fondo no trivial. Recientemente en [32] se ha estudiado un problema análogo de mapa de onda sin acoplamiento. Es notable que las

estimaciones del Teorema 4.2.1 hacen uso solo de la estructura de mapa de onda pero valen para el sistema acoplado completo. Además estas estimaciones son robustas en el sentido de que hacen uso de energías que también están presentes para las ecuaciones no lineales.

Como las estimaciones (4.53) y (4.54) esencialmente controlan hasta segundas derivadas de las funciones  $\sigma_1$  y  $\omega_1$ , entonces en principio usando desigualdades de Sobolev podríamos obtener cotas punto a punto. Por supuesto, esa es la principal motivación para obtener las estimaciones del Teorema 4.2.1. Sin embargo, aquí no es tan obvia la deducción debido a la presencia de las funciones que dependen de las cantidades de fondo. Principalmente importante es el factor  $e^{-2(\sigma_0+q_0)}$  presente en (4.54). Esta función es positiva, tiende a 1 en el infinito pero decae a cero como  $r^{-2}$  en el origen (donde se encuentra el horizonte de eventos). O sea, la estimación (4.54) degenera en el origen y por lo tanto no podemos controlar punto a punto las funciones  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  en el origen usando solo estas estimaciones. Por otro lado, en un dominio que no contenga el origen sí es posible dar cotas punto a punto, como demuestra el siguiente corolario.

Primero damos la definición de los dominios usados para el corolario. Sea  $\delta > 0$  un número arbitrario pequeño. Definimos los siguientes dominios

$$\Omega_\delta = \{(\rho, z) \in \mathbb{R}_+^2, \text{ tal que } 0 < \delta \leq r\} \quad (4.55)$$

$$\Gamma_\delta = \{(\rho, z) \in \mathbb{R}_+^2, \text{ tal que } 0 < \delta \leq \rho\} \quad (4.56)$$

**Corolario 4.2.2.** *Asumiendo la mismas hipótesis del teorema 4.2.1, valen las siguientes cotas punto a punto*

$$\sup_{\Omega_\delta} |\sigma_1| \leq C_\delta (\bar{m}_2 + m_2), \quad (4.57)$$

$$\sup_{\Gamma_\delta} |\bar{\omega}_1| \leq C_\delta (\bar{m}_2 + m_2), \quad (4.58)$$

donde la constante  $C_\delta$  depende de  $\delta$  y  $m_0$ .

Las cotas del Corolario 4.2.2 son un ejemplo del tipo de cotas que se pueden deducir a partir de las estimaciones (4.53) y (4.54). Sin duda es esperable que de las estimaciones (4.53) y (4.54) se puedan deducir cotas con algún peso, pero también es claro que no se pueden deducir cotas punto a punto en el horizonte, debido a que el factor  $e^{-2(\sigma_0+q_0)}$  se anula allí. La situación es muy similar a la estudiada en [22]. En ese artículo se analiza la ecuación de onda en Reissner- Nordström extremo usando energías conservadas. En dicho artículo, se necesitó más que las dos primeras energías para probar cotas punto a punto en el horizonte, fue usada una energía extra que involucra un mecanismo llamado *integración en el tiempo*. Es una cuestión relevante y aún abierta el hecho de si es aplicable la misma estrategia en el caso de Kerr extremo, el cual es mucho más complicado.

*Demostración.* Comenzamos con la estimación (4.53) que es la más importante del teorema 4.2.1. Los términos del integrando del lado izquierdo de (4.53) contienen hasta primeras derivadas de  $\sigma_1$  y  $\omega_1$ . La integral está acotada solo por la energía  $m_2$ , la energía de orden más alto  $\bar{m}_2$  no es necesaria para dar esta estimación. Aun más, para probar la cota (4.53) usaremos solo los últimos tres términos de la densidad de energía  $\varepsilon_2$  dada por (4.24). Notar que en  $\varepsilon_2$  aparecen los mismos términos que en el integrando del lado izquierdo de (4.53). Sin embargo, no aparecen exactamente del mismo modo (hay varios productos cruzados) por lo que no es obvio como deducir la cota (4.53).

La prueba de (4.53) puede ser dividida en dos partes. La primer parte consiste en estimaciones integrales, ésta es la parte sutil de la prueba. La segunda parte consiste en estimaciones punto a punto. En la deducción haremos repetidamente uso de distintas formas de la desigualdad de Cauchy, las cuales resumimos a continuación.

Sean  $a_1 \cdots a_n$  números reales arbitrarios, entonces tenemos

$$a_1^2 + a_2^2 \geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2)^2 \quad (4.59)$$

y en general

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2. \quad (4.60)$$

Sea  $\lambda > 0$ , entonces

$$a_1 a_2 \leq \lambda a_1^2 + \frac{a_2^2}{4\lambda}. \quad (4.61)$$

En los siguientes dos lemas probamos las estimaciones integrales relevantes. En el Lema 4.2.3 se prueba la cota para el cuarto término de (4.53). Esta cota integral es la clave para probar las cotas para el segundo y tercer término de (4.53). Como veremos más adelante, para probar estas cotas necesitaremos la estimación integral del Lema 4.2.4 con  $v = \bar{\omega}_1$ .

**Lema 4.2.3.** *Para la masa  $m_2$  dada por (4.23) vale la siguiente desigualdad*

$$m_2 \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\sigma_1^2}{r^2} \rho dp dz. \quad (4.62)$$

*Demostración.* Como sabemos  $m_2$  dada por (4.23) es la segunda variación de la masa ADM. Los tres primeros términos de (4.24) corresponden a la parte dinámica de la masa (estos términos desaparecen para soluciones estacionarias), los últimos tres términos corresponden a la parte estacionaria de la masa. Estos términos son precisamente la segunda variación del funcional de masa estudiado exhaustivamente en conexión con las desigualdades entre masa y momento angular (ver [18], [19] y las referencias dadas allí). En el artículo [43] se ha probado una importante estimación para la segunda variación de dicho funcional en términos de la función distancia en el plano hiperbólico. Del Lema 2.3 de [43] deducimos la siguiente desigualdad



$$m_2 \geq 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \mathbf{d}((\eta_1, \omega_1), (\eta_0, \omega_0))|^2 \rho d\rho dz, \quad (4.63)$$

donde  $\mathbf{d}$  es la función distancia en el plano hiperbólico entre los puntos  $(\sigma_1, \omega_1)$  y  $(\sigma_0, \omega_0)$ , siendo aquí  $\eta_1 = \rho^2 e^{\sigma_1}$  (la forma explícita de  $\mathbf{d}$  puede verse en [18]).

Para obtener la cota inferior necesaria para el lado derecho de la desigualdad (4.63) primero usamos la siguiente desigualdad de Poincaré con peso probada en [16] (ecuación (31) de [16] con  $\delta = -1/2$ )

$$2 \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \mathbf{d}|^2 \rho d\rho dz \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{\mathbf{d}^2}{r^2} \rho d\rho dz \quad (4.64)$$

y luego usamos la siguiente cota para la función distancia  $\mathbf{d}$  probada en [18] (ver ecuación (138) de esa referencia)

$$|\mathbf{d}| \geq |\sigma_1|. \quad (4.65)$$

□

**Lema 4.2.4.** Sean  $\eta_0$  y  $\omega_0$  la norma del vector de Killing axial y el twist del agujero negro de Kerr extremo, y sea  $v$  una función suave arbitraria con soporte compacto fuera del eje. Entonces se cumplen las siguientes desigualdades

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \omega_0|^2 v^2 \rho d\rho dz \leq 3 \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \eta_0|^2 v^2 \rho d\rho dz + \int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^2 |\partial v|^2 \rho d\rho dz. \quad (4.66)$$

*Demostración.* Usaremos que las funciones de fondo  $\eta_0$  y  $\omega_0$  satisfacen la ecuación (4.4). Multiplicamos (4.4) por  $\eta_0^{-2\delta} v^2$  (donde  $\delta$  es un número arbitrario) e integramos, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^{-2\delta} v^{2(3)} \Delta(\ln \eta_0) \rho d\rho dz = - \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{|\partial \omega_0|^2}{\eta_0^2} \eta_0^{-2\delta} v^2 \rho d\rho dz. \quad (4.67)$$

Integrando por partes el lado izquierdo de (4.67) obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \omega_0|^2 \eta_0^{-2\delta-2} v^2 \rho d\rho dz &= -2\delta \int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^{-2\delta-2} |\partial \eta_0|^2 v^2 \rho d\rho dz + \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^{-2\delta-1} v \partial v \partial \eta_0 \rho d\rho dz \end{aligned} \quad (4.68)$$

Tomando  $\delta = -1$  en (4.68) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \omega_0|^2 v^2 \rho d\rho dz = 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \eta_0|^2 v^2 \rho d\rho dz + 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0 v \partial v \partial \eta_0 \rho d\rho dz, \quad (4.69)$$

$$\leq 3 \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial \eta_0|^2 v^2 \rho d\rho dz + \int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^2 |\partial v|^2 \rho d\rho dz, \quad (4.70)$$

donde para obtener la desigualdad (4.70) usamos la desigualdad (4.61) en el segundo término de (4.69) con  $a_1 = \eta_0 \partial v$ ,  $a_2 = \partial \eta_0 v$  y  $\lambda = 1/2$ .  $\square$

Continuamos con la prueba del Teorema 4.2.1. Por simplicidad denotaremos por  $C$  a una constante general positiva que solo depende de  $m_0$ .

Comenzamos con el primer término del integrando de (4.53). De la expresión explícita de  $\bar{\varepsilon}_2$  dada en (4.24) tenemos

$$\frac{\varepsilon_2}{\rho} \geq (\partial(\omega_1 \eta_0^{-1}) - \eta_0^{-1} \sigma_1 \partial \omega_0)^2 + (\eta_0^{-1} \sigma_1 \partial \omega_0 - \omega_1 \eta_0^{-2} \partial \eta_0)^2, \quad (4.71)$$

$$= (\eta_0 \partial \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_1 \partial \eta_0 - \eta_0^{-1} \sigma_1 \partial \omega_0)^2 + (\eta_0^{-1} \sigma_1 \partial \omega_0 - \bar{\omega}_1 \partial \eta_0)^2, \quad (4.72)$$

para obtener (4.72) usamos la definición de  $\bar{\omega}_1$  dada en (4.22). Usando la desigualdad de Cauchy (4.59) en (4.72) obtenemos

$$\frac{\varepsilon_2}{\rho} \geq \frac{1}{2} \eta_0^2 (\partial \bar{\omega}_1)^2. \quad (4.73)$$

Para el segundo término de (4.53) nos quedamos con el último término de  $\bar{\varepsilon}_2$  de (4.24), es decir

$$\frac{\varepsilon_2}{\rho} \geq \left( \frac{\partial \omega_0}{\eta_0} \sigma_1 - \partial \eta_0 \bar{\omega}_1 \right)^2, \quad (4.74)$$

$$= \frac{|\partial \omega_0|^2}{\eta_0^2} \sigma_1^2 + |\partial \eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2 - 2 \sigma_1 \bar{\omega}_1 \frac{\partial \omega_0}{\eta_0} \partial \eta_0, \quad (4.75)$$

$$\geq -\frac{|\partial \omega_0|^2}{\eta_0^2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} |\partial \eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2, \quad (4.76)$$

$$\geq -\frac{C}{r^2} \sigma_1^2 + \frac{1}{2} |\partial \eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2, \quad (4.77)$$

donde usamos la desigualdad (4.61) con  $\lambda = 1$  para obtener (4.76), luego en la línea (4.77) hemos usado la cota (4.6). Por lo tanto tenemos

$$\frac{\varepsilon_2}{\rho} + \frac{C}{r^2} \sigma_1^2 \geq \frac{1}{2} |\partial \eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2. \quad (4.78)$$

Integrando las estimaciones (4.73) y (4.78), y usando la cota (4.62) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \frac{1}{2} \eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 + |\partial \eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2 + \frac{\sigma_1^2}{r^2} \right) \rho dp dz \leq C m_2. \quad (4.79)$$

Entonces para probar (4.53) solo resta acotar el término  $|\partial \sigma_1|^2$ . Para esto usamos el cuarto término de (4.24), obtenemos

$$\frac{\varepsilon_2}{\rho} \geq (\partial\sigma_1 + \omega_1\eta_0^{-2}\partial\omega_0)^2, \quad (4.80)$$

$$= (\partial\sigma_1 + \bar{\omega}_1\partial\omega_0)^2, \quad (4.81)$$

$$= |\partial\sigma_1|^2 + \bar{\omega}_1^2|\partial\omega_0|^2 + 2\bar{\omega}_1\partial\sigma_1\partial\omega_0, \quad (4.82)$$

$$\geq \frac{1}{2}|\partial\sigma_1|^2 - |\partial\omega_0|^2\bar{\omega}_1^2, \quad (4.83)$$

donde usamos la definición de  $\bar{\omega}_1$  para obtener (4.81), en la línea (4.83) usamos la desigualdad (4.61) con  $\lambda = 1/4$ . Entonces, hemos obtenido

$$\frac{\varepsilon_2}{\rho} + |\partial\omega_0|^2\bar{\omega}_1^2 \geq \frac{1}{2}|\partial\sigma_1|^2. \quad (4.84)$$

Ahora integramos la estimación (4.84), luego para el segundo término del lado derecho usamos la desigualdad del Lema 4.2.4 con  $v = \bar{\omega}_1$ . De este modo queda probada la estimación (4.53).

Continuamos con la demostración de la cota (4.54) la cual involucra derivadas segundas de las funciones  $\sigma_1$  y  $\bar{\omega}_1$  y por lo tanto es necesario hacer uso de la masa de orden superior  $\bar{m}_2$ .

Empezamos por el término con  ${}^{(3)}\Delta\sigma_1$ . Haciendo uso de la ecuación de evolución (4.11) obtenemos

$$\left({}^{(3)}\Delta\sigma_1\right)^2 = \left(e^{2(\sigma_0+q_0)}\dot{p} + \frac{2}{\eta_0^2}(\sigma_1|\partial\omega_0|^2 - \partial\omega_1\partial\omega_0)\right)^2 \quad (4.85)$$

$$= \left(e^{2(\sigma_0+q_0)}\dot{p} + \frac{2}{\eta_0^2}(\sigma_1|\partial\omega_0|^2 - 2\eta_0\bar{\omega}_1\partial\eta_0\partial\omega_0 + \eta_0^2\partial\omega_0\partial\bar{\omega}_1)\right)^2 \quad (4.86)$$

$$\leq 4e^{4(\sigma_0+q_0)}\dot{p}^2 + \frac{16}{\eta_0^4}\sigma_1^2|\partial\omega_0|^4 + \frac{64}{\eta_0^2}(\partial\eta_0\partial\omega_0)^2\bar{\omega}_1^2 + 16(\partial\omega_0\partial\bar{\omega}_1)^2 \quad (4.87)$$

$$\leq 4e^{4(\sigma_0+q_0)}\dot{p}^2 + C\frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2}\frac{\sigma_1^2}{r^2} + \frac{64}{\eta_0^2}|\partial\eta_0|^2|\partial\omega_0|^2\bar{\omega}_1^2 + 16|\partial\bar{\omega}_1|^2|\partial\omega_0|^2, \quad (4.88)$$

donde en (4.86) usamos la definición de  $\bar{\omega}_1$  (4.22), para obtener (4.87) usamos la desigualdad (4.60) y por último la línea (4.88) resulta de la cota (4.6) y de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Multiplicando la desigualdad (4.88) por  $e^{-2(\sigma_0+q_0)}$  tenemos

$$e^{-2(\sigma_0+q_0)} \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 \right)^2 \leq 4e^{2(\sigma_0+q_0)} \dot{p}^2 + e^{-2(\sigma_0+q_0)} \frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2} \left( C \frac{\sigma_1^2}{r^2} + 64|\partial\eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2 + 16|\partial\bar{\omega}_1|^2 \eta_0^2 \right) \quad (4.89)$$

$$\leq 2 \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\rho} + C \left( \frac{\sigma_1^2}{r^2} + |\partial\eta_0|^2 \bar{\omega}_1^2 + |\partial\bar{\omega}_1|^2 \eta_0^2 \right) \quad (4.90)$$

donde en la desigualdad (4.90) hemos usado (4.24) y la cota (4.8).

Integrando (4.90) y usando las cotas anteriores obtenemos finalmente

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-2(\sigma_0+q_0)} \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 \right)^2 \rho d\rho dz \leq C (\bar{m}_2 + m_2). \quad (4.91)$$

La estimación del término con  ${}^{(3)}\Delta\bar{\omega}_1$  se realiza de forma similar. Primero reescribimos la ecuación de evolución (4.12) en términos de  $\bar{\omega}_1$ , lo que da

$$\eta_0^2 {}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1 = e^{2(\sigma_0+q_0)} \dot{d} - 2\eta_0^2 \bar{\omega}_1 {}^{(3)}\Delta\sigma_0 - 2\eta_0^2 \partial\sigma_0 \partial\bar{\omega}_1 + 2\partial\omega_0 \partial\sigma_1. \quad (4.92)$$

para llegar a esta igualdad hemos usado la expresión de  $\eta_0$  en términos de  $\sigma_0$  dada por (2.56), también las definiciones de los operadores dadas en (2.29) y (3.18), la ecuación (4.5) y la siguiente relación entre  $\bar{\omega}_1$  y  $\omega_1$

$$\eta_0^2 {}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1 = {}^{(3)}\Delta\omega_1 - \frac{4}{\rho} \partial_\rho \omega_1 - 4\partial\omega_1 \partial\sigma_0 - 2\omega_1 {}^{(3)}\Delta\sigma_0 + 8 \frac{\omega_1}{\rho} \partial_\rho \sigma_0 + 4\omega_1 |\partial\sigma_0|^2. \quad (4.93)$$

Elevando al cuadrado la ecuación (4.92) y usando la desigualdad de Cauchy (4.60) tenemos

$$\eta_0^4 \left( {}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1 \right)^2 \leq 4e^{4(\sigma_0+q_0)} \dot{d}^2 + 16\eta_0^4 \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_0 \right)^2 \bar{\omega}_1^2 + 16\eta_0^4 (\partial\sigma_0 \partial\bar{\omega}_1)^2 + 16 (\partial\omega_0 \partial\sigma_1)^2 \quad (4.94)$$

$$\leq 4e^{4(\sigma_0+q_0)} \dot{d}^2 + 16|\partial\omega_0|^2 (|\partial\omega_0|^2 \bar{\omega}_1^2 + |\partial\sigma_1|^2) + 16\eta_0^4 |\partial\sigma_0|^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2, \quad (4.95)$$

en la línea (4.95) usamos la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la ecuación estacionaria (4.2). Multiplicamos la desigualdad (4.95) por el factor  $e^{-2(\sigma_0+q_0)}$

$$\eta_0^2 e^{-2(\sigma_0+q_0)} \left( {}^{(7)}\Delta\bar{\omega}_1 \right)^2 \leq 4 \frac{e^{2(\sigma_0+q_0)}}{\eta_0^2} \dot{d}^2 + 16e^{-2(\sigma_0+q_0)} \frac{|\partial\omega_0|^2}{\eta_0^2} (|\partial\omega_0|^2 \bar{\omega}_1^2 + |\partial\sigma_1|^2) + 16e^{-2(\sigma_0+q_0)} |\partial\sigma_0|^2 \eta_0^2 |\partial\bar{\omega}_1|^2, \quad (4.96)$$

Luego, acotamos el primer término del lado derecho de (4.96) con la densidad de energía (4.24), para los otros términos usamos las desigualdades (4.8) y (4.9), obtenemos

$$\eta_0^2 e^{-2(\sigma_0+q_0)} \left( {}^{(7)}\Delta \bar{\omega}_1 \right)^2 \leq 2 \frac{\bar{\varepsilon}_2}{\rho} + C \left( |\partial \omega_0|^2 \bar{\omega}_1^2 + |\partial \sigma_1|^2 + \eta_0^2 |\partial \bar{\omega}_1|^2 \right). \quad (4.97)$$

Integrando esta última desigualdad y usando la cota (4.53), obtenemos finalmente

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \eta_0^2 e^{-2(\sigma_0+q_0)} \left( {}^{(7)}\Delta \bar{\omega}_1 \right)^2 \rho d\rho dz \leq C (\bar{m}_2 + m_2). \quad (4.98)$$

□

Ahora damos la prueba del Corolario 4.2.2, para probarlo necesitamos de una variante apropiada de la desigualdad de Sobolev y de una función de corte.

*Demostración.* Sea  $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave tal que  $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$ ,  $\chi(r) = 1$  para  $0 \leq r \leq 1$ ,  $\chi(r) = 0$  para  $2 \leq r$ . Sea  $\chi_\delta(r) = \chi(r/\delta)$ .

Considere la siguiente función

$$\bar{\sigma}_1 = (1 - \chi_\delta) \sigma_1. \quad (4.99)$$

Notar que  $\bar{\sigma}_1 = 0$  en  $B_\delta$  y  $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1$  en  $\Omega_{2\delta}$ , donde  $B_\delta$  es la bola de radio  $\delta$  y  $\Omega_{2\delta} = \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{2\delta}$ .

La función  $\bar{\sigma}_1$  es suave y decae a cero en el infinito, por lo que satisface las hipótesis del Lema B.0.1. Entonces, vale la siguiente estimación

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \left( {}^{(3)}\Delta \bar{\sigma}_1 \right)^2 + |\partial \bar{\sigma}_1|^2 \right) \rho d\rho dz \geq C \sup_{\mathbb{R}_+^2} |\bar{\sigma}_1| \quad (4.100)$$

donde  $C$  es una constante numérica independiente de  $\bar{\sigma}_1$ , también hemos usado las ecuaciones (3.53) y (3.54) para obtener (4.100).

Como  $\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$  en  $\Omega_{2\delta}$  tenemos

$$\sup_{\mathbb{R}_+^2} |\bar{\sigma}_1| \geq \sup_{\Omega_{2\delta}} |\bar{\sigma}_1| = \sup_{\Omega_{2\delta}} |\sigma_1|. \quad (4.101)$$

Entonces, si podemos acotar la integral del lado izquierdo de la desigualdad (4.100) con las energías  $m_2$  y  $\bar{m}_2$ , obtendríamos el resultado (4.57). Para acotar esta integral procedemos como sigue.

Dividimos el dominio de integración  $\mathbb{R}_+^2$  en tres partes  $\mathbb{R}_+^2 = \Omega_{2\delta} + A_{2\delta} + B_\delta$ , donde  $A_{2\delta} = B_{2\delta} \setminus B_\delta$ .

Definimos la constante  $C_\delta$  como

$$C_\delta = \min_{\Omega_\delta} \left\{ e^{-2(\sigma_0+q_0)} \right\}. \quad (4.102)$$

En la región  $B_\delta$  tenemos, por construcción, que  $\bar{\sigma}_1 = 0$ , entonces la integral (4.100) es trivial en  $B_\delta$ . Para la región  $\Omega_{2\delta}$  tenemos que  $\bar{\sigma}_1 = \sigma_1$ . Para el término con derivadas primeras obtenemos

$$Cm_2 \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial\sigma_1|^2 \rho d\rho dz, \quad (4.103)$$

$$\geq \int_{\Omega_{2\delta}} |\partial\sigma_1|^2 \rho d\rho dz, \quad (4.104)$$

$$= \int_{\Omega_{2\delta}} |\partial\bar{\sigma}_1|^2 \rho d\rho dz, \quad (4.105)$$

donde en (4.103) usamos la estimación (4.53). Para el término que contiene al Laplaciano, tenemos

$$Cm_2 \geq \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-2(q_0+\sigma_0)} \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 \right)^2 \rho d\rho dz, \quad (4.106)$$

$$\geq \int_{\Omega_{2\delta}} e^{-2(q_0+\sigma_0)} \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 \right)^2 \rho d\rho dz, \quad (4.107)$$

$$\geq C_\delta \int_{\Omega_{2\delta}} \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 \right)^2 \rho d\rho dz, \quad (4.108)$$

$$= C_\delta \int_{\Omega_{2\delta}} \left( {}^{(3)}\Delta\bar{\sigma}_1 \right)^2 \rho d\rho dz, \quad (4.109)$$

donde en la línea (4.108) hemos usado la definición (4.102).

Ahora solo queda acotar la integral en la región intermedia  $A_{2\delta}$ . Para la primer derivada tenemos

$$\partial\bar{\sigma}_1 = (1 - \chi_\delta)\partial\sigma_1 - \sigma_1\partial\chi_\delta, \quad (4.110)$$

de lo que obtenemos la siguiente estimación

$$|\partial\bar{\sigma}_1|^2 \leq 2(1 - \chi_\delta)^2 |\partial\sigma_1|^2 + 2\sigma_1^2 |\partial\chi_\delta|^2, \quad (4.111)$$

$$\leq C_\delta (|\partial\sigma_1|^2 + \sigma_1^2), \quad (4.112)$$

donde usamos que las derivadas de  $\chi_\delta$  son acotadas por una constante  $C_\delta$  que solo depende de  $\delta$ . Integrando (4.111) en  $A_{2\delta}$  y usando la cota (4.53) obtenemos

$$C_\delta m_2 \geq \int_{A_{2\delta}} |\partial\bar{\sigma}_1|^2 \rho d\rho dz. \quad (4.113)$$

Para el término con el Laplaciano tenemos

$${}^{(3)}\Delta\bar{\sigma}_1 = (1 - \chi_\delta){}^{(3)}\Delta\sigma_1 - 2\partial\sigma_1\partial\chi_\delta - \sigma_1{}^{(3)}\Delta\chi_\delta, \quad (4.114)$$

de lo que se deduce la siguiente estimación

$$\left( {}^{(3)}\Delta\bar{\sigma}_1 \right)^2 \leq C_\delta \left( \left( {}^{(3)}\Delta\sigma_1 \right)^2 + |\partial\sigma_1|^2 + \sigma_1^2 \right), \quad (4.115)$$

donde hemos usado, de nuevo, que todas las derivadas de  $\chi_\delta$  son acotadas por una constante  $C_\delta$ . Integrando (4.115) en  $A_{2\delta}$ , usando la definición (4.102) y las cotas del Teorema 4.2.1, obtenemos

$$C_\delta \int_{A_{2\delta}} \left( {}^{(3)}\Delta\bar{\sigma}_1 \right)^2 \rho d\rho dz \leq m_2. \quad (4.116)$$

Finalmente hemos probado que

$$C_\delta \int_{\mathbb{R}_+^2} \left( \left( {}^{(3)}\Delta\bar{\sigma}_1 \right)^2 + |\partial\bar{\sigma}_1|^2 \right) \rho d\rho dz \leq m_2. \quad (4.117)$$

Del mismo modo se obtiene el resultado (4.58) para  $\bar{\omega}_1$ .

□





## Capítulo 5

# Estimaciones para $q$ y $\beta^A$

En este capítulo mostraremos un conjunto de resultados preliminares de nuestros últimos trabajos. Dichos resultados no son suficientes para alcanzar el objetivo que describiremos luego, por lo cual no han sido publicados (nuestros artículos [20] y [21] son anteriores y no contienen los resultados de este capítulo). Los resultados que aquí se muestran conciernen a cotas integrales para la función  $q_1$  y el vector  $\beta_1^A$  en el espacio de Minkowski. Nos enfocamos en Minkowski por una cuestión de simplicidad, con la intención de extenderlos a Kerr extremo.

Si bien las funciones  $\sigma_1$  y  $\omega_1$  comprenden todos los grados de libertad de las perturbaciones, estimar el resto de las funciones es importante por una cuestión de completitud. Además  $q_1$  y  $\beta_1^A$  son dos variables igualmente válidas para describir el sistema (ver [24] y las referencias citadas allí), por lo cual es interesante desarrollar para este par de variables un estudio similar al realizado en los capítulos anteriores para  $\sigma_1$  y  $\omega_1$ .

La principal motivación de obtener estas estimaciones puede describirse del siguiente modo. Queremos estudiar la posibilidad de usar en Kerr extremo el mecanismo de *integración en el tiempo* desarrollado en [22], en el cual se obtiene una cota puntual para la solución de la ecuación de onda en fondo de Reissner-Nordström extremo. Para esto, como se muestra en [22], es fundamental dar una estimación integral del cuadrado de la derivada temporal de la onda, en nuestro contexto esto se traduce a la necesidad de dar una estimación integral de los cuadrados de  $\dot{\sigma}_1$  y  $\dot{\omega}_1$ . Como dijimos antes, por una cuestión de sencillez y para formarnos una idea de como encarar el desarrollo para Kerr extremo, nos enfocamos en el caso de Minkowski.

Integrando la ecuación de la definición de  $p$  (3.4) (notar la similitud de esta ecuación con la correspondiente para Kerr extremo (4.13)) obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\dot{\sigma}_1|^2 \rho d\rho dz \leq m_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1] + 8 \int_{\mathbb{R}_+^2} \left(\frac{\beta_1^p}{\rho}\right)^2 \rho d\rho dz, \quad (5.1)$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy como así también la definición de

$m_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1]$  dada por (3.16). Entonces, notamos la necesidad de deducir una cota para  $\frac{\beta_1^\rho}{\rho}$  y en general para  $\beta_1^A$ .

Las ecuaciones (3.5) y (3.6) forman un sistema completo acoplado para las variables  $\beta_1^A$  y  $q_1$ . Nuestros esfuerzos, se han dirigido hacia la obtención de estimaciones para  $\beta_1^A$  y  $q_1$ , con la esperanza de obtener una cota como la descripta anteriormente.

Nuestro resultado no es lo suficientemente categórico en el sentido de que no damos estimaciones punto a punto para  $\beta_1^A$  y  $q_1$ . Aun así, damos estimaciones integrales para los cuadrados de las derivadas espaciales de las mismas.

A continuación presentamos el resultado obtenido

**Teorema 5.0.1.** *Considere una solución suave del sistema de ecuaciones lineales (3.2)-(3.9) que satisface las condiciones de borde (2.44)-(2.47). Entonces valen las siguientes desigualdades*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{|\partial q_1|^2}{\rho} dpdz \leq Cm_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1], \quad (5.2)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\Delta q_1|^2 \rho dpdz \leq Cm_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1] \quad (5.3)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\Delta \beta_1^B|^2 \rho^3 dpdz \leq Cm_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1] \quad (5.4)$$

donde  $C > 0$  es una constante numérica,  $m_\sigma[p, \sigma_1, \chi_1]$  y  $m_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1]$  están dadas por (3.16) y (3.24) respectivamente.

Además (5.2) y (5.3) implican la siguiente estimación para las derivadas segundas de  $q_1$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial^2 q_1|^2 \rho dpdz \leq Cm_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1], \quad (5.5)$$

donde  $|\partial^2 q_1|^2 = \partial^A \partial_B q_1 \partial^B \partial_A q_1$ .

*Demostración.* Comenzamos demostrando la estimación (5.2). Haciendo uso de la ecuación para la segunda forma fundamental (3.6) obtenemos

$$2|\partial q_1|^2 = \dot{\chi}_1^{AB} \dot{\chi}_{1AB}, \quad (5.6)$$

dividiendo (5.6) por  $\rho$ , integrando en  $\mathbb{R}_+^2$  y usando la definición (3.24) se obtiene la desigualdad deseada.

Para obtener la desigualdad (5.3) observamos que de (3.2) y (3.8) tenemos la siguiente relación

$$\Delta q_1 = -\dot{p}, \quad (5.7)$$

entonces elevando la ecuación anterior al cuadrado, integrando en  $\mathbb{R}_+^2$  y usando la definición (3.24) se obtiene la cota (5.3).

La cota (5.4) que contiene al Laplaciano de  $\beta_1^B$  se obtiene del siguiente modo. Tomando la divergencia de (3.9) tenemos

$$\partial_A (\mathcal{L}\beta_1)^{AB} = \partial_A \left( \frac{2}{\rho} \chi_1^{AB} \right), \quad (5.8)$$

$$\Delta \beta_1^B = \frac{2}{\rho} \left( \partial_A \chi_1^{AB} - \frac{\chi_1^{\rho B}}{\rho} \right), \quad (5.9)$$

$$\Delta \beta_1^B = -\frac{2}{\rho} \left( p \partial^B \rho + \frac{\chi_1^{\rho B}}{\rho} \right), \quad (5.10)$$

donde en la línea (5.9) hemos usado la definición del operador  $\mathcal{L}$  dada por (2.42), para obtener la ecuación (5.10) usamos la ecuación de vínculo (3.7). Multiplicando la (5.10) por  $\rho$  podemos reescribirla como

$$\Delta \beta_1^B \rho = -2 \left( p \partial^B \rho + \frac{\chi_1^{\rho B}}{\rho} \right), \quad (5.11)$$

luego elevando al cuadrado la ecuación (5.11) tenemos

$$|\Delta \beta_1^B|^2 \rho^2 = 2 \left( p \partial^B \rho + \frac{\chi_1^{\rho B}}{\rho} \right)^2 \quad (5.12)$$

$$\leq 4 \left( p^2 + \frac{\chi_1^{AB} \chi_{1AB}}{\rho^2} \right), \quad (5.13)$$

para obtener (5.13) usamos la desigualdad de Cauchy y el hecho de que  $\chi_1^{\rho B} \chi_{1\rho B} \leq \chi_1^{AB} \chi_{1AB}$ . Luego, integrando en  $\mathbb{R}_+^2$  y haciendo uso de (3.16) se obtiene la estimación (5.4).

Por último para demostrar la estimación (5.5) notamos la siguiente relación

$$\begin{aligned} |\Delta q_1|^2 \rho &= \partial^A \partial_A q_1 \partial^B \partial_B q_1 \rho = \partial^A (\partial_A q_1 \partial^B \partial_B q_1 \rho) - \partial^B (\partial_A q_1 \partial^A \partial_B q_1 \rho) \\ &+ \partial^A (\partial_A q_1 \partial_B q_1 \partial^B \rho) + \partial^A \partial_B q_1 \partial^B \partial_A q_1 \rho - 2 \partial^A \partial_A q_1 \partial_B q_1 \partial^B \rho - \partial_A q_1 \partial_B q_1 \partial^A \partial^B \rho, \end{aligned} \quad (5.14)$$

integrando (5.14), vemos que los tres primeros términos se anulan debido al teorema de la divergencia y a las condiciones de decaimiento. El último término se anula debido a que  $\partial^A \partial^B \rho = 0$ . Entonces obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial^2 q_1|^2 \rho d\rho dz = \int_{\mathbb{R}_+^2} |\Delta q_1|^2 \rho d\rho dz + 2 \int_{\mathbb{R}_+^2} \Delta q_1 \partial_\rho q_1 d\rho dz, \quad (5.15)$$

elevando al cuadrado (5.15) y usando la desigualdad de Cauchy, tenemos

$$\left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |\partial^2 q_1|^2 \rho d\rho dz \right)^2 \leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |\Delta q_1|^2 \rho d\rho dz \right)^2 + 8 \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} \Delta q_1 \partial_\rho q_1 d\rho dz \right)^2, \quad (5.16)$$

$$= 2 \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |\Delta q_1|^2 \rho d\rho dz \right)^2 + 8 \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} \Delta q_1 \rho^{1/2} \frac{\partial_\rho q_1}{\rho^{1/2}} d\rho dz \right)^2 \quad (5.17)$$

$$\leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}_+^2} |\Delta q_1|^2 \rho d\rho dz \right)^2 + 8 \int_{\mathbb{R}_+^2} |\Delta q_1|^2 \rho d\rho dz \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{|\partial_\rho q_1|}{\rho} d\rho dz, \quad (5.18)$$

$$\leq 10C (m_\sigma[\dot{p}, \dot{\sigma}_1, \dot{\chi}_1])^2, \quad (5.19)$$

donde en la línea (5.17) multiplicamos y dividimos por  $\rho^{1/2}$  el integrando del segundo término. La línea (5.18) resulta de la desigualdad de Hölder. Por último la desigualdad (5.19) se obtiene de las cotas (5.2) y (5.3).

Luego, tomando la raíz positiva de (5.19) resulta la estimación (5.5).  $\square$

## Capítulo 6

# Comentarios finales

Hemos dado el conjunto completo de ecuaciones lineales para perturbaciones con simetría axial específicamente para los casos de Minkowski y Kerr extremo. Para ambos casos se encontró un conjunto infinito de cantidades conservadas que en esencia son funcionales de las perturbaciones o de sus derivadas temporales. Estas cantidades son positivas y están estrechamente relacionadas con la masa ADM. La conservación de las energías es demostrada a partir de las ecuaciones lineales (Teorema 3.0.1 y Teorema 4.1.1), mientras que la positividad de las mismas en el caso de Kerr extremo (para Minkowski es trivial) es resultados de desigualdades no triviales adaptadas de trabajos anteriormente citados. El hecho de que estas energías sean positivas y conservadas son el resultado principal de nuestro trabajo, ya que otorgan un criterio de estabilidad para las perturbaciones. En el caso de Minkowski la estabilidad es explícita, es decir que las energías controlan la norma de las perturbaciones. Por el contrario, en Kerr extremo el resultado es menos contundente. El Teorema 4.2.1 limita el comportamiento de las perturbaciones, o sea, implica que las perturbaciones no pueden tener cualquier tipo de comportamiento sino que deben ser tales que las cotas (4.53) y (4.54) valgan. Dichas cotas implican la estabilidad para la región exterior, como lo demuestra el Corolario 4.2.2. Por lo tanto, el Teorema 4.2.1 demuestra la estabilidad lineal de la región exterior de Kerr extremo ante perturbaciones gravitacionales con simetría axial. La limitación del Teorema 4.2.1 se encuentra en el horizonte, como hemos mencionado las energías degeneran en el horizonte dando lugar a un posible crecimiento indefinido para las perturbaciones, es decir las energías no controlan la perturbación en el horizonte. Es posible que alguna adaptación de desigualdades de Sobolev con peso para las cotas (4.53) y (4.54) dé indicios sobre la conducta de las perturbaciones en el horizonte.

Notamos además, la diferencia de dificultad entre los casos de Minkowski y Kerr extremo. En el primero las ecuaciones para el *twist* resultaron completamente desacopladas del resto, lo que llevó a la posibilidad de tratar el *twist* como la solución de una ecuación de ondas (aunque en más dimensiones). Las energías obtenidas no degeneran (ya que no hay horizonte) y proporcionan cotas

puntuales para las perturbaciones. Cabe aclarar que la forma de las ecuaciones es mucho más simple que en el caso de Kerr extremo.

## Apéndice A

# Agujero negro de Kerr en el *gauge* maximal isotérmico

En este apéndice describimos la métrica de Kerr en el *gauge* maximal isotérmico descrito en la Sección 2.2. En particular, mostramos que la métrica satisface las condiciones (2.50).

La métrica de Kerr, con parámetros  $(m, a)$ , en las coordenadas de Boyer-Lindquist  $(t, \tilde{r}, \theta, \phi)$  viene dada por

$$g = -V dt^2 + 2W dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Xi} d\tilde{r}^2 + \Sigma d\theta^2 + \eta d\phi^2, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$\Xi = \tilde{r}^2 + a^2 - 2m\tilde{r}, \quad \Sigma = \tilde{r}^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (\text{A.2})$$

y

$$V = \frac{\Xi - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad (\text{A.3})$$

$$W = -\frac{2ma\tilde{r} \sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad (\text{A.4})$$

$$\eta = \left( \frac{(\tilde{r}^2 + a^2)^2 - \Xi a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta. \quad (\text{A.5})$$

El momento angular está dado por

$$J = ma. \quad (\text{A.6})$$

La métrica (A.1) es estacionaria y tiene simetría axial debido a que posee los siguientes dos vectores de Killing

$$\xi^\mu = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\mu, \quad \eta^\nu = \left( \frac{\partial}{\partial \phi} \right)^\nu, \quad (\text{A.7})$$

donde  $\xi^\mu$  es temporal fuera de la ergo-esfera y  $\eta^\mu$  es espacial y se anula en el eje de simetría. Los escalares (A.3), (A.4) y (A.5) pueden escribirse en términos de los vectores de Killing del siguiente modo

$$V = -\xi^\mu \xi^\nu g_{\mu\nu}, \quad \eta = \eta^\mu \eta^\nu g_{\mu\nu}, \quad W = \eta^\mu \xi^\nu g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Como muestra la segunda ecuación,  $\eta$  es el cuadrado de la norma del vector de Killing axial  $\eta^\mu$ . En estas ecuaciones estamos usando índices 4-dimensionales  $\mu, \nu \dots$ .

El potencial del twist  $\omega$  del vector de Killing axial  $\eta^\mu$  viene dado por

$$\omega = 2ma(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - \frac{2ma^3 \cos \theta \sin^4 \theta}{\Sigma}. \quad (\text{A.9})$$

La métrica Lorenziana 3-dimensional  $h$  de la variedad cociente  $N$  (vea ecuaciones (26) de [24]) está definida como

$$\eta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \eta_\mu \eta_\nu. \quad (\text{A.10})$$

Usando la forma explícita de la métrica de Kerr (A.1) y el vector de Killing  $\eta^\mu$  obtenemos que la métrica  $h$  está dada por

$$h = -(V\eta + W^2)dt^2 + \frac{\eta\Sigma}{\Xi}d\tilde{r}^2 + \eta\Sigma d\theta^2. \quad (\text{A.11})$$

En la métrica de Kerr vale la siguiente notable relación

$$V\eta + W^2 = \Xi \sin^2 \theta. \quad (\text{A.12})$$

Usando (A.12) se puede simplificar la expresión para la métrica  $h$

$$h = -\Xi \sin^2 \theta dt^2 + \frac{\eta\Sigma}{\Xi}d\tilde{r}^2 + \eta\Sigma d\theta^2. \quad (\text{A.13})$$

Esta métrica es estática. La foliación  $t = \text{constante}$  tiene curvatura extrínseca nula, por lo cual es una foliación maximal. El vector corrimiento de esta foliación también es nulo, por lo que la condición (2.50) se cumple. De todos modos, las coordenadas  $(\tilde{r}, \theta)$  no son isotérmicas ya que no satisfacen la condición (2.25).

Para introducir las coordenadas isotérmicas asumimos que  $m \geq |a|$ , es decir la métrica de Kerr describe un agujero negro. Sea  $r$  la raíz positiva de la ecuación

$$\tilde{r} = r + m + \frac{m^2 - a^2}{4r}, \quad (\text{A.14})$$

o sea

$$r = \frac{1}{2} \left( \tilde{r} - m + \sqrt{\Xi} \right), \quad (\text{A.15})$$

tenemos

$$d\tilde{r} = \frac{\sqrt{\Xi}}{r} dr. \quad (\text{A.16})$$



Definimos las coordenadas cilíndricas  $(\rho, z)$  en términos de las esféricas  $(r, \theta)$

$$\rho = r \sin \theta, \quad z = r \cos \theta. \quad (\text{A.17})$$

La métrica  $h$  en coordenadas  $(t, \rho, z)$  viene dada por

$$h = -\alpha^2 dt^2 + e^{2u} (d\rho^2 + dz^2), \quad (\text{A.18})$$

donde

$$\alpha = \sqrt{\Xi} \sin \theta = \rho \left( 1 - \frac{(m^2 - a^2)}{4r^2} \right) \quad (\text{A.19})$$

y

$$e^{2u} = \frac{\eta \Sigma}{r^2}. \quad (\text{A.20})$$

La métrica inducida en las superficies  $t = \text{constante}$  es

$$q = e^{2u} (d\rho^2 + dz^2). \quad (\text{A.21})$$

Esto significa que el sistema de coordenadas es isotérmico.

La función  $\sigma$  está definida en términos de  $\eta$  como

$$e^\sigma = \frac{\eta}{\rho^2}, \quad (\text{A.22})$$

la función  $q$  está dada por

$$e^{2q} = \frac{\sin^2 \theta \Sigma}{\eta}, \quad (\text{A.23})$$

tenemos la relación

$$u = q + \sigma + \log \rho. \quad (\text{A.24})$$

Notar que el lapso satisface la condición de *gauge* maximal

$$\Delta \alpha = 0. \quad (\text{A.25})$$

Para el caso extremo  $m = |a|$ , vemos que de (A.19) tenemos

$$\alpha = \rho. \quad (\text{A.26})$$



## Apéndice B

# Estimación tipo Sobolev

En este apéndice probaremos la siguiente estimación de tipo Sobolev

**Lema B.0.1.** *Existe una constante  $C > 0$  tal que para toda función  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , con  $n \geq 3$ , vale la siguiente desigualdad*

$$C \left( \int_{\mathbb{R}^n} (|\partial^k u|^2 + |\partial^{k-1} u|^2) dx^n \right)^{1/2} \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|, \quad (\text{B.1})$$

donde  $k > n/2$

*Demostración.* La estimación (B.1) es un resultado de las dos siguiente estimaciones clásicas.

La primera es la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev: asuma que  $1 \leq p < n$ , entonces existe una constante  $C$ , que depende solo de  $p$  y  $n$ , tal que

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\partial u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (\text{B.2})$$

para toda  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , donde

$$q = \frac{pn}{n-p}. \quad (\text{B.3})$$

La segunda estimación es la desigualdad de Morrey: asuma que  $n < p \leq \infty$ , entonces existe una constante  $C$ , que depende solo de  $p$  y  $n$ , tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (\text{B.4})$$

Vea [27] para una presentación clara de estas estimaciones y una discusión sobre los espacios funcionales  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  involucrados en estas desigualdades.

Primero observamos que la estimación (B.2) puede ser iterada del siguiente modo

$$\|u\|_{L^{p_k}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\partial^k u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (\text{B.5})$$

donde  $1 \leq k \leq n/p$ ,  $1 < p$  y  $p_k$  está dado por

$$p_k = \frac{pn}{n - pk}. \quad (\text{B.6})$$

Para probar (B.5) usamos inducción en  $k$ . Para  $k = 1$  la desigualdad (B.5) se reduce a (B.2). Asumimos que (B.5) es válida para  $k$ . Si  $\partial^{k+1}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , entonces por (B.2) obtenemos que  $\partial^k u \in L^q(\mathbb{R}^n)$  con  $q$  dada por

$$q = \frac{pn}{n - p}. \quad (\text{B.7})$$

Por hipótesis inductiva tenemos que  $u \in L^{q_k}(\mathbb{R}^n)$  siendo

$$q_k = \frac{qn}{n - qk}. \quad (\text{B.8})$$

Sustituyendo (B.7) en (B.8) se obtiene

$$q_k = \frac{pn}{n - (k+1)p}. \quad (\text{B.9})$$

Con lo que queda probada la (B.5).

Continuamos con la prueba de (B.1), notar que el lado izquierdo de (B.1) implica que  $\partial^{k-1}w, \partial^{k-1}u \in L^2(\mathbb{R}^n)$  donde  $w = \partial u$ . Entonces, aplicamos la desigualdad (B.5) a  $w$  y a  $u$ , para obtener que  $w, u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  con  $p$  dado por

$$p = \frac{2n}{n - 2k + 2}. \quad (\text{B.10})$$

Por hipótesis  $k > n/2$ , entonces obtenemos que  $p > n$ . Por lo tanto, probamos que  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  con  $p > n$ . Luego usando la desigualdad de Morrey (B.4) se obtiene el resultado del Lema B.0.1. □

# Bibliografía

- [1] Hakan Andreasson, Markus Kunze, and Gerhard Rein. Rotating, stationary, axially symmetric spacetimes with collisionless matter. *Commun.Math.Phys.*, 329:787–808, 2014.
- [2] S. Aretakis. Stability and Instability of Extreme Reissner-Nordström Black Hole Spacetimes for Linear Scalar Perturbations I. *Commun.Math.Phys.*, 307:17–63, 2011.
- [3] S. Aretakis. Stability and Instability of Extreme Reissner-Nordström Black Hole Spacetimes for Linear Scalar Perturbations II. *Annales Henri Poincaré*, 12:1491–1538, 2011.
- [4] Stefanos Aretakis. Decay of Axisymmetric Solutions of the Wave Equation on Extreme Kerr Backgrounds. *J.Funct.Anal.*, 263:2770–2831, 2012.
- [5] Stefanos Aretakis. Horizon Instability of Extremal Black Holes, 2012.
- [6] Stefanos Aretakis. Nonlinear instability of scalar fields on extremal black holes. *Phys.Rev.*, D87:084052, 2013.
- [7] Robert Bartnik. Phase space for the Einstein equations. *Comm. Anal. Geom.*, 13(5):845–885, 2005.
- [8] Piotr Bizon and Helmut Friedrich. A remark about wave equations on the extreme Reissner-Nordström black hole exterior. *Class.Quant.Grav.*, 30:065001, 2013.
- [9] B. Carter. Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom. *Phys. Rev. Lett.*, 26(6):331–333, 1971.
- [10] Matthew W. Choptuik, Eric W. Hirschmann, Steven L. Liebling, and Frans Pretorius. An Axisymmetric Gravitational Collapse Code. *Class. Quant. Grav.*, 20:1857–1878, 2003.
- [11] D. Christodoulou and S. Klainerman. Asymptotic properties of linear field equations in Minkowski space. *Comm. Pure Appl. Math.*, 43(2):137–199, 1990.

- [12] D. Christodoulou and S. Klainerman. *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space*, volume 41 of *Princeton Mathematical series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [13] M. Dafermos and I. Rodnianski. Lectures on black holes and linear waves, 2008.
- [14] M. Dafermos and I. Rodnianski. The black hole stability problem for linear scalar perturbations, 2010.
- [15] M. Dafermos, I. Rodnianski, and Y. Shlapentokh-Rothman. Decay for solutions of the wave equation on Kerr exterior spacetimes III: The full subextremal case  $|a| < M$ , 2014.
- [16] Sergio Dain. Proof of the (local) angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes. *Class. Quantum. Grav.*, 23:6845–6855, 2006.
- [17] Sergio Dain. Axisymmetric evolution of Einstein equations and mass conservation. *Class. Quantum. Grav.*, 25:145021, 2008.
- [18] Sergio Dain. Proof of the angular momentum-mass inequality for axisymmetric black holes. *J. Differential Geometry*, 79(1):33–67, 2008.
- [19] Sergio Dain. Geometric inequalities for axially symmetric black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 29(7):073001, 2012.
- [20] Sergio Dain and Ivan Gentile de Austria. On the linear stability of the extreme Kerr black hole under axially symmetric perturbations. *Class.Quant.Grav.*, 31(19):195009, 2014.
- [21] Sergio Dain and Ivan Gentile de Austria. Bounds for axially symmetric linear perturbations for the extreme Kerr black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 32(13):135010, 2015.
- [22] Sergio Dain and Gustavo Dotti. The wave equation on the extreme Reissner-Nordström black hole. *Class.Quant.Grav.*, 30:055011, 2013.
- [23] Sergio Dain and María Eugenia Gabach Clément. Small deformations of extreme Kerr black hole initial data. *Class. Quant. Grav.*, 28:075003, 2011.
- [24] Sergio Dain and Omar E. Ortiz. Well-posedness, linear perturbations, and mass conservation for the axisymmetric Einstein equations. *Phys. Rev. D*, 81(4):044040, Feb 2010.
- [25] Sergio Dain and Martin Reiris. Linear perturbations for the vacuum axisymmetric Einstein equations. *Annales Henri Poincare*, 12:49–65, 2011.
- [26] G. Dotti. Non-modal linear stability of the Schwarzschild black hole. *Phys.Rev.Lett.*, 112:191101, 2014.

- [27] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [28] F. Finster, N. Kamran, J. Smoller, and S. Yau. Linear waves in the Kerr geometry: a mathematical voyage to black hole physics. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 46(4):635–659, 2009.
- [29] R. Geroch. A method for generating solutions of Einstein’s equations. *J. Math. Phys.*, 12(6):918–924, 1971.
- [30] Mariano Giaquinta and Stefan Hildebrandt. *Calculus of variations. I*, volume 310 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. The Lagrangian formalism.
- [31] Stefan Hollands and Robert M. Wald. Stability of Black Holes and Black Branes. *Commun.Math.Phys.*, 321:629–680, 2013.
- [32] ALEXANDRU D Ionescu and SERGIU Klainerman. On the global stability of the wave-map equation in Kerr spaces with small angular momentum. *arXiv preprint arXiv:1412.5679*, 2014.
- [33] B. S. Kay and R. M. Wald. Linear stability of Schwarzschild under perturbations which are nonvanishing on the bifurcation two sphere. *Class.Quant.Grav.*, 4:893–898, 1987.
- [34] Joe Keir. Stability, Instability, Canonical Energy and Charged Black Holes, 2013.
- [35] J. Lucietti, K. Murata, H. S. Reall, and N. Tanahashi. On the horizon instability of an extreme Reissner-Nordström black hole. *JHEP*, 1303:035, 2013.
- [36] J. Lucietti and H. S. Reall. Gravitational instability of an extreme Kerr black hole. *Phys.Rev.*, D86:104030, 2012.
- [37] V. Moncrief. Gauge-invariant perturbations of Reissner-Nordstrom black holes. *Phys.Rev.*, D12:1526–1537, 1975.
- [38] Keiju Murata. Instability of higher dimensional extreme black holes. *Class.Quant.Grav.*, 30:075002, 2013.
- [39] Keiju Murata, Harvey S. Reall, and Norihiro Tanahashi. What happens at the horizon(s) of an extreme black hole? *Class.Quant.Grav.*, 30:235007, 2013.
- [40] T. Regge and J. A. Wheeler. Stability of a Schwarzschild singularity. *Phys.Rev.*, 108:1063–1069, 1957.
- [41] Martin Reiris. Instability of the extreme Kerr-Newman black-holes, 2013.

- [42] Oliver Rinne and John M. Stewart. A strongly hyperbolic and regular reduction of Einstein's equations for axisymmetric spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 22:1143–1166, 2005.
- [43] Richard Schoen and Xin Zhou. Convexity of Reduced Energy and Mass Angular Momentum Inequalities. *Annales Henri Poincaré*, 14(7):1747–1773, 2013.
- [44] Jalal Shatah and Michael Struwe. *Geometric wave equations*, volume 2 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1998.
- [45] S. A. Teukolsky. Rotating black holes: Separable wave equations for gravitational and electromagnetic perturbations. *Physical Review Letters*, 29(16):1114, 1972.
- [46] R. M. Wald. Note on the stability of the Schwarzschild metric. *Journal of Mathematical Physics*, 20(6):1056–1058, 1979.
- [47] Gilbert Weinstein. On rotating black holes in equilibrium in general relativity. *Comm. Pure App. Math.*, 43(7):903–948, 1990.
- [48] B. F. Whiting. Mode stability of the Kerr black hole. *J. Math. Phys.*, 30(6):1301–1305, 1989.
- [49] F. J. Zerilli. Effective potential for even parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations. *Phys.Rev.Lett.*, 24:737–738, 1970.
- [50] F.J. Zerilli. Perturbation analysis for gravitational and electromagnetic radiation in a Reissner-Nordström geometry. *Phys.Rev.*, D9:860–868, 1974.