

**SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL DEL CAMPO
ELECTROMAGNÉTICO EN UNA Y DOS DIMENSIONES POR MEDIO DEL
MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO (FDTD)Y
APLICACIONES EN TRANFORMADORES**

Carlos Alberto Ramírez Vanegas

Código. 93299684

Director:

Yuri Alexander Poveda

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ingenierías

2018

**SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL DEL CAMPO
ELECTROMAGNÉTICO EN UNA Y DOS DIMENSIONES POR MEDIO DEL
MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO (FDTD)Y
APLICACIONES EN TRANFORMADORES**

Carlos Alberto Ramírez Vanegas

Código. 93299684

**Tesis presentada como requisito, para optar por el título de Magister en Ingeniería
Eléctrica**

Director:

Yuri Alexander Poveda

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad Ingenierías

2018

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Yuri Alexander por ayudarme a culminar este último pasó en la maestría y brindarme la oportunidad de trabajar con él en este documento, a los profesores y compañeros de la maestría. Y a la sala E244.

Dedicatoria

A Oro, a Mister Pompei mi gran apoyo e impulso

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	6
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	6
1.1 Definición del problema	6
1.2 Objetivo general.....	7
1.3 Objetivos específicos	7
2. MÉTODOS.....	8
2.1 Propagación en una dimensión (1D).....	9
2.2 Propagación considerando un medio dieléctrico con permitividad ϵr	13
2.3 Propagación considerando un medio con permeabilidad magnética μr	15
2.4 Estabilidad del método FDTD	17
2.5 Condiciones de frontera absorbentes	18
2.6 Fuentes utilizadas en la simulación	21
2.7 Formulación utilizando densidad de flujo eléctrico (D)	24
3. Propagación en dos dimensiones (2D).....	30
3.1 Modo transversal magnético (TM)	32
3.2 Modo transversal eléctrico (TE)	38
4. Condiciones de frontera absorbentes en dos dimensiones PML (Perfectly matched layer).....	49
4.1 PML en la dirección (x) componente Dz:.....	53
4.2 PML en la dirección (x) componente Hx:	55
4.3 PML en la dirección (x) componente Hy:	57
4.4 PML en la dirección (y) componente Dz:.....	59
4.5 PML en la dirección (y) componente Hx:	60
4.6 PML en la dirección (y) componente Hy:	62
3. CONCLUSIONES	83
4. REFERENCIAS	84

INTRODUCCIÓN

El uso de las ecuaciones de Maxwell es de utilidad cuando se desea conocer el valor reflejado del campo electromagnético en un punto arbitrario del espacio, el cual a su vez está restringido por la dificultad que puede presentar la geometría del problema y que por medio de los métodos tradicionales de solución de numérica por medio de ecuaciones diferenciales no es posible aportar una solución confiable, por lo que queda restringido el problema a una solución computacional. Es por ello que es de interés mencionar el uso del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo FDTD como solución computacional que permite realizar la descripción del campo electromagnético en diversas geometrías y medios. Primero se considerara el vacío como medio de propagación el cual es un medio homogéneo que no presenta características especiales relacionadas a algún tipo de material, posteriormente se presentara el modelo de las ecuaciones de maxwell para un medio dieléctrico. Para introducir las ecuaciones de maxwell en el modelo de diferencias finitas en el dominio del tiempo FDTD es necesario llevar estas a una formulación discreta para implementar el código computacional que permita estudiar el comportamiento físico del campo en una dimensión inicialmente, finalmente en el desarrollo de este artículo se mencionaran las respectivas consideraciones necesarias tales como unidades gaussianas y condiciones de frontera que se deben tener en cuenta para formular el problema completamente.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Definición del problema

La solución de las ecuaciones de maxwell por medio del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) es empleado para describir la propagación del campo electromagnético considerando diferentes tipos de medios con características y geometrías propias. El método consiste en trasladar las ecuaciones diferenciales de maxwell a una formulación discreta tanto espacial como temporalmente que permita codificarlas e implementarlas en un algoritmo que aporte una solución numérica, la cual brinde una

panorámica visual del comportamiento físico de las ondas electromagnéticas para una, dos y tres dimensiones. Las aplicaciones de este método para resolver diferentes tipos de problemas son diversas y ofrece adaptabilidad para casos en donde la geometría del problema se hace más compleja de analizar. Por lo que esta técnica brinda una herramienta capaz de ser aplicada a diversas disciplinas de la ciencia con la cual sea posible estudiar sistemas y cuantificarse los fenómenos producidos por la actividad electromagnética con éxito.

1.2 Objetivo general

Implementar el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo para solucionar ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden en fenómenos electromagnéticos.

1.3 Objetivos específicos

Revisar el estado del arte en revistas indexadas y bases de datos adscritas a la biblioteca de la Universidad Tecnológica de Pereira en lo que relaciona el método de diferencias finitas.

Solucionar ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden con el método de diferencias finitas.

Simular y aplicar el método de diferencias finitas para modelar las variables electromagnéticas en diferentes materiales para el diseño de transformadores.

Publicar y presentar los resultados obtenidos en la revista Scientia et Technica de la Universidad Tecnológica de Pereira y otras revistas indexadas, además de la participación en eventos de carácter nacional e internacional

2. MÉTODOS

El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo FDTD analiza el problema de propagación del campo electromagnético por medio de pequeñas particiones y/o celdas en espacio y tiempo, se considera que los campos eléctrico y magnético están intercalados tanto en espacio como en tiempo, para realizar la introducción del método se analizara el problema considerando la propagación del campo eléctrico y magnético en una dimensión esto es usando inicialmente $(\mathbf{E}_x, \mathbf{H}_y)$, partiendo de las ecuaciones de maxwell dependientes del tiempo y considerando como medio de propagación el espacio libre. Para llegar a la forma discreta de las ecuaciones de maxwell del campo eléctrico y magnético se aproxima la derivada espacial y temporal a su representación en diferencias finitas por medio de la definición de la derivada en diferencias centrales.

$$\frac{\partial F(Z_0)}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f\left(Z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) - f\left(Z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \quad (1)$$

Para un valor finito de Δz la ecuación diferencial se transforma en una ecuación de diferencias finitas definida en puntos contiguos a Z_0 , el método FDTD hace uso del cambio de los valores continuos de la coordenada “z” por la variable discreta “k” tal que los valores espaciales se obtienen de la ecuación $z=k*\Delta z$, en el tiempo se tendrá una forma similar de representar la forma discreta de t como $t=n*\Delta t$. La representación de la propagación en espacio y tiempo del campo electromagnético se representa gráficamente por medio de la intercalación del campo E y H en la formulación del método FDTD.

Espacio	K-1	k	k +1

Tiempo \	E	H	E
n-1 H		●	●
n E		●	●
n + 1 H			

Figura 1. Propagación del campo electromagnético para el caso en 1D.

2.1 Propagación en una dimensión (1D)

Propagación considerando como medio el vacío

De las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo que relacionan el campo eléctrico y magnético tenemos que cada una de estas son vectores en tres dimensiones pero como se mencionó anteriormente se formulara para el presente documento el modelo en una dimensión usando únicamente (\mathbf{E}_x y \mathbf{H}_y), por lo que teniendo esto presente se tiene:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (a) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (b) \quad (1)$$

De la ecuación en **(1 a)** para el campo eléctrico en una dimensión:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} H_z - \frac{d}{dz} H_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) k \quad (1.a)$$

Realizando un procedimiento similar para la ecuación **(1b)** para el campo magnético en una dimensión:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} E_z - \frac{d}{dz} E_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) k \quad (1.b)$$

Teniendo en cuenta la componente en i debido al campo E_x y la componente del campo magnético H_y para **(1 a)** se obtiene la ecuación para el campo eléctrico E_x , de forma similar para la ecuación **(1b)** teniendo en cuenta la componente en j debido al campo H_y y la componente del campo eléctrico E_x . De acuerdo a esto se obtienen las siguientes ecuaciones para el campo E_x y el campo H_y :

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} * \left(\frac{dH_y(z, t)}{dz} \right) \quad \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} * \left(\frac{dE_x(z, t)}{dz} \right) \quad (2)$$

De las ecuaciones en (2) tenemos que el campo eléctrico está orientado en la dirección x y el campo magnético en la dirección y , viajando en la dirección z el campo electromagnético, teniendo esto en cuenta y de acuerdo a la figura 1 la forma discreta para E_x y H_y es:

1. Para el campo eléctrico:

$$\frac{E_{x(k)}^{n+1/2} - E_{x(k)}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_0} * \left[\frac{H_{y(k+1/2)}^n - H_{y(k-1/2)}^n}{\Delta z} \right] \quad (3)$$

2. Para el campo magnético:

$$\frac{H_{y(k+1/2)}^{n+1} - H_{y(k+1/2)}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} * \left[\frac{E_{x(k+1)}^{n+1/2} - E_{x(k)}^{n+1/2}}{\Delta z} \right] \quad (4)$$

De las ecuaciones (3) y (4) se procede a realizar una normalización denominada “normalización gaussiana”, esto con el propósito de que los valores del campo Ex y Hy no difieran mucho en su valor en magnitud debido a la diferencia en el orden de las constantes μ_0 y ε_0 , para evitar este inconveniente se tiene el siguiente cambio de variable:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} * \mathbf{E} \quad (5)$$

De la ecuación (5) reemplazando en (3) y (4) obtenemos las siguientes expresiones normalizadas:

$$\frac{\tilde{E}_{x(k)}^{n+1/2} - \tilde{E}_{x(k)}^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{H_{y(k+1/2)}^n - H_{y(k-1/2)}^n}{\Delta z} \right] \quad (6)$$

$$\frac{H_{x(k+1/2)}^{n+1} - H_{x(k+1/2)}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{\tilde{E}_{x(k+1)}^{n+1/2} - \tilde{E}_{x(k)}^{n+1/2}}{\Delta z} \right] \quad (7)$$

En este punto es importante definir para efectos de simulación computacional el tamaño de las celdas y/o rejillas similares a las bosquejadas en la figura (1), con ello definido será posible realizar el cálculo de los pasos temporales o Δt , estas dos cantidades están relacionadas de la siguiente forma:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 * C_0} \quad (8)$$

De la ecuación (8) tenemos que $C_0=299.792.458$ (m/s) es la velocidad de la luz en el espacio libre y se ha denotado al tamaño de la celda como Δx el cual es más comúnmente usado para referirse al incremento espacial, teniendo presente que el campo electromagnético se desplaza en la dirección z en nuestro caso que hemos definido, por lo que $\Delta x = \Delta z$, con esto claro procedemos a realizar las siguientes operaciones:

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \frac{\Delta t}{\Delta x} = C_0 * \left(\frac{\left(\frac{\Delta x}{2 * C_0} \right)}{\Delta x} \right) = \frac{1}{2} \quad (9)$$

Reescribiendo las ecuaciones (6) y (7) de tal forma que se obtengan las ecuaciones en forma discreta con los valores nuevos de los campos E_x y H_y teniendo en cuenta lo obtenido en la ecuación (9):

3. Para el campo eléctrico:

$$\tilde{E}_{x(k)}^{n+1/2} = \tilde{E}_{x(k)}^{n-1/2} + \frac{1}{2} * \left[H_{y(k-1/2)}^n - H_{y(k+1/2)}^n \right] \quad (10)$$

4. Para el campo magnético:

$$H_{y(k+1/2)}^{n+1} = H_{y(k+1/2)}^n + \frac{1}{2} * \left[\tilde{E}_{x(k)}^{n+1/2} - \tilde{E}_{x(k+1)}^{n+1/2} \right] \quad (11)$$

De las ecuaciones (10) y (11) se obtiene la forma discreta necesaria para formular el problema en un código computacional, antes de ello se deben tener presente las siguientes consideraciones de acuerdo al tiempo de simulación el cual es implícito en el método FDTD por lo que los superíndices ($n+1/2$, $n-1/2$ y n , $n+1$) denotan valores previos y nuevos de

los campos E_x y H_y respectivamente, sin embargo la posición no es implícita en el método FDTD esta va ligada a las posiciones de un arreglo computacional, por ejemplo definamos un arreglo de tipo entero a de tres elementos dado por $a[3] = \{1,2,3\}$, donde la posiciones están dadas por $a[3] = \{ a[0], a[1], a[2] \}$, con esto presente se tiene que para los subíndices $(k-1/2)$ y $(k+1/2)$ se redondea a $(k-1)$ y (k) respectivamente para poder hacer posible el ingreso de estas cantidades en un arreglo computacional. De acuerdo a las consideraciones realizadas las ecuaciones en forma discreta para el campo E_x y H_y utilizadas para formular el código computacional son las siguientes:

$$E_{x(k)} = E_{x(k)} + (0.5) * (H_{y(k-1)} - H_{y(k)}) \quad (12)$$

$$H_{y(k)} = H_{y(k)} + (0.5) * (E_{x(k)} - E_{x(k+1)}) \quad (13)$$

2.2 Propagación considerando un medio dieléctrico con permitividad ϵ_r

Inicialmente se utilizó como medio de propagación el vacío o medio homogéneo, ahora se expondrán los cambios que se producen cuando se considera en el estudio de la evolución del campo en espacio y tiempo un material con una permitividad dieléctrica ϵ_r , en las ecuaciones de maxwell tendremos las siguientes modificaciones:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 * \epsilon_r} * (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (a) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (b) \quad (14)$$

De la ecuación (14a) para el campo eléctrico en un medio dieléctrico para una dimensión:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} H_z - \frac{d}{dz} H_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) k\end{aligned}$$

Realizando un procedimiento similar para la ecuación (14b) para el campo magnético en una dimensión:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} E_z - \frac{d}{dz} E_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) k\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la componente en i debido al campo E_x y la componente del campo magnético H_y para (14a) se obtiene la ecuación para el campo eléctrico E_x , de forma similar para la ecuación (14b) teniendo en cuenta la componente en j debido al campo H_y y la componente del campo eléctrico E_x . De acuerdo a esto se obtienen las siguientes ecuaciones para el campo E_x y el campo H_y :

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0 * \epsilon_r} * \left(\frac{dH_y(z, t)}{dz} \right) \quad \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} * \left(\frac{dE_x(z, t)}{dz} \right) \quad (15)$$

De las ecuaciones en (15) aplicamos la “normalización gaussiana” para que la diferencia en magnitud de los campos E_x y H_y no sea de varios órdenes de magnitud. Para ello de la ecuación (5) citada anteriormente

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * \mathbf{E}$$

De las ecuaciones en (15) aplicando la normalización gaussiana tenemos que el procedimiento que se sigue es el mismo realizado para las ecuaciones en (3) y (4) cuyo resultado está dado en las ecuaciones (6) y (7), además de seguir los procedimientos citados en las ecuaciones (8) y (9). Se debe tener en cuenta las consideraciones citadas anteriormente con respecto a las posiciones dentro de un arreglo computacional, de acuerdo a que en un arreglo las posiciones vienen dadas por ejemplo $a[3] = \{ a[0], a[1], a[2] \}$. En este caso se ha considerado un medio con permitividad dieléctrica ϵ_r con lo cual los resultados obtenidos son los siguientes:

$$E_{x(k)} = E_{x(k)} + \frac{(0.5)}{\epsilon_r} * (H_{y(k-1)} - H_{y(k)}) \quad (16)$$

$$H_{y(k)} = H_{y(k)} + (0.5) * (E_{x(k)} - E_{x(k+1)}) \quad (17)$$

2.3 Propagación considerando un medio con permeabilidad magnética μ_r

En este punto se considerara el estudio de un medio con permeabilidad magnética μ_r en el cual se obtendrán las ecuaciones para el campo eléctrico y magnético por medio del método FDTD que describan el comportamiento del campo electromagnético para el caso en estudio (Ex, Hy). para ello se realiza la formulación de las ecuaciones siguiendo los pasos descritos anteriormente.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (a) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0 * \mu_r} * (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (b) \quad (18)$$

De la ecuación (18a) para el campo eléctrico en una dimensión:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} H_z - \frac{d}{dz} H_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) k\end{aligned}$$

Realizando un procedimiento similar para la ecuación (18b) para el campo magnético en un medio con permeabilidad magnética μ_r , en una dimensión:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} E_z - \frac{d}{dz} E_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) k\end{aligned}$$

De la misma forma que en el caso de un medio con permitividad dieléctrica se tiene en cuenta la componente en i debido al campo E_x y la componente del campo magnético H_y para (18a) con lo cual se obtiene la ecuación para el campo eléctrico E_x , de forma similar para la ecuación (18b) teniendo en cuenta la componente en j debido al campo H_y y la componente del campo eléctrico E_x . De acuerdo a esto se obtienen las siguientes ecuaciones para el campo E_x y el campo H_y :

$$\frac{\partial E_x(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} * \left(\frac{dH_y(z, t)}{dz} \right) \quad \frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0 * \mu_r} * \left(\frac{dE_x(z, t)}{dz} \right) \quad (19)$$

De las ecuaciones en (19) aplicamos la “normalización gaussiana” para que la diferencia en magnitud de los campos E_x y H_y no sea de varios órdenes de magnitud. Para ello de la ecuación (5) citada anteriormente

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * \mathbf{E}$$

De las ecuaciones en (19) aplicando la normalización gaussiana tenemos que el procedimiento que se sigue es el mismo realizado para las ecuaciones en (3) y (4) cuyo resultado está dado en las ecuaciones (6) y (7), además de seguir los procedimientos citados en las ecuaciones (8) y (9). Se debe tener en cuenta las consideraciones citadas anteriormente con respecto a las posiciones dentro de un arreglo computacional, respecto a que en un arreglo las posiciones vienen dadas por ejemplo $a[3] = \{ a[0], a[1], a[2] \}$. En este caso se ha considerado un medio con permeabilidad magnética μr con lo cual los resultados obtenidos son los siguientes:

$$E_{x(k)} = E_{x(k)} + (0.5) * (H_{y(k-1)} - H_{y(k)}) \quad (20)$$

$$H_{y(k)} = H_{y(k)} + \left(\frac{0.5}{(\mu r)} \right) * (E_{x(k)} - E_{x(k+1)}) \quad (21)$$

2.4 Estabilidad del método FDTD

Una onda electromagnética necesita de un mínimo de tiempo Δt para propagarse en una rejilla en pasos discretos $\Delta x = \Delta z$, para desplazarse una distancia de una celda requiere un paso temporal de $\Delta t = \frac{\Delta x}{2 * c_0}$, si este valor se duplicara se perdería información del desplazamiento del campo en la simulación computacional, es por ello que es necesario escoger un paso temporal dado por:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{\sqrt{n} * c_0} \quad (22)$$

Donde n es la dimensión que se considere en la simulación computacional, en nuestro caso

usaremos el paso temporal dado en la ecuación (8) por sencillez en la formulación del método, el paso espacial se formula de acuerdo a la longitud de onda del campo electromagnético que se propaga en el vacío cuya expresión para calcular la longitud de onda viene dada por:

$$\lambda_0 = \frac{v}{f} \quad (23)$$

De donde:

5. (v) es la velocidad de la luz en el vacío conocida comúnmente como “ c_0 ”.
6. (f) es la frecuencia del campo electromagnético.

Por lo general el tamaño de la celda depende de muchos factores, pero en general se recomienda tomar 10 puntos por longitud de onda, esta es una consideración válida y aplicada en la teoría del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo FDTD. []

$$\Delta x = = \frac{\lambda_0}{10} \quad (24)$$

Para un medio diferente al vacío la expresión en (23) tiene la siguiente forma:

$$\lambda_m = \frac{(v/\sqrt{\epsilon_r})}{f} \quad (25)$$

Donde el cambio está dado por la inclusión de la permitividad relativa del medio (ϵ_r) en el numerador, se puede presentar el caso donde el medio sea un material ferromagnético o de características similares por lo que tendríamos en cuenta la permeabilidad magnética del medio (μ_r) en lugar de la permitividad eléctrica, finalmente para el cálculo del tamaño de la celda (Δx) la expresión se conserva. []

2.5 Condiciones de frontera absorbentes

Las condiciones de frontera absorbentes juegan un papel importante en la simulación computacional debido a que la malla y/o rejilla es limitada en espacio y una vez el campo

alcance las esquinas de esta se procura que no sean reflejadas hacia el espacio de trabajo nuevamente, de acuerdo a lo mostrado en la figura 1 los valores de campo se calculan como el promedio de los campos en puntos vecinos, el problema de tomar puntos fuera de la malla es que fuera de la misma no son conocidos los valores del campo, de tal manera que se producen valores equivocados y es por ello que es necesario ajustar el método de la siguiente manera:

$$E_x^n(1) = E_x^{n-2}(2) \quad (26)$$

Para explicar la expresión (24) consideremos un espacio computacional compuesto por 100 celdas en la cual los puntos {0 y 100} serán las esquinas del espacio computacional citado, en estos puntos no conocemos el valor del campo en el punto siguiente para el punto (100) y el que le antecede para el caso del punto (0) por que estarían ubicados fuera del espacio definido previamente, por lo que con la expresión (24) se está asignando el valor del campo en vez de calcularlo guardando el valor de $E_x(2)$ un par de pasos temporales para asignarlo luego a $E_x(1)$. Además se considera que no existen fuentes externas de campo con lo que la onda generada se propagara hacia fuera del espacio computacional sin distorsión y reflexión alguna. A continuación se ilustran los resultados obtenidos implementando las condiciones de frontera y sin estas, considerando una onda electromagnética propagándose en el vacío con un espacio computacional de 200 celdas.

- **Con condiciones de frontera, propagación inicial del campo**

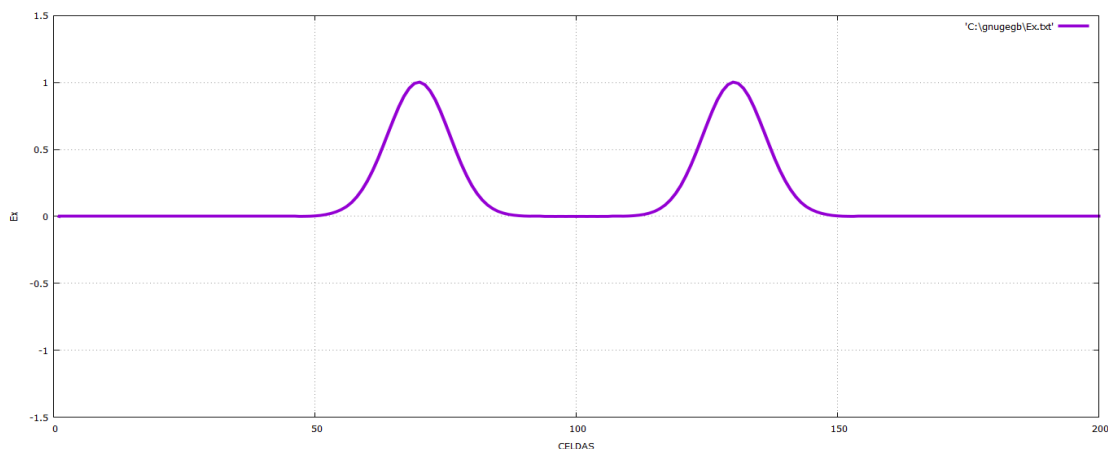


Figura 2. Campo eléctrico E_x aplicando condiciones de frontera - Tiempo=100 [s]

Espacio computacional 200 celdas.

- **Usando condiciones de frontera**

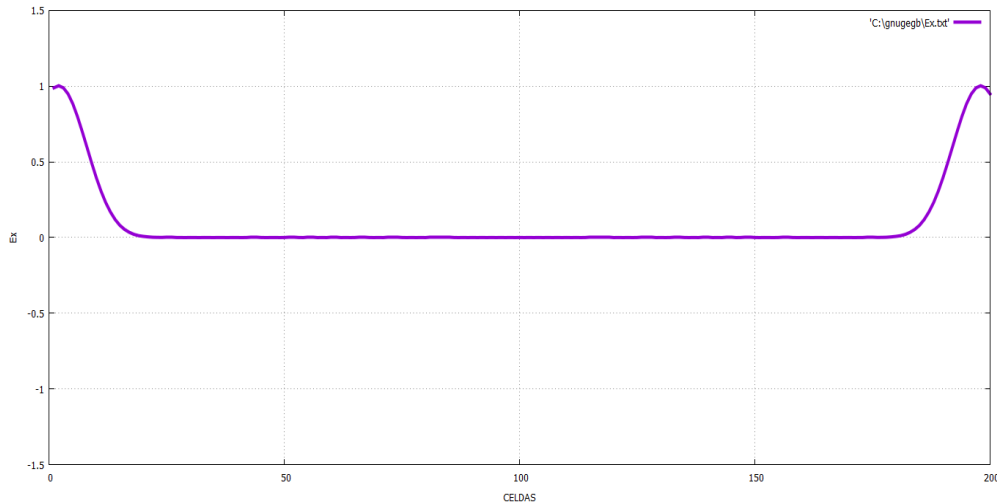


Figura 3. Campo eléctrico E_x aplicando condiciones de frontera - Tiempo=235 [s]
Espacio computacional 200 celdas.

- **Sin condiciones de frontera**

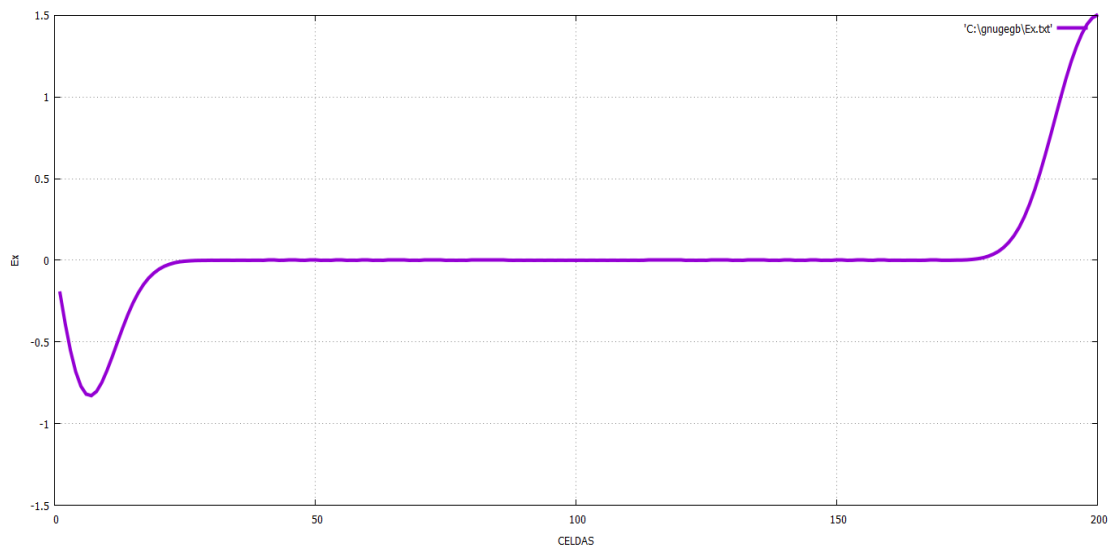


Figura 4. Campo eléctrico E_x sin condiciones de frontera – Tiempo=235 [s]
Espacio computacional 200 celdas.

- **Con condiciones de frontera para un T=500 [s]**

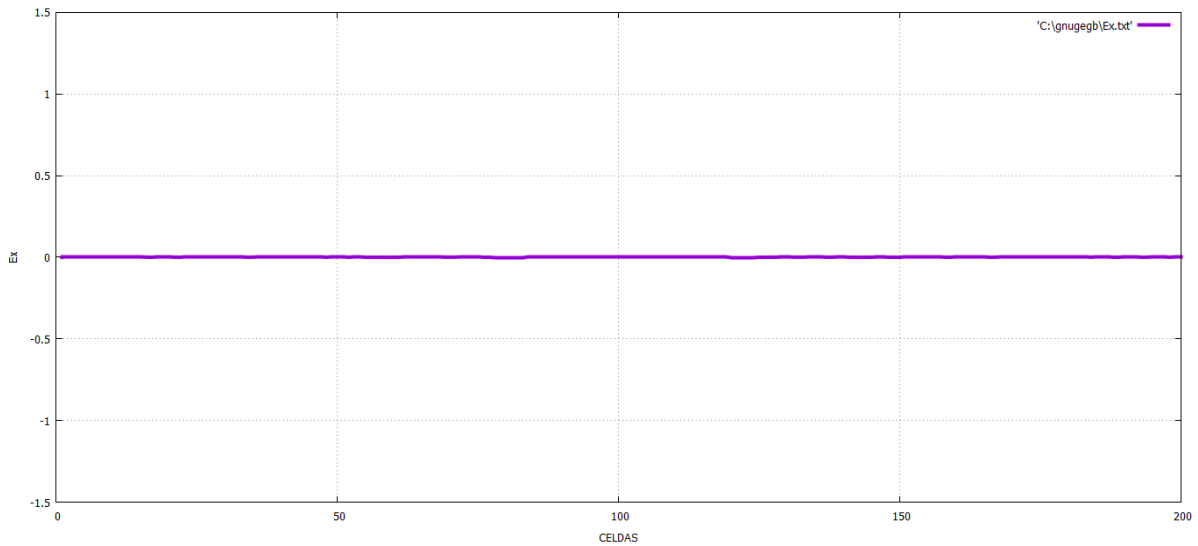


Figura 5. Campo eléctrico E_x con condiciones de frontera – Tiempo =500 [s] el campo ha traspasado el espacio computacional sin distorsión o reflexión alguna.

Espacio computacional 200 celdas.

2.6 Fuentes utilizadas en la simulación

En el desarrollo e implementación del método de diferencias finitas FDTD aplicado a la solución de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético se consideran dos formas para generar la fuente de campo electromagnético:

- La primera forma se conoce como “**pulso gaussiano**” el cual se ubica en un punto dentro del espacio computacional definido previamente y su valor es referido comúnmente al vector de campo eléctrico (E) que se haya definido en el proceso de discretización de las ecuaciones de Maxwell por el método FDTD, la ecuación de un pulso gaussiano que se utilizara para simular el campo electromagnético está definida matemáticamente de la siguiente forma:

$$E(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{0} & ; t < 0 \\ E_0 * e^{-\left(\frac{1}{2}\right) * \left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^2} & ; t > 0 \end{array} \right\} \quad (27)$$

De donde:

1. (t_0) , es el punto donde está centrado el pulso.
2. (E_0) , es la amplitud máxima del pulso.
3. (σ) , es el ancho del pulso.

La forma del campo electromagnético será similar al “pulso gaussiano” el cual lo podemos visualizar en su forma básica de esta manera:

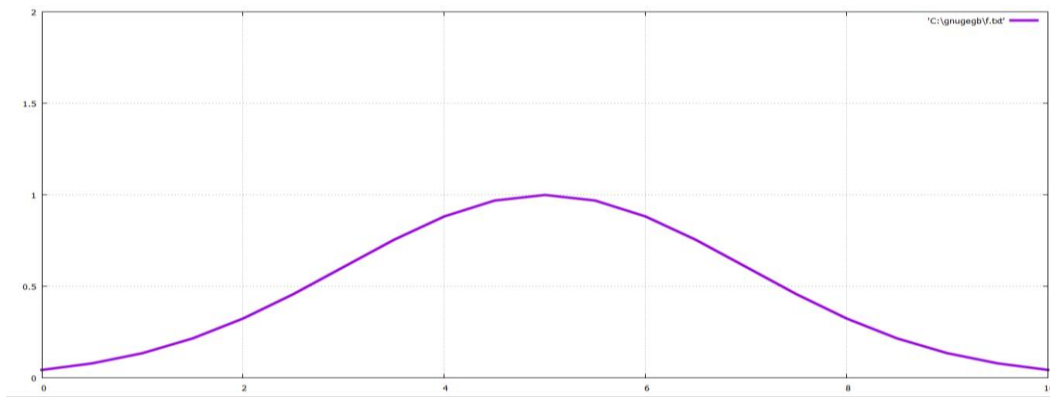


Figura 6. Ilustración de un pulso gaussiano cuyo centro está dado en $t_0=5$ con ancho de 2 y amplitud máxima de 1.

Esta condición de fuente se denomina “**hard source**” esta asigna un valor para el campo E en un punto dado del espacio computacional, por ejemplo ($x=x_0$), reemplazando los valores calculados previamente para E. Esta fuente en código computacional se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{Pulso} = \exp(-0.5 * (\text{pow}(((t_0 - n) / (\sigma)), 2))) \quad (28)$$

Donde n es el número de iteraciones que se defina en la simulación.

El valor del pulso es asignado al campo E por la siguiente forma:

$$e[x_0] = \text{pulso} \quad (29)$$

Nota: Este valor es asignado en un punto x_0 como se había citado.

- La segunda forma es usar una fuente o “**pulso sinusoidal**” en la cual el valor de la fuente es adicionado al campo E en un cierto punto y no asignado como en el caso de la fuente gaussiana o condición “**hard source**”. Matemáticamente la representación de un función sinusoidal está dada por:

$$Y(t) = \sin((2 * \pi * f) * t + \alpha) \quad (30)$$

De donde:

1. (f), es la frecuencia de la función sinusoidal.
2. (α), es el desfase de la función sinusoidal.

La forma del campo electromagnético será similar al “pulso sinusoidal” el cual lo podemos visualizar en su forma básica de esta manera:

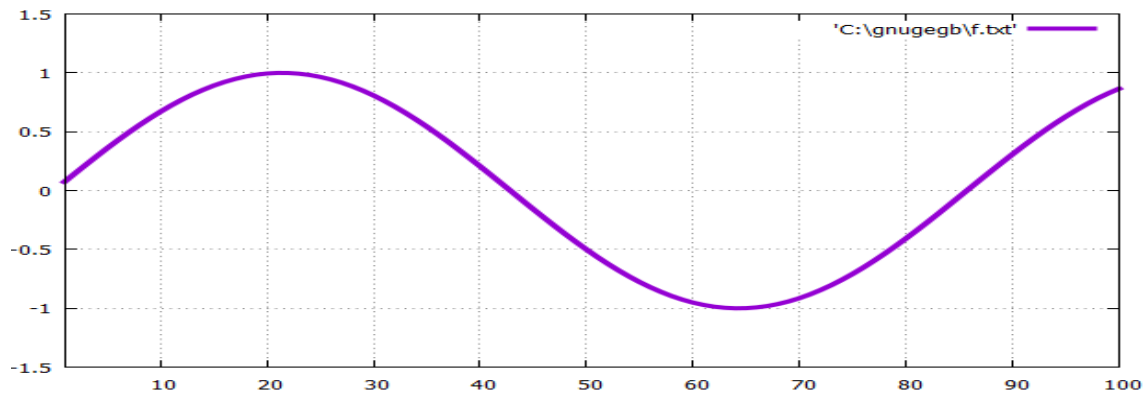


Figura 7. Ilustración básica de un pulso sinusoidal.

Esta condición de fuente se denomina “**soft source**” este valor de la fuente es adicionada a el campo E en un punto dado del espacio computacional, por ejemplo ($x=x_0$). Esta fuente en código computacional se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{Pulso} = \sin(2 * \pi * f * dt * n) \quad (31)$$

Donde n es el número de iteraciones que se defina en la simulación y dt es el paso temporal definido en la ecuación (8). El valor del pulso es asignado al campo E de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}[\mathbf{x}_o] = \mathbf{E}[\mathbf{x}_o] + \text{pulso} \quad (32)$$

Nota: Este valor es adicionado al campo E en un punto en el espacio “ x_o ” como se había citado.

2.7 Formulación utilizando densidad de flujo eléctrico (D)

En el presente capítulo se introducirá el uso del vector de densidad de flujo eléctrico (\vec{D}) como herramienta para realizar el estudio de medios dependientes de la frecuencia (ω), este término está relacionado matemáticamente con el campo eléctrico de la siguiente forma:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon} * \mathbf{E} \quad (33) \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 * \varepsilon_r \quad (33)$$

Donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el término correspondiente a la permitividad dieléctrica del medio, que tal como se ha citado puede estar relacionada con el vacío o con algún material en específico. Expresando en el dominio de la frecuencia la ecuación (33):

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_r(\omega) * \mathbf{E}(\omega) \quad (34)$$

En las ecuaciones de maxwell la introducción del vector de densidad de flujo eléctrico esta dado de acuerdo a las ecuaciones que relacionan campo eléctrico y magnético las cuales fueron citadas en la ecuación (1):

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (a) \quad ; \quad \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (b)$$

- De la ecuación en (a) tomando como referencia la expresión ($D = \epsilon_0 * E$) reemplazando el valor de E:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} * \frac{1}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

De donde se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (35)$$

Aplicando “normalización gaussiana” para el vector D por medio de la siguiente expresión:

$$\tilde{D} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 * \mu_0}} * D \quad (35.a)$$

De la ecuación (35) aplicando la expresión (35.a):

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \quad (36)$$

- De la ecuación en (b) aplicando normalización gaussiana para el vector E por medio de la siguiente expresión citada en la ecuación (5) :

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * E$$

De donde se obtiene la expresión para el vector H del campo magnético:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (37)$$

Ahora teniendo presente un medio dieléctrico con pérdidas, de la ecuación (34) la

permitividad relativa del medio $\varepsilon_r(\omega)$ en el dominio de la frecuencia se expresa de la siguiente forma:

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} \quad (38)$$

De la ecuación (38) reemplazando en la ecuación (34) en el dominio de la frecuencia que relaciona los vectores de densidad de flujo eléctrico y campo eléctrico:

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_r(\omega) * \mathbf{E}(\omega)$$

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_r * \mathbf{E}(\omega) + \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon_0} * \mathbf{E}(\omega) \quad (39)$$

La ecuación (39) esta expresada en el dominio de la frecuencia y el objetivo es expresar está en el dominio del tiempo para lo cual se tiene presente que el término $(\frac{1}{j\omega})$ representa integración en el dominio del tiempo, de donde se aplica la teoría de Fourier para el segundo término de la ecuación (39). Para el primer término de la expresión (39) se expresa normalmente en el dominio del tiempo intercambiando (ω) por (t) , la ecuación (39) en el dominio del tiempo queda expresada como:

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_r * \mathbf{E}(t) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} * \int_0^t \mathbf{E}(t) * d(t) \quad (40)$$

La expresión (40) se puede expresar en forma de sumatoria:

$$D^n = \varepsilon_r * E^n + \frac{\sigma * \Delta t}{\varepsilon_0} * \sum_{i=0}^n E^i \quad (41)$$

Dado que el término E^n se encuentra dentro de la sumatoria el cual es necesario despejar se procede a separar este de la sumatoria de la siguiente forma:

$$D^n = \varepsilon_r * E^n + \frac{\sigma * \Delta t}{\varepsilon_0} * E^n + \frac{\sigma * \Delta t}{\varepsilon_0} * \sum_{i=0}^{n-1} E^i \quad (42)$$

Para lo cual en este momento es posible calcular E^n de la siguiente forma:

$$E^n = \frac{D^n - \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} * \sum_{i=0}^{n-1} E^i}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}} \quad (43)$$

De la ecuación (43) se puede tomar atención al siguiente término al cual denotaremos como [P]:

$$P^n = \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} * \sum_{i=0}^n E^i \quad (44)$$

De donde tenemos que la ecuación (43) toma la siguiente forma:

$$E^n = \frac{D^n - P^{n-1}}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}} \quad (45)$$

Para P^n tenemos:

$$P^n = P^{n-1} + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0} * E^n \quad (46)$$

Este conjunto de ecuaciones formuladas en este capítulo nos permite aplicar estas para la solución en medios que presenten condiciones más complicadas para su análisis como lo son medios dependientes de la frecuencia (ω), para lo cual se definirán matemáticamente las ecuaciones discretizadas para los campos (E, H y D) más el vector auxiliar que se ha definido [P]. Como se ha citado anteriormente se tomarán las componentes en (\mathbf{x}) para el vector de campo eléctrico (E) y en este caso la misma componente para el vector de densidad de flujo eléctrico (D) que se ha incluido en el análisis para el estudio de diferentes medios. Para el campo magnético se tomara la componente en (\mathbf{y}) como se ha trabajado anteriormente.

- Para el campo magnético H la ecuación discretizada se calcula de la siguiente manera teniendo presente la ecuación (37) la cual es la que se encuentra a continuación:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Como se ha citado para el campo magnético H trabajaremos con la componente (y) de este para lo cual se realizan las respectivas operaciones matemáticas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} E_z - \frac{d}{dz} E_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) k \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left(\frac{dE_x(z, t)}{dz} \right)$$

Aplicando diferencias finitas centradas a la expresión anterior:

$$\frac{H_{x(k)}^{n+1} - H_{x(k)}^{n-1}}{\Delta t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{\tilde{E}_{x(k+1)}^n - \tilde{E}_{x(k-1)}^n}{\Delta z} \right]$$

$$H_{y(k)}^{n+1} = H_{y(k)}^{n-1} + \frac{1}{2} * \left[\tilde{E}_{x(k)}^n - \tilde{E}_{x(k+1)}^n \right]$$

$$H_{y(k)} = H_{y(k)} + (0.5) * (E_{x(k)} - E_{x(k+1)}) \quad (47)$$

- Para el vector de densidad de flujo eléctrico D la ecuación discretizada se calcula de la siguiente manera teniendo presente la ecuación (36) la cual es la que se encuentra a continuación:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}} * (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

Como se ha citado para el vector de densidad de flujo eléctrico D trabajaremos con la componente (x) de este para lo cual se realizan las respectivas operaciones matemáticas:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} H_z - \frac{d}{dz} H_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x(z, t)}{\partial t} &= - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}} * \left(\frac{dH_y(z, t)}{dz} \right) \\ \frac{\tilde{D}_{x(k)}^{n+1} - \tilde{D}_{x(k)}^{n-1}}{\Delta t} &= - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{H_{y(k+1)}^n - H_{y(k-1)}^n}{\Delta z} \right] \end{aligned}$$

$$\tilde{D}_{x(k)}^{n+1} = \tilde{D}_{x(k)}^{n-1} + \frac{1}{2} * \left[H_{y(k-1)}^n - H_{y(k+1)}^n \right]$$

$$D_{x(k)} = D_{x(k)} + (0.5) * (H_{y(k-1)} - H_{y(k)}) \quad [48]$$

- Para el vector auxiliar [P] la ecuación discretizada se calcula directamente de la ecuación [46]:

$$P^{n+1} = \left[\frac{\sigma * \Delta t}{\varepsilon_0} \right] * [P^{n-1} + E^n]$$

Primero se definirá el siguiente término:

$$R = \left[\frac{\sigma * \Delta t}{\epsilon_0} \right] \quad [49]$$

Reemplazando la ecuación (49) la expresión discretizada para el vector auxiliar P toma la siguiente forma:

$$P_{x(k)} = [R] * [P_{x(k)} + E_{x(k)}] \quad [50]$$

- Para el vector de campo eléctrico E la ecuación discretizada se calcula de la siguiente manera teniendo presente la ecuación (45) la cual es la que se encuentra a continuación:

$$E^n = \left[\frac{D^n - P^{n+1}}{\epsilon_r + \frac{\sigma * \Delta t}{\epsilon_0}} \right]$$

La ecuación discretizada para E se obtiene directamente de la anterior expresión definiendo primero el siguiente término que contiene los elementos del denominador al cual denotaremos por la letra [Q]:

$$Q = \left[\frac{1}{\epsilon_r + \frac{\sigma * \Delta t}{\epsilon_0}} \right] \quad [51]$$

Reemplazando la ecuación (51) la expresión discretizada para el campo E toma la siguiente forma:

$$E_{x(k)} = [Q] * [D_{x(k)} - P_{x(k)}] \quad [52]$$

3. Propagación en dos dimensiones (2D)

En el desarrollo de la implementación del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo FDTD para la solución de las ecuaciones de maxwell se tiene que para realizar la

solución numérica considerando dos dimensiones se debe tener presente los siguientes aspectos que son necesarios para la aplicación del método, estos aspectos están relacionados a que se trabaja con dos grupos de vectores los cuales son:

- Modo (TM) - El cual está formado por el grupo de vectores (E_z , H_y , H_x). En este grupo se tiene que no hay presente o es nula la componente del campo magnético en la dirección de propagación (z).
- Modo (TE) - El cual está formado por el grupo de vectores (E_x , E_y , H_z). En este grupo se tiene que no hay presente o es nula la componente del campo eléctrico en la dirección de propagación (z).

En el presente capítulo se plantearan las ecuaciones de maxwell y su solución numérica para estos dos modos los cuales a su vez representan la forma en que la energía se puede propagar a lo largo de una guía de onda satisfaciendo ciertas condiciones como lo son las condiciones de frontera las cuales se desarrollaran más adelante. Para iniciar con la solución numérica se tienen las siguientes ecuaciones las cuales fueron citadas anteriormente:

- ❖ Para la densidad de flujo eléctrico en el dominio de ω :

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_r(\omega) * \mathbf{E}(\omega)$$

- ❖ Para el vector de densidad de flujo eléctrico:

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

- ❖ Para el vector de campo magnético:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

De acuerdo a las anteriores ecuaciones se tiene la base matemática para iniciar el desarrollo de las ecuaciones para el campo electromagnético en dos dimensiones iniciando este estudio con el modo transversal magnético.

3.1 Modo transversal magnético (TM)

Como se había citado anteriormente el modo transversal magnético (TM) está compuesto por el siguiente grupo de vectores (Ez, Hy, Hx) para lo cual se desarrollara para cada una de estas componentes su respectiva ecuación. Se iniciará este estudio con la componente del campo magnético en la dirección (x) Hx:

❖ **Componente Hx** - Para realizar esta componente citaremos la ecuación para el campo magnético.

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} E_z - \frac{d}{dz} E_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) k \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{\partial H_x(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} * \left(\frac{dE_z(z, t)}{dy} \right)$$

Teniendo en cuenta el procedimiento de normalización gaussiana el cual está dado para este caso como:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * \mathbf{E}$$

La ecuación para el campo magnético en la componente x - (Hx) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial H_x(z,t)}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\mu_0 * \epsilon_0}} * \left(\frac{d\tilde{E}_z(z,t)}{dy} \right) \quad (53)$$

❖ **Componente Hy** - para realizar esta componente citaremos nuevamente la ecuación para campo magnético:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} E_z - \frac{d}{dz} E_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) k \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} * \left(\frac{dE_z(z,t)}{dx} \right)$$

Aplicando el proceso de normalización gaussiana:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * \mathbf{E}$$

La ecuación para el campo magnético en la componente y - (Hy) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial H_y(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 * \epsilon_0}} * \left(\frac{d\tilde{E}_z}{dx} \right) \quad (54)$$

❖ **Componente Ez** - para realizar esta componente citaremos la ecuación para el vector

de densidad de flujo eléctrico y con ello hecho obtendremos la ecuación para el campo E_z , tomando de la ecuación (35):

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

Realizando el rotacional para H:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} H_z - \frac{d}{dz} H_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) k \end{aligned}$$

Como tenemos que en el modo TM se trabaja con la componente en z para (E) la ecuación para D queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial D(z,t)}{\partial t} = \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) \quad (55)$$

Aplicando el procedimiento de normalización gaussiana para el vector D tomado de la ecuación (35.a):

$$\tilde{D} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 * \mu_0}} * D$$

La ecuación para el vector de densidad de flujo eléctrico D en la componente z - (Dz) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \tilde{D}_z(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) \quad (56)$$

Teniendo Dz se obtiene la forma matemática del campo eléctrico E_z definida en la ecuación (52) de la siguiente forma:

$$E_x(k) = (Q) * (D_{x(k)} - P_{x(k)})$$

En este caso tenemos que la componente del vector de densidad de flujo eléctrico esta dada en la dirección (z) de la misma forma para el vector de campo eléctrico E y el vector auxiliar P, estos términos están definidos de la siguiente forma:

❖ De la ecuación (49) y (50) respectivamente:

$$R = \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}$$

$$P_x(k) = P_x(k) + (R * E_x(k))$$

❖ El término para Q de la ecuación (51):

$$Q = \frac{1}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}}$$

De donde la expresión para el campo E queda expresada totalmente en los términos que la componen donde a su vez está el vector D. De las ecuaciones en (53), (54) y (56) se debe realizar el proceso de discretización de estas ecuaciones por medio del método de diferencias finitas centradas para con ello poder implementarlas dentro de un programa computacional que aporte una solución numérica. A continuación se desarrolla el proceso de discretización para lo cual se hace necesario describir el intercalamiento de los campos eléctrico y magnético en dos dimensiones:

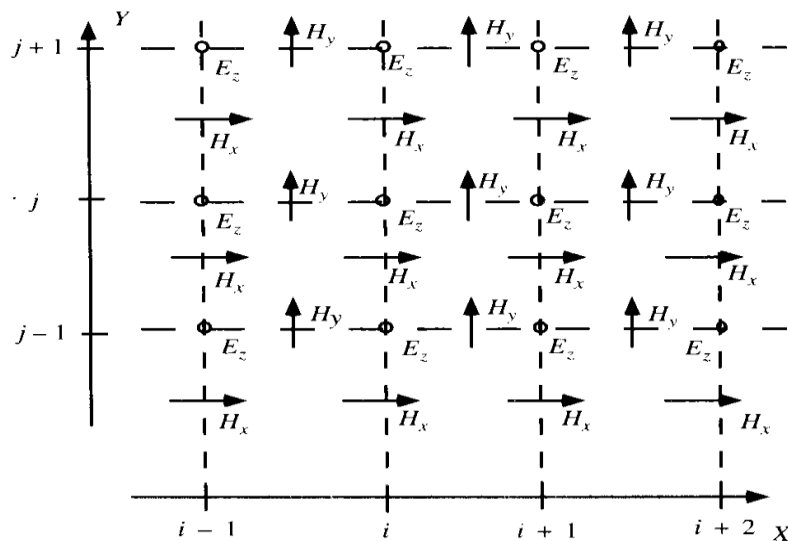


Figura 8. Celda de yee para la propagación en el modo TM en dos dimensiones.

De acuerdo a la anterior malla de puntos mejor conocida como “celda de Yee” aplicada en este caso para analizar la propagación del campo electromagnético en dos dimensiones, para lo cual se desarrolla el siguiente procedimiento matemático aplicando diferencias finitas centradas, tomando Δx como el paso espacial por convención con la expresión citada en (8)

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 * c_0} .$$

❖ **Para la componente H_x** de la ecuación (53):

$$\frac{\partial H_x(z, t)}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\mu_0 * \epsilon_0}} * \left(\frac{d\tilde{E}_z(z, t)}{dy} \right)$$

Aplicando diferencias finitas centradas:

$$\frac{H_{x(i,j)}^{n+1} - H_{x(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{\tilde{E}_{z(i,j+1)}^n - \tilde{E}_{z(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \frac{\Delta t}{\Delta x} * \left[\tilde{E}_{z(i,j-1)}^n - \tilde{E}_{z(i,j+1)}^n \right]$$

De donde se obtiene:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{2} * \left[\tilde{E}_{z(i,j)}^n - \tilde{E}_{z(i,j+1)}^n \right]$$

La forma discreta de la ecuación queda de la siguiente forma teniendo en cuenta que el tiempo es implícito en la formulación del método FDTD.

$$H_x(i)(j) = H_x(i)(j) + \frac{1}{2} * [E_z(i)(j) - E_z(i)(j+1)] \quad (57)$$

❖ **Para la componente H_y** de la ecuación (54):

$$\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 * \epsilon_0}} * \left(\frac{d\tilde{E}_z}{dx} \right)$$

Aplicando diferencias finitas centradas:

$$\frac{H_{y(i,j)}^{n+1} - H_{y(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{\tilde{E}_{z(i+1,j)}^n - \tilde{E}_{z(i-1,j)}^n}{\Delta x} \right]$$

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \frac{\Delta t}{\Delta x} * \left[\tilde{E}_{z(i+1,j)}^n - \tilde{E}_{z(i-1,j)}^n \right]$$

De donde se obtiene:

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{2} * \left[\tilde{E}_{z(i+1,j)}^n - \tilde{E}_{z(i,j)}^n \right]$$

La forma discreta de la ecuación queda de la siguiente forma teniendo en cuenta nuevamente que el tiempo es implícito en la formulación del método FDTD.

$$H_y(i)(j) = H_y(i)(j) + \frac{1}{2} * [E_z(i+1)(j) - E_z(i)(j)] \quad (58)$$

❖ **Para la componente Dz - (Ez)** de la ecuación (56):

$$\frac{\partial \tilde{D}_z(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left(\frac{d}{dx} Hy - \frac{d}{dy} Hx \right)$$

Aplicando diferencias finitas centradas:

$$\frac{\tilde{D}_{z(i,j)}^{n+1} - \tilde{D}_{z(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{x(i,j+1)}^n - H_{x(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

Teniendo en cuenta que como se ha citado por convención el paso temporal esta expresado como $\Delta t = \frac{\Delta x}{2 * c_0}$, por lo que de la anterior expresión para el vector (D) dada en diferencias finitas el término Δy se toma como un Δx por cuestiones de notación, con esto presente se procede a realizar las siguientes operaciones:

$$\tilde{D}_{z(i,j)}^{n+1} = \tilde{D}_{z(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \frac{\Delta t}{\Delta x} * \left[\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{x(i,j+1)}^n - H_{x(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

De donde se obtiene:

$$\tilde{D}_{z(i,j)}^{n+1} = \tilde{D}_{z(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{2} * \left[\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{x(i,j+1)}^n - H_{x(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

La forma discreta de la ecuación queda de la siguiente forma teniendo en cuenta nuevamente que el tiempo es implícito en la formulación del método FDTD.

$$Dz(i)(j) = Dz(i)(j) + \frac{1}{2} * [Hy(i)(j) - Hy(i-1)(j) - Hx(i)(j) + Hx(i)(j-1)] \quad (59)$$

Con Dz definido es posible expresar matemáticamente la expresión para el vector para el campo eléctrico Ez teniendo en cuenta la expresión (52).

$$Ez(i)(j) = Q * [Dz(i)(j) - P(i)(j)] \quad (60)$$

3.2 Modo transversal eléctrico (TE)

Como se había citado anteriormente el modo transversal eléctrico (TE) está compuesto por el siguiente grupo de vectores (Ex, Ey, Hz). Para lo cual se desarrollara para cada una de estas componentes su respectiva ecuación. Se iniciará este estudio con la componente del campo eléctrico en la dirección (x) Ex:

- **Componente Ex** - para realizar esta componente citaremos la ecuación para el vector de densidad de flujo eléctrico y con ello hecho obtendremos la ecuación para el campo Ex, tomando de la ecuación (35):

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

Realizando el rotacional para H:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} H_z - \frac{d}{dz} H_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) k$$

Teniendo en cuenta que tenemos para este caso la componente del campo eléctrico E de nuestro interés está dada en la dirección (x) de acuerdo al conjunto de vectores del modo TE, realizamos las siguientes operaciones matemáticas

$$\frac{\partial D_x(z,t)}{\partial t} = \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right)$$

Aplicando el procedimiento de normalización gaussiana para el vector D tomado de la ecuación (35.a), además de tener en consideración que la componente del campo magnético en la dirección (y) es nula para este caso debido a que no está contenida en el grupo de vectores del modo TE:

$$\tilde{D} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 * \mu_0}} * D$$

La ecuación para el vector de densidad de flujo eléctrico D en la componente x - (Dx) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \tilde{D}_x(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left(\frac{d}{dy} H_z \right) \quad (61)$$

Teniendo Dx se obtiene la forma matemática del campo eléctrico Ex definida en la ecuación (52) de la siguiente forma:

$$E_{x(k)} = (Q) * (D_{x(k)} - P_{x(k)})$$

En este caso tenemos que la componente del vector de densidad de flujo eléctrico está dada en la dirección (x) de la misma forma para el vector de campo eléctrico E y el vector auxiliar P, estos términos están definidos de la siguiente forma:

❖ De la ecuación (49) y (50) respectivamente:

$$R = \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}$$

$$P_x(k) = P_x(k) + (R * E_x(k))$$

❖ El término para Q de la ecuación (51):

$$Q = \frac{1}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}}$$

De donde la expresión para el campo E queda expresada totalmente en los términos que la componen donde a su vez está el vector D.

- **Componente Ey** - para realizar este vector citaremos la ecuación para el vector de densidad de flujo eléctrico y con ello hecho obtendremos la ecuación para el campo Ey, tomando de la ecuación (35):

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

Realizando el rotacional para H:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} H_z - \frac{d}{dz} H_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) k \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que tenemos para este caso la componente del campo eléctrico E de nuestro interés está dada en la dirección (y) de acuerdo al conjunto de vectores del modo TE, realizamos las siguientes operaciones matemáticas:

$$\frac{\partial Dy(z,t)}{\partial t} = -\left(\frac{d}{dx}Hz - \frac{d}{dz}Hx\right)$$

Aplicando el procedimiento de normalización gaussiana para el vector D tomado de la ecuación (35.a), además de tener en consideración que la componente del campo magnético en la dirección (x) es nula para este caso debido a que no está contenida en el grupo de vectores del modo TE:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 * \mu_0}} * \mathbf{D}$$

La ecuación para el vector de densidad de flujo eléctrico D en la componente y - (Dy) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \tilde{D}_y(z,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left(\frac{d}{dx}Hz\right) \quad (62)$$

Teniendo Dy se obtiene la forma matemática del campo eléctrico Ey definida en la ecuación (52) de la siguiente forma:

$$E_{x(k)} = (Q) * (D_{x(k)} - P_{x(k)})$$

En este caso tenemos que la componente del vector de densidad de flujo eléctrico está dada en la dirección (y) de la misma forma para el vector de campo eléctrico E y el vector auxiliar P, estos términos están definidos de la siguiente forma:

❖ De la ecuación (49) y (50) respectivamente:

$$R = \frac{\sigma * \Delta t}{\epsilon_0}$$

$$P_{x(k)} = P_{x(k)} + (R * E_{x(k)})$$

❖ El término para Q de la ecuación (51):

$$Q = \frac{1}{\epsilon_r + \frac{\sigma \Delta t}{\epsilon_0}}$$

De donde la expresión para el campo E queda expresada totalmente en los términos que la componen donde a su vez está el vector D.

❖ **Componente Hz** - Para realizar esta componente citaremos la ecuación para el campo magnético.

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} * (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

Realizando el rotacional para E:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} E_z - \frac{d}{dz} E_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) k \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$\frac{\partial H_z(z,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} * \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right)$$

Teniendo en cuenta el procedimiento de normalización gaussiana el cual está dado para este caso como:

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * E$$

La ecuación para el campo magnético en la componente z- (Hz) queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial H_z(z,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\mu_0 * \epsilon_0}} * \left(\frac{d}{dx} \tilde{E}_y - \frac{d}{dy} \tilde{E}_x \right) \quad (63)$$

A continuación se realizara el proceso de discretización de las ecuaciones (61), (62) y (63) por medio del método de diferencias finitas centradas para con ello poder implementarlas dentro de un programa computacional que aporte una solución numérica

❖ **Para la componente $D_x - (E_x)$ de la ecuación (61):**

$$\frac{\partial \tilde{D}_x(z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left(\frac{d}{dy} H_z \right)$$

Aplicando diferencias finitas centradas:

$$\frac{\tilde{D}_{x(i,j)}^{n+1} - \tilde{D}_{x(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{H_z^n(i, j+1) - H_z^n(i, j-1)}{\Delta y} \right]$$

$$\tilde{D}_{x(i,j)}^{n+1} = \tilde{D}_{x(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \frac{\Delta t}{\Delta x} * [H_z^n(i, j+1) - H_z^n(i, j-1)]$$

De donde se obtiene:

$$\tilde{D}_{x(i,j)}^{n+1} = \tilde{D}_{x(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{2} * [H_z^n(i, j+1) - H_z^n(i, j-1)]$$

La forma discreta de la ecuación queda de la siguiente forma teniendo en cuenta nuevamente que el tiempo es implícito en la formulación del método FDTD.

$$D_x(i)(j) = D_x(i)(j) + \frac{1}{2} * [H_z(i)(j) - H_z(i)(j-1)] \quad (64)$$

Con D_x definido es posible expresar matemáticamente la expresión para el vector de campo eléctrico E_x teniendo en cuenta la expresión (52).

$$E_x(i)(j) = Q * [D_x(i)(j) - P_x(i)(j)] \quad (65)$$

❖ **Para la componente $D_y - (E_y)$ de la ecuación (62):**

$$\frac{\partial \tilde{D}_y(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left(\frac{d}{dx} H_z \right)$$

Aplicando diferencias finitas centradas:

$$\frac{\tilde{D}_{y(i,j)}^{n+1} - \tilde{D}_{y(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{H_z^n(i+1, j) - H_z^n(i-1, j)}{\Delta x} \right]$$

$$\tilde{D}_{y(i,j)}^{n+1} = \tilde{D}_{y(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \frac{\Delta t}{\Delta x} * [H_z^n(i-1, j) - H_z^n(i+1, j)]$$

De donde se obtiene:

$$\tilde{D}_{y(i,j)}^{n+1} = \tilde{D}_{y(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{2} * [H_{z(i-1,j)}^n - H_{z(i+1,j)}^n]$$

La forma discreta de la ecuación queda de la siguiente forma teniendo en cuenta nuevamente que el tiempo es implícito en la formulación del método FDTD.

$$Dy(i)(j) = Dy(i)(j) + \frac{1}{2} * [Hz(i)(j) - Hz(i+1)(j)] \quad (66)$$

Con Dy definido es posible expresar matemáticamente la expresión para el vector de campo eléctrico Ey teniendo en cuenta la expresión (52).

$$Ey(i)(j) = Q * [Dy(i)(j) - Py(i)(j)] \quad (67)$$

❖ **Para la componente Hz** de la ecuación (63):

$$\frac{\partial Hz(z,t)}{\partial t} = - \frac{1}{\sqrt{\mu_0 * \epsilon_0}} * \left(\frac{d}{dx} \tilde{E}_y - \frac{d}{dy} \tilde{E}_x \right)$$

Aplicando diferencias finitas centradas:

$$\frac{H_{z(i,j)}^{n+1} - H_{z(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{\tilde{E}_{y(i+1,j)}^n - \tilde{E}_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{\tilde{E}_{x(i,j+1)}^n - \tilde{E}_{x(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

$$H_{z(i,j)}^{n+1} = H_{z(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \frac{\Delta t}{\Delta x} * \left[-\tilde{E}_{y(i+1,j)}^n + \tilde{E}_{y(i-1,j)}^n + \tilde{E}_{x(i,j+1)}^n - \tilde{E}_{x(i,j-1)}^n \right]$$

De donde se obtiene:

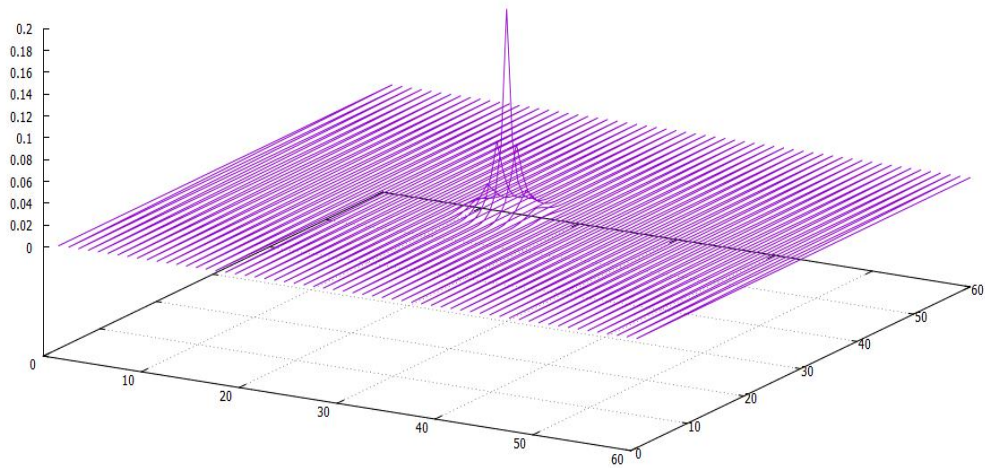
$$H_{z(i,j)}^{n+1} = H_{z(i,j)}^{n-1} + \frac{1}{2} * \left[-\tilde{E}_{y(i+1,j)}^n + \tilde{E}_{y(i-1,j)}^n + \tilde{E}_{x(i,j+1)}^n - \tilde{E}_{x(i,j-1)}^n \right]$$

La forma discreta de la ecuación queda de la siguiente forma teniendo en cuenta nuevamente que el tiempo es implícito en la formulación del método FDTD.

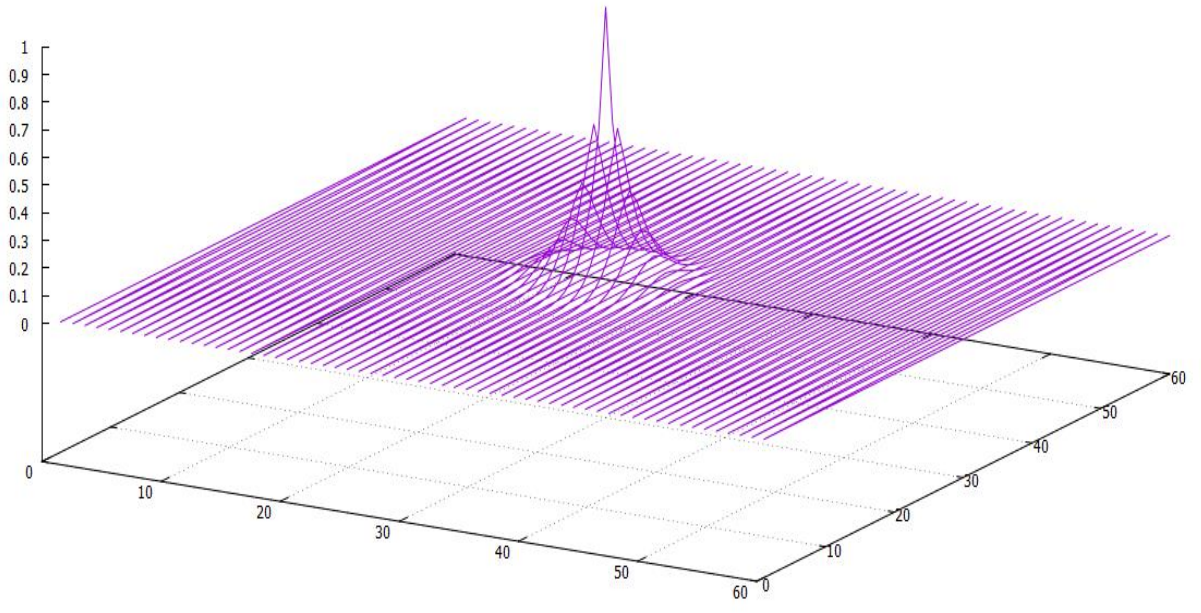
$$H_z(i)(j) = H_z(i)(j) + \frac{1}{2} * [-E_y(i)(j) + E_y(i-1)(j) + E_x(i)(j+1) - E_x(i)(j)] \quad (68)$$

Gráficas campo eléctrico en dirección z (Ez) en dos dimensiones

Modo transverso magnético (TM) sin condiciones de frontera absorbentes.

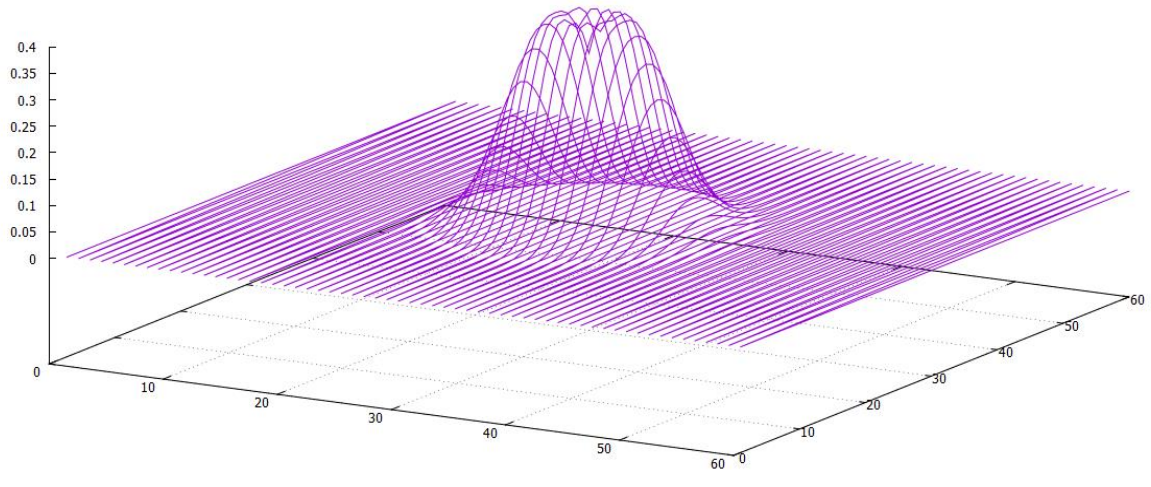


Campo Ez , para T= 10 s

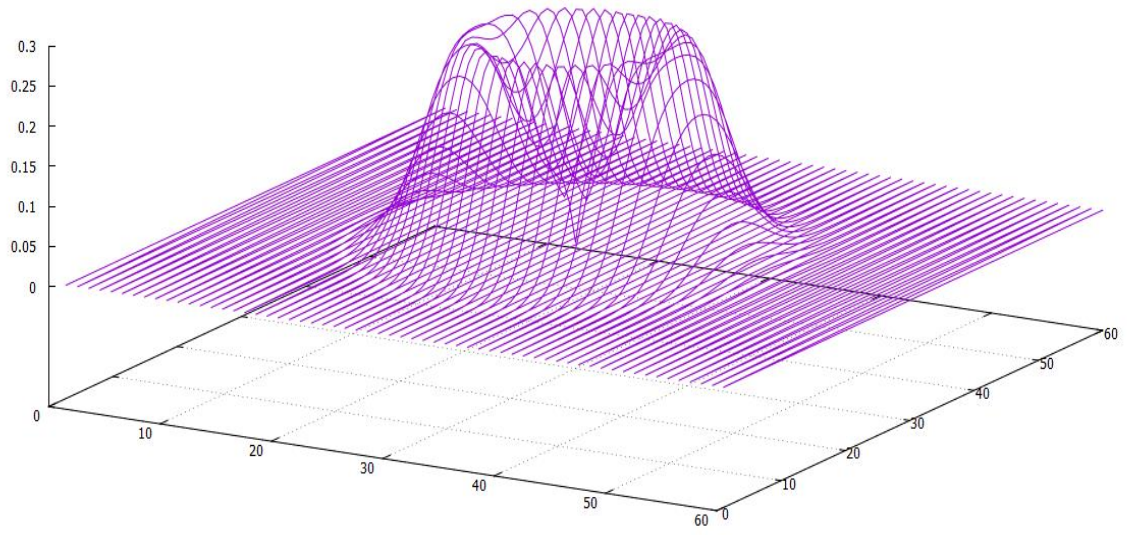


Campo Ez, para T= 20 s

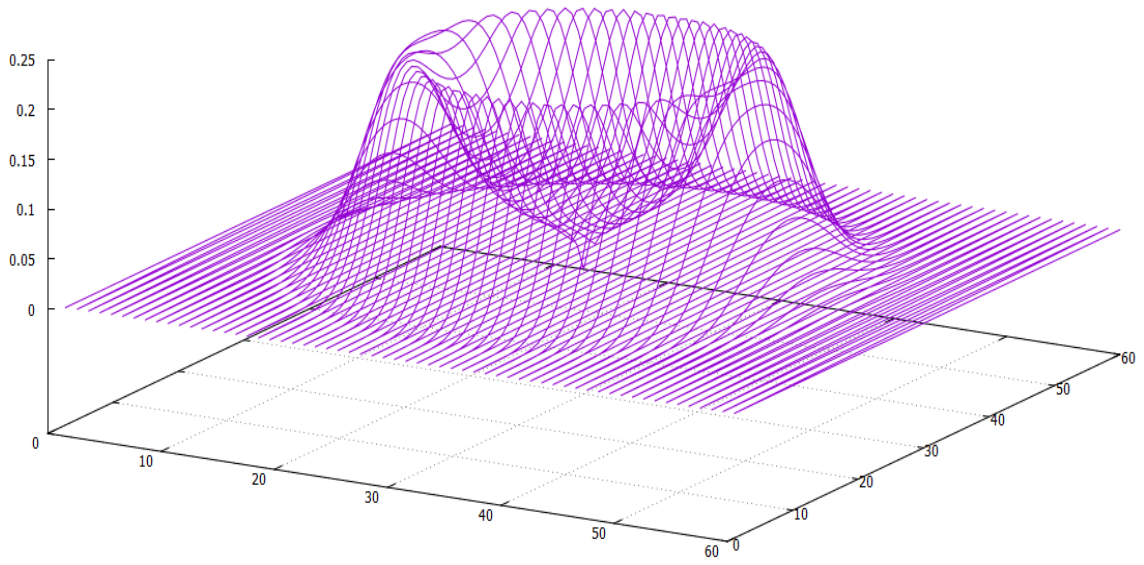
...



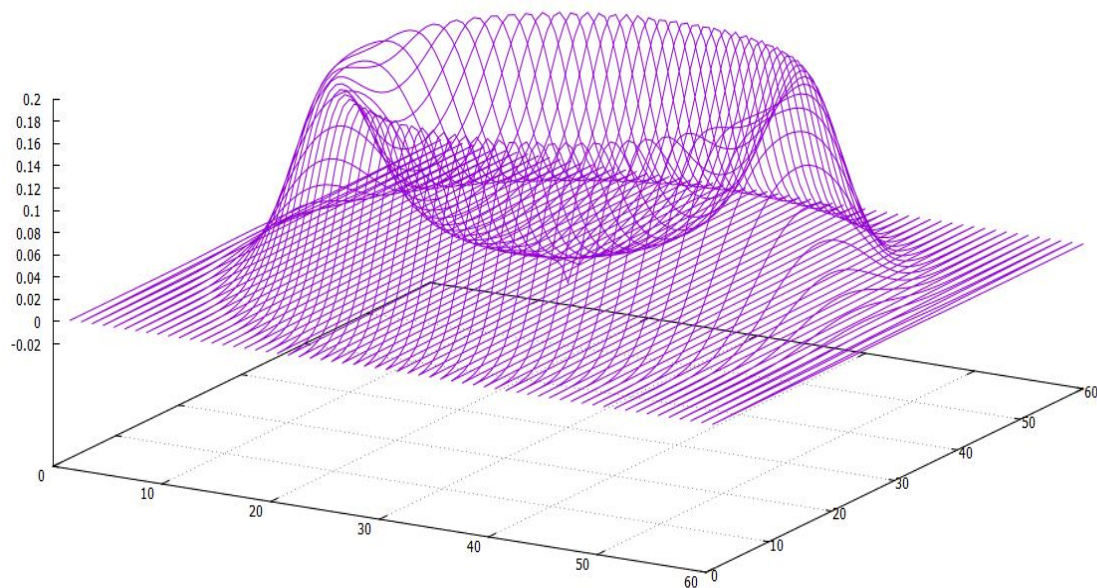
Campo Ez, para T= 30 s



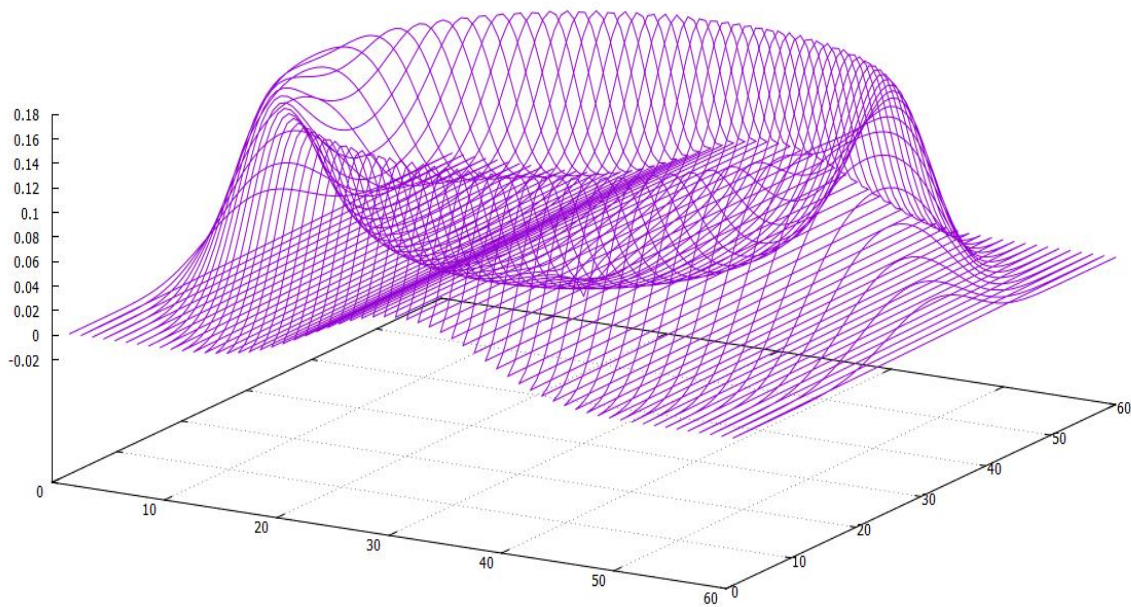
Campo E_z , para $T=40$ s



Campo E_z , para $T=50$ s



Campo E_z , para $T=60$ s



Campo E_z , para $T=70$ s

4. Condiciones de frontera absorbentes en dos dimensiones PML (Perfectly matched layer)

La necesidad por la cual es útil implementar las condiciones de frontera absorbentes en los extremos del espacio computacional viene dada por las ondas que se propagan hacia los límites del espacio definido al llegar al final de este provocan reflexiones hacia el interior de la región de interés lo cual no es conveniente debido a que generan valores numéricos incorrectos en la simulación de la propagación de la onda electromagnética, lo cual es indeseado para efectos de estudio y obtención de resultados en la zona de análisis. En primer lugar se propone la aplicación de las condiciones de frontera absorbentes (PML) para el caso del modo de transmisión transversal magnético (TM) para lo cual se aplicara la metodología necesaria para diseñar el modelo matemático que permita la atenuación de las ondas electromagnéticas al llegar al final de la zona computacional definida. Para el modo de transmisión transversal eléctrico (TE) se sigue un procedimiento similar, el cual no será desarrollado en este documento pero para el cual se seguiría los mismos pasos que el que se sigue aquí para el modo de transmisión transversal magnético (TM).

Para iniciar este estudio se parte de la consideración en la cual se tiene en cuenta que esta técnica se basa en el diseño de capas que permiten la absorción de las ondas electromagnéticas que inciden sobre las mismas, esta absorción se lleva a cabo generando pérdidas de manera independiente en cada una de las componentes del campo involucradas en el caso de estudio, el cual está ligado a los modos de propagación citados en este documento, modo (TM) o modo (TE).

La idea básica considera que la onda viaja en un medio el cual lo podemos denominar medio A y esta traspasa de este medio a otro medio B, por lo que la cantidad de onda reflejada está determinada por la impedancia intrínseca de los dos medios representada matemáticamente como:

$$\Gamma = \frac{\eta_A - \eta_B}{\eta_A + \eta_B} \quad [69]$$

La impedancia intrínseca está determinada matemáticamente por la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética de la siguiente forma:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad [70]$$

De donde si se presenta cambio en el valor de ϵ al traspasar desde el medio A hasta el medio B se presentara que una parte del pulso se reflejara y esta reflexión estará dada por la expresión [69] teniendo presente que la permeabilidad magnética sea constante. Ahora si se presenta que la permeabilidad magnética cambia en conjunto con la permitividad dieléctrica la cantidad de onda reflejada [69] podría ser cero y no habría reflexión alguna. Lo que se pretende es tener un medio que presente pérdidas para que una vez la el pulso llegue al final de espacio computacional y se encuentre en la frontera de los dos medios se atenué totalmente. Esto se puede lograr si se define en forma compleja tanto la permitividad eléctrica como la permeabilidad magnética debido a que la parte compleja es la que hace posible que se presenten pérdidas que haga posible la atenuación del pulso. En este punto es necesario citar las ecuaciones obtenidas en el estudio del modo de propagación de onda TM en donde se tienen las componentes (Dz, Hx y Hy).

- ❖ De la ecuación [34] Para la densidad de flujo eléctrico en el dominio de ω :

$$\mathbf{D}(\omega) = \epsilon_r(\omega) * \mathbf{E}(\omega)$$

- ❖ De la ecuación [56] para el vector de densidad de flujo eléctrico:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}_z(z, t)}{\partial t} = C_0 * \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right)$$

- ❖ De la ecuación [53] para el campo magnético en la dirección x Hx:

$$\frac{\partial H_x(z, t)}{\partial t} = - C_0 * \left(\frac{d \tilde{\mathbf{E}}_z}{dy} \right)$$

- ❖ De la ecuación [54] para el campo magnético en la dirección y Hy:

$$\frac{\partial H_y(z, t)}{\partial t} = C_0 * \left(\frac{d \tilde{\mathbf{E}}_z}{dx} \right)$$

Teniendo presente que la derivada temporal equivale en el dominio en frecuencia a:

$$\frac{d}{dt} = j\omega$$

Y en donde se ha normalizado las expresiones para el vector de densidad de campo eléctrico y de la misma forma para las expresiones del campo magnético, las cuales han sido presentadas en detalle en capítulos anteriores. Para continuar con el diseño de las capas absorbentes se hace necesario citar que es necesario definir permitividades y permeabilidades ficticias en las direcciones (i , j) para cada una de las componentes citadas anteriormente en el modo TM (Dz, Hy, Hx), para lo cual se hace necesario realizar el siguiente cambio en las ecuaciones para el vector de densidad de campo eléctrico y para las componentes de campo magnético.

❖ Para el vector de densidad de flujo eléctrico Dz:

$$j\omega * Dz * \varepsilon_{Fz}^x * \varepsilon_{Fz}^y = Co * \left(\frac{d}{dx} Hy - \frac{d}{dy} Hx \right) \quad [71]$$

❖ Para el vector de campo magnético Hx:

$$j\omega * Hx * \mu_{Fx}^x * \mu_{Fx}^y = - Co * \left(\frac{d\tilde{E}z}{dy} \right) \quad [72]$$

❖ Para el vector de campo magnético Hy:

$$j\omega * Hy * \mu_{Fy}^x * \mu_{Fy}^y = Co * \left(\frac{d\tilde{E}z}{dx} \right) \quad [73]$$

❖ Para el vector de densidad de flujo eléctrico en el dominio de ω :

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon_r(\omega) * \mathbf{E}(\omega)$$

Para esta ecuación no se añade ninguna permitividad ficticia ya que esta expresión identifica el medio en el cual se está propagando el pulso electromagnético. Ahora se citaran dos condiciones necesarias para formar las capas absorbentes (PML).

1. La impedancia vista desde la región de interés a la PML debe ser constante y está definida como:

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{Fx}^*}{\epsilon_{Fx}^*}} = 1 \quad [74]$$

Nota: 1 debido a que se tienen unidades normalizadas, las cuales han sido expuestas en capítulos anteriores.

2. En la dirección perpendicular a la frontera, por ejemplo en la dirección (x), la constante dieléctrica relativa y la permeabilidad magnética deben ser inversas a las mismas en otras direcciones.

$$\epsilon_{Fx}^* = \frac{1}{\epsilon_{Fy}^*} \quad [75]$$

$$\mu_{Fx}^* = \frac{1}{\mu_{Fy}^*} \quad [76]$$

Ahora para cada una de estos términos en las expresiones [75] y [76] que representan las permitividades y permeabilidades ficticias necesarias para el diseño de las capas absorbentes, se tiene presente que estos se asumen en forma compleja de la siguiente forma:

$$\epsilon_{Fm}^* = \epsilon_{Fm} + \frac{\sigma_{Dm}}{j\omega\epsilon_0} \quad [77]$$

$$\mu_{Fm}^* = \mu_{Fm} + \frac{\sigma_{Hm}}{j\omega\mu_0} \quad [78]$$

Nota: En donde m puede ser para x ó y.

Ahora se tiene que la selección de los siguientes parámetros satisface las ecuaciones [75] y [76] de la siguiente forma:

$$\epsilon_{Fm} = \mu_{Fm} = 1 \quad [79]$$

De donde:

$$\frac{\sigma_{Dm}}{\epsilon_0} = \frac{\mu_{Hm}}{\mu_0} = \frac{\sigma_D}{\epsilon_0} \quad [80]$$

Evaluando las expresiones [77], [78] y [79] en la expresión [74] se obtiene:

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{Fx}^*}{\epsilon_{Fx}^*}} = 1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\epsilon_0}}{1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\epsilon_0}}} \quad [81]$$

De donde el valor del término σ representa las pérdidas del medio ficticio que se ha creado con las capas absorbentes (PML) y cuya finalidad como se ha citado es atenuar los pulsos electromagnéticos, para el caso de modo de propagación TM serán las componentes (Dz, Hx y Hy). El diseño de las capas absorbentes se realiza en las dos dimensiones de trabajo (x , y) por lo que se realiza primero el diseño en la dirección (x) y luego en la dirección (y), finalmente reunir los resultados en una sola expresión que contenga el diseño de las capas absorbentes del pulso electromagnético en las direcciones citadas y para cada componente de campo del modo TM. En este punto se iniciara la implementación de las capas absorbentes iniciando este procedimiento en la dirección (x).

Es preciso citar nuevamente las expresiones en [71], [72] y [73] teniendo en cuenta en este momento que se hace uso solamente de los términos de las componentes ficticias (permitividad eléctrica y permeabilidad magnética) referentes a la dirección (x).

$$j\omega * Dz * \epsilon_{Fz}^x = Co * \left(\frac{d}{dx} Hy - \frac{d}{dy} Hx \right) \quad [82]$$

$$j\omega * Hx * \mu_{Fx}^x = - Co * \left(\frac{d\tilde{Ez}}{dy} \right) \quad [83]$$

$$j\omega * Hy * \mu_{Fy}^x = Co * \left(\frac{d\tilde{Ez}}{dx} \right) \quad [84]$$

Partiendo de estas tres ecuaciones, se realizan las operaciones matemáticas necesarias para resolver numéricamente estas tres ecuaciones.

4.1 PML en la dirección (x) componente Dz:

De la ecuación [82] tomando el término de la izquierda y reemplazando el valor de ϵ_{Fz}^x por $\left[1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\epsilon_0}\right]$:

$$j\omega * Dz * \left[1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\epsilon_0}\right] = j\omega * Dz + \frac{\sigma(x)}{\epsilon_0} * Dz$$

Aplicando diferencias finitas centradas a la anterior expresión de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt}D_z + \frac{\sigma(x)}{\varepsilon_0}D_z = \frac{D_z^{n+1} - D_z^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{\varepsilon_0} * \left[\frac{D_z^{n+1} - D_z^{n-1}}{2} \right]$$

Ahora resolviendo la parte derecha de la ecuación [82] aplicando diferencias finitas centradas:

$$C_0 * \left(\frac{d}{dx}Hy - \frac{d}{dy}Hx \right) = C_0 * \left[\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{y(i,j+1)}^n - H_{y(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

Igualando la parte izquierda y derecha de la ecuación [82] habiendo ya aplicado diferencias finitas centradas a cada una de estas partes obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{D_z^{n+1} - D_z^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{\varepsilon_0} * \left[\frac{D_z^{n+1} + D_z^{n-1}}{2} \right] = C_0 * \left[\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{y(i,j+1)}^n - H_{y(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right] \quad [85]$$

De la expresión [85] factorizando lo términos de la parte izquierda correspondientes al vector de densidad de flujo eléctrico de la siguiente forma:

$$D_z^{n+1} \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2*\varepsilon_0} \right] - D_z^{n-1} \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma(x)}{2*\varepsilon_0} \right] = C_0 * \left[\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{y(i,j+1)}^n - H_{y(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

Despejando D_z^{n+1} y factorizando el término $\frac{1}{\Delta t}$ de $\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2*\varepsilon_0} \right]$:

$$D_z^{n+1} = D_z^{n-1} * \frac{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2*\varepsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma(x)}{2*\varepsilon_0} \right]} + \frac{\left[\frac{C_0}{\Delta x} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2*\varepsilon_0} \right]} * [H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{y(i,j+1)}^n + H_{y(i,j-1)}^n]$$

Se obtiene la siguiente expresión la cual tiene la siguiente forma:

$$D_z^{n+1} = D_z^{n-1} * \frac{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0}} \right]}{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0}} \right]} + \frac{1}{2 * \left[1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0} \right]} * [H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{y(i,j+1)}^n + H_{y(i,j-1)}^n]$$

De donde el término $\frac{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0}} \right]}{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0}}{1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0}} \right]}$ se denotara por la letra [a] y el segundo término $\frac{1}{\left[1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2*\varepsilon_0} \right]}$

por la letra [b], con lo cual la expresión final tendrá la siguiente forma:

$$D_z^{n+1} = D_z^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * [H_y^n_{(i+1,j)} - H_y^n_{(i-1,j)} - H_y^n_{(i,j+1)} + H_y^n_{(i,j-1)}] \quad [85]$$

4.2 PML en la dirección (x) componente Hx:

Ahora se procederá a realizar el diseño de la capa absorbente en la dirección (x) para la componente Hx partiendo de la expresión [83].

$$j\omega * H_x * \mu_{Fx}^x = -Co * \left[\frac{d\tilde{E}_z}{dy} \right]$$

De la ecuación [83] tomando el término de la izquierda y reemplazando el valor de μ_{Fx}^x por $\left[1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\epsilon_0} \right]^{-1}$:

$$j\omega * H_x * \left[1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\epsilon_0} \right]^{-1} = -Co * \left[\frac{d\tilde{E}_z}{dy} \right]$$

Reorganizando la anterior expresión nos queda como:

$$j\omega * H_x = -Co * \left[\frac{d\tilde{E}_z}{dy} \right] * \left[1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\epsilon_0} \right]$$

Tomando la parte derecha e izquierda de la anterior expresión y expresando de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} H_x = -Co * \left[\frac{d\tilde{E}_z}{dy} + \frac{\sigma(x)}{j\omega\epsilon_0} * \frac{d\tilde{E}_z}{dy} \right]$$

Aplicando diferencias finitas centradas a ambos lados de la anterior expresión:

$$\begin{aligned} & \frac{H_x^{n+1} - H_x^{n-1}}{\Delta t} \\ &= -Co * \left[\frac{E_z^n_{(i,j+1)} - E_z^n_{(i,j-1)}}{\Delta y} + \left[\frac{\sigma(x)}{\epsilon_0} \right] * \sum_{n=0}^T \frac{E_z^n_{(i,j+1)} - E_z^n_{(i,j-1)}}{\Delta y} * \Delta t \right] \end{aligned}$$

Despejando el término H_x^{n+1} y tomando el diferencial de longitud (Δy) como (Δx), esto por notación como se ha citado en capítulos anteriores:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} - [Co * \Delta t] * \left[\frac{E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n}{\Delta x} + \left[\frac{\sigma(x)}{\epsilon_0} \right] * \sum_{n=0}^T \frac{E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n}{\Delta x} * \Delta t \right]$$

[86]

De la anterior expresión definiremos los siguientes términos los cuales permitirán expresar esta en una forma más compacta, el primer término que definiremos será el siguiente:

- ❖ Curl_e, representa matemáticamente la circulación del campo eléctrico en un medio en específico, está relacionado a la siguiente expresión en la cual se produce un desplazamiento en la dirección (y = j), por lo cual lo nombraremos como curl_e_y.

$$\text{curl}_e_y = E_{z(i,j-1)}^n - E_{z(i,j+1)}^n \quad \mathbf{[87]}$$

- El segundo término está relacionado a los obtenidos de las operaciones matemáticas necesarias para obtener la expresión final, de las expresiones [44] y [46] respectivamente citadas en un capítulo anterior se tiene lo siguiente:

De la expresión [44] se tiene el siguiente término el cual presenta una sumatoria desde cero hasta un valor entero (n).

$$P^n = \left[\frac{\sigma * \Delta t}{\epsilon_0} \right] * \sum_{i=0}^n E^i$$

En la expresión [46] se tiene la sumatoria expandida.

$$P^n = \left[\frac{\sigma * \Delta t}{\epsilon_0} \right] * [P^{n-1} + E^n]$$

Las anteriores dos expresiones nos brindan una ayuda para ilustrar la forma que toma el término que comprende la sumatoria en la expresión [86], el cual posee una sumatoria del (- curl_e) desde cero hasta un valor constante (T). De la expresión [86] podemos realizarle las siguientes modificaciones para expresarla de la siguiente forma:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} - \left[- \left[\frac{Co * \Delta t}{\Delta x} \right] * \text{curl}_e_y - \left[\frac{\sigma(x) * \Delta t}{\epsilon_0} \right] * \left[\frac{Co * \Delta t}{\Delta x} \right] * \sum_{n=0}^T \text{curl}_e_y \right]$$

De la anterior expresión tenemos que el término $\left[\frac{Co*\Delta t}{\Delta x}\right]$ es igual a $\left[\frac{1}{2}\right]$ teniendo presente que la delta temporal o el paso temporal corresponde a $\left[\Delta t = \frac{\Delta x}{2*Co}\right]$. Aplicando igualmente la expansión de la sumatoria ilustrada por la expresión [46] y factorizando los signos negativos de la parte derecha obtenemos la expresión final para la capa absorbente en la dirección (x) para la componente Hx.

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl}_- e_y * \left[\frac{1}{2} \right] + I H_{x(i,j)}^{n-1} + \left[\frac{\sigma(x) * \Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \text{curl}_- e_y \right]$$

Donde el término $\left[I H_{x(i,j)}^{n+1} = I H_{x(i,j)}^{n-1} + \text{curl}_- e_y \right]$ es análogo al citado por la expresión [46]. finalmente la anterior expresión nos queda de la siguiente forma:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl}_- e_y * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{x(i,j)}^{n+1} \right] \right] \quad [88]$$

4.3 PML en la dirección (x) componente Hy:

Ahora se procederá a realizar el diseño de la capa absorbente en la dirección (x) para la componente Hy partiendo de la expresión [84].

$$j\omega * Hy * \mu_{Fy}^x = Co * \left[\frac{d\tilde{Ez}}{dx} \right]$$

Reemplazando el término μ_{Fy}^x por $\left[1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\varepsilon_0} \right]$ la expresión [84] nos queda como:

$$j\omega * Hy * \left[1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\varepsilon_0} \right] = Co * \left[\frac{d\tilde{Ez}}{dx} \right]$$

Tomando la parte izquierda de la anterior expresión y formulando de la siguiente forma:

$$\left[j\omega * Hy + \frac{\sigma(x)}{\epsilon_0} * Hy \right] * = Co * \left[\frac{d\tilde{Ez}}{dx} \right]$$

Organizando términos nos queda como:

$$\left[\frac{d}{dt} Hy + \frac{\sigma(x)}{\epsilon_0} * Hy \right] = Co * \left[\frac{d\tilde{Ez}}{dx} \right]$$

Aplicando diferencias finitas centradas a ambos lados de la anterior expresión:

$$\frac{Hy_{(i,j)}^{n+1} - Hy_{(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{\epsilon_0} * \left[\frac{Hy_{(i,j)}^{n+1} + Hy_{(i,j)}^{n-1}}{2} \right] = Co * \left[\frac{Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n}{\Delta x} \right]$$

Factorizando términos comunes en la parte izquierda de la anterior expresión:

$$Hy_{(i,j)}^{n+1} * \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \right] - Hy_{(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \right] = Co * \left[\frac{Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n}{\Delta x} \right]$$

Despejando el término $Hy_{(i,j)}^{n+1}$ y factorizando el término $\frac{1}{\Delta t}$ de $\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \right]$:

$$Hy_{(i,j)}^{n+1} = Hy_{(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \right]} \right] + \left[\frac{\left[\frac{Co}{\Delta x} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \right]} \right] * \left[Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n \right]$$

De donde se obtiene:

$$Hy_{(i,j)}^{n+1} = Hy_{(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0}}{\left[1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0} \right]} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \right]} \right] + \left[\frac{1}{\left[2 \left[1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0} \right] \right]} \right] * \left[Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n \right]$$

Finalmente se obtiene la siguiente expresión:

$$Hy_{(i,j)}^{n+1} = Hy_{(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0}}{\left[1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0} \right]} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \right]} \right] + \left[\frac{1}{\left[2 \left[1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0} \right] \right]} \right] * \left[0.5 \right] * \left[Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n \right]$$

De donde el término $\frac{\left[1 - \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0} \right]}{\left[1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0} \right]}$ se denotara por la letra [a] y el segundo término $\frac{1}{\left[2 \left[1 + \frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\epsilon_0} \right] \right]}$

por la letra [b] como se había citado anteriormente, con lo cual la expresión final tendrá la siguiente forma:

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[E_{z(i+1,j)}^n - E_{z(i-1,j)}^n \right] \quad [89]$$

Es preciso citar nuevamente las expresiones en [71], [72] y [73] teniendo en cuenta en este momento que se hace uso solamente de los términos de las componentes ficticias (permitividad eléctrica y permeabilidad magnética) referentes a la dirección (y).

$$j\omega * Dz * \varepsilon_{Fz}^y = Co * \left(\frac{d}{dx} Hy - \frac{d}{dy} Hx \right) \quad [90]$$

$$j\omega * Hx * \mu_{Fx}^y = -Co * \left(\frac{d\tilde{Ez}}{dy} \right) \quad [91]$$

$$j\omega * Hy * \mu_{Fy}^y = Co * \left(\frac{d\tilde{Ez}}{dx} \right) \quad [92]$$

Partiendo de estas tres ecuaciones, se realizan las operaciones matemáticas necesarias para resolver numéricamente estas tres ecuaciones.

4.4 PML en la dirección (y) componente Dz:

De la ecuación [89] tomando el término de la izquierda y reemplazando el valor de ε_{Fz}^y por $\left[1 + \frac{\sigma(y)}{j\omega\varepsilon_0} \right]$:

$$j\omega * Dz * \left[1 + \frac{\sigma(y)}{j\omega\varepsilon_0} \right] = Co * \left[\frac{d}{dx} Hy - \frac{d}{dy} Hx \right]$$

Tomando de la anterior expresión el término de la izquierda y formulando de la siguiente forma:

$$\left[j\omega * Dz + \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_0} * Dz \right] = Co * \left[\frac{d}{dx} Hy - \frac{d}{dy} Hx \right]$$

Expresando esta de la siguiente manera, para aplicar posteriormente diferencias finitas

centradas: $\left[\frac{d}{dt} Dz + \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_0} * Dz \right] = Co * \left[\frac{d}{dx} Hy - \frac{d}{dy} Hx \right]$

$$\frac{D_{z(i,j)}^{n+1} - D_{z(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\sigma(y)}{\varepsilon_0} * \left[\frac{D_{z(i,j)}^{n+1} + D_{z(i,j)}^{n-1}}{2} \right] = C_0 * \left[\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{x(i,j+1)}^n - H_{x(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

Tomando la parte izquierda de la anterior expresión y factorizando términos de la siguiente forma:

$$D_{z(i,j)}^{n+1} * \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(y)}{2\varepsilon_0} \right] - D_{z(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma(y)}{2\varepsilon_0} \right] = C_0 * \left[\frac{H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n}{\Delta x} - \frac{H_{x(i,j+1)}^n - H_{x(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

Despejando el término $D_{z(i,j)}^{n+1}$:

$$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{\left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma(y)}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(y)}{2\varepsilon_0} \right]} \right] + \left[\frac{\left[\frac{C_0}{\Delta x} \right]}{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(y)}{2\varepsilon_0} \right]} \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{x(i,j+1)}^n + H_{x(i,j-1)}^n \right]$$

De la anterior expresión factorizando el término $\left[\frac{1}{\Delta t} \right]$ nos queda de la siguiente forma:

$$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{\left[1 - \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right]} \right] + \left[\frac{1}{\left[1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right]} \right] * \left[0.5 \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{x(i,j+1)}^n + H_{x(i,j-1)}^n \right]$$

De donde el término $\frac{\left[1 - \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right]}{\left[1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right]}$ se denotara por la letra [c] y el segundo término $\frac{1}{\left[1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right]}$

por la letra [d], con lo cual la expresión final tendrá la siguiente forma:

$$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * [c] + [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{x(i,j+1)}^n + H_{x(i,j-1)}^n \right] \quad [93]$$

4.5 PML en la dirección (y) componente Hx:

De la ecuación [90] tomando el término de la izquierda y reemplazando el valor de μ_{Fx}^y por

$$\left[1 + \frac{\sigma(y)}{j\omega\varepsilon_0} \right]:$$

$$j\omega * H_x * \mu_{Fx}^y = - C_o * \left[\frac{d\tilde{E}_z}{dy} \right]$$

Reemplazando el valor de μ_{Fx}^y :

$$j\omega * H_x * \left[1 + \frac{\sigma(y)}{j\omega\epsilon_0} \right] = - C_o * \left[\frac{d\tilde{E}_z}{dy} \right]$$

Tomando de la anterior expresión el término de la izquierda y formulando de la siguiente forma:

$$\left[j\omega * H_x + \frac{\sigma(y)}{\epsilon_0} * H_x \right] = - C_o * \left[\frac{d\tilde{E}_z}{dy} \right]$$

Expresando esta de la siguiente manera, para aplicar posteriormente diferencias finitas centradas:

$$\left[\frac{dH_x}{dt} + \frac{\sigma(y)}{\epsilon_0} * H_x \right] = - C_o * \left[\frac{d\tilde{E}_z}{dy} \right]$$

$$\frac{H_{x(i,j)}^{n+1} - H_{x(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\sigma(y)}{\epsilon_0} * \left[\frac{H_{x(i,j)}^{n+1} + H_{x(i,j)}^{n-1}}{2} \right] = - C_o * \left[\frac{E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

Tomando la parte izquierda de la anterior expresión y factorizando términos de la siguiente forma:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} * \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma(y)}{2\epsilon_0} \right] - H_{x(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma(y)}{2\epsilon_0} \right] = - C_o * \left[\frac{E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n}{\Delta y} \right]$$

Despejando el término $H_{x(i,j)}^{n+1}$ y tomando el término ($\Delta x = \Delta y$) la expresión queda de la siguiente forma:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(y)}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]}{\left[\frac{1 + \frac{\sigma(y)}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]} \right] - \left[\frac{\left[\frac{Co}{\Delta x} \right]}{\left[\frac{1 + \frac{\sigma(y)}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]} \right] * \left[E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n \right]$$

Factorizando el término $\frac{1}{\Delta t}$ de $\left[\frac{1 + \frac{\sigma(x)}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]$:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * \left[\frac{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0}}{\left[\frac{1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]} \right]}{\left[\frac{1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]} \right] - \left[\frac{1}{\left[\frac{1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]} \right] * [0.5] \left[E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n \right]$$

De donde el término $\frac{\left[\frac{1 - \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0}}{\left[\frac{1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]} \right]}{\left[\frac{1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]}$ se denoto anteriormente por la letra [c] y el segundo término

$\frac{1}{\left[\frac{1 + \frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0}}{\Delta t} \right]}$ por la letra [d], con lo cual la expresión final tendrá la siguiente forma:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * [c] - [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n \right] \quad [94]$$

4.6 PML en la dirección (y) componente Hy:

De la ecuación [91] tomando el término de la izquierda y reemplazando el valor de μ_{Fy}^y por $\left[1 + \frac{\sigma(y)}{j\omega\varepsilon_0} \right]$:

$$j\omega * Hy * \mu_{Fy}^y = Co * \left[\frac{d\tilde{E}z}{dx} \right]$$

La anterior expresión queda como:

$$j\omega * Hy * \left[1 + \frac{\sigma(y)}{j\omega\varepsilon_0} \right]^{-1} = Co * \left[\frac{d\tilde{E}z}{dx} \right]$$

De la ecuación [91] tomando el término de la izquierda y reemplazando el valor de μ_{Fx}^x por $\left[1 + \frac{\sigma(x)}{j\omega\varepsilon_0} \right]^{-1}$:

$$j\omega * Hy * \left[1 + \frac{\sigma(y)}{j\omega\epsilon_0}\right]^{-1} = Co * \left[\frac{d\tilde{E}z}{dx}\right]$$

Reorganizando la anterior expresión nos queda como:

$$j\omega * Hy = Co * \left[\frac{d\tilde{E}z}{dx}\right] * \left[1 + \frac{\sigma(y)}{j\omega\epsilon_0}\right]$$

Tomando la parte derecha e izquierda de la anterior expresión y expresando de la siguiente manera:

$$\frac{dHy}{dt} = Co * \left[\frac{d\tilde{E}z}{dx} + \frac{\sigma(y)}{j\omega\epsilon_0} * \frac{d\tilde{E}z}{dx}\right]$$

Aplicando diferencias finitas centradas a ambos lados de la anterior expresión:

$$\frac{Hy_{(i,j)}^{n+1} - Hy_{(i,j)}^{n-1}}{\Delta t} = Co * \left[\frac{Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n}{\Delta x} + \left[\frac{\sigma(y)}{\epsilon_0}\right] * \sum_{n=0}^T \frac{Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n}{\Delta x} * \Delta t\right]$$

Despejando el término $Hy_{(i,j)}^{n+1}$ y tomando el diferencial de longitud (Δy) como (Δx), esto por notación como se ha citado en capítulos anteriores:

$$Hy_{(i,j)}^{n+1} = Hy_{(i,j)}^{n-1} + [Co * \Delta t] * \left[\frac{Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n}{\Delta x} + \left[\frac{\sigma(y)}{\epsilon_0}\right] * \sum_{n=0}^T \frac{Ez_{(i+1,j)}^n - Ez_{(i-1,j)}^n}{\Delta x} * \Delta t\right]$$

[95]

De la anterior expresión definiremos los siguientes términos los cuales permitirán expresar esta en una forma más compacta, el primer término que definiremos será el siguiente:

5. Curl_e, representa matemáticamente la circulación del campo eléctrico en un medio en específico, está relacionado a la siguiente expresión en la cual se produce un desplazamiento en la dirección ($x = i$), por lo cual lo nombraremos como curl_e_x.

$$\text{curl}_x e_x = E_{z(i+1,j)}^n - E_{z(i-1,j)}^n \quad [96]$$

- ❖ El segundo término está relacionado a los obtenidos de las operaciones matemáticas necesarias para obtener la expresión final, de las expresiones [44] y [46]
- ❖ respectivamente citadas en un capítulo anterior se tiene lo siguiente:

De la expresión [44] se tiene el siguiente término el cual presenta una sumatoria desde cero hasta un valor entero (n).

$$P^n = \left[\frac{\sigma * \Delta t}{\epsilon_0} \right] * \sum_{i=0}^n E^i$$

En la expresión [46] se tiene la sumatoria expandida.

$$P^n = \left[\frac{\sigma * \Delta t}{\epsilon_0} \right] * [P^{n-1} + E^n]$$

Las anteriores dos expresiones nos brindan una ayuda para ilustrar la forma que toma el término que comprende la sumatoria en la expresión [86], el cual posee una sumatoria del (-curl_x e) desde cero hasta un valor constante (T). De la expresión [86] podemos realizarle las siguientes modificaciones para expresarla de la siguiente forma:

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl}_x e_x * \left[\frac{Co * \Delta t}{\Delta x} \right] + \left[\frac{\sigma(y) * \Delta t}{\epsilon_0} \right] * \left[\frac{Co * \Delta t}{\Delta x} \right] * \sum_{n=0}^T \text{curl}_x e_x \right]$$

De la anterior expresión tenemos que el término $\left[\frac{Co * \Delta t}{\Delta x} \right]$ es igual a $\left[\frac{1}{2} \right]$ teniendo presente que la delta temporal o el paso temporal corresponde a $\left[\Delta t = \frac{\Delta x}{2 * Co} \right]$. Aplicando igualmente la expansión de la sumatoria ilustrada por la expresión [46] obtenemos la expresión final para la capa absorbente en la dirección (y) para la componente Hy.

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl}_x e_x * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(y) * \Delta t}{2\epsilon_0} \right] * \left[I H_{x(i,j)}^{n-1} + \text{curl}_x e_x \right] \right]$$

Donde el término $\left[I H_{y(i,j)}^{n+1} = I H_{y(i,j)}^{n-1} + \text{curl}_- e_x \right]$ es análogo al citado por la expresión [46]. Finalmente la anterior expresión nos queda de la siguiente forma:

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl}_- e_x * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{y(i,j)}^{n+1} \right] \right] \quad [97]$$

En este punto es importante citar la totalidad de las expresiones obtenidas en el diseño de las capas absorbentes (PML) en las direcciones (x) y (y) para las componentes en el modo de propagación transversa magnético TM, para ello se expondrán este conjunto de expresiones en la siguiente tabla anexa.

Componente	Dirección PML	Ecuación (Expresión)
Dz	PML [x]	$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{y(i,j+1)}^n + H_{y(i,j-1)}^n \right] \quad [85]$
	PML [y]	$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * [c] + [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{x(i,j+1)}^n + H_{x(i,j-1)}^n \right] \quad [93]$
Hx	PML [x]	$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl}_- e_y * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{x(i,j)}^{n+1} \right] \right] \quad [88]$
	PML [y]	$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * [c] - [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n \right] \quad [94]$
Hy	PML [x]	$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[E_{z(i+1,j)}^n - E_{z(i-1,j)}^n \right] \quad [89]$
	PML [y]	$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl}_- e_x * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{y(i,j)}^{n+1} \right] \right] \quad [97]$

Tabla.

Teniendo tabulados los resultados obtenidos del diseño de las capas absorbentes (PML), para cada componente se debe obtener una expresión general que contenga matemáticamente las capas absorbentes en las direcciones (x) y (y) conjuntamente. Para ello se formularan estas expresiones y posteriormente se dispondrá a tabularlas.

Componente Dz - expresión general:

Para la componente Dz se tiene que para formar la expresión general que una las capas tanto en la dirección (x) como en (y) se toman los resultados obtenidos en las ecuaciones [85] y [93] de la siguiente manera:

$$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{y(i,j+1)}^n + H_{y(i,j-1)}^n \right] \quad [85]^*$$

$$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * [c] + [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{x(i,j+1)}^n + H_{x(i,j-1)}^n \right] \quad [93]^*$$

De las anteriores expresiones seleccionamos los términos que acompañan a:

- $D_{z(i,j)}^{n-1}$
- $\left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{y(i,j+1)}^n + H_{y(i,j-1)}^n \right]$

Donde finalmente obtenemos la siguiente expresión:

$$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * [a][c] + [b][d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{x(i,j+1)}^n + H_{x(i,j-1)}^n \right] \quad [98]$$

De la expresión [98] tenemos que a partir de esta podemos resolver el problema de la propagación del pulso electromagnético teniendo en cuenta las capas absorbentes modelan un medio con pérdidas y que permiten a su vez que una vez el pulso llegue a la frontera del espacio computacional no se produzcan reflexiones hacia el interior del mismo.

Componente Hx - expresión general:

Para la componente Hx se tiene que para formar la expresión general que una las capas tanto en la dirección (x) como en (y) se toman los resultados obtenidos en las ecuaciones [88] y [94] respectivamente.

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl}_y * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{x(i,j)}^{n+1} \right] \right] \quad [88]^*$$

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * [c] - [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n \right] \quad [94]^*$$

A partir de las anteriores expresiones citadas se obtiene lo siguiente:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * [c] - [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n \right] + \text{curl}_y * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{x(i,j)}^{n+1} \right]$$

El término $\left[E_{z(i,j+1)}^n - E_{z(i,j-1)}^n \right]$ corresponde a $[-\text{curl}_y]$ por lo que la expresión queda de la siguiente forma:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * [c] + [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \text{curl}_y + \text{curl}_y * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{x(i,j)}^{n+1} \right]$$

De las anteriores expresiones seleccionamos los términos que acompañan a:

- $H_{x(i,j)}^{n-1}$
- curl_y
- $I H_{x(i,j)}^{n+1}$

Con lo cual obtenemos:

$$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * [c] + [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \text{curl_}e_y + \left[\frac{\sigma(x)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{x(i,j)}^{n+1} \right] \quad [99]$$

La anterior expresión [99] nos permite tener conjuntamente las capas absorbentes en las direcciones (x) y (y) para la componente Hx, para que una vez se llegue al final del espacio computacional no se produzcan reflexiones hacia el interior de la zona de trabajo tal cual como se citó para la componente Dz.

Componente Hy - expresión general:

Para la componente Hy se tiene que para formar la expresión general que una las capas tanto en la dirección (x) como en (y) se toman los resultados obtenidos en las ecuaciones [89] y [97] respectivamente.

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[E_{z(i+1,j)}^n - E_{z(i-1,j)}^n \right] \quad [89]^*$$

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} + \left[\text{curl_}e_x * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{y(i,j)}^{n+1} \right] \right] \quad [97]^*$$

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[E_{z(i+1,j)}^n - E_{z(i-1,j)}^n \right] + \left[\text{curl_}e_x * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{y(i,j)}^{n+1} \right] \right]$$

El término $\left[E_{z(i+1,j)}^n - E_{z(i-1,j)}^n \right]$ corresponde a $\left[\text{curl_}e_x \right]$ por lo que la expresión queda de la siguiente forma:

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \text{curl_}e_x + \text{curl_}e_x * \left[\frac{1}{2} \right] + \left[\frac{\sigma(y)*\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] * \left[I H_{y(i,j)}^{n+1} \right]$$

De las anteriores expresiones seleccionamos los términos que acompañan a:

- $H_{x(i,j)}^{n-1}$
- curl_{e_x}
- $I H_{y(i,j)}^{n+1}$

Con lo cual obtenemos:

$$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \text{curl}_{e_x} + \left[\frac{\sigma(y) * \Delta t}{2\epsilon_0} \right] * [I H_{y(i,j)}^{n+1}] \quad [100]$$

En este punto es preciso citar las expresiones finales que se han obtenido para cada una de las componentes en el modo de propagación transversal magnético TM, las cuales combinan las dos direcciones que se han mencionado a lo largo de este capítulo en el cual se ha desarrollado el comportamiento de la propagación del campo electromagnético en dos dimensiones ($x = i$), ($y = j$). A continuación se anexa la siguiente tabla que contiene las expresiones finales citadas.

Componente	Ecuación (Expresión) – Final
Dz	$D_{z(i,j)}^{n+1} = D_{z(i,j)}^{n-1} * [a][c] + [b][d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \left[H_{y(i+1,j)}^n - H_{y(i-1,j)}^n - H_{x(i,j+1)}^n + H_{x(i,j-1)}^n \right] \quad [98]$
Hx	$H_{x(i,j)}^{n+1} = H_{x(i,j)}^{n-1} * [c] + [d] * \left[\frac{1}{2} \right] * \text{curl}_{e_y} + \left[\frac{\sigma(x) * \Delta t}{2\epsilon_0} \right] * [I H_{x(i,j)}^{n+1}] \quad [99]$
Hy	$H_{y(i,j)}^{n+1} = H_{y(i,j)}^{n-1} * [a] + [b] * \left[\frac{1}{2} \right] * \text{curl}_{e_x} + \left[\frac{\sigma(y) * \Delta t}{2\epsilon_0} \right] * [I H_{y(i,j)}^{n+1}] \quad [100]$

Tabla.

Se han definido términos asociados al diseño de las capas absorbentes (PML) los cuales los hemos denominado por las letras [a, b, c y d], a continuación anexaremos estos términos en la siguiente tabla.

Término	Expresión
a	$\left[\frac{1 - \frac{\sigma(x) * \Delta t}{2 * \epsilon_0}}{1 + \frac{\sigma(x) * \Delta t}{2 * \epsilon_0}} \right]$
b	$\left[\frac{1}{1 + \frac{\sigma(x) * \Delta t}{2 * \epsilon_0}} \right]$
c	$\left[\frac{1 - \frac{\sigma(y) * \Delta t}{2 * \epsilon_0}}{1 + \frac{\sigma(y) * \Delta t}{2 * \epsilon_0}} \right]$
d	$\left[\frac{1}{1 + \frac{\sigma(y) * \Delta t}{2 * \epsilon_0}} \right]$

Tabla.

A continuación es preciso citar algunas condiciones para terminar de formular el diseño de las capas absorbentes (PML), para ello se va a definir el siguiente término el cual está relacionado a los términos [a, b, c y d] las cuales fueron definidas en la tabla anterior y hacen parte de las expresiones que definen las componentes que hacen parte del modo de propagación transversal magnético TM. A continuación se muestra el siguiente desarrollo:

$$Kn = \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon_0} \quad [101]$$

Donde Kn está dado en forma general y hace parte de las constantes citadas. Teniendo esto presente se tiene que los términos [a, b, c y d] están en función de Kn el cual a su vez se aproximara teniendo en cuenta las consideraciones que fueron calculadas y desarrolladas empíricamente por Berenger []. El término Kn puede ser aproximado de esta forma:

$$Kn = 0.333 * \left[\frac{i}{\text{Longitud de la PML}} \right]^3 \quad [102]$$

- El factor (0.333) fue encontrado empíricamente por ser el mayor número que se mantuvo más estable en la aproximación realizada por Berenger.
- El factor cúbico fue encontrado de forma similar por ser la variación más efectiva encontrada en la aproximación realizada por Berenger.
- Longitud de la PML: Es el número de capas que se disponen en el diseño (revisar al programar).

En la siguiente tabla se tiene los términos [a, b, c y d] en función de Kn el cual como se ha citado anteriormente ha sido encontrado empíricamente de acuerdo al diseño de capas absorbentes (PML) realizado por Berenger [].

Término	Expresión
a	$\left[\frac{1 - Kn}{1 + Kn} \right]$
b	$\left[\frac{1}{1 + Kn} \right]$

c	$\left[\frac{1 - Kn}{1 + Kn} \right]$
d	$\left[\frac{1}{1 + Kn} \right]$

Tabla.

De la anterior tabla se tiene que los términos [a], [b] y Kn presentan las siguientes variaciones teniendo en cuenta que se tiene presente el espacio principal de trabajo conocido de otra forma en la literatura como “Main space”. Las variaciones de estos términos están consignadas en la siguiente tabla.

Término	Expresión	Valor Zona de trabajo
Kn	$\left[\frac{i}{\text{Longitud de la PML}} \right]^3$	0
[a]	$\left[\frac{1 - Kn}{1 + Kn} \right]$	1
[b]	$\left[\frac{1}{1 + Kn} \right]$	1

Tabla.

Con estas consideraciones se garantiza que en la zona de trabajo el pulso electromagnético no sufra cambios o no se vea afectado y que una vez llegue al final de la zona de trabajo se atenúe completamente sin que se produzcan reflexiones hacia el interior.

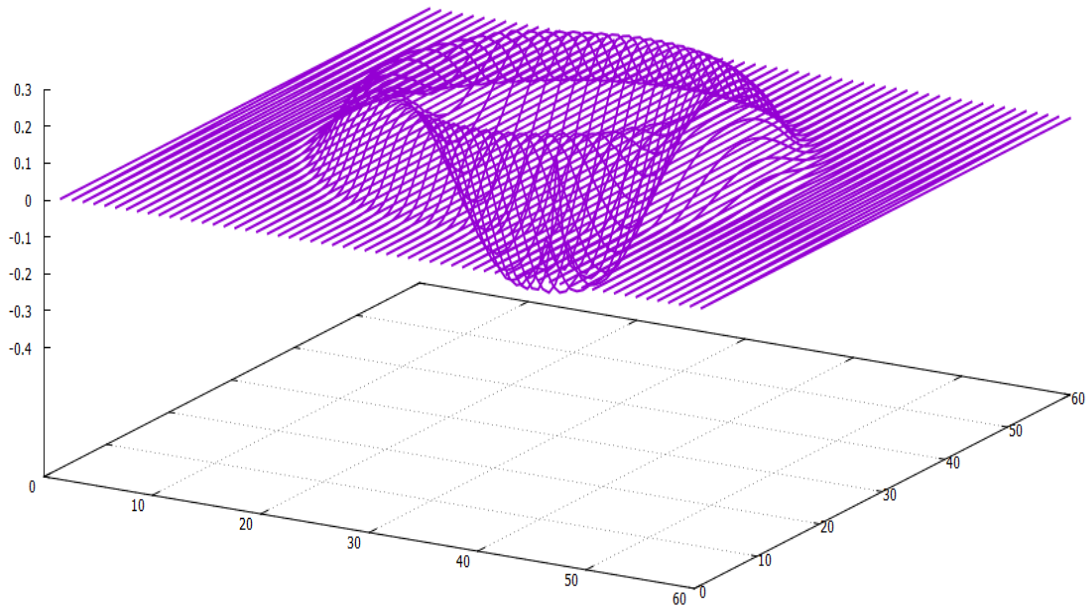


Figura. $n = 40$ Pasos temporales

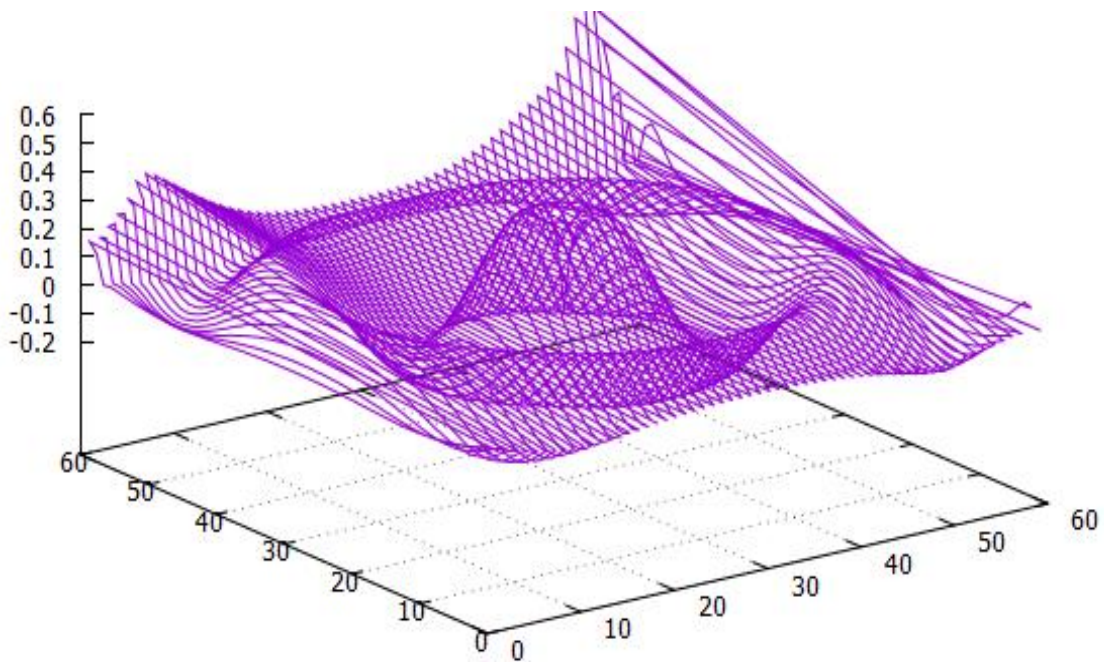


Figura. $n=100$ Pasos temporales

Propagación considerando un medio dieléctrico con pérdidas por conductividad (J).

En este capítulo se considerara la propagación del campo electromagnético en un medio dieléctrico que posee perdidas por conductividad relacionadas con la circulación de una densidad de corriente (J) la cual está definida por la siguiente expresión:

$$J = \sigma * E \quad [103]$$

Esta expresión implica que el campo electromagnético presente atenuación por lo que su valor decrecerá al incidir con un medio que posea estas características. Para realizar el estudio del comportamiento del campo electromagnético se citaran nuevamente las ecuaciones del campo electromagnético dependientes del tiempo expresado en forma más general para realizar con ello el estudio en un medio que posea conductividad. Las ecuaciones que utilizaremos para realizar este estudio las expondremos a continuación:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\epsilon} * \nabla \times H - \frac{J}{\epsilon} \quad [104]$$

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} * \nabla \times E \quad [105] \quad \text{igual a [1b]}$$

Donde se ha definido en la expresión [103] el término (J) y en donde ϵ representa la permitividad total del medio la cual ha sido citada anteriormente, de la expresión [105] se tiene que esta representa el comportamiento para el campo magnético (H). Reemplazando el valor de (J) en la expresión [104] obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\epsilon} * \nabla \times H - \frac{\sigma * E}{\epsilon}$$

Donde ($\epsilon = \epsilon_0 * \epsilon_r$). Por lo que la expresión [106] queda de la siguiente forma:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 * \epsilon_r} * \nabla \times H - \frac{\sigma * E}{\epsilon_0 * \epsilon_r} \quad [106]$$

Se debe tener presente que igual a como se ha citado anteriormente los campos (E y H) representan vectores en tres dimensiones cada uno, por lo que en este caso se trabajara en una dimensión para efectos de visualizar el comportamiento del campo electromagnético en un medio con pérdidas, para ello se tomaran las componentes (Ex y Hy) con lo cual realizaremos las operaciones matemáticas teniendo esto presente para las expresiones [105] y [106]:

- Para la expresión [106]:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 * \epsilon_r} * \nabla \times H - \frac{\sigma * E}{\epsilon_0 * \epsilon_r}$$

Realizando el rotacional de H teniendo en cuenta las componentes Ex y Hy:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} H_z - \frac{d}{dz} H_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} H_z - \frac{d}{dz} H_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} H_y - \frac{d}{dy} H_x \right) k \end{aligned}$$

La expresión [106] queda de la siguiente forma:

$$\frac{dE_x}{dt} = -\frac{1}{\epsilon_0 * \epsilon_r} * \frac{dH_y}{dz} - \frac{\sigma}{\epsilon_0 * \epsilon_r} * E_x$$

Aplicando normalización gaussiana para el campo eléctrico aplicando la siguiente definición citada anteriormente en la expresión [5].

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * E$$

Obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{E}}_x}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon_r * \sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}} * \frac{dH_y}{dz} - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 * \varepsilon_r} * \tilde{\mathbf{E}}_x$$

A la anterior expresión aplicaremos diferencias finitas centradas, con lo cual obtendremos los siguientes resultados:

$$\frac{\tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n+1} - \tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{1}{\varepsilon_r * \sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{H_{y(k+1)}^n - H_{y(k-1)}^n}{\Delta z} \right] - \frac{\sigma}{\varepsilon_0 * \varepsilon_r} * \left[\frac{\tilde{\mathbf{E}}_{z(k)}^{n+1} + \tilde{\mathbf{E}}_{z(k)}^{n-1}}{2} \right]$$

Despejando el término $\tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n+1}$ y tomando ($\Delta z = \Delta x$):

$$\tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n+1} * \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma}{2 * \varepsilon} \right] = \tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n-1} * \left[\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma}{2 * \varepsilon} \right] - \frac{1}{\varepsilon_r * \sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{H_{y(k+1)}^n - H_{y(k-1)}^n}{\Delta x} \right]$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n+1} = \tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n-1} * \left[\frac{\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma}{2 * \varepsilon}}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma}{2 * \varepsilon}} \right] - \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon_r * \sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}}}{\frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma}{2 * \varepsilon}} \right] * \left[\frac{H_{y(k+1)}^n - H_{y(k-1)}^n}{\Delta x} \right]$$

Factorizando el término $\left[\frac{1}{\Delta t} \right]$:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n+1} = \tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n-1} * \left[\frac{1 - \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \varepsilon}}{1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \varepsilon}} \right] - \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon_r * \sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}}}{\frac{1}{\Delta t} * \left[1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \varepsilon} \right]} \right] * \left[\frac{H_{y(k+1)}^n - H_{y(k-1)}^n}{\Delta x} \right]$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n+1} = \tilde{\mathbf{E}}_{x(k)}^{n-1} * \left[\frac{1 - \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \varepsilon}}{1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \varepsilon}} \right] - \left[\frac{[1]}{[\varepsilon_r * \sqrt{\varepsilon_0 * \mu_0}] * \left[1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \varepsilon} \right]} \right] * \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \right] * \left[H_{y(k+1)}^n - H_{y(k-1)}^n \right]$$

Teniendo en cuenta que $\Delta t = \frac{\Delta x}{2 * C_0}$ la expresión queda de la siguiente forma:

$$\tilde{E}_{x(k)}^{n+1} = \tilde{E}_{x(k)}^{n-1} * \left[\frac{1 - \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon}}{1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon}} \right] - \left[\frac{\left[\frac{1}{2} \right]}{[\epsilon_r] * \left[1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon} \right]} \right] * \left[H_{y(k+1)}^n - H_{y(k-1)}^n \right]$$

Reorganizando signos en la anterior expresión obtenemos finalmente:

$$\tilde{E}_{x(k)}^{n+1} = \tilde{E}_{x(k)}^{n-1} * \left[\frac{1 - \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon}}{1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon}} \right] + \left[\frac{\left[\frac{1}{2} \right]}{[\epsilon_r] * \left[1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon} \right]} \right] * \left[H_{y(k-1)}^n - H_{y(k+1)}^n \right] \quad [107]$$

- Para la expresión [105]:

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{1}{\mu_0} * \nabla \times E$$

Realizando el rotacional de E teniendo en cuenta las componentes Ex y Hy:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{d}{dx} & \frac{d}{dy} & \frac{d}{dz} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{d}{dy} E_z - \frac{d}{dz} E_y \right) i - \left(\frac{d}{dx} E_z - \frac{d}{dz} E_x \right) j + \left(\frac{d}{dx} E_y - \frac{d}{dy} E_x \right) k \end{aligned}$$

La expresión [105] queda de la siguiente forma:

$$\frac{dH_y}{dt} = - \frac{1}{\mu_0} * \left[\frac{dE_x}{dz} \right]$$

Aplicando normalización gaussiana a la anterior expresión:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} * \mathbf{E}$$

La expresión toma la siguiente forma:

$$\frac{dH_y}{dt} = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{d\tilde{\mathbf{E}}_x}{dz} \right]$$

A la anterior expresión aplicaremos diferencias finitas centradas, con lo cual obtendremos los siguientes resultados:

$$\left[\frac{H_{y(k)}^{n+1} - H_{y(k)}^{n-1}}{\Delta t} \right] = - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{\tilde{E}_{z(k+1)}^n - \tilde{E}_{z(k-1)}^n}{\Delta z} \right]$$

Despejando el término $H_{y(k)}^{n+1}$:

$$H_{y(k)}^{n+1} = H_{y(k)}^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 * \mu_0}} * \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \right] * \left[\tilde{E}_{z(k+1)}^n - \tilde{E}_{z(k-1)}^n \right]$$

Teniendo en cuenta que $\Delta t = \frac{\Delta x}{2 * c_0}$ la expresión queda de la siguiente forma:

$$H_{y(k)}^{n+1} = H_{y(k)}^{n-1} - \left[\frac{1}{2} \right] * \left[\tilde{E}_{z(k+1)}^n - \tilde{E}_{z(k-1)}^n \right]$$

Reorganizando signos en la anterior expresión obtenemos finalmente:

$$H_{y(k)}^{n+1} = H_{y(k)}^{n-1} + \left[\frac{1}{2} \right] * \left[\tilde{E}_{z(k-1)}^n - \tilde{E}_{z(k+1)}^n \right] \quad [108]$$

En la siguiente tabla se anexan las expresiones obtenidas para los campos Ex y Hy de acuerdo al procedimiento que se ha citado en cada paso, se debe tener en cuenta que se han realizado algunas modificaciones con motivo de su implementación en un código computacional que aporte resultados numéricos y gráficos.

Componente	Ecuación (Expresión) – Final
Ex	$\tilde{E}_{x(k)}^{n+1} = \tilde{E}_{x(k)}^{n-1} * \left[\frac{1 - \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon}}{1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon}} \right] + \left[\frac{\left[\frac{1}{2} \right]}{[\epsilon_r] * \left[1 + \frac{\sigma * \Delta t}{2 * \epsilon} \right]} \right] * \left[H_{y(k)}^n - H_{y(k+1)}^n \right] \quad [107]$
Hy	$H_{y(k)}^{n+1} = H_{y(k)}^{n-1} + \left[\frac{1}{2} \right] * \left[\tilde{E}_{z(k-1)}^n - \tilde{E}_{z(k)}^n \right] \quad [108]$

Tabla.

En la anterior tabla se anexaron las expresiones para el campo eléctrico y magnético las cuales son útiles para desarrollar el estudio relacionado al comportamiento del pulso electromagnético viajando inicialmente en el vacío y luego incidiendo en un medio dieléctrico con conductividad, por lo que este será implementado para estudiar analizar el caso de un transformador eléctrico de potencia el cual en su interior posee materiales dieléctricos que proveen aislamiento en sus bobinados. La variedad de dieléctricos con los cuales se cuenta en la industria y su utilidad depende de la aplicación para la cual se ha diseñado el transformador los cuales pueden ser para: potencia, distribución, medida o aislamiento. El aislamiento de un transformador esta dado entre sus elementos ubicados en el interior del mismo y sus exteriores para evitar descargas superficiales, este aislamiento puede sufrir desgastes debido a las condiciones ambientales como lo son la contaminación atmosférica y la humedad presente en el ambiente. Los dieléctricos más utilizados son el papel-aislante, aceites orgánicos biodegradables, resinas y dieléctricos gaseosos como el SF6 utilizado para aplicaciones especiales como lo son las subestaciones encapsuladas para evitar filtraciones de sustancias que puedan causar daños en equipos. Entre los dieléctricos más utilizados en el aislamiento y refrigeración de los transformadores de potencia están los aceites dieléctricos de naturaleza orgánica (vegetal) el cual posee las siguientes funciones:

Refrigeración	Aislamiento	Otras funciones son:
<ul style="list-style-type: none"> • Enfriamiento y disipación del calor producido por el funcionamiento del transformador. 	<ul style="list-style-type: none"> • Prevenir la formación de arco eléctrico entre dos conductores con diferencia de potencial eléctrico elevado. 	<ul style="list-style-type: none"> • Protector de material sólido. • Compatibilidad con los materiales de construcción del transformador. • Actuar como lubricación de las partes metálicas del transformador.

Tabla.

Los aceites dieléctricos poseen además las siguientes propiedades físicas y eléctricas:

Propiedades	
Físicas	Eléctricas
<ul style="list-style-type: none"> • Viscosidad: Los aceites deben tener baja viscosidad para facilitar la disipación de calor debido a la operación del transformador. • Punto de fluidez: Se define la temperatura a la cual el aceite deja de fluir, mientras el aceite se le realiza un enfriamiento progresivo. • Punto de flama: Es la mínima 	<ul style="list-style-type: none"> • Factor de potencia: El factor de potencia mide las pérdidas de corriente al interior del equipo cuando este se encuentra en operación. • Rigidez dieléctrica: Indica la habilidad que posee el aceite para soportar tensiones eléctricas sin falla.

<p>temperatura a la cual el aceite forma vapores explosivos que pueden causar incendios en presencia de oxígeno.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Tensión interfacial: se define como la cantidad de energía que es necesaria para aumentar su superficie por unidad de área. 	<ul style="list-style-type: none"> • Estabilidad a la oxidación: Debido a que los aceites están expuestos a altas temperaturas, aire y metales catalizadores que tienden a producir cambios en la composición química de los aceites los cuales propician la producción de ácidos.
---	--

Tabla.

En nuestro caso presentaremos un análisis del aceite vegetal como medio dieléctrico el cual presenta buena resistencia al fuego y es usado especialmente para transformadores de distribución y potencia, sus privilegiadas propiedades químicas, eléctricas y ambientales brindan una mayor seguridad y ventajas ante incendios, además de mantener sus propiedades dieléctricas ante condiciones ambientales extremas. Realizaremos la simulación del comportamiento del pulso electromagnético en un aceite dieléctrico utilizado como aislante y refrigerante de un transformador de distribución. A continuación anexaremos los datos correspondientes al material dieléctrico con los cuales se realizara la simulación numérica por medio del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo FDTD.

Espacio (GRID)	Propiedades del medio en el cual se propaga el pulso electromagnético		
	Conductividad (J) [S/m]	Permitividad relativa (ϵ_r) [Adimensional]	Permitividad del vacío (ϵ_0) [F/m]
Medio 1. Aire o [vacío] [0 a 100]	0	1	8.85419*e-12

Medio 2. Dieléctrico [Aceite vegetal] [100 a 200]	0.04	4	8.85419*e-12

Tabla.

Con los datos escritos en la anterior tabla se obtienen los siguientes resultados gráficos relacionados al comportamiento del pulso electromagnético incidiendo en un material dieléctrico, para esta simulación se ha utilizado un espacio computacional compuesto por 200 rejillas (GRID), para la cual se ha tomado las figuras correspondientes a ciertos instantes de tiempo para describir gráficamente la propagación del pulso electromagnético tanto en el campo eléctrico (Ex) como del campo magnético (Hy). Se ha considerado que el material dieléctrico está ubicado espacialmente en la posición (100) de la red (GRID), por lo que se distribuido espacialmente de la siguiente forma:

- Como medio el vacío [aire] desde (0 a 100).
- Como medio el aceite dieléctrico desde (100 a 200) tal cual como se ha especificado en la anterior tabla.

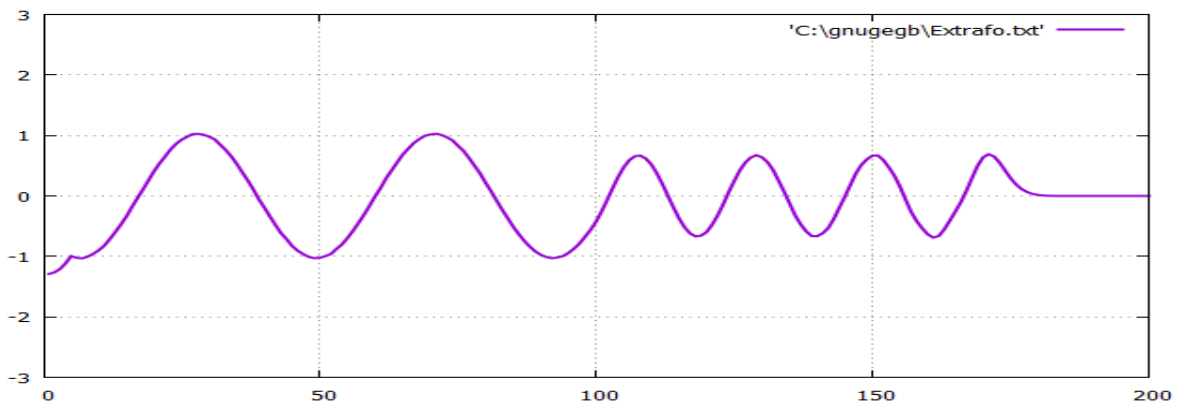


Figura. Campo eléctrico (Ex) incidiendo en un aceite dieléctrico con las características

descritas en la tabla anterior, con un tiempo de simulación de 500 ciclos (pasos temporales).

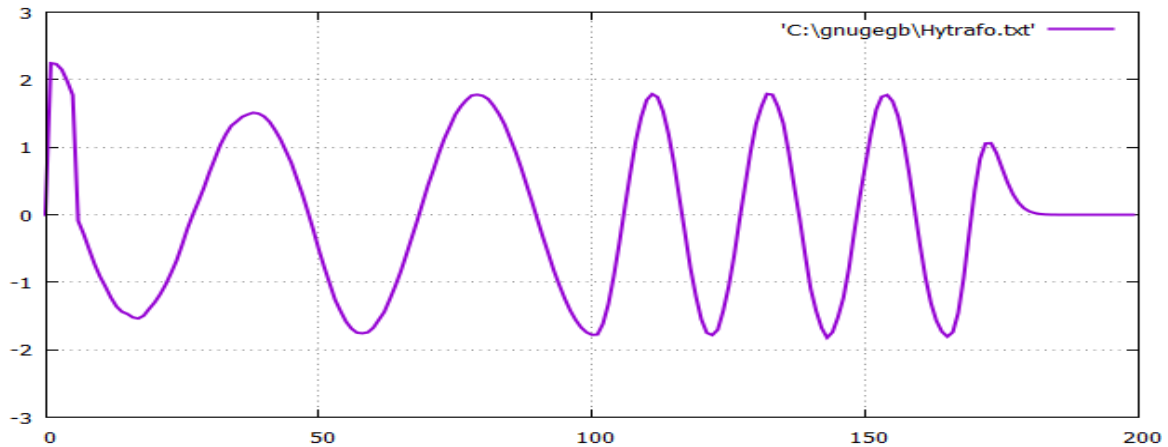


Figura. Campo magnético (Hy) incidiendo en un aceite dieléctrico con las características descritas en la tabla anterior, con un tiempo de simulación de 500 ciclos (pasos temporales).

4. CONCLUSIONES

En el presente documento se ha presentado una formulación básica del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo FDTD aplicado al electromagnetismo, con el cual se busca proponer una solución inicial analizando un caso particular para una dimensión de la propagación del campo electromagnético. Así mismo este método ofrece flexibilidad para estudiar la evolución espacial y temporal de campo en dos y tres dimensiones con las consideraciones necesarias que serían objeto de otro estudio más detallado, para finalizar es importante citar la potencialidad del método FDTD para analizar diversos casos que no sólo competen al tema tratado aquí además de que la programación del método no presenta mayores inconvenientes para implementarlo en otros lenguajes de programación como lo son c++ o python entre otros, esto si no se cuenta con matlab o se prefiere hacer uso de otro lenguaje de programación.

5. TRABAJOS FUTUROS

Realizar simulaciones para ecuaciones en derivadas parciales en otras áreas de la ingeniería

Explorar los métodos espectrales para los mismos problemas y realizar una comparación entre ellos

6. REFERENCIAS

- [1] A. Taflove, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* (Artech House, Boston, 1995).
- [2] D.M. Sullivan, *Electromagnetic simulation using the FDTD method* (IEEE Press Series on Microwave technology, New York, 1994).
- [3] Aplicación del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo a la simulación del campo electromagnético usando Matlab - REVISTA MEXICANA DE FÍSICA E **52** (1) 58–64 – JUNIO 2006.
- [4] K.S. Kunz and R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics* (CRC Press, Boca Raton, 1993)
- [5] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics* (Wiley, New York, 1965)
- [6] K.S. Kunz and R. J. Luebbers, *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics* (CRC Press, Boca Raton, 1993)
- [7] K. S. Yee, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media, IEEE Antennas and Propagat. Vol. 17, 1966

Trabajo Derivado de la Tesis

August 17, 2017

Carlos Alberto Rodríguez Varela
Universidad Tecnológica de Pereira
Pereira, Colombia
car@utp.edu.co



Dear author,

Thank you for submitting your abstract to *International Conference on Applied Mathematics and Informatics - ICAMI 2017*. On behalf of the ICAMI 2017 Program Committee, I am pleased to inform you that your contribution titled

SOLUTION OF MAXWELL EQUATIONS OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD THROUGH THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES IN THE DOMAIN OF TIME

has been accepted for poster presentation at the Thematic Session "Numerical methods and software tools" of ICAMI 2017.

To ensure inclusion of your abstract in the ICAMI 2017 Abstract Book please note the following:

- Your **poster must be prepared in English** according to the specification and instructions available on ICAMI 2017 webpage at <http://www.icami2017.org/>
- Presentation will be considered withdrawn unless at least one of the authors has paid registration fees by October 31, 2017.

Thank you again for your interest in ICAMI 2017 event. Please do not hesitate to contact us if you have any queries regarding ICAMI 2017. Our e-mail address is icami@correounivalle.edu.co.

We are looking forward to seeing you at the ICAMI 2017 event in San Andres, Colombia.

Yours sincerely,

MARC LASSONDE
ICAMI 2017 Program Committee Chair



<http://www.icami2017.org>



icami@correounivalle.edu.co

Journal of Mathematics and Statistical Science

ISSN 2411-2518

Dear Carlos Ramírez,

This is Journal of Mathematics and Statistical Science (ISSN 2411-2518, USA).

We are glad to know you have submitted a paper named **"Solution of Maxwell equations of the electromagnetic field through the method of finite differences in the domain of time"** in ICAMI 2017.

We are very interested in your research, if the paper mentioned has not been published in other journals or you have other unpublished papers in hand and have the idea of making our journal a vehicle for your research interests, please feel free to send electronic version to us.

Below is a brief introduction of our journal: