Universidad Tecnológica de Pereira

PERSPECTIVAS EN EL DESARROLLO DE NOCIONES TOPOLÓGICAS EN LOS PRIMEROS GRADOS DE ESCOLARIDAD

Giovana Arango Aristizabal

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Pereira, 2017

PERSPECTIVAS EN EL DESARROLLO DE NOCIONES TOPOLÓGICAS EN LOS PRIMEROS GRADOS DE ESCOLARIDAD

Documento presentado como requisito para optar al título de Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Giovana Arango Aristizabal

Director:
Pedro Pablo Cárdenas Alzate, Ph.D (c)

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
Pereira, 2017

Nota de Aceptación

Jurado

Jurado

Jurado

Pereira, 2017.

A mi madre que con su fortaleza nos enseña
Luchar por nuestros sueños,
a mi padre por brindar su alegre compañía
a mi esposo amado y mis hijos
Luis Eduardo y Juan Felipe,
para que atesoren su amor por la matemática

AGRADECIMIENTOS

La fortaleza no es una virtud humana, dado que una virtud se perfecciona en la debilidad humana, pero la fortaleza se opone a ella y es; gracias a Dios que he podido cumplir una meta más.

Continúo dando mis agradecimientos por este trabajo a:

La Universidad Tecnológica de Pereira por haberme permitido formar parte de ella desde la Maestría enseñanza de la Matemática.

Mi profesor y asesor Pedro Pablo Cárdenas Alzate por su visión crítica pero asertiva de los muchos aspectos cotidianos matemáticos y no matemáticos, por su rectitud en la profesión como docente y por el ejemplo implacable en la enseñanza de la matemática que replicaré con profesionalismo.

La amistad, a ti Luis Carlos Ortega Correal que con tu objetividad, tus razones, tus preguntas incesantes, tus accesos de mal humor, tus innumerables conocimientos y experiencias enriqueces no solo este trabajo sino mi saber pedagógico y mi corazon.

Mi esposo su infinita paciencia, al amor que dulcemente llena su corazón y engrandece el mío, permitiéndome día a día seguir adelante, creciendo como persona y construir un proyecto de vida juntos.

Mis hijos Luis y Juan, mi razón de ser feliz, ellos y sus hermosas locuras que despiertan mi alma y hacen que todo mi mundo está de cabeza por el amor, son la inspiración para hacer de este mundo y de la enseñanza de las matemáticas algo mejor.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se desarrolla en el marco de la Maestría en enseñanza de la matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira y se denomina “Perspectivas en El Desarrollo de Nociones Topológicas en los Primeros Grados de Escolaridad”, desde donde se problematiza la manera en que el empleo de pompas de jabón estimula el desarrollo de nociones topológicas en los niños de transición, primero y segundo grado, por lo tanto se propone como objetivo: Estimular el desarrollo de nociones topológicas a partir del empleo de pompas de jabón; específicamente las nociones de continuidad, interioridad, exterioridad y frontera.

En su marco teórico se integran los planteamientos de Piaget e Inhelder quienes realizan importantes aportes al estudio del desarrollo de nociones topológicas, aunque con algunas imprecisiones que pueden ser atribuidas al dominio disciplinar de este tipo de geometría. También se integra las reflexiones realizadas por Duval asociadas con la construcción de conocimiento matemático y específicamente del conocimiento geométrico, a través de los sistemas de representación semióticos, donde los procesos de visualización y razonamiento cobran relevancia en la estructuración cognitiva y cognoscitiva de los niños.

Estas dos perspectivas se complementan de un lado con las discusiones de Gardner para quien existe una manera particular de aprender y desarrollar la inteligencia espacial, no únicamente por su valor en la formación matemática, sino también por lo que significa en la cotidianidad de las personas para desarrollarse con autonomía inclusive en ausencia de estrategias o modos de percepción visual del mundo.

Por otra parte se expone el enfoque metodológico que orienta la investigación el cual en términos generales es de carácter mixto con dominación de métodos de análisis cuantitativo, cuya mirada se complementa con un método anidado de carácter cualitativo. En este capítulo también se explican las características de los participantes, así como el diseño metodológico empleado.

Los hallazgos por vía cuantitativa permiten reconocer el cumplimiento de los criterios de evaluación que dan cuenta de la activación de las nociones topológicas enunciadas a través de la comparación de la frecuencia simple y porcentual derivada de la aplicación de los test. De manera complementaria del análisis cualitativo se establecen categorías y subcategorías emergentes que amplían la comprensión del fenómeno objeto de estudio.

Estas dos formas de análisis enriquecen la discusión y permite la elaboración de conclusiones y recomendaciones tanto en términos didácticos y metodológicos como de perspectivas futuras de investigación.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO GENERAL

1.1. Planteamiento del problema

En la actividad matemática se presentan algunas particularidades que conllevan a reflexionar, sobre los procesos enseñanza-aprendizaje durante los primeros años de escolaridad (transición, básica primaria). En muchos casos la enseñanza está a cargo de docentes que carecen de la formación disciplinar adecuada, situación que limita considerablemente aspectos fundamentales en el desarrollo de nociones matemáticas. Específicamente en el ámbito geométrico Castro. J (2004) [1], , plantea que es posible evidenciar que las prácticas se enfatizan en una parte muy reducida de la geometría euclidiana, restringidas a la medición de sólidos geométricos, figuras planas, ángulos, clasificación de polígonos y otras más; con las que aún no se abarca la "totalidad del espacio" (Castro. J, 2004, p.163) [1], es decir, se requiere realizar un abordaje que complemente dicha configuración a través de los aspectos topológicos y proyectivos.

Otro asunto que amerita ser revisado, es la énfasis de la escuela en el diseño de estrategias didácticas que privilegian el uso del lápiz y papel, guías de trabajo y libros de texto que siguen los maestros para orientar un curso. Esta situación desconoce que las niñas y niños en sus primeros años de vida escolar necesitan de la interacción constante con su medio, dicho de otro modo los niños requieren de la exploración constante y manipulación de elementos concretos (Piaget, citado por Castro 2004) [1] que le permitan avanzar hacia su respectiva representación, de tal modo que se configuren las nociones espacio−temporales de manera adecuada.

En este orden de ideas, se establece la pertinencia en la búsqueda de alternativas para la formación matemática inicial de las niños, simultáneamente se evidencia la necesidad de avanzar en el cambio o transformación de la implicación afectiva relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas; es así como desde el escenario investigativo de la Maestría en la Enseñanza de la Matemática se plantea la posibilidad de explorar vías alternativas para fortalecer el aprendizaje de las nociones topológicas y avanzar en la adopción de prácticas de transformación metodológica que respondan a las demandas motivacionales de las niñas y niños.

Formulación del problema

La revisión de los antecedes permite formular el siguiente interrogante que orienta la investigación: ¿De qué manera el empleo de pompas de jabón estimula el desarrollo de nociones topológicas en los niños de transición, primer y segundo grado de básica primaria?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. Objetivo general

Estimular el desarrollo de nociones topológicas a partir del empleo de pompas de jabón en los niños de transición, primero y segundo grado de básica primaria.

1.2.2. Objetivos específicos

- Explorar en diferentes experiencias tanto académicas como no académicas los alcances del empleo de pompas de jabón.
- Reconocer conceptos topológicos presentes en la manipulación de pompas de jabón.
- Establecer criterios que permitan evaluar la activación de las nociones topológicas de continuidad, interioridad, exterioridad y frontera, en la aplicación de dos test.
- Proponer pautas para la enseñanza de las nociones topológicas en los niveles de transición, primero y segundo grado de básica primaria.

1.3. JUSTIFICACIÓN

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas publicado por el MEN en 1998, el aprendizaje de las matemáticas: "··· debe posibilitar a los estudiantes la aplicación de sus conocimientos fuera del ámbito escolar, donde deben tomar decisiones, enfrentarse y adaptarse a situaciones nuevas, exponer opiniones y ser receptivos respecto a las opiniones de los demás" (Lineamientos Curriculares, 1998).

Es posible evidenciar en las líneas anteriores que la enseñanza de la matemáticas en la escuela debe garantizar a los estudiantes la "aplicación" de lo aprendido, razón por la que los docentes no sólo deben seguir un plan curricular, sino que les corresponde tomar la mejor decisión frente al tipo de conocimientos que se requieren para salir bien librado cuando se enfrentan a situaciones de la vida cotidiana. No obstante la mayoría de estas decisiones obedecen más a conveniencias de tipo metodológico que epistemológico.

Siguiendo a Castro, J. (2004) [1] al realizar una revisión histórica de las matemáticas es posible señalar que la Geometría se desarrolla en primer lugar, debido a los aportes de los Babilonios, Egipcios y Griegos, por lo que se señala a la Geometría Euclidiana, como "los cimientos de esta ciencia". Posteriormente y gracias a los aportes de importantes personajes del siglo XVII, se fundan las bases de la Geometría Proyectiva; y más tarde, comienza a establecerse una nueva vertiente de la Geometría, la Topología. Lo que sugiere este orden histórico es que primero se gesta la Geometría Euclidiana, luego la Proyectiva y finalmente la Topológica. No obstante y a aunque parece no haber un consenso absoluto entre diversos autores, existe la tendencia a aceptar que en el desarrollo infantil los procesos de elaboración de los conceptos espaciales suceden de forma inversa al desarrollo histórico de la Geometría; es decir, en el niño/niña "los conceptos espaciales evidencian primero indicadores de carácter topológico, más tarde de carácter proyectivo, para finalmente integrarse en capacidades de representación de tipo Euclideas" (Castro, 2004 p.167) [1]. Es por ello que para esta misma autora:

··· es importante consolidar referentes teórico-epistemológicos que deben considerarse por parte de docentes del nivel de Educación Inicial, a la hora de seleccionar y proponer estrategias de enseñanza y de aprendizaje orientadas al desarrollo del pensamiento lógico, que vayan más allá de un tratamiento didáctico que se reduce al manejo conceptual y exclusivo de las nociones de lateralidad y posición. Castro (2004)

En este orden de ideas, Castro, J. (2004) [1] enfatiza en que dicha fundamentación permite que el docente privilegie experiencias de carácter topológico (ordenar, agrupar, amontonar, doblar, estirar, colorear, entre otras) evitando desplazar completamente experiencias de tipo proyectivo o euclidiano; con esto se proyecta que los docentes de educación inicial potencien las fortalezas de este tipo de experiencias, que brindan la posibilidad de consolidar a futuro, las bases de la comprensión de la noción de "espacio total".

Es necesario reconocer además que la enseñanza de la Geometría ha venido cobrando fuerza en los últimos años gracias a la expedición normativa de Referentes Curriculares por parte del Ministerio de Educación Nacional (MEN), con lo que se ha pretendido que además del Pensamiento Numérico-Variacional se aborde también el Pensamiento Aleatorio y el Pensamiento Geométrico-Espacial; a pesar de esta situación se sigue evidenciando en las escuelas que la enseñanza de la Geometría sigue dependiendo de las propuestas de los "libros de texto" que la contemplan sólo en los últimos capítulos de dichos libros y por ende los docentes la relegan al final del año escolar, sin los fundamentos teóricos y conceptuales pertinentes que le permitan a los estudiantes tener los elementos necesarios para desarrollar la capacidad de ubicación en el espacio.

A lo anterior se suma también la poca existencia de trabajos de investigación en el ámbito geométrico-espacial, en un trabajo titulado "Espacio y Geometría" Alan Bishop denuncia como hecho grave la poca importancia que se da en la enseñanza y en la investigación educativa a las cuestiones espaciales y geométricas (Bishop, 1999) [3]. Analizando también los aportes de Kilpatrick (1993) [4], donde se cuestiona desde hace más de dos décadas frente a qué elementos identifican a la investigación en educación matemática y, en función de ellos, qué criterios pueden ser utilizados en la clasificación de problemas de investigación matemática y en el consenso de metodologías que permita trabajar con garantía de calidad en una dirección adecuada. Entre otras cosas, concluye que "independientemente del tema, es crucial la originalidad, el rigor, la precisión, la previsibilidad, la reproductibilidad y, finalmente, la relación con las matemáticas y los procesos educativos".(Kilpatrick 1993, p.243)[5]

Es evidente ahora que la investigación matemática existente no solo en Colombia sino a nivel de otros países, ha privilegiado aspectos diferentes a la geometría y el espacio, mucho menos la Topología en los primeros grados de escolaridad; situación que se convierte en una oportunidad para que en el marco de la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira UTP se promueva un ejercicio que permita encontrar algunas respuestas a múltiples interrogantes y cuestiones que surgen en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, pero particularmente sobre nociones topológicas en niños de los primeros grados de educación básica.

Este trabajo pretende estimular el desarrollo de nociones topológicas a partir del empleo de pompas de jabón en los niños de transición, primero y segundo grado de escolaridad; en un intento por superar las prácticas tradicionales que los maestros utilizan en el ámbito geométrico, las cuales quedan reducidas al empleo de libros de texto, lápiz y papel; desconociendo la necesidad de interacción constante que tienen los niños con su entorno.

Para comprender la apuesta investigativa, es necesario dar un vistazo a lo que sucede en México por ejemplo, de acuerdo con lo que esboza Cantoral (1996) [6]

⋯ creemos que fuera de nuestro medio, suele creerse que bastan una suficiente cultura matemática y una intuición didáctica adecuada para ser capaces de diseñar currículo, elaborar textos y programas escolares y conducir y evaluar el aprendizaje de nuestros alumnos y el funcionamiento de nuestros sistemas de enseñanza. (⋯) Al interior de nuestra comunidad, por el contrario, cada vez es más claro que la complejidad de los fenómenos estudiados y los crecientes hallazgos (en espera de su eventual utilización en el enfrentamiento de problemas didácticos) requieren con mayor urgencia de profesionales del campo: investigadores o profesores no solo interesados en los problemas educativos, sino formados para enfrentarlos (Cantoral 1996, p. 131).

En este sentido lo expuesto por el autor confirma que en la actualidad, no es suficiente con poseer conocimientos matemáticos, sino que se requiere de un proceso de reflexión constante frente al quehacer pedagógico-matemático, el cual cobra relevancia cuando se sustenta en procesos de investigación en el aula; dichos procesos con el debido rigor y validez que permitan entregar un terreno abonado sobre el cual se puedan seguir gestando procesos de transformación.

1.4. ANTECEDENTES

En el ámbito Internacional Ochaita (1983) [2] desarrolla una investigación titulada “La teoría de Piaget en el desarrollo del conocimiento espacial”, donde aborda las nociones espaciales en relación con el desarrollo cognitivo, a través de una serie de experimentos empleados en el estudio de espacios topológicos, espacio proyectivo y espacio euclidiano, donde se concluye la relevancia de los trabajo piagetiano sobre las posteriores investigaciones acerca de la cognición espacial.

Castro J, (2004) [1] realiza un trabajo titulado “El Desarrollo de la noción de espacio en el niño de Educación Inicial” en la Universidad de Los Andes Táchira, esta es una investigación de tipo documental en la cual se trata la noción de espacio que constituye uno de los marcos lógico-matemáticos fundamentales, que ha de servir para estructurar el futuro pensamiento abstracto-formal, en este trabajo se abordan los conceptos de espacio euclidiano, espacio proyectivo y el espacio topológico. Propone además algunas orientaciones didácticas en aras de que se alcance el desarrollo integral de los niños, desde el reconocimiento o las características de las tareas que proponen los docentes a sus estudiantes.

Resalta una serie de actividades que contribuyen a desarrollar en el niño/niña de preescolar, su capacidad de comprensión de las nociones de carácter topológico que implican demandas cognitivas como el reconocimiento de interioridad y exterioridad, acercamientos y alejamientos, fronteras, límites, orden y secuencias, vecindad de puntos, figuras abiertas y figuras cerradas, continuidad y discontinuidad.

Romero (2014) [7] realiza un trabajo con el título "La Geometría en la etapa de Educación Infantil" el cual consiste en la realización de una propuesta para la enseñanza-aprendizaje de la geometría, en esta propuesta se abordan los conceptos de Geometría y Topología, a través de un juego de manipulación de objetos concretos (cubos), lo que permite la transición a dos dimensiones, plasmando una de sus caras sobre el papel (cuadrado), finalmente se establecen algunas conclusiones orientadas a reconocer la aplicación de las diferentes actividades logran promover el aprendizaje de las nociones geométricas de acuerdo con la etapa del desarrollo en la que se encuentran los escolares.

Trujillo y Osorio (2013) [8] desarrolla una investigación titulada "Experiencia Topológica en grados cuarto, quinto y sexto de la Educación Básica" en la Universidad Tecnológica de Pereira, que busca despertar el espíritu intuitivo y heurístico a través de la realización de una serie de actividades que integra objetos topológicos como: Cinta de Mobius, Poliedros, Botella de Klein, , los puentes de Königsberg, el teorema de los cuatro colores y la teoría de nudos; con el fin de evidenciar cómo las matemáticas se desprenden de todo su rigor y logicismo para adaptarse a un entorno más social, despertar actitudes matemáticas en los niños desde un ámbito natural.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

A continuación se expone los referentes teóricos que fundamenta la presente investigación. Se inicia con la mirada de Piaget (1964) [11] sobre la construcción de representaciones simbólicas en la cognición de los niños, que superan las formas de pensamiento ligadas al lenguaje verbal, dado que lo que está en juego es la interiorización del espacio. La construcción de tales representaciones encuentra eco en el trabajo de Duval (2003) [12]. Estos dos autores comparten elementos en común en sus teorías sobre el aprendizaje que se presentan como un puente, que intenta comunicar de un lado la mirada que derivada de la epistemología genética relacionada con el desarrollo infantil y de manera complementaria una perspectiva relacionada con la construcción social del conocimiento.

Por otra parte se propone asociar la teoría de Van Hiele [14] sobre la evolución de pensamiento espacial y la teoría de las Inteligencia Múltiples planteada por Gardner (1993) [17], dado que se considera que ambas teorías otorgan atributos específicos a la forma de aprender e interiorizar las relaciones espaciales o geométricas.

De manera preliminar se invita a reflexionar sobre ¿Qué es una noción? ¿Una manera de pensar sobre algo de lo cual no se tiene absoluta certeza y dominio?, ¿Hay nociones sobre el espacio, o mejor sobre la manera de conceptualizar el espacio? Estos interrogantes deambulan aún con respuestas provisionales por el océano de razonamientos que supone un ejercicio investigativo. Lograr un esclarecimiento de tales cuestiones planteadas, sugiere una búsqueda de los fundamentos epistémicos que dan origen a una posible explicación de la construcción de nociones y conceptualización en el intelecto humano, donde el lenguaje es quizás la manera más valorada por su carácter interindividual. Sobre este asunto Piaget (1964 citando a Watson) [11] propone que al comparar al niño antes y después del lenguaje, es frecuente concluir que "el lenguaje es la fuente del pensamiento" (p. 112) y que por tanto, es necesario analizar los cambios en la inteligencia que se producen durante la adquisición del lenguaje, para poder reconocer la existencia de otras fuentes que explican ciertas representaciones y una determinada esquematización representativa. Se refiere aquí a la construcción del símbolo que se explicita mediante el juego y la imaginación

El juego simbólico aparece casi al mismo tiempo que el lenguaje, pero de forma independiente a él, y representa un papel considerable en el pensamiento de los pequeños, como fuente *de representaciones individuales (a la vez cognoscitivas y afectivas) y de esquematización representativa igualmente individual (Piaget, 1964. p.113) [11]*

Otra forma de simbolización enunciada por Piaget se trata de la imitación diferida que se produce por primera vez en ausencia del modelo correspondiente y que puede dar lugar a acciones operatorias en ausencia del estímulo sensorio-motor o perceptivo. Además señala que es posible llegar a clasificar toda la imaginería mental en los símbolos individuales, dado que la imagen puede ser concebida como una imitación interiorizada y cita algunos ejemplos:

La imagen sonora no es más que la imitación interna de su correspondiente y la imagen visual es el producto de una imitación del objeto y de la persona bien mediante todo el cuerpo, bien mediante los movimientos oculares cuando se trata de una forma de reducidas dimensiones (Piaget, 1964, p. 114) [11]

En este mismo texto Piaget se aventura a afirmar que debe buscarse la fuente del pensamiento en la función simbólica, pues ésta supera las fronteras del lenguaje, especialmente de los sistemas de signos verbales. También sostiene que la función simbólica se explica a su vez por la formación de las representaciones, es decir que la función simbólica se caracteriza por "una diferenciación de los significantes (signos y símbolos) y de los significados (objetos o acontecimientos, ambos esquemáticos o conceptualizados)" (Piaget, 1964, p.115); de tal manera que los primeros permiten la evocación de la representación de los otros.

Finalmente Piaget concilia las tensiones conceptuales haciendo referencia a que:

··· el lenguaje no es más que una forma particular de la función simbólica, y como el símbolo individual es, ciertamente, más simple que el signo colectivo, nos es permitido concluir que el pensamiento precede al lenguaje, y que éste se limita a transformarlo profundamente ayudándole a alcanzar sus formas de equilibrio mediante una esquematización más avanzada y una abstracción más móvil (Piaget, 1964, p.115) [11]

En este punto se destaca el lugar de las representaciones como formas de objetivación de los conceptos y especialmente de los conceptos matemáticos. Esta idea encuentra resonancia en la mirada de Duval (1993) [12], quien considera que existe una imposibilidad de acceder por vía directa a los objetos matemáticos y por tanto, solo es posible su aprendizaje a través de representaciones semióticas, que le permite al individuo exteriorizar sus representaciones mentales para poderlas comunicar. Este hecho lo presenta el autor como una paradoja cognitiva descrita en los siguientes términos

··· La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, más allá de cualquier representación semiótica, hace la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden los estudiantes adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representación semióticas, si no tienen el domino conceptual de los objetos representados?··· (Duval, 1993, citado por D'amore, Fandiño, Iori y Matteuzzi, 2015, p. 177-212)[18]

Estos mimos autores aportan importantes explicaciones de esta paradoja, por ejemplo al describir la apuesta metodológica del docente centrada en la presentación de representaciones semióticas de un objeto matemático, con la intensión que el estudiante lo construya cognitivamente, “dado que no existe forma alguna de mostrar, indicar (en el sentido etimológico de la palabra), dicho objeto” (D’amore et al. citando a Duval, 2015, p.180) [18] dando lugar a la manipulación y reconocimiento de sus representaciones y no al objeto mismo; lo paradójico es que el estudiante actuando en dicho escenario que inicialmente podría considerarse propenso para el fracaso cognitivo, finalmente logra aprender el objeto matemático. “Un objeto matemático no es otra cosa que el invariante (operatorio o lógico-discursivo) de una multiplicidad de representaciones semióticas posibles” (Duval, citado por D’amore et al. 2015, p. 118) [18]

En su desarrollo teórico Duval (2003) [12] insiste en que procesos cognitivos como la conceptualización (noesis) de los objetos matemáticos, se logra solo a través de una aproximación al objeto matemático mediante diferentes registros de representación semiótica, que puede dar lugar a la trasformación de la representación al interior del mismo registro (tratamiento) o la conversión de un registro a otro registro de representación, que demanda del sujeto la coordinación entre los sistemas de representación implicados.

De nuevo el problema de la conceptualización se hace presente como punto de encuentro, en tanto la presente investigación, debe delimitar con relativa claridad conceptual el lugar de las nociones, específicamente de las nociones de conceptos topológicos. Lo que hace más evidente la preocupación por reconocer elementos constitutivos de las nociones; es decir, identificar aspectos de la estructuración cognitiva y cognoscitiva que tiene lugar en el encuentro de formas de razonamiento verbal y no verbal, por ejemplo, mediante imágenes a través de tareas de visualización o de contacto táctil, pues en la edad escolar se privilegian diferentes formas perceptivas.

La Noción es una idea elemental, pero concreta, fundamentada en la percepción sensible. Las ideas concretas son la base de todo conocimiento humano; sobre una agrupación de cosas, acciones o relaciones, es imprescindible tener una idea concreta o noción para luego poder manejar conceptos. (Afanasiev, p. 181)[13]

En el párrafo anterior se puede observar como el autor al definir noción le atribuye una explicación perceptiva, donde además “la idea elemental y concreta sobre la cosa objeto de conocimiento se adquiere mediante la observación y percepción sensible, y así se estaría adquiriendo el conocimiento de los hechos concretos” (Afanasiev, p.181) [13]. Lo cual se explica mejor volviendo la mirada sobre el segundo estadio de desarrollo infantil plantados por Piaget (1964, citado por Castro, E, Romero y Castro E, 2012) [10] “Período sensorio-motor (edad aproximada 0 a 2 años), período pre operacional (de 2 a 7 años), período de las operaciones concretas (de 7 a 11 años), período de las operaciones formales (desde los 11 años en adelante” (p.8).

Siguiendo la síntesis de Castro et al (2012) sobre Piaget [10], se reconoce que en el periodo pre-operacional el niño, “presenta un razonamiento de carácter intuitivo y parcial” (p.9); es decir razona sobre lo que ve, que da cuenta de una estructura intelectual de carácter concreto, lento y estático. “Es un período de transición y de transformación total del pensamiento del niño que hace posible el paso del egocentrismo a la cooperación, del desequilibrio al equilibrio estable, del pensamiento pre-conceptual al razonamiento lógico” (Piaget 1964, citado por Castro et al, 2012, p.8) [10] Este periodo además se subdivide en dos etapas: pre-conceptual e intuitiva. Para el autor la importancia de la etapa pre-conceptual radica especialmente, en su consideración sobre cómo el pensamiento está a medio camino entre el esquema sensomotor y el concepto. Lo anterior explica porque los niños otorgan atributos a ciertos objetos que convencionalmente poseen otros usos o aplicaciones, cuando se enfrentan a tareas operatorias que requieren su manipulación

Las estructuras están formadas por conceptos inacabados que producen errores y limitaciones al sujeto. El razonamiento se caracteriza por percibir solamente algunos aspectos de la totalidad del concepto y por mezclar elementos que pertenecen verdaderamente al concepto con otros ajenos a él. (Castro et al, 2012, p.9)[10]

Percibir solamente algunos aspectos del concepto a través del razonamiento, da lugar a considerar, que es durante la etapa intuitiva cuando el niño valiéndose de su experiencia inmediata, puede en mayor medida articular un discurso (en lenguaje natural), a partir de la visualización que logra de su entorno; por ejemplo para señalar que aspectos se conservan o cambian en una situación particular. La visualización aquí se entiende como las diferentes formas de aproximación perceptiva (táctil, auditivo y visual) que se articulan en la estructuración cognitiva.

La estructuración supone vías de interiorización diferenciadas ligadas a los registros de representación semióticos presentes en cada experiencia, que nuevamente hace suponer una forma de coordinación entre los diferentes registros (Duval, 1993) [15]. Teniendo en cuenta las características epistemológicas, la visualización se impone como "la actividad cognitiva a privilegiar en la enseñanza de la geometría en los primeros grados de enseñanza de la geometría" (Duval, 1998, citado por Marmolejo, 2010 p.12). [15]

··· No vemos en una figura geométrica o en una tabla o en un gráfico como se hace sobre un esqueleto al estudiar los huesos humanos o al analizar las propiedades de una gota de sangre en el laboratorio. Reconocer la complejidad cognitiva que subyace al aprendizaje de la visualización en el estudio de las matemáticas exige tener en cuenta una clara diferenciación y separación entre dos actos cognitivos de naturaleza diferente: la visión (percepción de objetos físicos) y la visualización (percepción de representaciones). (Marmolejo, 2010 p.12)[15]

La claridad demandada el autor en la cita anterior, aporta un elemento teórico clave a los procesos metodológicos desarrollados por esta investigación, pues se trata de proponer experiencias de visualización en sentido matemático, lo cual "no se reduce jamás a una simple percepción visual sino a la coordinación con otros tipos de aprehensión" (Duval, 2003, citado por Marmolejo, 2010, p.14) [16]. El tipo de aprehensión que se convoca aquí es sin duda, la aprehensión discursiva Torregrosa y Quesada (2007 citado por Marmolejo, 2010) [16], desde donde los niños y niñas pueden dar cuenta de su experiencia; es decir de su interpretación expresada en registro de lenguaje natural a partir de la visualización propuesta. De manera más precisa visualizar se refiere a:

··· producir una representación que, en ausencia de toda percepción visual de los objetos representados, permite mirarlos como si estuvieran verdaderamente delante de los ojos. La visualización debe entonces permitir distinguir e identificar, ya sea a primer golpe de ojo (aprehensión vista como inmediata) o sea de un solo golpe de ojo (aprehensión simultánea) lo que se representa? (Duval, 1993, p.42)[16].

La visualización como habilidad también se reconoce en el modelo de Van Heile (1957) [14] al igual que la comunicación en sentido general, que involucra múltiples registro de representación para expresarlo en términos de Duval (1993) [17].

Por otra parte existe un tipo de inteligencia a la que Gardner (1993) [17] denomina Inteligencia Espacial, que le permite al sujeto interactuar con el mundo que lo rodea y resolver situaciones que implican no solo aspectos de tipo sensorial, sino también de naturaleza analítica. Es así como para este autor

··· *Las capacidades para percibir con exactitud el mundo visual, para realizar transformaciones y modificaciones a las percepciones iniciales propias, y para recrear aspectos de la experiencia visual propia, incluso en ausencia de estímulos físicos apropiados son centrales para la inteligencia espacial (Gardner, 1993, p.141) [17]*

Un aspecto relevante, es que para la inteligencia espacial la operación más elemental es la habilidad para percibir una forma o un objeto, situación que es posible incluso en ausencia del sentido de la visión y que en lugar de ello se puede recurrir a experiencias de tipo táctil o a través del discurso; es decir, cabe la posibilidad de que alguien logre realizar una tarea que dé cuenta de su inteligencia espacial solo a través de lo que se dice, ya sea verbalmente o a través de una representación gráfica. Esta idea se puede evidenciar de manera más diáfana en el siguiente párrafo

En efecto, para los problemas en la rama matemática de la topología se requiere precisamente la habilidad de manipular formas complejas en varias dimensiones. Pero cuando se expresa un problema en forma verbal, surge una clara opción de resolver el problema estrictamente a través del plano de las palabras, sin recurrir a la creación de una imagen mental o "cuadro en la cabeza". En efecto, es concebible que cada uno de los problemas citados se pudiera resolver en forma estricta en un modo proposicional. (Gardner 1993, p.142)[17]

Lo anterior permite explicar por qué (para los fines de esta investigación), es posible rescatar del discurso no sólo verbal sino también gestual, algunos indicios de la manera como las nociones topológicas se comportan en la estructura cognitiva del niño/niña; pues hasta el momento se ha visto que la inteligencia espacial comprende una cantidad de capacidades relacionadas de manera informal; la habilidad para reconocer instancias del mismo elemento; la habilidad para transformar o reconocer una transformación de un elemento en otro; la capacidad de evocar la imaginería mental y luego transformarla, la de producir una semejanza gráfica de información espacial y cosas por el estilo. De hecho para Gardner (1993) la representación del conocimiento intuitivo desplegado por niños mayores cuando ejecutan una tarea, se convierte en un gran desafío.

Así, un niño de cinco o seis años puede desenvolverse en forma satisfactoria alrededor de un plan, incluso uno no familiar; pero si se le pide que lo describa en palabras, o que dibuje un cuadro o un mapa, el niño puede fracasar del todo u ofrecerá una explicación esencialmente simplificada en exceso, que por tanto será inútil (por ejemplo: la descripción de su camino de recorrido como una línea recta, aunque de hecho haya sido retorcido). Lo que es más difícil para los niños de edad escolar es coordinar su conocimiento de un plan espacial, adquirido de una diversidad de experiencias dispares, en una sola estructura organizada globalmente. (Gardner 1993, p.142)[17]

En este orden de ideas, puede evidenciarse que en términos de comunicación es aventurado pretender que los niños den cuenta de muchos procesos mentales que son complejos; y a pesar de no ser, de fácil comunicabilidad, dicha situación no significa que haya ausencia de comprensión de las nociones, no obstante lo que es cierto, es la puesta en escena de esta inteligencia por parte de los niños cuando por ejemplo pueden ubicarse en muchas áreas de su vecindario y, de hecho, jamás dejar de encontrar lo que buscan. Sin embargo, con frecuencia carece de la capacidad para proporcionar un mapa, dibujo o narración verbal global de la relación entre diversos puntos. Enfatizando sobre estas cuestiones Gardner (1993) expresa como:

Una parte elusiva de la inteligencia espacial es la representación de su conocimiento fragmentario en otro formato o sistema simbólico. O quizá uno pudiera decir: mientras que el entendimiento espacial infantil desarrolla el espacio, sigue siendo difícil la expresión de este entendimiento por medio de otra inteligencia o código simbólico. (p.146)[17]

En tal sentido el autor sostiene que una posesión invaluable en nuestra sociedad es una inteligencia espacial sutilmente aguda. En algunas empresas esta inteligencia es indispensable, por ejemplo: para un escultor o un topólogo matemático; aunque aclara que

la participación en el razonamiento espacial no es uniforme a través de las diversas ciencias, artes, y ramas de las matemáticas. La topología explota el pensamiento espacial en mucho mayor medida que el álgebra. Las ciencias físicas dependen en mayor grado de la habilidad espacial que las ciencias biológicas o las sociales tradicionales (Gardner 1993, p.154) [17]

Finalmente quien desea dominar estas actividades, debe aprender el lenguaje del espacio y pensar en el medio espacial. Un pensamiento que incluye una apreciación, de que el espacio permite la coexistencia de determinadas características estructurales, mientras que no permita otras. Desde luego una investigación sobre desarrollo de nociones topológicas debe dejar entrever la comprensión de aspectos formales de la topología, sin pretender ser exhaustivos en la presentación formal de las definiciones sobre los conceptos centrales que se promueven durante las fases de intervención; por lo tanto a continuación se presenta algunas definiciones que amplían a la comprensión de los alcances de la presente investigación.

La Topología como rama de las matemáticas utiliza conceptos de otras áreas como la geometría y la teoría de conjuntos con el objetivo de estudio de las propiedades de "figuras" y la conservación de las mismas al ser sometidas a deformaciones. Las "figuras" son un conjunto de puntos que cumplen axiomas para así ser tratados como un espacio topológico, este se define de la siguiente manera

Sea X un conjunto no vacío, una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X se dice que es una topología sobre X si:

(i) X y el conjunto vacío, $\emptyset$, pertenecen a $\mathcal{T}$.

(ii) la unión de cualquier número (finito o infinito) de conjuntos en $\mathcal{T}$ pertenecen a $\mathcal{T}$

(iii) las intersecciones de dos conjuntos cualesquiera de $\mathcal{T}$ pertenecen a $\mathcal{T}$.

El Par (X, τ) se llama espacio topológico[1].

Las deformaciones a la cuales son analizadas las figuras son estiramiento, arrugado y flexión de manera continua, sin que la figura se desgarre. Esto quiere decir que la forma puede ser alterada, pero esta puede volver a su estado original intacto o que la forma que tome al ser deformada no tenga rupturas.

Debido al amplio del concepto de la topología esta se ha llevado a otras áreas encontrando Topología Algebraica, Diferencial y geométrica, sin embargo, todas comparten las mismas bases a partir de la cual se desarrollan nuevos conceptos.

2.1. Topología de espacio métrico

Al hablar de topología en un espacio métrico es necesario definir dos conceptos asociados al mismo: espacio métrico y bola abierta, por esta razón es pertinente recurrir a ellos con el objetivo de facilitar la compresión de esta topología:

Espacio Métrico

Es un par cartesiano (X, d) siendo X un conjunto no vacío y d una función $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$, también llamada métrica que cumple con las siguientes condiciones con $a, b, c \in X$:

1. $d(a, b) = 0$ si si solo si $a = b$
2. $d(a, b) = d(b, a)$ (simetría)
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Al cumplirse los axiomas se dice que la función d, es una métrica, sin embargo, para poder tratar de conceptos topológicos es necesario el uso del concepto de bolas que se trata a continuación:

Bola Abierta

Una Bola abierta es un conjunto de puntos que surgen a partir de un espacio métrico (X, d) que tiene un radio r a partir de un punto p y es definido como sigue:

$$B_r = \{x \in X : d(x, p) < r, (r \in \mathbb{R}^+)\}.$$

Es decir que el conjunto incluye todos los puntos menos la circunferencia de la bola. A partir de esta idea una topología en un espacio métrico, no es más que un conjunto de abiertos que se encuentran en la topología y que tratamos como bolas abiertas.

[1]Las definiciones aquí presentadas se extrae del texto Morris, Sidney, Topología sin dolor.

Continuidad

El concepto de continuidad en topología, es muy ligado al manejado en el área de funciones continuas. Una función continua se puede definir al observar si la curva que representa no tiene rotos o saltos, es decir es un trazo o línea continua, para definir este concepto en el área de topología se utiliza espacios topológicos y una función entre estos.

La continuidad en topología se define entre dos espacios topológicos $(X, \tau), (Y, \tau_1)$ y se enuncia como sigue:

Sean $(X, \tau), (Y, \tau_1)$ espacios topológicos, y f una función de X en Y. Entonces $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau_1)$, se dice es una función continua si para cada $U \in \tau_1, f^{-1}(U) \in \tau$.

Interior

Para la definición de Interior primero se ha de definir que es un conjunto abierto; Teniendo un espacio topológico (X, τ), los miembros de τ son llamados conjuntos abiertos.

Ahora Interior es definido como:

Sean $(X, \tau))$ un espacio topológico y A un subconjunto cualquiera de X. El conjunto abierto más grande de A es llamado interior de A y es denotado por $Int(A)$.

Frontera

Teniendo un espacio topológico (X, τ) y un subconjunto A, la frontera de A serian todos aquellos puntos que no son ni interior ni exterior de A.

Vecindad

Sea un espacio topológico (X, τ) N un subconjunto de X y p un punto en N. Entonces N es un vecindad del punto p si existe un conjunto abierto U tal que $p \in U \subseteq N$.

A continuación, se presenta una gráfica para representar los conceptos antes enunciados:

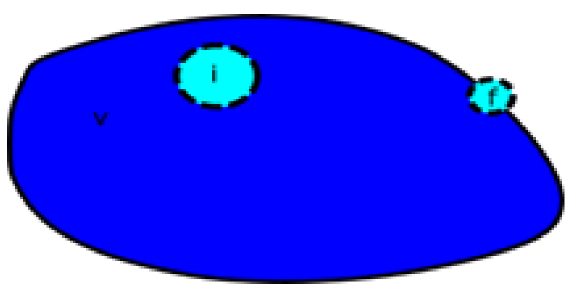


Figura 2.1: Relación entre interior, exterior y frontera.

Se tiene un conjunto A dentro del mismo tenemos un disco i, los puntos dentro de este son los puntos interiores del conjunto A, mientras que f representa puntos frontera ya que tiene que ser aquellos puntos que no son ni interior ni exterior del conjunto. El área V representa la vecindad del disco i, siendo aquellos puntos que no están en el disco, pero si en el conjunto A.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1. Método de investigación

En la presente investigación se asume un enfoque mixto, con un diseño anidado o incrustado concurrente de modelo dominante (DIAC) descrito por Hernández. R, Fernández. C y Baptista. P, (2010) [48] dando mayor relevancia al método cuantitativo que orienta el desarrollo del proceso y en tal sentido "El método que posee menor prioridad es anidado o incrustado dentro del que se considera central" (Hernández. et al, p.572) [9], es decir de orden cualitativo, en una relación de complementariedad de análisis sobre el fenómeno objeto de estudio.

En términos cuantitativos se propone un abordaje pre-experimental con la definición de un grupo muestral de selección aleatoria (con aplicación de pre-test, intervención y pos-test), que permite la construcción y comparación de los niveles de aprehensión de las nociones topológicas a partir de las evidencias observadas en los participantes, antes y después de la aplicación de una intervención diseñada para tal fin.

De otro lado, el carácter cualitativo se anida en el análisis de contenido aplicado a las actividades de intervención en el grupo muestral registradas en video; pues tal como lo referencia Creswell citado por Hernández et al (2010) [9]

ambas bases de datos nos pueden proporcionar distintas visiones del problema considerado. Por ejemplo, en un experimento "mixto" los datos cuantitativos pueden dar cuenta del efecto de los tratamientos, mientras que la evidencia cualitativa puede explorar las vivencias de los participantes durante los tratamientos. Así mismo, un enfoque puede ser enmarcado dentro del otro método (Hernández. et al, p.572) [9].

De esta forma se complementa la visión de análisis y se amplía las condiciones para responder al interrogante de investigación.

3.2. Contexto de la investigación

La presente investigación se desarrolla en la sede Libardo Madrid Valderrama perteneciente a la Institución Educativa Escuela Normal Superior "Jorge Isaacs" una institución pública de carácter mixto, que atiende los niveles de educación preescolar, básica en sus ciclos de primaria y secundaria, media académica y Programa de Formación Complementaria de Maestros. La sede Libardo Madrid Valderrama se encuentra dentro del territorio de El Barrio Humberto González Narváez, el cual está ubicado en el sur occidente del perímetro urbano, de conformidad con lo prescrito en el Acuerdo Nº 058 de Agosto de 1991 que actualiza la delimitación y la nomenclatura por ser de importancia para el desarrollo urbano y orientación de la ciudad de Roldanillo en el norte del Departamento del Valle del Cauca.

Esta sede atiende población desde el grado transición hasta el grado 5, pertenecientes a familias con bajos niveles de escolaridad en estratos socioeconómicos 1 y 2.

3.3. Población de la investigación

En la aplicación del pre-test, intervención y post-test se realiza una selección aleatoria de dieciocho (18) estudiantes de los grados de transición, primero y segundo. De cada grado se seleccionaron dos grupos de tres estudiantes sin distinción de género para realizar la aplicación de las pruebas de manera más dinámica. Los estudiantes seleccionados de igual forma participaron en la intervención de la cual deriva parte del análisis cualitativo.

3.4. Diseño de la metodología de investigación

Desde una perspectiva cuantitativa se propone comparar la activación de las nociones topológicas de continuidad, frontera, interior y exterior que se evidencian en los estudiantes a partir de la aplicación de un pre-test, una intervención y un pos-test, desde los cuales se efectúa una evaluación criterial que da cuenta de procesos cognitivos presentes o ausentes en la solución de tareas de visualización y razonamiento. Para este ejercicio se proponen cuatro montajes que orientan los interrogantes. El pre-test se efectúa en dos momentos, el primero de ellos en el que se presentan las imágenes sin un contexto de significación, para luego ubicarlas en un contexto de la cotidianidad; es decir asociadas con situaciones que son cercanas a la experiencia de los niños y niñas, y permiten describir aspectos del espacio fuera del plano.

La intervención por su parte se centra en experiencias de visualización y razonamiento empleando pompas de jabón, dadas las características y posibilidades de manipulación que esta se ofrecen.Finalmente en el pos-test se propone la manipulación de objetos cuyas formas se relacionan tanto con las formas presentadas en el pre-test como con las experiencias de visualización promovidas desde la intervención.

Tanto en el pre-test como en el pos-test se proponen cuatro montajes desde los cuales se definen criterios de análisis que dan evidencia de los procesos cognitivos empleados por los estudiantes. En el caso particular de los montajes 1 y 2 se aplica un criterio adicional para el pos-test, cuya evaluación solo es posible a través de la manipulación de objetos.

3.4.1. Descripción de los test

A continuación se presenta una descripción de las actividades e interrogantes propuestos a los estudiantes tanto en el pre-test como en el pos-test, permitiendo reconocer con mayor facilidad la coherencia entre los criterios de evaluación aplicados en cada fase y la noción topológica que se pretende activar.

Montaje N°1

Con este montaje se pretende identificar evidencias de la noción topológica de continuidad y en menor grado de frontera. Por lo cual se proponen interrogantes de observación de las imágenes y objetos para que los estudiantes den cuenta de la presencia de más de un objeto o si por el contario reconocen la imagen o el objeto como un todo continuo

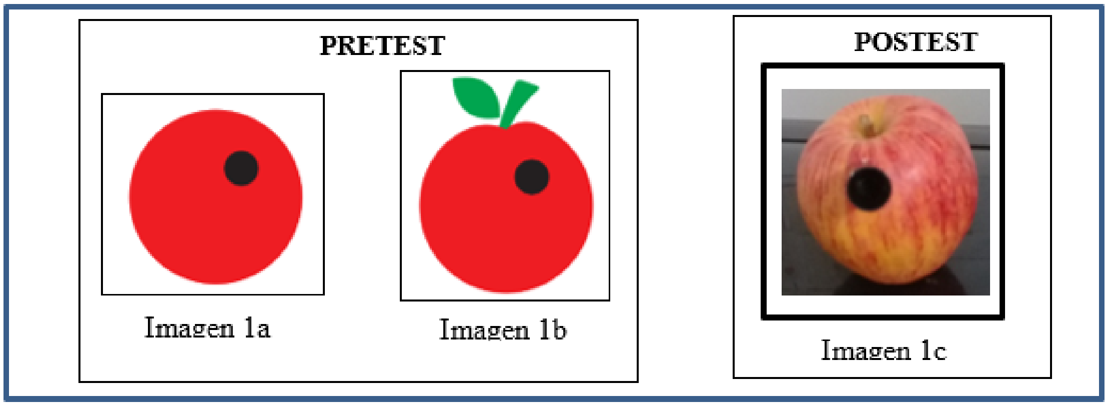


Figura 3.1: Montaje 1 empleado durante la aplicación del pre-test y el pos- test. Arango (2017)

Alcances

En el pre-test se presentan las imágenes $1a$ y $1b$; proponiendo los siguiente interrogantes

- ¿Qué observas en esta imagen?
- ¿Cuántos objetos observas?

Durante el pos-test se hace de nuevo el interrogante ¿Qué observas? En alusión al objeto de la imagen $1c$. También se pregunta ¿Cuántos objetos observas?

Noción topológica	Descriptores	Codificación
CONTINUIDAD Y FRONTERA	Emplea en su discurso expresiones que hacen referencia a formas (geométricas) básica presentes en las imágenes como punto círculo (bola, rueda)	$M1C1$
	Utiliza lenguaje corporal para referirse a formas geométricas básicas.	$M1C2$
	Reconoce en el objeto (imagen) otro objeto (agujero)que indica una forma de discontinuidad	$M1C3$
	Reconoce en el objeto (manzana/cilindro) un encuentro de fronteras que indica una forma de discontinuidad (la manzana está completa)	$M1C4$

Tabla 3.1: Criterios de evaluación montaje 1

Nota: Criterios de evaluación de las tareas de visualización y razonamiento propuestas en el pre y pos test.

El uso del contexto de significación de la manzana presentada en la imagen 1b induce en los estudiantes una asociación con un agujero (por ejemplo ocasionado por un insecto); en contraste con la presentación del objeto real que se muestra en la imagen 1c, y que consiste en una manzana con un pequeño cilindro de color negro justo en una posición que concuerda con la imagen 1b.

Montaje N°2

Con el montaje N°2 se pretende identificar evidencias de las nociones topológicas de interior y exterior, para ello se plantean interrogantes que permiten evidenciar el lugar en el que los estudiantes perciben el objeto al realizar la observación de las imágenes y objetos, tanto en el pre-test como en el pos-test.

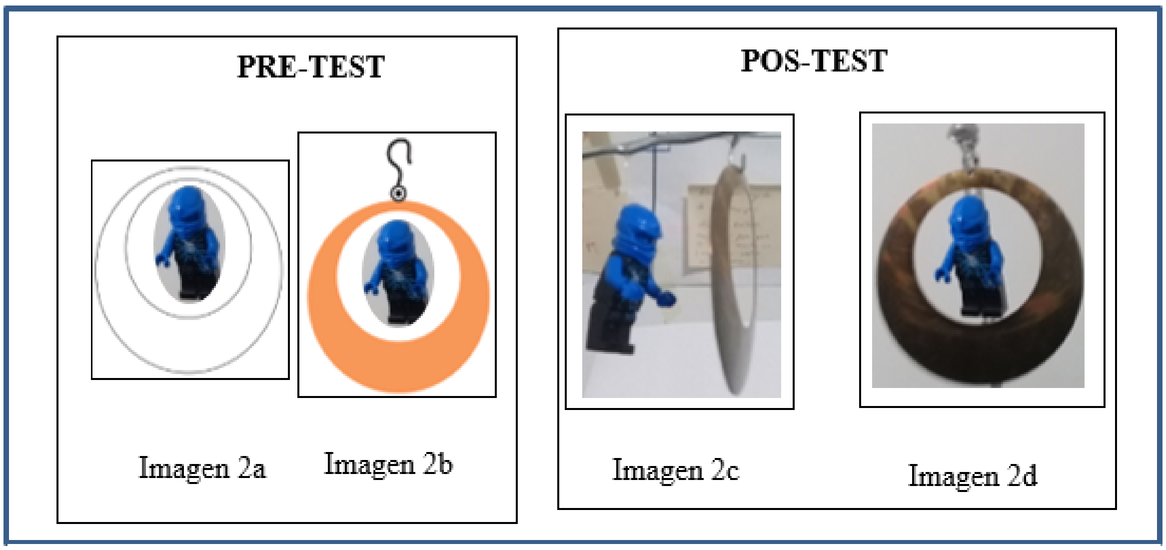


Figura 3.2: Montaje 2 empleado durante la aplicación del pre-test y el pos- test. Arango (2017)

En el pre-test se presenta la imagen 2a y luego la 2b. Para el pos-test, las imágenes 2c y 2d que representan dos perspectivas del mismo instrumento; en ambos casos se realizan los siguientes interrogantes

- ¿Dónde se encuentra el personaje?
- ¿El personaje se encuentra adentro o afuera?

Nota: Criterios de evaluación de las tareas de visualización y razonamiento propuestas en el pre y pos test.

El contexto de significación del accesorio presentado en la imagen 2b promueve en los estudiantes la asociación con un elemento que puede tener un objeto en el interior, en este caso, el personaje de lego está centrado sobre la imagen del accesorio, en contraste con la presentación en las imágenes 2c y 2d para el pos-test, donde el personaje del lego se ubica atrás del accesorio de tal manera que se muestra a los estudiantes dos vistas, una frontal y otra lateral.

Noción topológica	**Descriptores**	**Codificación**
INTERIOR - EXTERIOR	Reconoce la presencia de los elementos (personaje/circunferencia) empleando lenguaje natural	$M2C1$
	Indica el lugar en que se encuentra el personaje empleando gestos corporales o expresiones verbales, sin hacer referencia a la relación interior o exterior.	$M2C2$
	Hace referencia a la relación interior o exterior para indicar el lugar en que se encuentra el personaje, empleando expresiones verbales (como dentro, fuera) o gestos corporales.	$M2C3$
	Emplea otros tipos de relación (adelante, atrás) para indicar el lugar en que se encuentra el personaje.	$M2C4$

Tabla 3.2: Criterios de evaluación montaje 2

Montaje N°3

Con el montaje N°3 se pretende identificar evidencias de la noción topológica de frontera, donde con una serie de tres imágenes se busca que los estudiantes las asocien al contacto entre dos superficies, una fija y la otra en movimiento, esta serie de imágenes se acompaña por tres interrogantes tanto para el pre-test como para el pos-test.

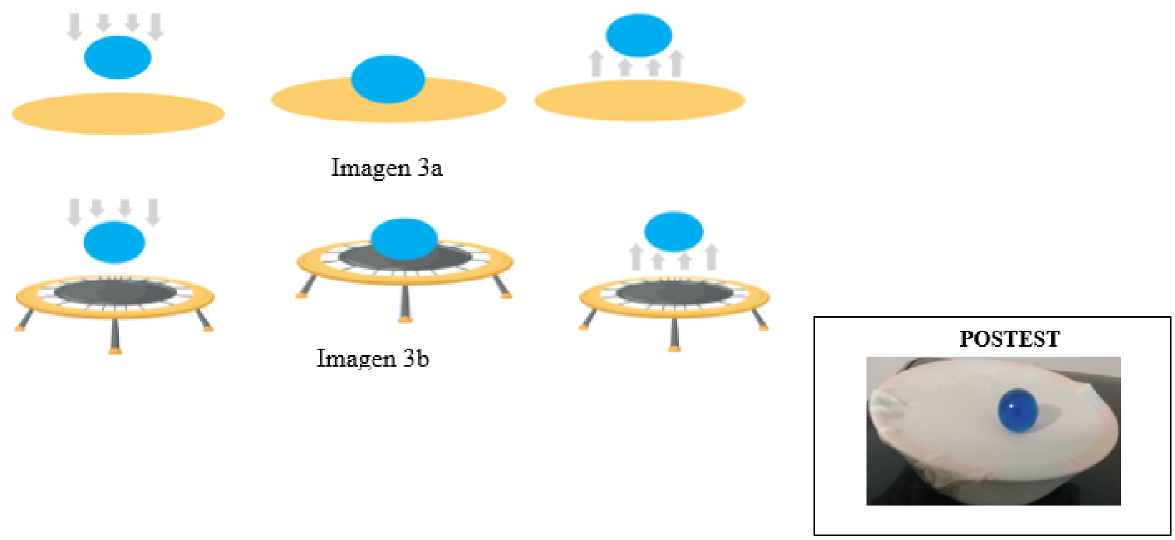


Figura 3.3: Montaje 3 empleado durante la aplicación del pre-test y el pos- test. Arango (2017)

Alcances

En el pre-test se presenta la imagen 3a y 3b; mientras que en la aplicación del postest se emplean los instrumentos de la imagen 3c; los cuales consisten en una esfera de cristal que se deja rebotar sobre una superficie elástica. Este montaje permite realizar los siguientes interrogantes

- ¿Qué observas en estas imágenes?
- ¿Cuántos objetos observas?
- ¿Qué está sucediendo?

Estos dos interrogantes se realizan a los estudiantes tanto en el pre-test como en el pos-test.

Noción topológica	Descriptores	Codificación
FRONTERA	Identifica como mínimo dos elementos (esfera/ superficie elástica) empleando lenguaje natural	$M3C1$
	Describe el comportamiento de los objetos (causa o efecto)	$M3C2$
	Intenta justificar el cambio de posición de los objetos en la secuencia de imágenes/ sucesos en razón del contacto entre sus fronteras.	$M3C3$

Tabla 3.3: Criterios de evaluación montaje 3

El contexto de significación que se muestra en la imagen $3b$ induce a los niños y niñas la relación con una cama elástica en la que entran en contacto dos superficies, es decir las fronteras. En concordancia con esta secuencia, en el pos-test se emplean los instrumentos de la imagen $3c$, donde los niños y niñas pueden observar la esfera rebotando sobre la cama elástica.

Montaje N°4

Con el montaje N°4 se pretende identificar evidencias de las nociones topológicas de interior?exterior y continuidad, donde a través de dos imágenes se busca que los niños y niñas manifiesten que representan objetos que contienen elementos, como el caso de una maraca; donde para llegar a conocer lo que produce el sonido en su interior es necesario romperla, para extraer dichos elementos. De la misma manera en el pos-test se entrega una esfera de barro que tiene elementos en su interior. Tanto las imágenes como el instrumento del pos-test se acompañan por tres interrogantes.

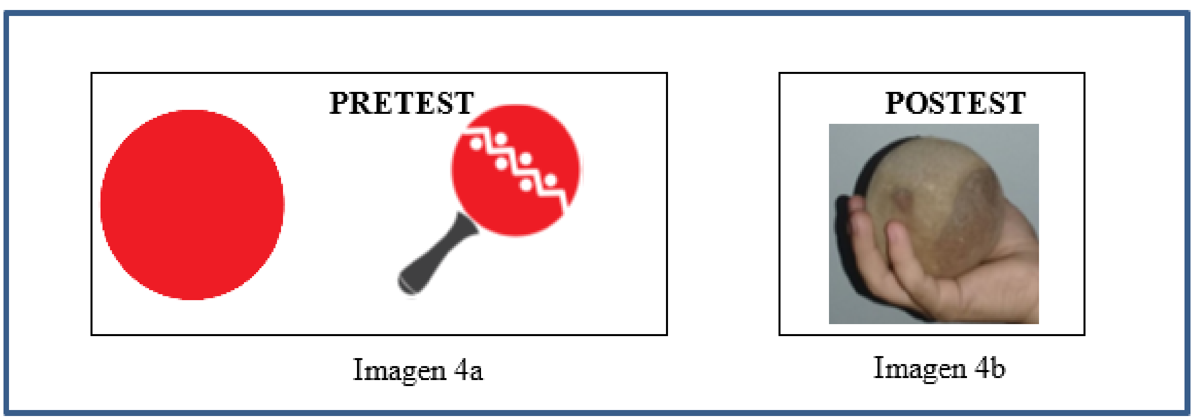


Figura 3.4: Montaje 4 empleado durante la aplicación del pre-test y el pos- test. Arango (2017)

Alcances

La imagen 4 del pre-test se acompaña con la siguiente consigna e interrogantes

- Describe lo que hay
- ¿Qué observas en esta imagen?

Y en el pos-test se pregunta a los niños y niñas ¿Cómo puedes conocer lo que hay en el interior?

Noción topológica	Descriptores	Codificación
INTERIOR EXTERIOR CONTINUIDAD	Emplea en su discurso expresiones que hacen referencia a formas (geométricas) básica presentes en las imágenes como círculo, redondo (bola).	$M4C1$
	Elabora hipótesis sobre características de los objetos que no son observables a simple vista.	$M4C2$
	Hace uso de múltiples sentidos (visión, audición y tacto) para explorar y comunicar características de los objetos.	$M4C3$

Tabla 3.4: Criterios de evaluación montaje 4

Descripción de la intervención

El proceso de intervención se realiza con la totalidad de los estudiantes que participan de la investigación, para lo cual se requiere organizar el trabajo con un solo grupo.

Para este ejercicio se emplean instrumentos construidos con alambre, cada uno de ellos pretende atacar diferentes nociones topológicas. A continuación se presenta una tabla con la respectiva descripción del instrumento, su denominación y la noción topológica que se aborda. Cada experiencia de visualización y razonamiento se relaciona con un momento narrativo y una pregunta o acción.

Teniendo en cuenta las edades y la etapa de desarrollo de los niños que participan en la presente investigación se integran las actividades de visualización y razonamiento a través de una estructura narrativa[1] que favorecen la motivación y el interés de los participantes permitiendo explorar con mayor facilidad la activación de las nociones topológicas de continuidad, frontera, interior, exterior.

[1] Ortega 2017 "El Jardín de las pompas de jabón" texto inédito. Es una creación inspirada en la curiosidad de tantas Alicia, especialmente de "Malditas Matemáticas. Alicia en el país de los número" del autor Frabetti (2000).

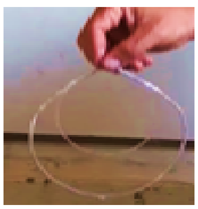
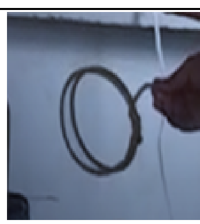
TIPO	IMAGEN	NOCIÓN TOPOLÓGICA	INTERROGANTE/ACCIÓN-EXPERIENCIA
J		FRONTERA CONTINUIDAD INTERIOR EXTERIOR	¿Es posible atravesar la tela de la araña sin romperla? Traspasar la película de jabón. ¿Será posible que la mariposa quede dentro de la red sin que pueda romperse? Soplar la película de jabón formando una superficie cónica.
ML		FRONTERA	¿Es posible estirar la telaraña sin romperla? El área de la película se modifica al estirar el hilo, modificando a su vez la frontera.
G		FRONTERA INTERIOR EXTERIOR	¿Qué le sucede a la tela de la araña cuando un escarabajo la atraviesa? Romper la pompa que queda al interior de la frontera formada por el hilo en una especie de aro.
J/M	Combinación de instrumentos.	FRONTERA	¿La mariposa está adentro o afuera de la red? En esta experiencia hay tres posibilidades sujetas al azar; 1- la burbuja y la pompa entran en contacto tensionándose pero manteniendo su forma. 2- la burbuja rebota en la pompa. 3- la burbuja se integra a la pompa.
T		INTERIOR EXTERIOR FRONTERA	¿Te imaginas una mariposa atrapada en tres telarañas? La pompa atrapada en el tetraedro
J y M		INTERIOR EXTERIOR FRONTERA	Alicia con ayuda de sus amigos dibuja muchas mariposas para que el abuelo Pedro nunca las vuelva a cazar. Intenta atrapar mariposas dentro de una burbuja Atrapar burbujas en movimiento con una burbuja de mayor diámetro.

Tabla 3.5: Relación entre noción topológica e interrogante/acción

CAPÍTULO 4

HALLAZGOS Y DISCUSIÓN

4.1. Análisis de resultados cuantitativos

A continuación se describe el análisis cuantitativo aplicado en la evaluación de las tareas de visualización y razonamiento aplicadas durante el pre-test y pos-test, que dan cuenta de la activación de las nociones topológicas descritas en el diseño metodológico. La primera parte se expresa en valores porcentuales en tanto que la comparación se realiza con la frecuencia absoluta de la rubricas de evaluación empleadas durante el tratamiento de la información.

4.1.1. Pre-test

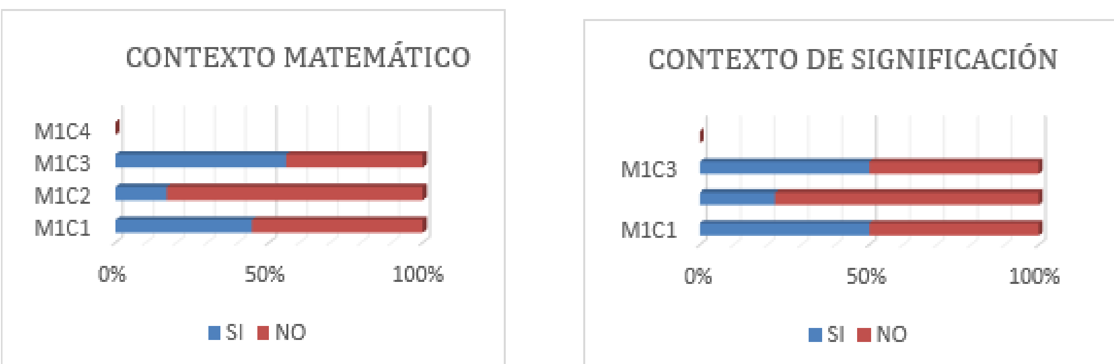
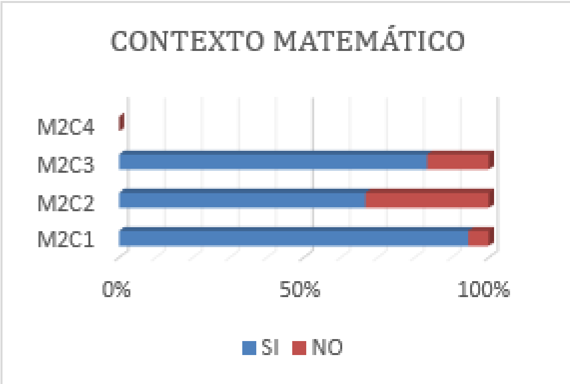


Figura 4.1: Análisis de pre-test, montaje 1. Arango (2017)

La aplicación del pre-test se realiza en dos momentos que permiten obtener información de las situaciones en contextos matemáticos y contextos de significación; por lo tanto cada montaje en esta fase presenta dos gráficas que ilustran dichos resultados.

En la gráfica de contexto matemático se muestra la evaluación de tres criterios. Cerca del 45 % de los estudiantes cumple con el criterio M1C1 en tanto que el criterio M1C2 sólo lo alcanza el 18 %. Se destaca que el 55 % de los estudiantes cumplen con el criterio M1C3.

En la gráfica de contexto de significación se muestra la evaluación de tres criterios. Se destaca que el 50 % de los estudiantes cumplen con los criterios M1C1 y M1C3, mientras que el criterio M1C2 sólo es alcanzado por el 20 % de los estudiantes.



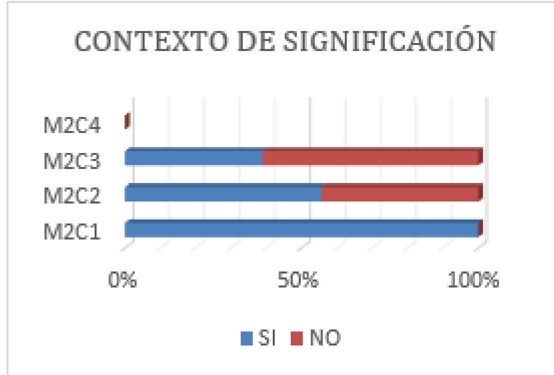
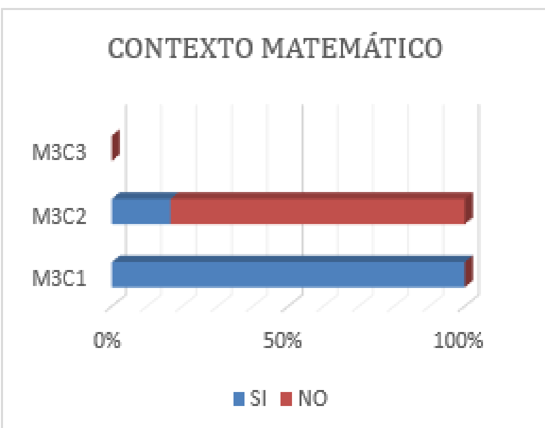


Figura 4.2: Análisis de pre-test, montaje 2. Arango (2017)

En la gráfica de contexto matemático se muestra la evaluación de tres criterios. Se puede observar que al menos el 80 % de los estudiantes cumplen con el criterio $M2C1$ y $M2C3$, en tanto que el criterio $M2C2$ sólo alcanza un 63 % de logro.

En la gráfica de contexto de significación se muestra la evaluación de tres criterios. El criterio $M2C1$ se cumple por el 100 % de los estudiantes, en tanto que el criterio $M2C2$ alcanza un cumplimiento cercano al 54 % y el $M2C3$ al 37 %.



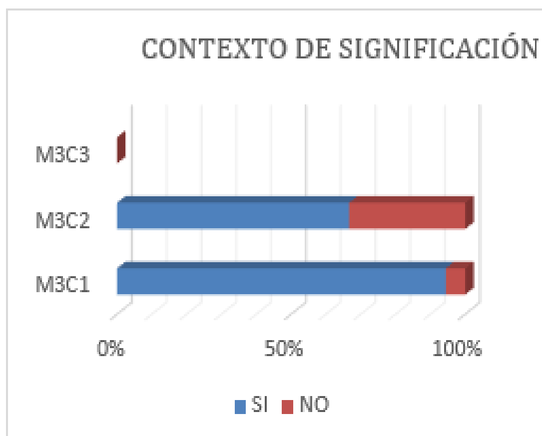
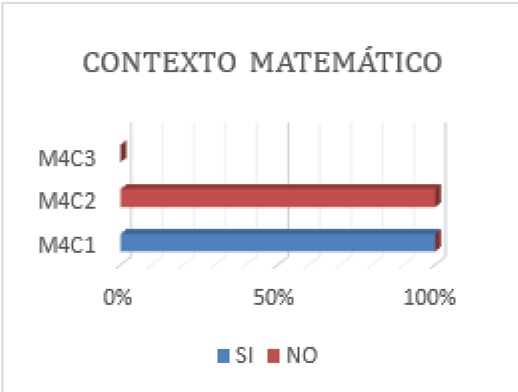


Figura 4.3: Análisis de pre-test, montaje 3. Arango (2017)

En la gráfica de contexto matemático se muestra la evaluación de dos criterios. Se destaca que el 100 % de los estudiantes cumple con el criterio $M3C1$ en contraste el 85 % de los estudiantes no cumple con el criterio $M3C2$.

En la gráfica de contexto de significación se muestra la evaluación de dos criterios. Los estudiantes alcanzan un 95 % de cumplimiento en el criterio $M3C1$ y un 64 % en el criterio $M3C2$.



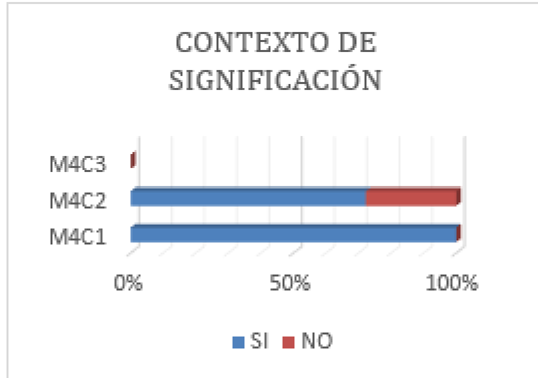


Figura 4.4: Análisis de pre-test, montaje 4. Arango (2017)

En la gráfica de contexto matemático se muestra la evaluación de dos criterios. Mientras el criterio $M4C1$ es alcanzado por el 100 % de los estudiantes, el criterio $M4C2$ da evidencia que ningún estudiante cumple con el criterio valorado.

En la gráfica de contexto de significación se muestra la evaluación de dos criterios. Se observa el cumplimiento del 100 % de los estudiantes en el criterio $M4C1$, frente a un 68 % para el caso del criterio $M4C2$.

POS TEST 3D

A continuación se presenta una serie de gráficas que muestran los resultados de la evaluación de los criterios definidos para el post-test, el cual se caracteriza por emplear tareas de visualización de razonamiento en montajes con objetos (3D) presentes en la cotidianidad de los estudiantes y por tanto constituyen contextos de significación en sí mismos.

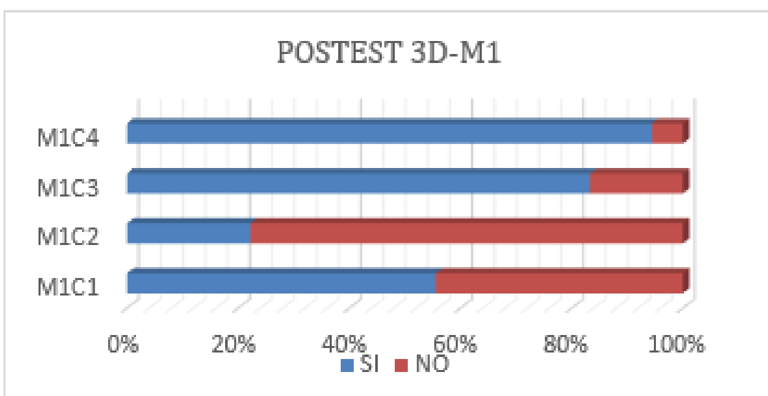


Figura 4.5: Análisis de pos-test, montaje 1. Arango (2017)

En esta gráfica se muestra la evaluación de cuatro criterios. El criterio M1C1 alcanza un cumplimiento del 53 % de los estudiantes, mientras que el $M1C2$ sólo alcanza un 20 %. Se destaca que al menos el 80 % de los estudiantes logran cumplir con los criterios $M1C3$ y $M1C4$.

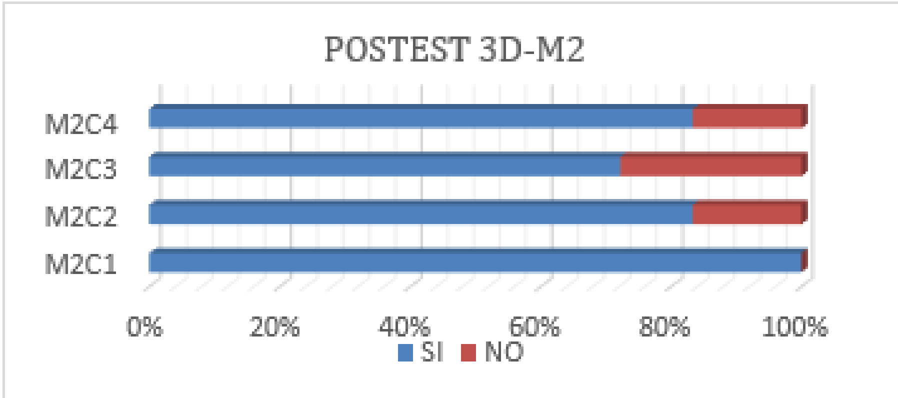


Figura 4.6: Análisis de pos-test, montaje 2. Arango (2017)

En la gráfica anterior se muestra la evaluación de cuatro criterios. En el criterio $M2C1$ los estudiantes alcanzan un 100 % de cumplimiento, en tanto que en los criterios $M2C2$ y $M2C4$ el cumplimiento llega al 80 %, frente a un 70 % del criterio $M2C3$.

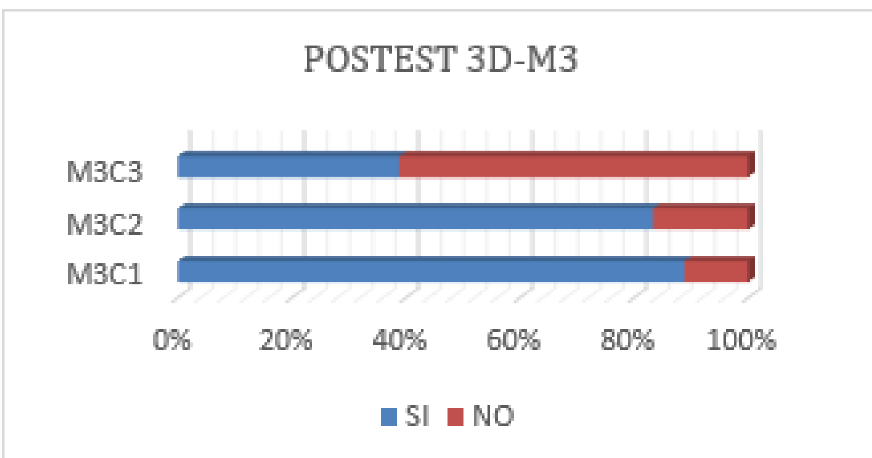


Figura 4.7: Análisis de pos-test, montaje 3. Arango (2017)

En la gráfica se muestra la evaluación de tres criterios. Se destaca que al menos el 80 % de los estudiantes cumplen con los criterios $M3C1$ y $M3C2$, mientras que sólo el 35 % cumplen con el criterio $M3C3$.

En esta gráfica se muestra la evaluación de tres criterios. Se destaca que el 100 % de los estudiantes cumplen con los criterios $M4C1$ y $M4C2$, mientras que el criterio $M4C3$ alcanza un nivel de cumplimiento cercano al 75 %.

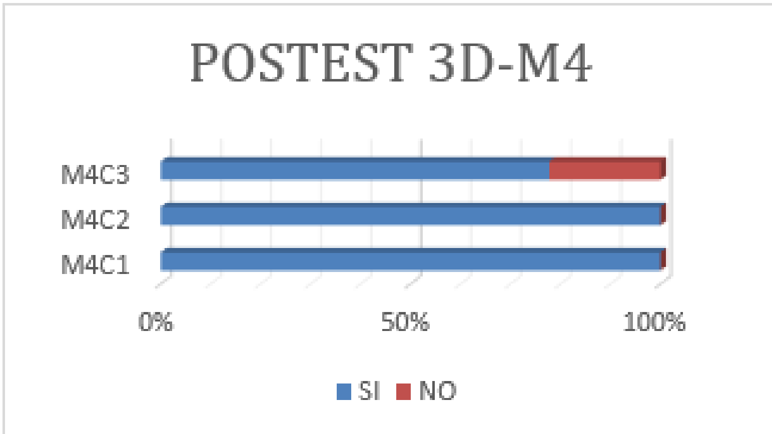


Figura 4.8: Análisis de pos-test, montaje 4. Arango (2017)

4.1.2. Análisis comparativo pre-test y pos-test

A continuación se presenta la comparación de los resultados obtenidos en el pre-test y pos-test a partir de la cantidad de estudiantes que cumplen los criterios valorados en cada montaje sin integrar en los conteos aquellos que no lo cumplen. Se recuerda la existencia de criterios específicos valorados exclusivamente durante el post-test.

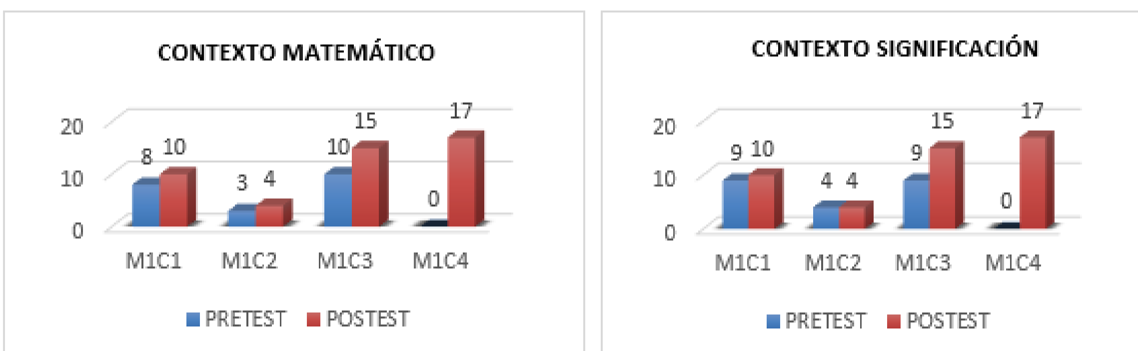


Figura 4.9: Análisis comparativo pre y pos test, montaje 1. Arango (2017)

En gráfica de comparación del contexto matemático, se observa un incremento de la cantidad de estudiantes que cumplen con estos criterios $M1C1$, $M1C2$ y $M1C3$. De igual manera se muestra que 17 estudiantes que representan el 94 % de los participantes alcanzan el criterio $M1C4$.

En la gráfica de comparación del contexto de significación, se destaca un incremento significativo en la cantidad de estudiantes que cumplen con el criterio $M1C3$, mientras que el criterio $M1C1$ no experimenta una variación importa en tanto que $M1C2$ permanece constante

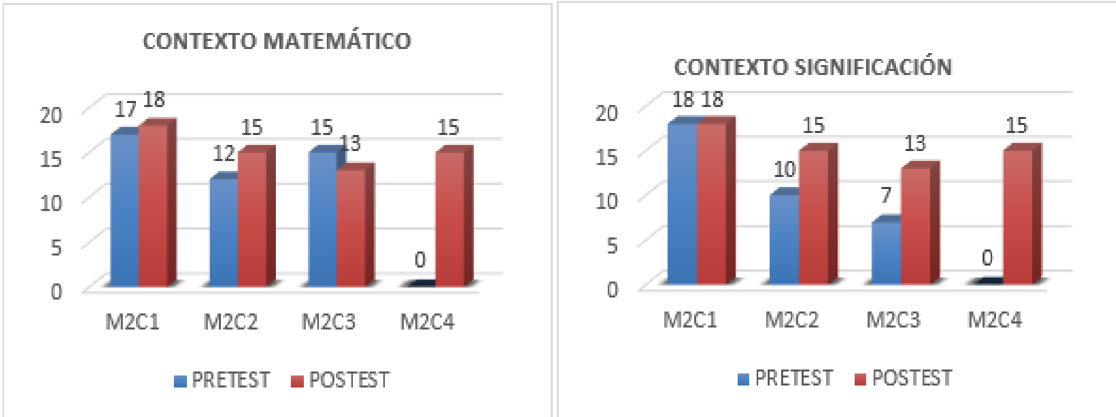


Figura 4.10: Análisis comparativo pre y pos test, montaje 2. Arango (2017)

En gráfica de comparación del contexto matemático, se observa que los criterios $M2C1$ y $M2C2$ experimentaron un leve incremento en la cantidad de estudiantes, en contraste el criterio $M2C4$, muestra una disminución moderada.

En la gráfica de comparación del contexto de significación, se destaca un incremento significativo de la cantidad de estudiantes en el cumplimiento de los criterios $M2C2$ y $M2C3$, mientras que el criterio $M2C1$ permanece constante.

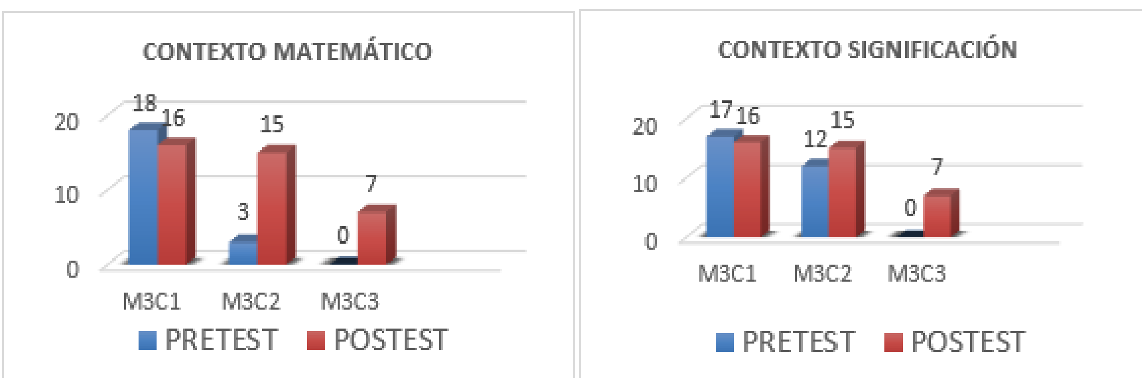


Figura 4.11: Análisis comparativo pre y pos test, montaje 3. Arango (2017)

En gráfica de comparación del contexto matemático, se observa un incremento significativo de la cantidad de estudiantes que logran cumplir del criterio $M3C2$ y una leve disminución en $M3C1$.

En la gráfica de comparación del contexto de significación, se destaca un incremento significativo de la cantidad de estudiantes en el cumplimiento de los criterios $M2C2$ y $M2C3$, mientras que el criterio $M3C1$ permanece constante.

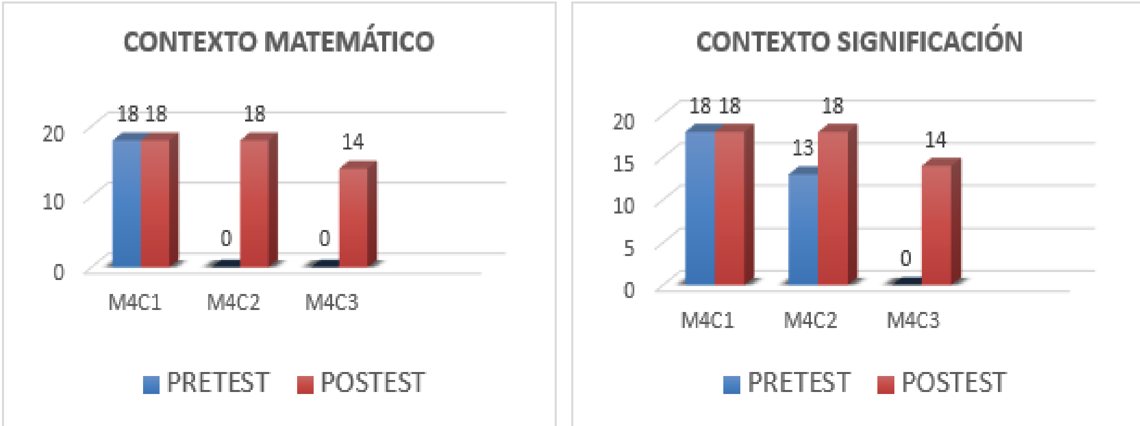


Figura 4.12: Análisis comparativo pre y pos test, montaje 4. Arango (2017)

En gráfica de comparación del contexto matemático, se observa que la cantidad de estudiantes que logran el criterio $M4C1$ permanecen constantes y representa el 100 %, en contraste se destaca que durante la aplicación del pre test ningún estudiante logra el criterio $M4C2$, mientras que en el post test lo cumplen la totalidad de estudiantes.

En la gráfica de comparación del contexto de significación, se destaca que el 100 % de los estudiantes cumplen con el criterio $M4C1$ en ambas pruebas, mientras que en el criterio $M4C2$ se observa un incremento significativo en la cantidad de estudiantes que lo alcanza y representa un 100 % de la muestra.

4.2. ANÁLISIS DE CONTENIDO

A continuación se presenta un diagrama que resulta del análisis de contenido realizado al discurso de los estudiantes durante su participación en el pre y pos-test. En él se muestran las categorías y subcategorías que emergen de dicho análisis que amplían la comprensión del fenómeno objeto de estudio.

Figura 4.13: categorías y subcategorías emergentes de análisis de contenido

En el diagrama se puede observar tres categorías a saber: Noción Topológica, Dimensión Cognoscitiva, Comprensión Dinámica del Mundo. Cada una de ellas engloba una serie de elementos interrelacionados que se explican a continuación.

4.2.1. Noción topológica

Desde la participación de los estudiantes en los test, emergen en su discurso tres de las cuatro nociones topológicas puestas en cuestión: Interioridad, exterioridad y continuidad.

La interioridad se hace presente por ejemplo a través de frases como "E2: En la cárcel"[1] para referirse a la descripción del lugar en que se encuentra el objeto asociado en la tarea, de igual manera en lo expresado por E4: "una cosita adentro" y E12: "Un círculo, y otro círculo, un hombre ahí metido en el hueco". Estas frases tienen en común la intención de plasmar su concepción del interior y el exterior en relaciones dicotómicas; es decir, reconocen que un objeto no puede estar simultáneamente en el interior y en el exterior de algo; sin embargo, esta idea se reevalúa durante la discusión frente al cambio de perspectiva.

Por otra parte la noción de continuidad se explicita en expresiones como E5: "Es una manzana con un gusanito en el hueco" para responder al interrogante ¿Qué observas en la imagen? De nuevo se emplea como recurso una relación opuesta; es decir de discontinuidad que si bien no es una noción topológica propiamente, sí permite construir asociaciones mediante el razonamiento intuitivo, por ejemplo para recocer la cantidad de objetos dispuesto en los montajes E5: "dos o tres" aunque de hecho se presenten como una unidad dentro de los alcances del test. También se puede reconocer en las expresiones E7: "romperla", E6: "partirla a la mitad para ver", como respuesta al interrogante ¿Cómo puedes conocer lo que hay en su interior?, haciendo alusión a la manipulación de la esfera de barro.

La noción de frontera se presenta como zona gris en las expresiones de los estudiantes, de hecho se nombra y se presenta en el diagrama, bajo esta salvedad, no es clara la presencia de esta noción.

4.2.2. Dimensión cognoscitiva

Esta categoría emerge en relación con cuatro conceptos movilizados desde los procesos de razonamiento expresados por los participantes: Experiencia, cotidianidad, imaginación y conocimiento de la forma.

En el discurso de los participantes se observa una constante de relación entre la experiencia y la cotidianidad, esta última entendida como situaciones que en mayor frecuencia los niños experimentan, es decir, no todo lo que se experimenta hace parte de la cotidianidad. Esto explica por qué, donde algunos participantes observan E2: "una manzana, una tapita, un pollito", otro en cambio reconoce E1: "un señor viendo las estrellas". Estas ideas expresadas por los participantes buscan construir explicaciones causales comprensibles para ellos de las situaciones que se proponen en las tareas de los test.

En igual sentido hay momentos en que la búsqueda de explicaciones sitúa al razonamiento del niño en un despliegue de la imaginación para la construcción de inferencias, valiéndose

[1]Transcrito literalmente del discurso del estudiante codificado como E2 en la presente investigación.

nuevamente tanto de la cotidianidad como la experiencia, E8: "Está en la nave", E10:"Está fuera del planeta" E13: "volando", E4:"Donde esta papito Dios".

Finalmente esta dimensión Cognoscitiva muestra una primacía en el conocimiento de las formas fundamentalmente vistas en el plano, situación que se evidencia en expresiones como E7:" Un circulo"

Comprensión dinámica del mundo

Esta categoría contiene subcategorías que se interrelacionan en la comprensión y construcción de la realidad, desde la combinación del espacio, el tiempo y el lugar. Como se reconoce anteriormente las experiencias permiten situar al niño en tiempo presente, es decir aquí y ahora y en lugares que se describen dentro de marcos referenciales que en primera impresión da lugar a interpretaciones imprecisas , por ejemplo para dar respuesta a interrogantes ¿Dónde se encuentra el personaje? E10: "ahí", E15: "al otro lado"; pero que poco a poco adquieren mayor consistencia en sentido pragmático. E6: "en la telaraña" E12: "se ve como si estuviera dentro del arito", producto en algunos casos del cambio de perspectiva, como marco de referencia. E3: "arriba", "abajo", "en el medio"

Con lo anterior se reconocen dos ideas esenciales en la descripción de esta categoría, la primera hace referencia al carácter multi-sensorial en las experiencias de los participantes que posibilitan la construcción de inferencias, es decir, formas de visualización y razonamiento que tiene lugar más allá de lo observable en el campo perceptivo explicito expuesto en los montajes. E9: "una cosita que tiene adentro una piedra". Sin embargo para los participantes no es suficiente construir la inferencia sobre, por ejemplo lo que hay dentro de la esfera, para ellos es importante casi como una urgencia, producir una transformación que se espera reversible y reveladora de la realidad en la conjetura que estos elaboran, E2: "una pelota con algo dentro", E5: "quebrar esto y volverlo a poner", E1: "Dañarla"; por tanto, es la transformación la segunda idea clave para construir una comprensión dinámica del mundo.

En otras palabras, los niños y niñas experimentan en presente, en una combinación del espacio, el tempo y el lugar, que provoca transformaciones reversibles y no reversibles y marco-referencial desde una percepción multi-sensorial que permite construir una comprensión dinámica del mundo, aun cuando no den cuenta de ello a través de su discurso.

4.3. Discusión

En este apartado se intenta dar respuesta al interrogante formulado en el capítulo inicial ¿De qué manera el empleo de pompas de jabón estimula el desarrollo de nociones topológicas en los grados-niños de transición, 1 y 2 grado de escolaridad? En su lectura se asume como hipótesis que las nociones topológicas efectivamente se estimulan mediante el empleo de pompas de jabón; por tanto el énfasis de la respuesta se centra especialmente en ampliar la comprensión sobre la manera en que el uso y manipulación de las pompas, movilizan en las estructuras cognoscitivas y cognitivas de los participantes las nociones topológicas delimitadas en el diseño metodológico (continuidad, interioridad, exterioridad y frontera). Tal hipótesis se valida en el análisis comparativo que deriva del método cualitativo que orienta la investigación; en él se muestra como los estudiantes logran evidenciar un mayor cumplimiento de los criterios que se emplean para evaluar la activación de la noción topológica en la estructura cognitiva desde los procesos de razonamiento y visualización.

Al profundizar en el análisis comparativo, se logra evidenciar que las tareas de menor complejidad (reconocer, describir) no presentan variación significativa, en tanto que las de mayor complejidad (análisis de cambio de perspectiva, construcción de inferencias, explicaciones de causa y efecto) presentan una variación media de un poco más del 30 % en el cumplimiento de los criterios que evalúan la activación de las nociones topológicas. En este sentido es legítimo preguntar, si dichas variaciones obedecen al enriquecimiento de las experiencias de visualización promovidas desde la intervención o son producto del azar. Sin embargo, la congruencia o alineación entre el proceso de intervención y los instrumentos e interrogantes formulados en el pos test, hacen sospechar que tales variaciones derivan en gran medida de las experiencias enriquecidas en los niños y niñas participantes, centradas en la manipulación de pompas de jabón.

Por otra parte el desarrollo de tareas de mayor complejidad, centra la discusión en la pertinencia de privilegiar el espacio topológico (Piaget e Inhelder, 1956) en el estudio inicial de la geometría, dado que los niños y niñas tienen una comprensión dinámica del mundo, aún en situaciones cotidianas como la de atarse los cordones o jugar con pompas de jabón durante la ducha.

Finalmente conviene describir las características intrínsecas de la manipulación de pompas de jabón que a juicio de las observaciones realizadas durante la intervención, estimulan el aprendizaje de las nociones topológicas tratadas en esta discusión.

La pompa de jabón enriquece la experiencia de visualización dado que posibilita la construcción, destrucción y transformación en un espacio de tiempo corto pero suficiente para lograr capturar la atención de los niños. La pompa se transforma por ejemplo en esfera, en una película cónica, por tanto no se trata solo de manipulación en el sentido de las manos, sino en las operaciones que se logran a través de la visualización y en menor medida del razonamiento declarado de forma verbal. La pompa es un artefacto para jugar pero también para aprender. La pompa de jabón se desenvuelve en el espacio topológico, y este es el espacio geométrico natural en el que el niño se mueve. El carácter traslucido permite el reconocimiento de formas y estructuras que de otra manera resulta imposible observar, por ejemplo cuando se trabaja con cuerpo opacos.

Complementando la visión sobre las ventajas que ofrece la manipulación de las pompas de jabón en la construcción de nociones topológicas, se destaca la dificultad observada en los niños para evidenciar el cumplimiento de los criterios que evalúan la activación de la noción de frontera; en contraste con la facilidad de manipulación y transformación de la frontera de una estructura que se presenta durante la intervención, donde gracias a la tendencia de la pompa para reducir el área a la mínima posible, permite que los participantes modifiquen la frontera de la estructura que se forma con la pompa.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

En este trabajo investigativo se observan evidencias suficientes para considerar que enriquecer las experiencias de visualización y razonamiento empleando pompas de jabón, permite que los estudiantes de los primeros grados de escolaridad alcancen mejores desempeños asociados a tareas y procesos de mayor complejidad como el análisis de cambio de perspectiva, construcción de inferencias y explicaciones de causa y efecto.

Por otra parte, se reconoce que las nociones topológicas logran una mayor activación de las estructuras cognitiva y cognoscitiva, cuando estas se abordan desde el espacio geométrico natural de los niños, es decir el espacio topológico, pues tal como lo muestra el análisis cualitativo, los estudiantes revelan mayor comprensión si se compara con las tareas que se evalúan desde un contexto geométrico restringido a dos dimensiones.

Existen características intrínsecas de las pompas de jabón (traslucidez, facilidad de construcción y transformación, tensabilidad, tendencia de reducción al área mínima, entre otras) que manipuladas con propósitos pedagógicos y didácticos pueden enriquecer las experiencias de visualización y razonamiento, logrando movilizar las nociones topológicas exploradas en esta investigación; sin dejar de lado el goce que representa el trabajo con pompas de jabón para los niños y niñas dada la dimensión lúdica que caracteriza esta etapa del desarrollo infantil.

Como maestrante considero que esta experiencia investigativa constituye una oportunidad para reflexionar sobre el tipo de transformación que requiere la enseñanza de la geometría en la escuela, especialmente del espacio topológico dada la importancia de ésta en el desarrollo de la dimensión espacial, en contraste con la poca actividad investigativa existente en el contexto local y nacional relacionada con este tema en particular y para los grados de transición, primero y segundo donde se ha privilegiado tradicionalmente la geometría Euclídea.

RECOMENDACIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Es de suma importancia involucrar a los docentes que tienen bajo su responsabilidad la enseñanza de la geometría en los primeros grados de escolaridad, en la apropiación y análisis crítico de hallazgos producto de investigaciones relacionadas con el estudio de las nociones topológicas, lo cual les permite ampliar la mirada y comprensión para el diseño de estrategias metodológicas y didácticas de mayor pertinencia y coherencia con la estructura cognitiva de los niños y niñas, es decir con la manera en que construyen su realidad.

Una perspectiva futura de investigación que puede despertar interés, hace referencia a la exploración de la noción de frontera evaluada en otras etapas de desarrollo; dado que en este trabajo se logra observar debilidades en la activación de esta noción producto de las experiencias de visualización aplicadas en los test, que si bien pueden estar asociadas a las condiciones del diseño metodológico, también es posible considerar que los procesos de razonamiento para explicitar la apropiación de la noción de frontera muestran una resistencia propia de la exigencia intelectual que se requiere desplegar para evidenciar su activación en las edades o etapas de desarrollo evaluadas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] CASTRO, J, *El Desarrollo de la noción de Espacio en el niño de Educación inicial*, Revista Acción Pedagógica, Vol 13, Universidad de los Andes, Venezuela, 2004.

[2] OCHAITA, E, *"La teoría de Piaget en el desarrollo del conocimiento espacial"*, (Artículo) Estudios de Psicología, N 14/15, Universidad Autónoma de Madrid, 1983.

[3] CASTRO. E, OLMA. M, CASTRO. E,, *Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Recuperado 10/01/2017 http://wdb.ugr.es/ encastro/wp- content/uploads/DesarrolloPensamiento.pdf, 2002.

[4] Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L., *Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación Historia*, Educación matemática, México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1998.

[5] Martínez, G., *Representaciones sociales que poseen estudiantes de nivel medio superior acerca del aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*, Perfiles Educativos, 33(132). Recuperado de http://www.scielo.org.mx/ scielo, [15/04/2014], México, 2011.

[6] CANTORAL, Ricardo, *"Una visión de la matemática educativa"*, En: Perspectivas en educación matemática, SANTOS TRIGO, Manuel y SÁNCHEZ, Ernesto (Compiladores), México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1996.

[7] ROMERO, A, *"La Geometría en la etapa de Educación Infantil"*, tesis de pregrado, Universidad de AlmerÃa, España, 2014.

[8] TRUJILLO, A., OSORIO, D, *"Experiencia Topológica en grados cuarto, quinto y sexto de la Educación Básica"*, (tesis de pregrado), Universidad Tecnológica de Pereira, Risaralda, Colombia, 2013.

[9] HERNÁNDEZ. R, FERNÁNDEZ. C, BAPTISTA. P *Metodología de la investigación*, (5Âª Ed), México: Mc Graw Hall, 2010.

[10] Castro M, E. Castro M, E. Del Olmo Romero E, *Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, 59, 2-117 Recuperado de: http://wdb.ugr.es/ encastro/wp-content/uploads/DesarrolloPensamiento.pdf, 2002.

[11] Piaget, J., *"Seis estudios de Psicología"*, Barcelona, España: Ediciones, Gonthier, 1964.

[12] DUVAL, R., *Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasbourg, 1993.

[13] AFANASIEV, V., *Fundamentos de Filosofía*, Ediciones en lenguas extranjeras, Moscú, pág, 181 recuperado http://www.abramoscomillas.org/numeradas20pdf/LibroPag.20452.pdf

[14] Van Hiele, P., *El Problema de la Comprensión, En Conexión con la Comprensión de los Escolares en el Aprendizaje de la Geometría*, (tesis doctoral) Universidad Real de Utrecht, Holanda, 1957.

[15] Marmolejo, G., *La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad*, Revista Sigma, 10 (2), Pág. 10-26 http://revistasigma.udenar.edu.co/articulos/Volúmen X 2/2.pdf, 2010.

[16] Marmolejo. G, Vega, M, *La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje*, Educación Matemática, vol. 24, núm. 3, diciembre, 2012, pp. 7-32 Grupo Santillana México Distrito Federal, México, Recuperado: ttp://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846001, 2012.

[17] Gardner, *Estructuras de la Mente*, Santafé de Bogotá: Fondo de Cultura Económica LTDA, 1993.

[18] D'amore, Fandiño, Iori y Matteuzzi, *Análisis de los antecedentes históricos, filosóficos de la paradoja cognitiva de Duval.*, 2015.

Figura 4.14: Evidencias pompas de jabón en la institución