Anna-Christin SÖHLING, Universität zu Köln, DE

Probieren als Mittel der Differenzierung beim Problemlösen

1. Einleitung

Bei der Beobachtung von Problemlöseprozessen von 4.-6.-Klässlern fiel auf, dass viele probierende Verfahren anwenden (Söhling 2017). Manche Schüler probierten verschiedene Rechenarten aus, bis sie eine passende gefunden hatten. Andere Schüler überprüften verschiedene Werte daraufhin, ob sie als Lösung der Aufgabe infrage kämen. Manche Schüler wählten auch dann einen probierenden Ansatz, wenn sie vermuteten, dass es eigentlich einen „eleganteren“ Weg gebe. Fehr (2007)[1] unterscheidet zwei Arten mathematische Probleme zu lösen: Problemlösen durch Analyse und Einsicht und Problemlösen durch Versuch und Irrtum, wobei er letztere für wenig erstrebenswert hält und fordert, dass Schüler lernen, Probleme durch Analyse und Einsicht zu lösen (vgl. S. 42). Vielleicht liegt der Grund der Skepsis gegenüber dem Probieren darin, dass zumindest beim wilden Ausprobieren von Werten, die als Lösung eines Problems infrage kommen, es dem Zufall überlassen zu sein scheint, ob ein Schüler das Problem löst oder nicht.

Dass jedoch das Probieren einen Nutzen für das Problemlösen und für das Lernen von Mathematik haben kann, der über das zufällige Finden einer Lösung hinausgeht, konnte nicht nur an Beispielen gezeigt, sondern auch theoretisch begründet werden (Söhling 2017). Wie dieser Nutzen für das Problemlösen im Unterricht fruchtbar gemacht werden kann, soll im Folgenden dargelegt werden[2].

2. Zum Begriff des Probierens

In der Literatur finden sich nicht oft Definitionen zum Probieren beim Problemlösen, vermutlich weil der Begriff des Probierens im alltagssprachlichen Sinn verwendet und deshalb nicht gesondert definiert zu wird. Wird das Probieren näher erläutert, kann es eine Rolle spielen, ob mit Werten (Elia et al.) oder mit Handlungen bzw. Operationen (Sternberg) probiert wird. Außerdem ist die Unterscheidung zwischen einem unsystematischen und einem systematischen Probieren (vgl. etwa Bruder & Collet 2011, S. 17) bekannt.

[1] Es handelt sich um den Nachdruck eines bereits 1954 erschienenen Artikels.

[2] Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass sich die entwickelten Aufgabenformate vor allem dann anbieten, wenn bei Problemen aus der Arithmetik und Algebra mit Werten als mögliche Lösungen probiert wird.

Um diese verschiedenen Ansätze und die eigenen Beobachtungen zu berücksichtigen wurde die folgende eigene Definition des Probierens formuliert:

> „Beim Probieren werden Elemente aus einer Menge zur Verfügung stehender Werte oder Operationen daraufhin überprüft, ob sie eine (Teil-)Lösung für das Problem darstellen (bei Wertemengen) oder ob mit ihnen in einer bestimmten Reihenfolge eine (Teil-)Lösung erzielt werden kann (bei Mengen von Operationen)" (Söhling 2017, S. 40)

Die Überprüfung der Elemente kann auf verschiedene Art und Weise geschehen, wodurch sich verschiedene Arten des Probierens unterscheiden lassen.

3. Arten des Probierens

Die folgende Differenzierung in verschiedene Arten des Probierens wurde gleichermaßen durch theoretische Überlegungen sowie durch die Analyse von Fallbeispielen (Söhling 2017) entwickelt.

Es lassen sich vier verschiedene Arten des Probierens unterscheiden: Unsystematisches Probieren, systematisches Probieren, eingegrenztes Probieren und zielgerichtetes Probieren (auch Probieren in Richtung der Lösung).

Beim **unsystematischen Probieren** werden aus der Menge mit Werten oder Operationen zufällig Werte oder Operationen ausgewählt und daraufhin überprüft, ob sie als (Teil-)Lösung infrage kommen bzw. zur Lösung führen. Charakteristisch ist hierbei, dass die Auswahl auf unsystematische, zufällige Weise erfolgt und vorangegangene Probierresultate die Auswahl nicht nennenswert beeinflussen. Es kann auch sein, dass ein und derselbe Wert unbemerkt mehrmals geprüft wird.

Beim **systematischen Probieren** wird die Menge der Werte bzw. Operationen systematisch untersucht. Es wird also im Sinne einer Fallunterscheidung jeder Wert, jede Operation oder Operationenkette überprüft, bis die gewünschte Lösung gefunden wird.

Im Gegensatz zum systematischen Probieren wird beim **eingegrenzten Probieren** nicht jedes Element der Werte- bzw. Operationenmenge untersucht, sondern es werden nur bestimmte Werte bzw. Operationen überprüft. Welche Werte oder Operationen überprüft werden, kann entweder durch Vorüberlegungen auf Grundlage der Problemstellung festgelegt werden oder auf Grundlage der beim Überprüfen erzielten Zwischenresultate.

Das **zielgerichtete Probieren** ist ein Spezialfall des eingegrenzten Probierens. Auch hier beeinflussen Vorüberlegungen oder die bisher erzielten Zwischenresultate die Auswahl neuer Werte bzw. Operationen. Allerdings werden hierbei die erzielten Zwischenresultate stets mit der gewünschten Lösung abgeglichen und neue Werte bzw. Operationen so ausgewählt, dass sie näher an der gewünschten Lösung liegen. Dagegen muss beim eingegrenzten Probieren, der vorigen Art des Probierens, das Ziel noch keine entscheidende Rolle spielen.

Tabelle 1: Aufgabenformate zum Probieren

<table>
<tr><td>Arbeitsaufträge zur Förderung des unsystematischen Probierens
- Probierversuch vorstellen
- Fragen: Wie kommt der Schüler darauf? Wie kann man weitermachen?</td><td>Arbeitsaufträge zur Förderung des systematischen Probierens
- Angefangene Tabelle oder Liste fortsetzen lassen
- Probierversuche ordnen und fortführen lassen</td></tr>
<tr><td>Arbeitsaufträge zur Förderung des eingegrenzten Probierens
- Angefangenes Probierverfahren vorgeben
- Fragen: Welche Werte musst du nicht überprüfen? Wie geht es schneller?</td><td>Arbeitsaufträge zur Förderung des zielgerichteten Probierens
- Angefangenes Probierverfahren vorstellen
- Frage: Wie kann es geschickt weitergehen?</td></tr>
<tr><td colspan="2">Arbeitsaufträge zur Förderung des Findens von Abkürzungen
- Frage: Wie geht es von hier aus ganz schnell zur Lösung?
- Abkürzung eines Schülers vorstellen: Was hat sich der Schüler dabei gedacht?</td></tr>
</table>

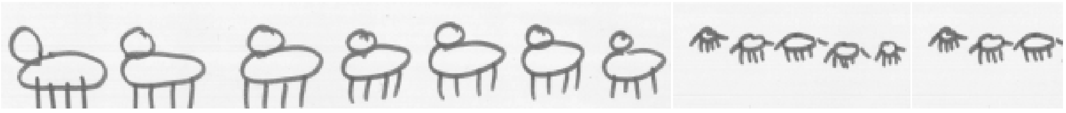
4. Differenzierende Aufgabenformate zum Probieren

Aus der Differenzierung verschiedener Arten des Probierens heraus wurden verschiedene Aufgabenformate entwickelt, die es ermöglich im Sinne einer Binnendifferenzierung verschiedene Arbeitsaufträge zu einem Problem zu formulieren, welche auf unterschiedlichen Kompetenzniveaus seitens der SchülerInnen bearbeitet werden können.

Beispiele für solche Arbeitsträge sind in Tab. 1 aufgelistet. So können SchülerInnen, die Schwierigkeiten haben, einen Ansatz zum Lösen einer Problemaufgabe zu finden, ein unfertiges (unsystematisches) Probierverfahren fortzuführen. SchülerInnen, die bereits Probieransätze finden und diese bereits systematisch bearbeiten, können durch die Arbeitsaufträge zum eingegrenzten und zielgerichteten Probieren dazu aufgefordert werden, ihr Probierverfahren abzukürzen und nach Zusammenhängen zu suchen.

Zur Konkretisierung sei zum Abschluss ein Beispiel zum zielgerichteten Probieren für die Bearbeitung der Pferde-Fliege-Aufgabe[3] gegeben (Abb. 1).

Emma hat angefangen, eine Zeichnung zur Aufgabe zu erstellen:



Sie sagt: „7 Pferde, also 7 * 4 = 28. Und 8 Fliegen, also 8 * 6 = 48. Das sind 76, also 4 Beine zu viel.“
Wie könnte ihr nächster Versuch aussehen? Überlege geschickt.

Abbildung 1: Aufgabenstellung zum zielgerichteten Probieren

Literatur

Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. *Scriptor Praxis - Mathematik*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Fehr, H. F. (2007). The Role of Insight in the Learning of Mathematics. *Mathematics Teacher*, (100), 40–45.

Elia, I., den Heuvel-Panhuizen, M. & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM*, *41*(5), 605–618.

Rasch, R. (2001). *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Hildesheim: Franzbecker.

Sternberg, R. (2009). *Cognitive Psychology*. Belmont, CA: Wadsworth.

Söhling, A.-C. (2017). *Problemlösen und Mathematiklernen – Vom Nutzen des Probierens und des Irrtums*. Wiesbaden: Springer.

[3] Pferde-Fliegen-Aufgabe: In einem Stall werden Pferde und Fliegen gezählt. Es sind 15 Tiere. Zusammen haben sie 72 Beine. Wie viele Pferde und wie viele Fliegen sind es? (Abgeändert nach Rasch 2001, S. 195)