Universidad Tecnológica de Pereira

Antonio José Camacho
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
Calidad, excelencia y compromiso social

ESTRATEGIA DIDÁCTICA MEDIADA POR GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA A ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES DE LA INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA ANTONIO JOSÉ CAMACHO

ADEMIR LUCUMI VILLEGAS

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ciencias Básicas

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Santiago de Cali

2017

ESTRATEGIA DIDÁCTICA MEDIADA POR GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA A ESTUDIANTES DE PRIMER SEMESTRE DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES DE LA INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA ANTONIO JOSÉ CAMACHO

ADEMIR LUCUMI VILLEGAS

Trabajo de grado para optar por el título de Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Director del trabajo de grado

Mg. Harold Castillo Sánchez

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de Ciencias Básicas

Maestría en Enseñanza de la Matemática

Santiago de Cali

2017

Dedicatoria

A Dios, mi mayor esperanza

A Seydi, amada esposa, paloma y perfecta mía

A mis padres José Y Ana, qué bendición….

Agradecimientos

A Dios, por hacer posible experimentar todas las maravillosas cosas que me han pasado

A la Universidad Tecnológica de Pereira, por todo el conocimiento que con gran pericia, propiciaron su construcción en mí

A la Institución Universitaria Antonio José Camacho, su directiva, a mi Jefe Ph.D Héctor García, al profesor Hernán Mera, al grupo 101 del periodo 2017-01, por ser protagonistas de esta loca, desafiante, y a la vez fascinante aventura académica en que me han acompañado

A mi director Mg. Harold Castillo Sánchez, por su efectiva orientación en este proceso

A mis compañeros de maestría, con quienes compartimos numerosos y enriquecedores momentos, en especial a mis amigos Sandra y Emiliano

A la congregación Cristiana IUMEC la Floresta en Cali, por su ayuda espiritual en este proceso

A mi familia, por su ayuda y apoyo incondicional

A todos, los que de una u otra forma participaron a mi favor, en la consecución de este anhelado objetivo,

Mil y mil gracias....¡Aleluya!!!!!

FICHA DE PRESENTACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

TÍTULO DEL TRABAJO DE GRADO:

Estrategia didáctica mediada por Geogebra para la enseñanza de la función cuadrática a estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Institución Universitaria Antonio José Camacho.

Apellidos y Nombres del Autor: Ademir Lucumí Villegas

Correo Electrónico: alucumi@admon.uniajc.edu.co

Tipo de Modalidad: Investigación Aplicada

Grupo de Investigación al cual se encuentra adscrito el director del trabajo: Grupo de investigación en educación matemática y tecnología de la Pontificia Universidad Javeriana de Cali (Reconocido internamente)

Línea de Investigación: Matemáticas Educativa

Director del Trabajo de Grado: *Mg. Harold Castillo Sánchez*

Tiempo estimado para el desarrollo del trabajo de grado (en meses): 12

Palabras claves: *registros de representación semiótica, momentos didácticos, concepto, recurso, comprensión integrativa, unidades significantes, función cuadrática*

Resumen

Este documento contiene la descripción del desarrollo y resultados obtenidos de un trabajo de investigación aplicada, realizado en el marco de la Maestría de Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP) en convenio con la Institución Universitaria Antonio José Camacho (UNIAJC), en el cual se plantea una estrategia didáctica mediada por Geogebra para la enseñanza de la función cuadrática a estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ciencias Empresariales de la UNIAJC.

Esta investigación se llevó a cabo bajo el marco teórico compuesto por la teoría de registros de representación semiótica de Duval (2004), momentos didácticos de Chevallard (1999) y campos conceptuales de Vergnaud (1990), donde el primero afirma que no puede haber una aprehensión de un objeto matemático si no se hace uso de diferentes representaciones del mismo y además sostiene que una comprensión integrativa de dicho objeto, exige la coordinación entre sus registros de representación, es decir, la discriminación de las unidades significantes en cada registro, que posibilite realizar las transformaciones de tratamiento y conversión, necesarias en la actividad matemática (Duval, 2004). El segundo referente aportó a través de dicha teoría las bases para la organización de cinco (5) sesiones de trabajo, donde se evidenciaron los seis momentos didácticos necesarios para toda construcción completa de una organización matemática (Chevallard, 1999), mientras que el tercer autor permitió fundamentar el proceso de conceptualización de la función cuadrática, pues aquel afirma que un concepto no es solo la definición del mismo, sino que está compuesto por un conjunto de tres elementos, la referencia (conjunto de situaciones que dan sentido al objeto), el significado (conjunto de invariantes operatorios del objeto) y el significante (registros de representación del objeto).

Con la aplicación de esta estrategia que integra dichas teorías con el software matemático Geogebra en diversos procesos, los estudiantes expuestos a ella, lograron resultados satisfactorios en el tipo de comprensión del objeto matemático estudiado.

Palabras claves: *registros de representación semiótica, momentos didácticos, concepto, recurso, comprensión integrativa, unidades significantes, función cuadrática*

Abstract

This document contains the description of the development and results obtained from an applied research work carried out within the framework of the Mathematics Teaching Masters of the Technological University of Pereira (UTP) in agreement with the University Institution Antonio José Camacho (UNIAJC), which proposes a didactic strategy mediated by Geogebra for the teaching of the quadratic function to students of the first semester of the Faculty of Business Sciences of the UNIAJC.

This research was carried out with reference to the theory of registers of semiotic representation of Duval (2004), didactic moments of Chevallard (1999) and conceptual fields of Vergnaud (1990), where the first affirms that there can be no apprehension of a mathematical object if it is not made use of different representations of the same one and also maintains that an integrative understanding of this object, demands the coordination between its registers of representation, that is to say, the discrimination of the significant units in each register, that makes possible to realize the transformations of treatment and conversion, necessary in mathematical activity. The second referent contributed through this theory the bases for the organization of 5 work sessions, where the six didactic moments necessary for any complete construction of a mathematical organization were evidenced (Chevallard, 1999), while the third author allowed to base the process of conceptualization of the quadratic function, since it affirms that a concept is not only the definition of the same, but is composed of a set of three elements, the reference (set of situations that give meaning to the object), the meaning (set of operative invariants of the object) and the signifier (object representation registers).

With the application of this strategy that integrates these theories with the mathematical software Geogebra in diverse processes, the students exposed to it, obtained satisfactory results in the type of understanding of the studied mathematical object.

***Keywords**: semiotic representation registers, didactic moments, concept, resource, integrative comprehension, significant units, quadratic function*

Tabla de contenido

Índice de figuras

Índice de Tablas

Introducción

Con la estrategia didáctica desarrollada en este trabajo de investigación, los docentes tienen una alternativa adicional para la enseñanza de la función cuadrática. Esta estrategia se llevó a cabo considerando los aportes de Duval (2004) explícitos en la teoría de registros de representación semiótica, cuyo objeto principal busca que el aprendizaje alcanzado por parte de los alumnos de un concepto matemático, esté fundamentado en una serie de procesos relacionados con sus diferentes registros de representación. Estos procesos tienen como fin acercar al estudiante a un tipo de comprensión basada en la coordinación de registros, a la cual llamó Duval (2004) comprensión integrativa. Alcanzar dicha comprensión exige por parte del docente la creación de una serie de actividades donde el estudiante logre discriminar las unidades significantes en cada registro de representación del objeto, realizar transformaciones de tratamiento que le permitan evidenciar diferentes características del objeto al interior de un mismo registro, y por último, dichas actividades deben instar al estudiante a ejecutar transformaciones de conversión de registros que evidencien características adicionales del objeto en estudio.

Para la creación y organización de las actividades desarrolladas por parte de los estudiantes, se citó la teoría de los momentos didácticos de Chevallard (1999), la cual discrimina seis (6) momentos que debe atravesar toda construcción completa de una organización matemática. Estos momentos no necesariamente deben seguir un orden preestablecido, pues podrían aparecer simultáneamente en las actividades, sin embargo se debe asegurar la presencia de cada uno de ellos, en algún momento del proceso.

También se consideró hacer énfasis en el proceso de conceptualización de la función cuadrática, integrando la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1990), donde se tuvo en cuenta evidenciar a través de las actividades, los tres (3) componentes que integran el concepto de función cuadrática, la referencia (conjunto de situaciones que dan sentido a la función), el significado (conjunto de invariantes operatorios de la función) y el significante (registros de representación de la función).

Por otra parte es importante resaltar que el método propuesto por Duval (2004) para que los estudiantes logren discriminar las unidades significantes de los registros de representación, consiste en hacer variar un parámetro de un registro y observar como varían las unidades significantes en los registros concomitantes. Para ello y otros procesos inherentes al desarrollo de las diferentes actividades que se diseñaron, se incorporó a la estrategia el uso del software matemático Geogebra, que permite observar en una sola pantalla y en tiempo real, las variaciones que sufren los diferentes registros de representación al variar un parámetro en un registro determinado. En este caso se tomó la forma polinómica de la función cuadrática en el registro simbólico algebraico $f(x) = ax^2 + bx + c$ para generar a través de las variaciones individuales de los parámetros $a, b\ y\ c$, variaciones en tiempo real de los registros concomitantes gráfico cartesiano y las formas factorizada $f(x) = (x - x1)(x - x2)$ y canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$ del registro simbólico algebraico de la función cuadrática.

El informe final del presente trabajo de investigación consta de cinco (5) capítulos:

Capítulo 1: En este capítulo se describe el planteamiento del problema, la justificación del trabajo de investigación, objetivos y metodología del trabajo de investigación.

Capítulo 2: En este capítulo se plantean los fundamentos de las teorías de Registro de representación semiótica (Duval, 2004), Momentos didácticos (Chevallard, 1999) y Campos conceptuales (Vergnaud, 1990). También se fundamenta el uso del software matemático Geogebra y se definen algunos conceptos relacionados con las ciencias empresariales para contextualizar el objeto matemático en estudio.

Capítulo 3: En este capítulo se presenta la descripción de las cinco (5) sesiones de trabajo que se implementaron. Cada sesión cuenta con la descripción de los momentos didácticos más evidentes en cada actividad, y además se detalla la acción que se esperaba por parte de los estudiantes al ser expuestos a las mismas.

Capítulo 4: En este capítulo se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes en cada actividad, como el análisis de los mismos, donde se explican las posibles causas de los errores cometidos por cierto porcentaje de estudiantes.

Capítulo 5: En este capítulo se presentan las conclusiones del trabajo de investigación, de acuerdo a los resultados obtenidos en el capítulo anterior, en comparación con el marco teórico abordado y los objetivos propuestos.

CAPÍTULO 1.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1. Planteamiento del problema

En este capítulo se describen aspectos generales de un trabajo de investigación como el planteamiento del problema, antecedentes, justificación, objetivos y metodología de trabajo, con el fin de contextualizar al lector en relación con la estrategia didáctica desarrollada.

1.1 Planteamiento del problema de investigación

A continuación se presenta un panorama comparativo de resultados con relación a evaluaciones del desempeño en matemáticas de estudiantes colombianos, comprendido desde el ámbito internacional hasta desembocar exactamente en la región puntual de la cual se ocupa el problema de investigación abordado en el presente trabajo.

- **Panorama Internacional**. La Figura 1 muestra los resultados obtenidos por Colombia en las pruebas PISA (Programme for International Student Assessment) en el área de matemáticas en los años 2006, 2009 y 2012 (en el año 2015 la tendencia se mantuvo, Colombia fue el último de 18 países que se evaluaron (Efe/eltiempo, 2014)) donde se evidencia que un porcentaje superior al 70% de los estudiantes evaluados, se ubicó en el nivel más bajo de los 6 niveles que contiene esta prueba.

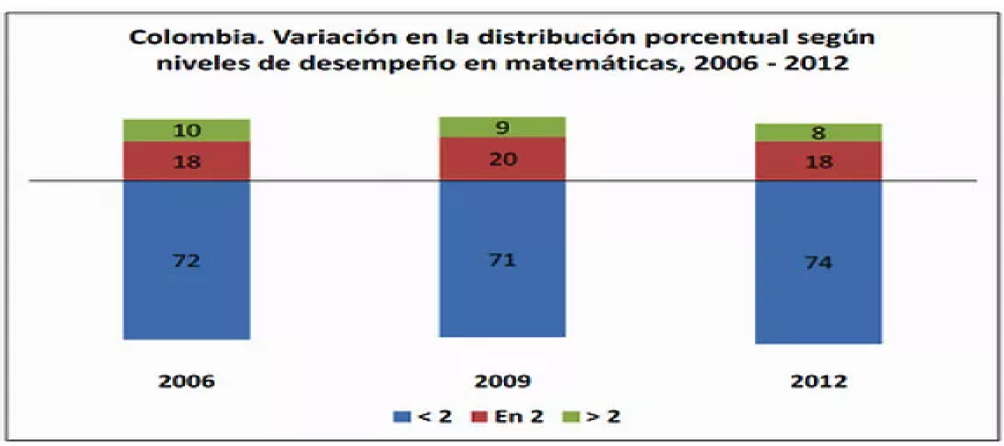


Figura 1. Resultados en matemáticas de las pruebas PISA en Colombia.
Fuente: Colombia Digital (2014).

- **Panorama Nacional**. La Tabla 1 muestra los resultados del comportamiento del porcentaje de estudiantes ubicados en los puestos 1 al 400 en los años 2005, 2010 y 2015 de las Pruebas Saber 11 Calendario A, ubicándose el promedio nacional en el 40% del nivel superior, donde se evidencia que el alumnado caleño estuvo en el puesto número 18 de 22 ciudades en competencia.

Tabla 1. Resultados Pruebas Saber 11

ETC Distrital	2015 - %	2010 - %	2005 - %
TUNJA	71,14	55,45	53,10
BUCARAMANGA	67,48	56,95	55,74
PASTO	62,16	54,11	47,76
BOGOTA	61,50	54,08	52,72
VILLAVICENCIO	59,15	44,56	42,69
YOPAL	57,56	40,98	42,84
MANIZALES	56,77	49,09	48,43
NEIVA	55,06	47,13	45,69
ARMENIA	54,89	44,30	43,80
IBAGUE	54,87	47,86	46,26
PEREIRA	54,75	43,04	39,43
MEDELLIN	53,26	41,93	43,07
FLORENCIA	49,78	33,06	34,57
POPAYAN	49,68	45,92	43,80
CUCUTA	49,54	35,87	37,54
SINCELEJO	47,79	40,48	42,36
MONTERIA	46,86	43,07	33,70
BARRANQUILLA	45,75	38,64	38,20
VALLEDUPAR	41,45	36,96	42,66
CALI	41,42	38,94	36,99
CARTAGENA	38,62	33,76	34,35
RIOHACHA	32,60	25,39	32,10
SANTA MARTA	31,60	26,71	27,29
QUIBDO	19,26	15,19	14,19

Nota. En la Tabla 1 se puede observar que el alumnado caleño en los resultados de las pruebas saber 11, ocupó el puesto # 18 de 22 ciudades en competencia.
Fuente: Mineducación (2015).

- **Panorama Local**. La Figura 2 muestra los resultados de las pruebas Saber 11 de la comunidad estudiantil que ingresó a la UNIAJC en el primer semestre del periodo académico 2015-1, donde se evidencia que el 50% de los estudiantes de la facultad de ciencias empresariales se ubicó por debajo del nivel medio alto, confirmando la trayectoria del bajo nivel académico en matemáticas de los discentes colombianos.

JORNADA NOCTURNA						
CATEGORIA	CIENCIAS EMPRESARIALES		INGENIERIAS		FEVD	
ALTO (>71)	2	3%	0	0%	0	0%
MEDIO ALTO (46-70)	30	45%	27	52%	30	44%
MEDIO BAJO (30-45)	33	50%	21	40%	34	50%
BAJO (< 30)	1	2%	4	8%	4	6%
TOTAL	66	100%	52	100%	68	100%

Figura 2. Resultados en matemáticas de las pruebas de estado de estudiantes que ingresaron al primer semestre en la UNIAJC en el periodo 2015-01
Fuente: PMA/UNIAJC (2015)

- **Panorama Puntual**. Por último la Figura 3 muestra los resultados de la prueba diagnóstica obtenidos por los estudiantes del grupo 101 de la facultad de Ciencias Empresariales de la UNIAJC en el periodo académico 2016-2, donde se evidencia que solo el 7.9% de los estudiantes resolvió adecuadamente el cuestionario relacionado con hallar el valor numérico de una función.

Liste los hallazgos en el diagnostico académico aplicado

- El 81.6% de los estudiantes identifica la relación de orden en los números reales.
- El 71.1% de los estudiantes identifica y opera correctamente con números enteros.
- El 15.8% de los estudiantes soluciona correctamente sumas y restas de fraccionarios heterogéneos.
- El 18.4% de los estudiantes soluciona correctamente ecuaciones de primer grado con una variable, donde se aplica la propiedad del reciproco y el opuesto aditivo.
- El 7.9% de los estudiantes halla correctamente el valor numérico de una función, empleando números racionales.
- El 18.4% de los estudiantes resuelve problema del perímetro, empleando expresiones matemáticas variables.

Figura 3. Resultados de la prueba diagnóstica del grupo 101 de Ciencias Empresariales de la UNIAJC en el periodo académico 2016-2.
Fuente: DCB (2016b).

Teniendo en cuenta el panorama descrito anteriormente a través de estadísticas concretas en relación con el nivel académico en matemáticas de los estudiantes que ingresan a la UNIAJC (especialmente los de la facultad de ciencias empresariales), la influencia de dicho nivel en las distintas actividades cognitivas durante los procesos de enseñanza aprendizaje de los objetos matemáticos trabajados en primer semestre y la importancia del concepto de función y puntualmente el de función cuadrática y su aplicación a las ciencias empresariales explícitos en el plan de curso (DCB, 2016a), se plantea la siguiente pregunta: ¿Cómo enseñar la función cuadrática a estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ciencias Empresariales de la UNIAJC de tal manera que alcancen una comprensión integrativa (Duval, 2004) del objeto matemático mencionado?

1.2 Justificación

> La Institución Universitaria Antonio José Camacho es una Institución de educación superior, de carácter público, comprometida con la formación Integral de excelencia en diferentes niveles de la educación superior; contribuyendo de manera significativa al avance de la ciencia, la tecnología, la cultura, a la transformación socioeconómica y al desarrollo de la región y del país (UNIAJC, 2015, p.16).

La UNIAJC no posee un filtro académico ni psicológico que le permita de alguna manera garantizar un mínimo de conocimientos y/o capacidad intelectual en la comunidad estudiantil que admite, siendo esto último, una de las causas del bajo rendimiento académico (especialmente en la asignatura de matemáticas) que caracteriza dicha población. A continuación se presentan los resultados de la prueba diagnóstica de matemáticas que se aplicó a 370 estudiantes que ingresaron a primer semestre en el periodo académico 2017-1 (DCB, 2017a)

Intervalos de Calificaciones	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia porcentual	Frecuencia porcentual acumulada
	Fa	Fr	F%	FA
[0, 20)	38	0,1027	10,27%	10,27%
[20, 40)	225	0,6081	60,81%	71,08%
[40, 60)	95	0,2568	25,68%	96,76%
[60, 80)	10	0,0270	2,70%	99,46%
[80,100]	2	0,0054	0,54%	100,00%
Total	370	1,0000	100,00%	----

Figura 4. Resultados prueba diagnóstica de matemáticas aplicada a estudiantes de primer semestre periodo 2017-1 de la UNIAJC.
Fuente: DCB (2017a).

De acuerdo a la gráfica se puede observar que el 96,76 % de la población diagnosticada, obtuvo una calificación inferior al 60% de la mejor nota posible, lo cual pone en evidencia el bajo rendimiento académico mencionado.

Por otra parte es importante reiterar que el plan de curso (DCB, 2016a) de la asignatura matemáticas I de los programas de la Facultad de Ciencias Empresariales, tiene como eje principal el desarrollo del concepto de función y este trasciende al estudio específico de las funciones polinómicas, racionales, logarítmicas y exponenciales a lo largo del semestre, entre las que se encuentra la función cuadrática; y además el modelo pedagógico de la UNIAJC (2013) sugiere un aprendizaje autónomo-significativo-colaborativo de los conceptos que se aborden en clase, es decir que los docentes de la UNIAJC entre otras cosas, deben contextualizar los conceptos matemáticos al área específica de cada programa académico, con el fin de imprimir el carácter significativo al tipo de aprendizaje deseado.

La mayoría de los conceptos matemáticos que se abordan en el primer semestre en la UNIAJC, fueron estudiados por los alumnos en la educación básica secundaria y media (MEN, 2004), sin embargo, los resultados obtenidos en las pruebas diagnósticas que involucran dichos conceptos, sugieren por lo menos una investigación del porqué el tipo de aprendizaje logrado en su momento, no fue suficiente para usarlo en situaciones problema posteriores, cuya resolución satisfactoria, implicaba la utilización pertinente de dichos conceptos; y no solo esto, sino que también surge otra pregunta: ¿qué hacer para que el aprendizaje de los conceptos matemáticos logrado en el primer semestre por parte de los alumnos, tenga mayores beneficios que el obtenido en la educación básica secundaria y media?

De esta forma entonces, nace la necesidad de encontrar alternativas que ayuden a resolver la problemática planteada.

1.3 Antecedentes

En cuanto a las alternativas conocidas para abordar la problemática planteada, se consultaron los siguientes autores y sus respectivas producciones:

Duval (2004) argumenta que cuando se habla de una investigación sobre la enseñanza de un objeto matemático, se debe tener en cuenta no solo el contenido que se quiere enseñar, ni tampoco pensar que con la dupla contenido y forma de introducirlo en clase, es suficiente para alcanzar el objetivo propuesto, sino que a estos, es necesario sumar el análisis de las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrentan la gran mayoría de alumnos de todos los niveles de la enseñanza. De esta forma introduce la teoría de registros de representación como alternativa que busca una comprensión integrativa de los objetos matemáticos a estudiar.

Por su parte Vergnaud (1990) afirma que un concepto no es solo la definición del mismo, sino que está compuesto por un conjunto de tres elementos, la referencia (conjunto de situaciones que dan sentido al objeto), el significado (conjunto de invariantes operatorios del objeto) y el significante (registros de representación del objeto) y es así como fundamenta la teoría de campos conceptuales.

Chevallard (1999) señala que toda construcción completa de una organización matemática, requiere ineludiblemente una organización didáctica y viceversa, introduciendo de esta forma, la descripción de los momentos didácticos en la teoría antropológica de lo didáctico.

EL MODELO TPACK (Cejas, Navío y Barroso, 2016) define que la selección e incorporación de cualquier herramienta tecnológica en el ámbito docente debe hacerse siempre en base a dos premisas:

- La herramienta tecnológica concreta que se pretenda incorporar debe cubrir algún aspecto de actividad en el aula de forma (más) eficiente que la alternativa tradicional utilizada hasta ese momento.
- La herramienta nunca debe ser una finalidad en sí misma, sino un medio que permita una mejor trasmisión de contenidos matemáticos concretos, de forma que el aprendizaje que realice el alumnado resulte más significativo por su parte (Giménez, 2016).

De acuerdo a lo sugerido por el modelo TPACK y teniendo en cuenta las actividades a desarrollar en esta estrategia didáctica, el software matemático Geogebra, se convierte en una alternativa que media en los procesos de enseñanza-aprendizaje de un objeto matemático.

En cuanto a los trabajos que se han realizado en concordancia con la actual propuesta se cita la tesis, Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria, donde se realizaron prácticas de modelación de situaciones problema apoyadas por el graficador FUNCIONSWIN32 y la hoja de cálculo EXCEL, también se trabajó bajo el marco teórico de los Registros de Representaciones Semióticas (TRRS) de Duval (2004), obteniendo como conclusión que los estudiantes realizan prácticas de modelación, apoyados por EXCEL y el graficador FUNCIONSWIN32, articulando y coordinando los registros de representación de la función cuadrática, y que son capaces de asociar al objeto función cuadrática, dos o más representaciones durante las prácticas de modelación (Huapaya, 2012).

El trabajo realizado por Gómez y Mesa (1995) contiene un conjunto de situaciones problemáticas que se pueden utilizar en el primer ciclo universitario como introducción a las funciones.

El trabajo realizado por Ricardo Álvarez Cortés acerca de la Incidencia de las mediaciones pedagógicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática concluye que analizar o incidir por separado las representaciones: verbal, gráfica, analítica y tecnológica, permite identificar dificultades específicas, relacionadas con competencias cognitivas del estudiante, además, si se tiene en cuenta la relación existente entre los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática y la utilización de mediaciones pedagógicas, la mediación que más favorece a los estudiantes es la tabular gráfica, seguida de la tecnológica-problémica y como era de esperarse, la incidencia oral-escrita y analítica-abstracta no fueron bien recibidas por parte de los estudiantes (Álvarez, 2012).

Desde el ministerio de educación, cultura, ciencia y tecnología del Chaco Argentina, se orientó en el 2015 una secuencia didáctica para la enseñanza de la función cuadrática con el apoyo del software GeoGebra a estudiantes de tercer año de la escuela secundaria, donde se resalta que la utilización del software de distribución gratuita de geometría dinámica GeoGebra, permite no sólo interpretar mejor la información que brindan los gráficos, sino también, vincular las variaciones de dichos gráficos con las de las fórmulas y establecer la incidencia de tales variaciones en las características de las funciones. También señalan que para dicha enseñanza es fundamental la resolución de situaciones didácticas en las que se propicien espacios de tratamiento y conversión de registros de representaciones tales como el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, expresiones equivalentes, representaciones de la variación cuadrática en tablas, gráficos cartesianos y expresiones analíticas de la función (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología del Chaco, 2015).

También se cita el trabajo realizado por Quiñones (2017) donde se plantea una alternativa para la enseñanza y caracterización de la función cuadrática a través de la articulación de los registros semióticos de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico (expresiones canónicas y polinómicas).

En cuanto al uso de GeoGebra en los procesos de enseñanza aprendizaje se citan los artículos recientes de Vitabar (2016), donde se presentan algunas ventajas para estudiantes y docentes y se exponen varias ideas para incorporar a GeoGebra en el aula. Otro artículo es el de Losada (2016), donde se presentan diversos ejemplos de cómo aprovechar GeoGebra en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. También se cita el artículo de Giménez (2016), el cual pretende justificar el uso de GeoGebra como herramienta tecnológica esencial en el aula de matemáticas.

Por otra parte en la página oficial de GeoGebra (www.geogebra.org), se pueden verificar más de 470 recursos que tienen por objeto principal de trabajo la función cuadrática, haciendo la salvedad que existen otros recursos que no tienen en su título la función cuadrática pero que si está inmersa como tal en el desarrollo de los mismos.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Diseñar una estrategia didáctica que permita enseñar la función cuadrática a estudiantes de la Facultad de Ciencias Empresariales de la UNIAJC, de tal forma que alcancen una comprensión integrativa del objeto matemático mencionado.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Identificar las unidades significantes de la función cuadrática en los registros de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico en las formas polinómica

$f(x) = ax^2 + bx + c$, canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y factorizada $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$.

- Diseñar recurso en Geogebra que permita variar los parámetros $a, b\ y\ c$ del registro simbólico algebraico forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$ y a su vez observar las variaciones concomitantes en el registro gráfico cartesiano y simbólico algebraico en su forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y factorizada $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$ de la función cuadrática.
- Diseñar e implementar actividades donde el estudiante discrimine las unidades significantes de los registros de representación lengua natural, gráfico cartesiano, y simbólico algebraico en la forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$, canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y factorizada $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$, y a su vez el desarrollo de dichas actividades implique realizar transformaciones de tratamiento y conversión entre los registros mencionados.
- Evaluar el tipo de comprensión alcanzado por los estudiantes en cuanto al aprendizaje de la función cuadrática, teniendo en cuenta las condiciones expuestas por Duval (2004) en la teoría de registros de representación semiótica.

1.5 Metodología de trabajo

La estrategia didáctica desarrollada se basa principalmente en la teoría de registros de representaciones semiótica de Duval (2004), los momentos didácticos de Chevallard (1999) y algunos elementos de la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1990), y fue diseñada con la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995).

1.5.1 Metodología de la Ingeniería didáctica

Artigue (1995, p.12) describe la metodología de la ingeniería didáctica en los siguientes términos:

> La metodología de la ingeniería didáctica se basa en un control a priori de las situaciones que se ponen en juego dentro del proceso experimental. Este control se efectúa a través de un análisis a priori que busca precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores. En seguida, en el análisis a posteriori, este análisis a priori se compara con la realización efectiva y se busca lo que rechaza o confirma las hipótesis sobre las cuales estaba basado.

De acuerdo a las fases de la metodología de la ingeniería didáctica descrita por Artigue (1995), el diseño de la estrategia contempló las fases siguientes:

- **Fase 1, Análisis preliminar**. En esta fase el docente analizó epistemológicamente el concepto de función cuadrática, es decir la teoría que declara sus orígenes, fundamentos, teoremas, características, etc. El análisis de los resultados de las pruebas diagnósticas obtenidos por los estudiantes, justificó la incorporación de las teorías de registro de representación semiótica de Duval (2004), momentos didácticos de Chevallard (1999) y campos conceptuales de Vergnaud (1990). Otro análisis que realizó el docente previamente, fue con relación a la enseñanza tradicional (tecnología predigital papel y lápiz) de la función cuadrática, dejando como resultado principal, la incorporación del software matemático Geogebra (tecnología digital), con el fin de facilitar al estudiante, evidenciar procesos de Visualización, Exploración, Modelación, Representación, Verificación, Dinamización, Transformación, Variación y Coordinación, involucrados en las diferentes actividades que se desarrollaron. El análisis de la caracterización de los estudiantes, de su programa académico de estudio y del modelo pedagógico de la UNIAJC (2013), indujo a la contextualización de la función cuadrática a situaciones relacionas con las Ciencias Empresariales.

- **Fase 2, La concepción y el análisis a priori**. De acuerdo al análisis de las teorías incorporadas en la fase 1, se diseñaron cinco (5) sesiones, cuya resolución satisfactoria de las actividades que componen las mismas, implicara cumplir las condiciones que expone Duval (2004) en la teoría de registros de representación semiótica, para lograr una comprensión integrativa del objeto matemático estudiado. A su vez cada actividad está permeada con la teoría de los momentos didácticos de Chevallard (1999) y algunos elementos de la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1990) con el fin de enriquecer las posibilidades de éxito en la estrategia trazada.
- **Fase 3, La experimentación.** En esta fase se llevó a cabo la implementación de cinco (5) sesiones de trabajo.
    - ✓ En la sesión 1 se organizaron tres (3) grupos de cuatro (4) estudiantes, cinco (5) grupos de tres (3) estudiantes y una pareja de estudiantes. La actividad 1.1 consistió en la primera entrega de un proyecto de curso, que se desarrolló a lo largo del semestre 2017-1, involucrando elementos vistos en clases, trabajo en clase, elementos de investigación por parte de los estudiantes y trabajo fuera de clase. En esta actividad se hizo énfasis en el aprendizaje colaborativo y significativo (UNIAJC, 2013). También se evidenció el momento didáctico del primer encuentro (Chevallard, 1999) y la acción operatoria del estudiante, con la cual el objeto matemático estudiado, adquirió sentido (Vergnaud, 1990).

- ✓ En la sesión 2, la actividad 2.1 se realizó individualmente, buscando que cada estudiante, explorara técnicas para discriminar las unidades significantes. En esta actividad se hizo énfasis en el aprendizaje autónomo (UNIAJC, 2013). También se evidenciaron los momentos didácticos de la exploración de la técnica y la justificación de la técnica (Chevallard, 1999) y se aportó a la aprehensión de los componentes significado y significante de la función cuadrática (Vergnaud, 1990).
- ✓ En la sesión 3, el docente institucionalizó (quinto momento didáctico (Chevallard, 1999)) la organización matemática función cuadrática, tomando como base principal, el análisis a posteriori de la sesión anterior. Simultáneamente dicho momento involucró la descripción de los componentes del campo conceptual mencionado.
- ✓ En la sesión 4, la actividad 4.1 (momento del trabajo de la técnica (Chevallard, 1999)), se realizó en parejas, conjuntamente con la intervención didáctica del docente, sin embargo, la actividad 4.2, se llevó a cabo individualmente, para conocer el estado de construcción de la organización matemática hasta ese momento en cada estudiante. La actividad 4.3 consistió en la segunda entrega del proyecto de curso. Esta sesión involucró equitativamente los componentes autónomo, significativo y colaborativo del aprendizaje (UNIAJC, 2013).
- ✓ En la sesión 5, se llevó a cabo la actividad 5.1 que consistió en una evaluación escrita desarrollada en parejas, con el fin de que los estudiantes argumentaran a su compañero, los procedimientos de resolución de cada ejercicio y si llegase a faltar en alguno de ellos, elementos considerados en el proceso de construcción de la función cuadrática, este último, tuviera la oportunidad de adquirirlo, pues se sobreentiende que la evaluación, forma parte de los momentos didácticos

necesarios para la completa construcción de una organización matemática (Chevallard, 1999) ¿Por qué no aprovecharla?. Por otra parte, en esta sesión también se realizó la actividad 5.2, que consistió en la exposición del proyecto de curso y la presentación de un recurso en Geogebra que modelara la solución del problema planteado en el proyecto de curso.

Esta fase también implicó analizar puntualmente cada sesión desarrollada, con el objetivo de enriquecer o modificar el análisis a priori de la sesión siguiente, siempre que fuera conveniente hacerlo. Todas las sesiones a excepción de la sesión 5 (esta tuvo 2 bloques de 3 horas), se desarrollaron en un bloque de 3 horas cada una.

- **Fase 4, validación y análisis a posteriori.** En esta fase se tuvo en cuenta las producciones de los estudiantes en cada sesión de la fase de experimentación, se hizo un comparativo de lo que se esperaba en el análisis a priori con lo que verdaderamente sucedió, se analizaron los errores cometidos por parte de los estudiantes en cada actividad y al final se concluyó tomando en cuenta los objetivos propuestos y los resultados obtenidos.

1.5.2 Población de estudio

El presente trabajo de investigación se desarrolló en la Institución Universitaria Antonio José Camacho (UNIAJC), en donde fueron expuestos a la estrategia didáctica 32 estudiantes del grupo 101 de primer semestre de la Facultad de Ciencias Empresariales en el periodo académico 2017-1

Caracterización de la UNIAJC

En este apartado se presenta una breve reseña de la UNIAJC, la misión, caracterización de la población estudiantil en general y de forma particular, la caracterización del grupo 101 donde se desarrolló la estrategia didáctica.

Reseña histórica de la UNIAJC

La UNIAJC (en aquel entonces Escuela de Tecnología en Electrónica) fue fundada en el año 1969 por don Tulio Ramírez, el 8 de marzo de 1970 se le otorga una licencia provisional del MEN en la sección de las carreras intermedias e inician con 24 estudiantes la Tecnología en Electrónica, el municipio de Cali apoyó la escuela con dotación de laboratorios importados de España, 7 profesores de tiempo completo y 22 de tiempo parcial y el Icfes aportó para su infraestructura. En 1989 se nombra al Dr Jairo Panesso Tascón como director de la escuela. El 21 de diciembre de 1993 se conforma el programa de Tecnologías en Electrónica, en Instrumentación Industrial, en Ingeniería de controles y en Sistemas. En el año 2002 se inició la jornada diurna y fin de semana con los programas Tecnológicos en Electrónica, Mecatrónica, Instrumentación, Sistemas, Administración de Empresas y Contabilidad Sistematizada y se inaugura el centro de idiomas ITM Language Center. En el 2003 se crean las Tecnologías en Mercadeo y en Comercio Internacional, Departamento de Ciencias Básicas y Planeación. En el año 2007 el MEN mediante resolución 863 otorga el cambio de Institución Tecnológica a Institución Universitaria. En el año 2010 el MEN autoriza crear el programa de Contaduría Pública. El 13 de abril del 2010 Icontec otorga a la UNIAJC las certificaciones de calidad en las normas NTC GP 1000:2009 e ISO 9001:2008, esta última avalada por IQNET (Fabián-Choco, 2006).

Misión de la UNIAJC

La Institución Universitaria Antonio José Camacho es una entidad de carácter público, comprometida con la formación Integral de excelencia en diferentes niveles y metodologías de la educación superior; contribuyendo de manera significativa al avance de la ciencia, la tecnología, la cultura, a la transformación socioeconómica y al desarrollo de la región y del país (UNIAJC, 2013).

Caracterización de los Estudiantes

A continuación se presenta la caracterización de la población estudiantil activa de la UNIAJC en el periodo 2016-1 (En total habían 6996 estudiantes).

En este periodo el 52.86% (3698) de los estudiantes eran hombres y el 47.14% (3298) mujeres. El 6.89% (355) de los estudiantes contaban con un empleo formal a la hora de ingresar a la UNIAJC. El 78.9% (5211) de los estudiantes presentó las pruebas de estado saber 11 entre los 16 y los 20 años de edad. El 28.25% (1151), el 20.17% (822) y el 3.29% (134) de los estudiantes tenían una clasificación en el SISBEN de nivel 1,2 y 3 respectivamente. La distribución del estrato socioeconómico de los estudiantes matriculados en el período 2016-1 era de 26.03% (1474), 45.85% (2596) y 25.08% (1420) correspondientes a los estratos 1, 2 y 3 respectivamente, que son equivalentes al 96.96% del total de matriculados. De los estudiantes matriculados en el período académico 2016-1 el 58.76% (3576), 35.97% (2189) y 5.27% (321) obtuvieron resultados en el examen de estado Bajo, Medio y Alto, respectivamente. La composición del grupo familiar muestra en los estudiantes que el 17.79% (794), 33.11% (1478) y el 22.22% (992) tienen un núcleo familiar conformado por 3, 4 y 5 personas respectivamente, que es equivalente al 73.12% de la población total. El 11.08% (1137) de los estudiantes matriculados tienen madres con un nivel educativo técnico/tecnológico, el 8.09% (473) tienen madres con un nivel de educación universitario o superior. El 16.5% (1153) de los estudiantes matriculados recibieron apoyo académico por parte de la UNIAJC y el 64% (4524) recibieron apoyos financieros de la UNIAJC en el periodo 2016-1 (UNIAJC, 2016).

Caracterización de los estudiantes del grupo 101

El grupo 101 de la Facultad de Ciencias Empresariales en la jornada nocturna de la UNIAJC en el periodo académico 2017-1 tuvo 32 estudiantes, el 56% (18) eran mujeres y el 48% (14) hombres. El 31% (10) de los estudiantes tenía entre 17 y 20 años de edad, el 63% (20) tenía entre

21 y 30 años de edad y el 6% (2) restante, tenía más de 30 años. El 88% (28) estaba laborando, el 25% no eran oriundos del municipio de Cali. El 6% (2), el 44% (14) y el 50% (16) pertenecían a los estratos 1, 2 y 3 respectivamente. El 78% (25), 13% (4) y el 9% (3) de los estudiantes estaban solteros, en unión libre y casados respectivamente. El 59% vivía en casa arrendada y por último, el 19% (6) de los alumnos no veían un curso formal de matemáticas entre 1 y 2 años, el 53% (17) no veía un curso formal de matemáticas entre 3 y 7 años y el 28% (9) restante, hacía más de 7 años que no veían un curso formal de matemáticas (DCB, 2017b).

De acuerdo a la caracterización de los estudiantes, es importante notar que el 88% (28) estaba laborando; por un lado esto demuestra el grado de responsabilidad de la población a quien se le aplicó la estrategia didáctica, sin embargo, no se puede menospreciar que en determinado momento podría ser un obstáculo para llevar a cabo las diferentes actividades programadas fuera de clases. Otro aspecto importante a considerar, es el tiempo que llevaban sin estudiar matemáticas, ya que se pueden haber olvidado algunos conceptos previos para el buen desempeño en las actividades. Afortunadamente en el diseño de la estrategia didáctica en la fase preliminar y durante las fases restantes, dicha caracterización se tuvo en cuenta.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE LA PROPUESTA

2. Fundamentación teórica de la propuesta

2.1 Registros de representación

Cuando se habla de una investigación sobre la enseñanza de un objeto matemático, se debe tener en cuenta no solo el contenido que se quiere enseñar, ni tampoco pensar que con la dupla contenido y forma de introducirlo en clase es suficiente para alcanzar el objetivo propuesto, sino que a estos, es necesario sumar el análisis de las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrentan la gran mayoría de alumnos de todos los niveles de la enseñanza (Duval 2004).

Un campo privilegiado para analizar las actividades cognitivas fundamentales como la conceptualización, el razonamiento, la resolución de problemas e incluso, la comprensión de textos es el aprendizaje de las matemáticas. La complejidad de estas actividades cognitivas obliga a los docentes a la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos al lenguaje natural y/o de las imágenes: diferentes sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escritura algebraica y lógica que paralelamente a la lengua natural se articulan para expresar las relaciones y operaciones, figuras geométricas, representaciones en perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. (Duval, 2004).

La afirmación que hace Duval (2004) cuando dice que no puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue el objeto de su representación y la existencia de representaciones mentales, es decir todo conjunto de imágenes y de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, abre un espacio privilegiado al estudio de las representaciones.

La semiótica o semiología es considerada una ciencia que trata de los sistemas de comunicación dentro de las sociedades humanas y que se ocupa del estudio de los signos; entendiendo por signo todo aquello que representa a otra cosa (Pontón, como se citó en Quiñones, 2017).

Entendiendo el término semiosis como la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, se podría concluir a priori la independencia de los mismos, sin embargo, si se toman en cuenta fenómenos como la dependencia de los tratamientos al sistema de representación semiótica utilizado, la imposibilidad de efectuar tratamientos en las representaciones mentales, la creación de nuevos sistemas de representación a medida que progresa el conocimiento, el desarrollo de las representaciones mentales que se logra a partir de la interiorización de las representaciones semióticas y el aumento de las capacidades cognitivas de los sujetos y de sus representaciones mentales cuando existe variedad de sistemas semióticos que diversifican las representaciones de un mismo objeto, se podría afirmar que en matemáticas las representaciones semióticas no solo son indispensables para fines de comunicación, sino que también son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma y por último concluir en palabras de Duval (2004) que no hay noesis sin semiosis y que es igualmente cierto que la semiosis determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis.

En este punto es necesario hacer una distinción entre los diferentes sistemas de representación semiótica haciendo énfasis en aquellos que permiten realizar tres actividades cognitivas fundamentales inherentes a las representaciones: primero, en estos sistemas se puede establecer un sello o conjunto de sellos perceptibles que sean identificables como una representación de algún objeto en un sistema determinado; segundo, también permiten transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema en otras representaciones del mismo sistema pero que evidencian características diferentes del objeto representado, y por último, en dichos sistemas se pueden hacer conversiones de un sistema a otro que explicite otras significaciones relativas al objeto representado. A los sistemas que cumplen con estas tres características concierne la relación de semiosis y noesis y de aquí en adelante se notarán como **Registros de Representación Semiótica** (Duval, 2004).

La diversificación de los registros de representación semiótica, la diferenciación entre representante y objeto representado, y la coordinación entre los diferentes registros enfocan el análisis del desarrollo del conocimiento y de los obstáculos encontrados en el aprendizaje de algún objeto matemático (Duval, 2004).

2.1.1 Actividades cognitivas fundamentales de la representación ligadas a la semiosis

Según Duval (2004) existen tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis:

- Formación de representaciones en un registro semiótico particular

Evidentemente se hace necesario usar por lo menos un registro de representación semiótica para expresar una representación mental o evocar un objeto real. Esto implica que el objeto que se quiere representar en un registro determinado, debe formarse respetando las reglas de conformidad con dicho registro, no solamente para efectos de la comunicación sino también para hacer posible las transformaciones de tratamiento que el registro permita. Las reglas de conformidad son aquellas que definen un sistema de representación, y en consecuencia, los tipos de unidades constitutivas de todas las representaciones posibles en un registro. Por ejemplo para representar una función determinada en el registro gráfico cartesiano, se debe tener en cuenta la ubicación de los puntos de acuerdo con las reglas relacionadas a las parejas ordenadas (X, Y).

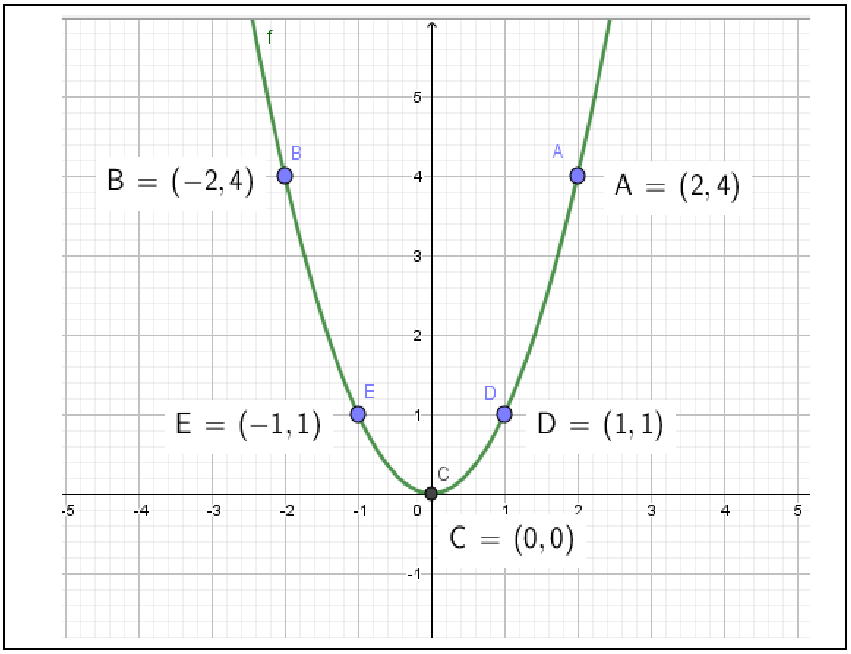


Figura 5. Ejemplo de función representada en el registro gráfico cartesiano.
Fuente: Elaboración propia.

- Tratamiento de las representaciones semióticas

Se entiende por tratamiento a las transformaciones de una representación a otra representación al interior de un mismo registro (Duval, 2004). Cada registro favorece un tipo de tratamiento y dependiendo de la característica del objeto que se quiera conocer, se podrá elegir el registro y el tratamiento indicado. Por ejemplo si se quiere saber en qué puntos la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4$ intercepta al eje X, se podría realizar el tratamiento de igualar a cero $f(x)$ y factorizar:

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$0 = x^2 - 4$$

$$0 = (x + 2)(x - 2)$$

$$x = 2 \vee x = -2$$

- Conversión de las representaciones y cambios de registro

La conversión es la transformación de la representación de un objeto en un registro, en una representación del mismo objeto en un registro diferente. Esta transformación está orientada y debe especificarse cuál es el registro de partida y cuál es el registro de llegada (Duval, 2004).

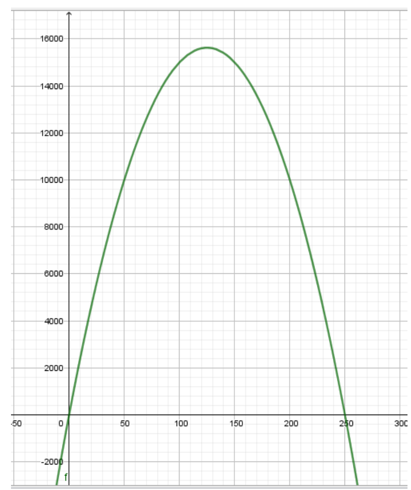
Registro de representación lengua natural	*Registro de Representación simbólico algebraico*	*Registro de representación gráfico cartesiano*
Un granjero tiene 500 yardas de cerca con la cual delimitará un corral rectangular. ¿Cuál es el área máxima que puede cercar?	$y = 250x - x^2$ $f(x) = 250x - x^2$	

Figura 6. Ejemplo de conversión de registros de representación de la Función Cuadrática.
Fuente: Elaboración propia.

Para concluir sobre la importancia de la distinción entre tratamiento y conversión, señala Duval (2004) que no basta presentar una yuxtaposición de diferentes registros de representación para que los alumnos comprendan la conversión, porque la simple presentación no permite que se aprenda a discriminar las unidades significantes necesarias para representar el objeto matemático.

2.1.2 Comprensión integrativa

Duval (2004) describe que cuando un docente se basa en un único registro para representar un objeto matemático ante sus alumnos, aunque estos aprendan a realizar los diferentes tratamientos pertenecientes a dicho registro, el tipo de comprensión que se logra no es suficiente para enfrentarse y resolver satisfactoriamente una situación que involucre el mismo objeto representado en otro registro. También señala que sería ingenuo pensar que la introducción por parte del docente de ejercicios de conversión en algunos casos típicos, crearía las condiciones suficientes para la coordinación de los registros de representación en dichos alumnos. La razón principal de insuficiencia en la comprensión alcanzada es que la conversión de las representaciones requiere la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada. Se llamará pues comprensión integrativa de un objeto matemático, a la que alcanza un alumno que es capaz de identificar las unidades significantes en cada registro estudiado y por consiguiente alcanza la coordinación entre los diferentes registros.

La discriminación de las unidades significantes de forma individual se hace inoperante y ambigua debido a que la segmentación de las representaciones en dichas unidades es esencialmente funcional y porque estas unidades pueden ser tanto palabras o símbolos y además hay registros que tienen unidades no separables, como las figuras y los gráficos cartesianos. Surge entonces la pregunta ¿cómo discriminar las unidades significantes para alcanzar una comprensión integrativa de un objeto matemático en estudio? Duval (2004) responde de la siguiente manera:

> La discriminación de las unidades significantes en un registro de representación constituye, pues, un problema análogo al de la investigación de los diferentes factores de variación en el análisis de un conjunto de factores que, en la ocurrencia de un fenómeno, intervienen simultáneamente y no pueden ser aprehendidos aisladamente: para disociarlos es necesario recurrir al "método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, mientras que los demás permanecen sin cambio" (Piaget (como se citó en Duval, 2004)). En otros términos, la discriminación de las unidades significantes de una representación y por tanto la posibilidad de una aprehensión de lo que ella representa, depende de la aprehensión de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia en un registro. La organización de una situación

de aprendizaje centrada en el carácter fundamental de la operación de conversión no puede ser más que la organización de un campo de variaciones posibles. Concretamente, es necesario poder explorar todas las variaciones posibles de una representación en un registro, haciendo la previsión, o la observación, de las variaciones concomitantes de las representaciones en el otro registro. Como el costo de la tarea cognitiva cambia con el sentido de la conversión, cada uno de los dos registros de representación deben ser el objeto de un trabajo de exploración de las variaciones sistemáticas y de un trabajo de observación de las variaciones concomitantes (Duval, 2004, p.77).

2.2 Organizaciones didácticas y momentos de estudio

Cuando se piensa en la enseñanza de algún contenido matemático, es inevitable para un docente pensar en la forma o manera más eficiente de hacerlo y es entonces cuando entra en juego aquello que conocemos como didáctica de la matemática.

Por lo general el ser humano siempre está expuesto a situaciones que demandan de él una respuesta, por ejemplo, ¿cómo te llamas?, ¿qué hora es?, ¿dónde vives?, etc. cuando el sujeto resuelve este tipo de tareas fácilmente porque está habituado a ellas, se dice que es un juego de tarea-respuesta en sentido débil y el proceso necesario de resolución queda oculto, sin embargo cuando la situación exige una respuesta que el interrogado no conoce y ni siquiera sabe la técnica para resolverla, entonces se ve obligado a buscar una técnica o proceso de resolución para encontrarla y se dice que es un juego de tarea-respuesta en sentido fuerte. Si una población P desea estudiar una problemática U relativa a un conjunto de tareas T, se puede denotar este sistema de estudio como S (P; U_T) y si se integra al sistema un asesor V que colabora en el proceso de estudio, el sistema podría denotarse como S (P; V; U_T) adentrándose de esta forma a la dimensión de la didáctica (Oliveira, 2009).

La obra matemática puede construirse a partir del estudio y formas de resolución de una problemática determinada, en donde el producto del estudio se conoce como praxeología u organización matemática (en adelante OM) y el proceso de estudio o proceso de construcción se conoce como organización didáctica (OD).

No sobra señalar que estos aspectos son inseparables, pues no hay OM sin organización didáctica y viceversa. Ahora bien, el proceso de construcción de una OM, articula tareas, técnicas, tecnologías y teoría y se debe encontrar la forma de estructurar el proceso a través de ciertos invariantes presentes en toda construcción de una OM. Chevallard (1999) denomina a dichos invariantes "momentos de estudio" o "momentos didácticos" y argumenta la existencia de seis momentos diferentes que están presentes en todo proceso de construcción de una OM, sin limitarlos a que sucedan en una línea de tiempo o en un orden determinado o secuencia rígida establecida, es decir que los seis momentos serían en un proceso multifactorial, cada uno de los factores.

Los seis momentos didácticos son descritos por Chevallard (1999, p. 249-255) de la siguiente forma:

1. El primer momento de estudio es el del primer encuentro con la organización O que está en juego. Un tal encuentro puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro (o de reencuentro) inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la obra O, es el que consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas constitutivas de O. Este primer encuentro con el tipo de tareas puede a su vez tener lugar en varias veces, en función sobre todo de los entornos matemáticos y didácticos en los que se produce: se puede volver a descubrir un tipo de tareas como se vuelve a descubrir una persona que se creía conocer.

2. El segundo momento es el de la exploración de un tipo de tareas y de la elaboración de una

técnica relativa a este tipo de tareas. En realidad, el estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir de la cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger. El estudio de un problema particular, espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un medio para la constitución de una técnica de resolución. Se trama así una dialéctica fundamental: estudiar problemas es un medio que permite crear y poner en marcha una técnica relativa a los problemas de un mismo tipo, técnica que será a continuación el medio para resolver de manera casi rutinaria los problemas de este tipo.

3. El tercer momento del estudio es el de la constitución del entorno tecnológico teórico. De una manera general, este momento está en interrelación estrecha con cada uno de los otros momentos. Así, desde el primer encuentro con el tipo de tareas, se establece generalmente una relación con el entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado, o con gérmenes de un entorno por crear que se precisará mediante una relación dialéctica con la emergencia de la técnica. Sin embargo, por razones de economía didáctica global, a veces las estrategias de dirección de estudio tradicionales hacen en general de este tercer momento la primera etapa del estudio.

4. El cuarto momento es el del trabajo de la técnica, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz y más fiable, lo que exige generalmente retocar la tecnología elaborada hasta entonces, y acrecentar la maestría que se tiene de ella. Este momento de puesta a prueba de la técnica supone en particular unos cuerpos de tareas adecuados tanto cualitativamente como cuantitativamente.

5. El quinto momento es el de la institucionalización, que tiene por objeto precisar lo que es exactamente la OM elaborada, distinguiendo claramente, por una parte los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no le hayan sido integrados y, por otra parte, los

elementos que entrarán de manera definitiva en la OM considerada, distinción que buscan precisar los alumnos cuando le preguntan al profesor, a propósito de tal resultado o tal procedimiento, si hay o no que "saberlo".

6. El sexto momento es el de la evaluación, que se articula con el momento de la institucionalización. En la práctica, llega siempre un momento en el que se debe observar lo aprendido, porque este momento de reflexión donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina el valor de lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la institución escolar, participa de hecho de la "respiración" misma de toda actividad humana.

En la enseñanza de las matemáticas, se supone que la OM que se va a estudiar ya existe, sin embargo lo novedoso y retador está en el proceso de reconstrucción de la OM en los estudiantes, el cual exige entonces una OD compuesta por los bloques práctico-técnico (tipos de tareas y técnicas) y tecnológico-teórico (tecnologías y teoría).

2.3 Campos conceptuales

A la hora de pensar en el objeto matemático que se desea enseñar, otro aspecto primordial a tener en cuenta es la conceptualización de dicho objeto. La teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1990) nos ayuda a desarrollar el proceso de conceptualización de una forma fundamentada. En esta teoría el concepto se define como una construcción pragmática, es decir que el concepto en estudio no se reduce a su definición, sino que más bien, este se rodea de diferentes situaciones en donde la resolución de la problemática propuesta implica la utilización del concepto matemático y de esta forma, este último adquiere sentido para el sujeto que aprende. Vale la pena aclarar que en el proceso de construcción de un concepto matemático se interrelacionan otros conceptos y que además la resolución de una problemática, requiere el dominio de varios conceptos y que un mismo concepto, puede intervenir en la resolución de diferentes situaciones problema. La suma de todos estos aspectos da origen a la teoría conocida como campos conceptuales de Vergnaud (1990), la cual afirma que un concepto matemático no puede construirse de forma aislada, sino en integración con otros conceptos. Generalizando la idea en discusión, Vergnaud (1990) define el concepto como un sistema compuesto por tres conjuntos:

> C (S, I, Γ). Un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operatorios, y un conjunto de formas lingüísticas y simbólicas que constituyen los diferentes sistemas de representación.
>
> La referencia [S]: Es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto.
>
> El significado [I]: Es el conjunto de invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas.
>
> El significante [Γ]: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de transformación (Sureda y Otero, 2011, p. 3).

Se puede observar en esta teoría una gran correlación con las teorías de registros de representaciones semióticas de Duval (2004) y momentos didácticos de Chevallard (1999), dicha correlación se aprovecha en esta investigación para fundamentar la justificación, argumentación y análisis de cada una de las sesiones que se abordaron en el presente.

2.3.1 Definición de Función de dominio real

Las definiciones que se presentan a continuación fueron tomadas de los libros de Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía de Arya, Lardner e Ibarra (2009) y Precálculo de Stewart, Redlin y Watson (2012).

El concepto de función de dominio real es una de las ideas fundamentales en matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos, o que requiera el análisis de datos empíricos, emplea este concepto matemático. Una función expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra.

DEFINICIÓN: Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función de X en Y es una regla que asigna a cada elemento x Є X una única y Є Y. Si una función asigna y a un x Є X particular, decimos que y es el valor de la función en x. Por lo general, una función se denota por letras como f, g, F o G. Denotemos con f una función determinada. El conjunto X para el cual f asigna una única y Є Y se denomina el dominio de la función f. A menudo se indica mediante Df. El conjunto de valores correspondiente y Є Y se conoce como el rango de la función y por lo regular se denota por Rf.

Si una función f asigna un valor y en el rango a cierta x en el dominio, escribimos

$$y = f(x)$$

Leemos $f(x)$ como "$f\ de\ x$"; se denomina el valor de $f\ en\ x.$ Observe que $f(x)$ no es el producto de $f\ y\ x$. Si una función f se expresa por una relación del tipo $y = f(x)$ entonces x se denomina la variable independiente o argumento de $f\ e\ y$ se conoce como la variable dependiente. En general, encontraremos funciones que se expresan estableciendo el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable independiente de que se trate (Arya, Lardner e Ibarra, 2009).

Por ejemplo: dada $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$, hallar el valor cuando $x = 0, x = -2\ y\ x = b$

Solución:

- $f(0) = 5(0)^2 + 2(0) + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$
- $f(-2) = 5(-2)^2 + 2(-2) + 3 = 20 - 4 + 3 = 19$
- $f(b) = 5b^2 + 2b + 3$

Prueba de la línea vertical: Cualquier curva dada (o conjunto de puntos) en el plano xy es la representación gráfica de una función (en la cual y es la variable dependiente) con tal de que cualquier línea vertical corte a la gráfica en a lo más un punto.

Cualquier línea vertical corresponde a algún valor particular, digamos $x = xo$, de la variable independiente, y el punto en que esta línea vertical corta la gráfica determina el valor de y que le corresponde a xo. Es decir, la gráfica misma da la regla que relaciona cada valor de x con algún valor de y. Si la línea vertical $x = xo$ no corta a la gráfica en ningún punto, esto significa que xo no pertenece al dominio. Las gráficas de la Figura 7 representan funciones. [Nótese que en la parte c), el dominio de la función es el conjunto de enteros {1, 2, 3, 4, 5} de modo que la gráfica sólo consta de cinco puntos en lugar de una curva].

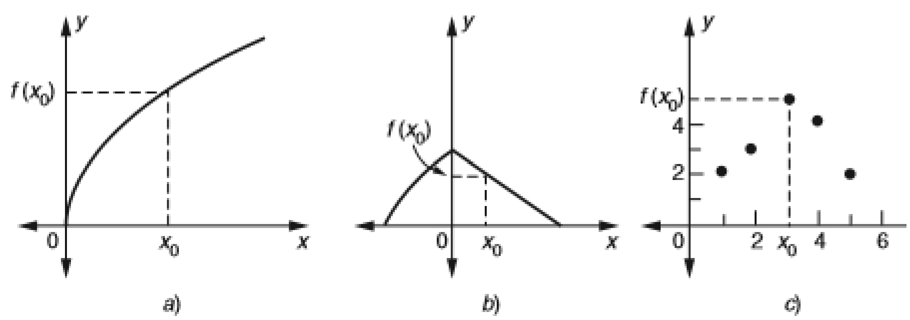


Figura 7. Representación Gráfica cartesiana de funciones.
Fuente: Arya, Lardner e Ibarra (2009, p. 177)

Por otra parte, las gráficas de la Figura 8 no representan funciones. Éstas no son funciones porque existen líneas verticales que cortan las gráficas en más de un punto. Así, al valor $x = xo$, en la primera gráfica, le corresponden dos valores $y1\ e\ y2\ de\ y$. En tal caso, el valor de x no determina un valor único de y.

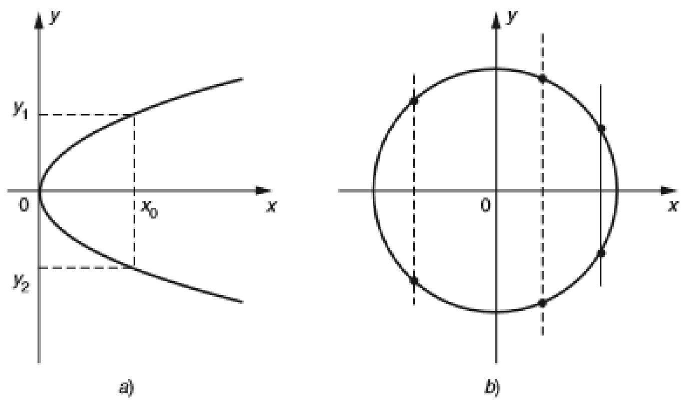


Figura 8. Ejemplo del criterio de la recta vertical. Relaciones que no son funciones.
Fuente: Arya, Lardner e Ibarra (2009, p. 178)

2.3.2 Aspectos generales de las funciones de variable real.

2.3.2.1 Registros de representación de funciones de variable real

Es muy común representar las funciones de variable real a través de cuatro registros de representación semiótica:

- Registro de representación gráfico cartesiano de una función de variable real:

Si f es una función con dominio A, entonces la gráfica de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x))|x \in A\}$$

localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ (Stewart, Redlin y Watson, 2012, p. 153).

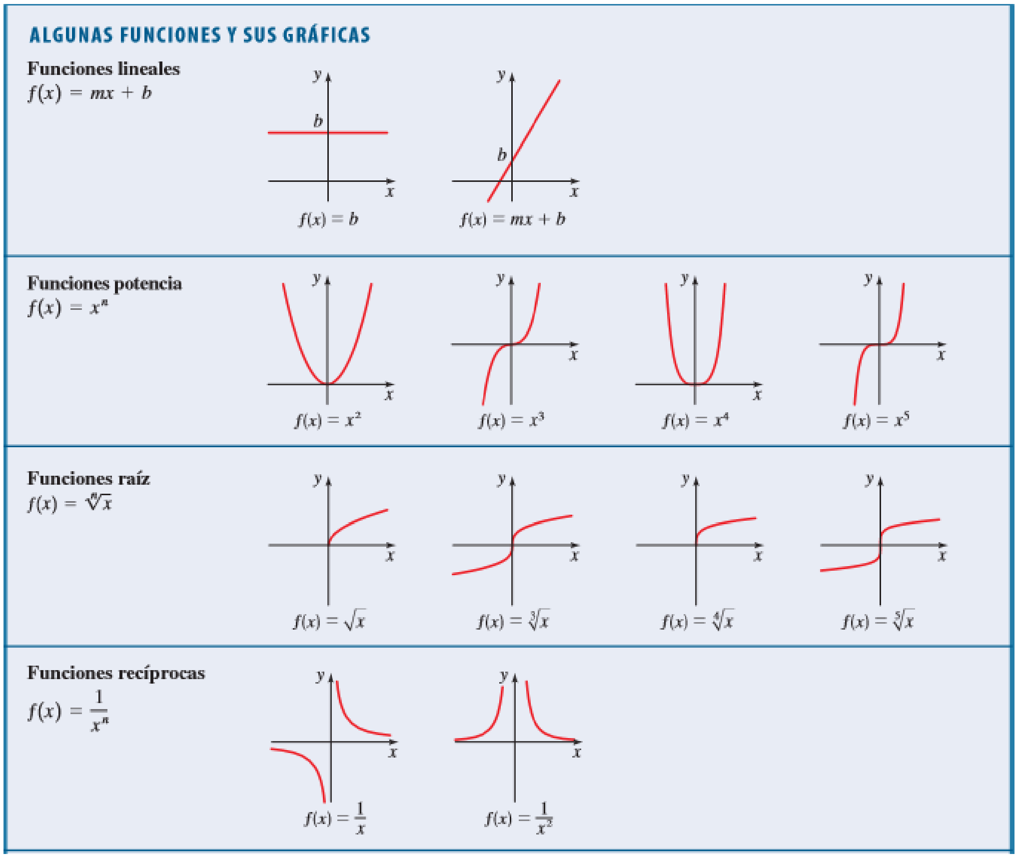


Figura 9. Representación Gráfica cartesiana de funciones.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 159).

- Registro de representación simbólico algebraico: Las funciones de variable real se expresan en muchas ocasiones a través de símbolos y números que evidencian la regla de asignación entre valores de la variable independiente (x) y la variable dependiente (f(x)).

Ejemplos. $f(x) = 2x + 1,\ f(x) = -2(x-3)(x+6),\ f(x) = \frac{3x-1}{x^2+2},\quad f(x) = \sqrt{x+25}$

- Registro de representación tabular numérico: En este registro se presentan (normalmente en una tabla) los conjuntos de pares ordenados pertenecientes a la función.

Tabla 2. Registro de representación tabular numérico

x	$f(x) = x + 1$
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5

Nota. La Tabla 2 muestra el ejemplo del registro de representación tabular numérico de la función $f(x) = x + 1$.
Fuente: Elaboración propia.

- Registro de representación lengua natural: Este registro comprende la forma discursiva en que se presentan los problemas o situaciones de aplicación de una función determinada.

Ejemplo: Cierta empresa de servicios públicos por concepto de acueducto, cobra un valor mínimo de $ 9.000 y adicionalmente cobra $ 1.500 por cada m^3consumido en un mes. ¿Cuánto tendrá que pagar una familia que consumió 7 m^3 en un mes?

2.3.2.2 Dominio y rango de una función de variable real:

En la gráfica de una función, los valores a lo largo del eje x en que la gráfica está definida, constituyen el dominio de la función. En forma análoga, los valores a lo largo del eje y en que la gráfica tiene puntos, constituyen el rango de la función. Esto se ilustra en la Figura 10. Aquí tenemos que:

$$D_f = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\} \quad \text{y} \quad R_f = \{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$$

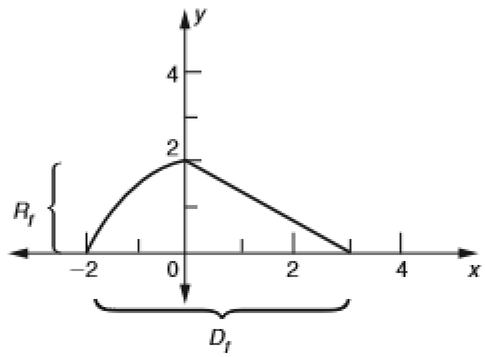


Figura 10. Dominio y rango de una función.
Fuente: Arya, Lardner e Ibarra (2009, p. 178)

A menudo el dominio de una función no se establece de manera explícita. En tales casos, se sobreentiende que es el conjunto de todos los valores del argumento para los cuales la regla dada tiene sentido. En el caso de una función f definida por una expresión algebraica, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $f(x)$ es un número real bien definido. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es el conjunto de los números reales no negativos, dado que la raíz cuadrada sólo tiene sentido si $x \geq 0$. De manera similar, en el caso de la función $g(x) = x^2/(x-3)$, el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = 3$, puesto que cuando $x = 3$, el denominador se hace cero y $g(3)$ no está definido (Arya, Lardner e Ibarra, 2009, p. 179).

2.3.2.3 Funciones de variable real crecientes y decrecientes

Una función f es creciente en el intervalo I, si $f(x1) < f(x2)$ siempre que $x1 < x2$ en I

Una función f es decreciente en el intervalo I, si $f(x1) > f(x2)$ siempre que $x1 < x2$ en I

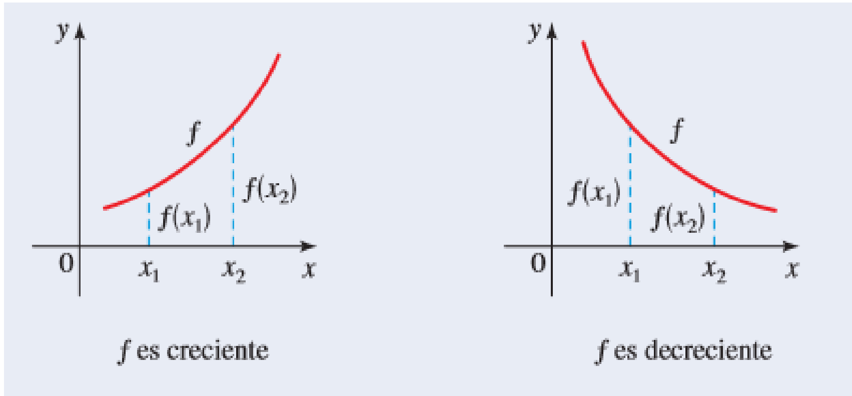


Figura 11. Funciones crecientes y decrecientes en el intervalo I.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 164).

2.3.2.4 Máximos y mínimos locales de funciones de variable real

El valor de una función $f(a)$ es un valor máximo local de f si $f(a) \geq f(x)$ cuando x es cercana a a (Esto significa que $f(a) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a a). En este caso decimos que f tiene un máximo local en $x = a$.

El valor de una función $f(a)$ es un valor mínimo local de f si $f(a) \leq f(x)$ cuando x es cercana a a (Esto significa que $f(a) \leq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a a). En este caso decimos que f tiene un mínimo local en $x = a$.

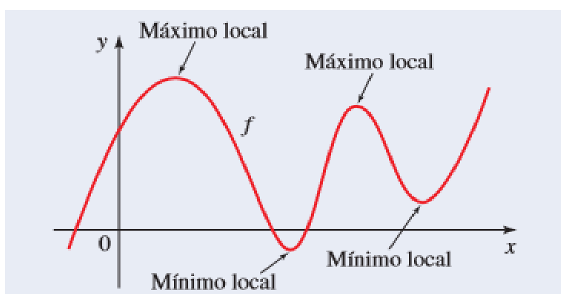


Figura 12. Representación Gráfica cartesiana de funciones.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 166).

2.3.2.5 Rapidez de cambio promedio de las funciones de variable real

La rapidez de cambio promedio de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{Rapidez de cambio promedio } = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La rapidez de cambio promedio es la pendiente de la recta secante entre $x = a$ y $x = b$ en la gráfica de f, esto es, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

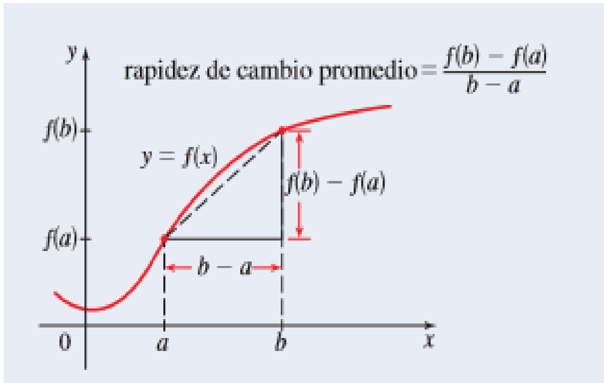


Figura 13. Rapidez de cambio promedio de funciones.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 173).

2.3.2.6 Transformaciones de funciones de variable real

- Desplazamientos verticales de gráficas

Suponga $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ c unidades hacia arriba

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ c unidades hacia abajo

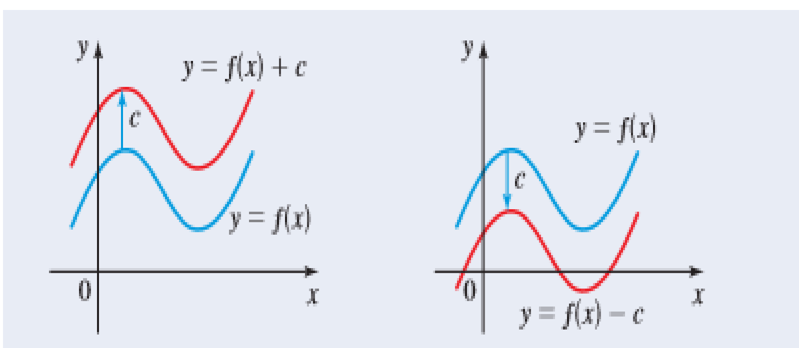


Figura 14. Desplazamientos verticales de gráficas de funciones.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 180).

- Desplazamientos horizontales de gráficas

Suponga $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ c unidades a la derecha

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ c unidades a la izquierda

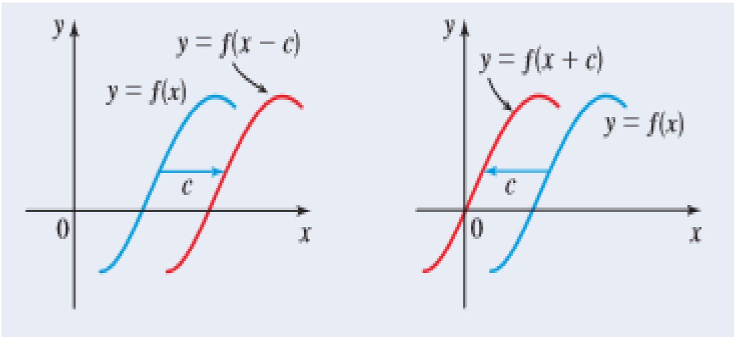


Figura 15. Desplazamientos horizontales de gráficas de funciones.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 181).

- Gráficas que se reflejan

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y

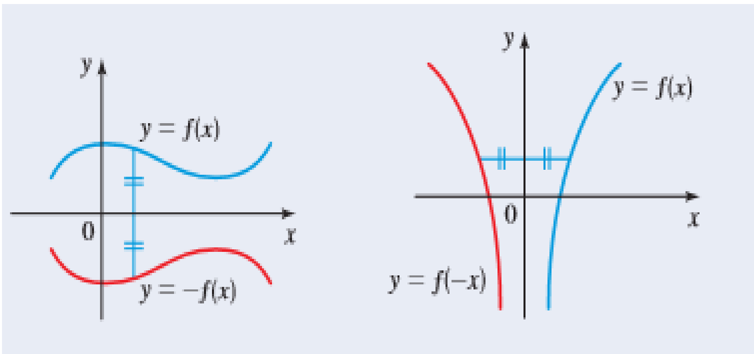


Figura 16. Gráficas de funciones que se reflejan.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 182)

- Alargamiento y contracción verticales de gráficas

Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c.

Si $0 < c < 1$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c.

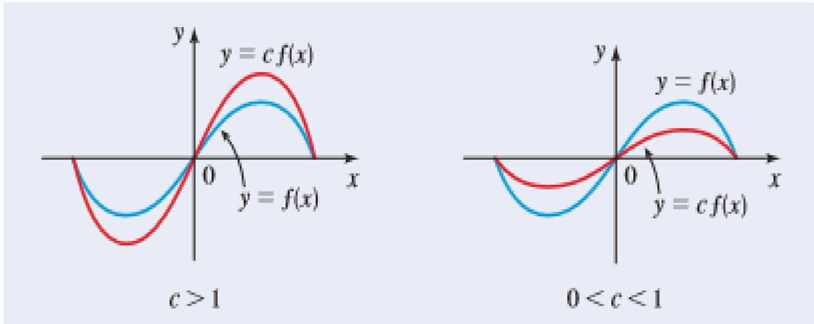


Figura 17. Alargamiento y contracción verticales de gráficas.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 183).

- Alargamiento y contracción horizontales de gráficas

Para graficar $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de $1/c$

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de $1/c$.

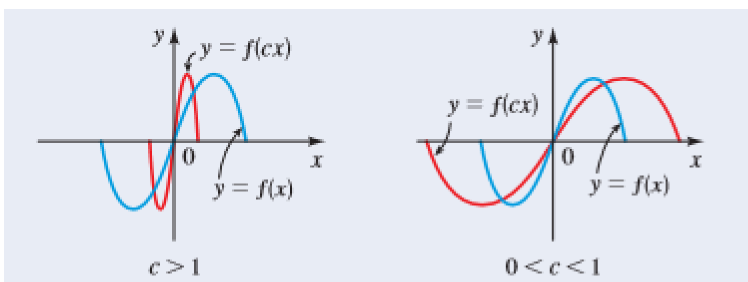


Figura 18. Alargamiento y contracción horizontales de gráficas.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 184).

- Funciones pares e impares

Sea f una función.

f es par si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f

f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f

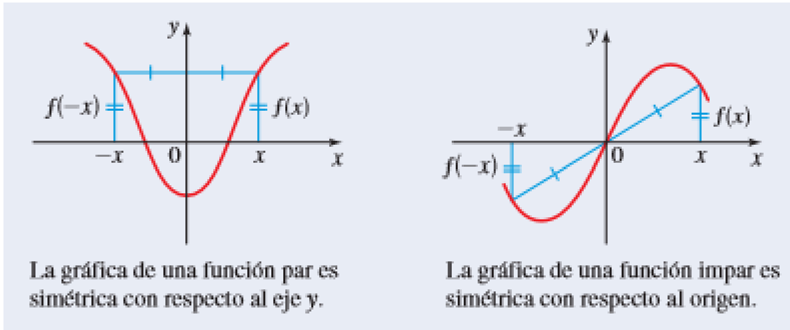


Figura 19. Funciones pares e impares.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 186)

2.3.2.7 Combinación de funciones de variable real

- Álgebra de funciones (Stewart, Redlin y Watson, 2012, p. 191).

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f+\ g, f-\ g,\ fg$ y f/g están definidas como sigue.

$(f+\ g)(x) = f(x) + g(x)$ Dominio A ∩ B

$(f-\ g)(x) = f(x) - g(x)$ Dominio A ∩ B

$(fg)(x) = f(x)g(x)$ Dominio A ∩ B

$(f/\ g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ Dominio { x Є A ∩ B | $g(x) \neq 0$ }

- Composición de funciones (Stewart, Redlin y Watson, 2012, p. 193).

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f\,{\circ}g$ (también llamada composición de f y g) está definida por

$(f\,{\circ}g)(x) = f(g(x))$

El dominio de $f\,{\circ}g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f.

2.3.2.8 Funciones de variable real uno a uno y sus inversas

- Funciones uno a uno

Una función con dominio A se denomina función uno a uno si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es, $f(x1) \neq f(x2)$ siempre que $x1 \neq x2$.

Una forma equivalente de escribir la condición para una función uno a uno es ésta

$si\ \ f(x1) = f(x2)$, entonces $x1 = x2$.

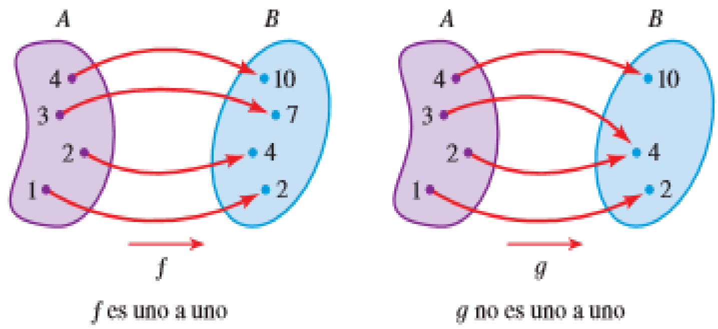


Figura 20. Ejemplo de función que es uno a uno y otra que no lo es.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 199).

- Prueba de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

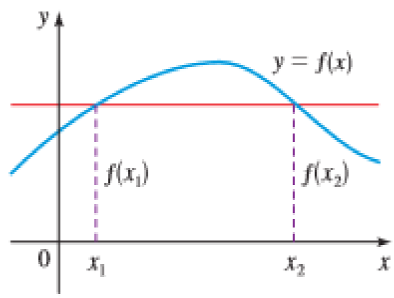


Figura 21. Ejemplo de función que no es uno a uno.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 199).

- Inversa de una función

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y$

para cualquier y en B.

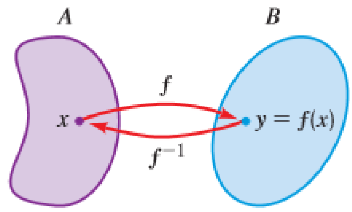


Figura 22. Diagrama sagital función inversa.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 201)

- Propiedad de la función inversa (Stewart, Redlin y Watson, 2012, p. 201).

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$f^{-1}(f(x)) = x$ para toda x en A

$f(f^{-1}(x)) = x$ para toda x en B

Recíprocamente, cualquier función f^{-1} que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de f.

- Procedimiento para hallar la inversa de una función (Stewart, Redlin y Watson, 2012, p. 202).

  I. Escriba $y = f(x)$
  II. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible)
  III. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$

- Gráfica de la función inversa

La gráfica de $f^{-1}(x)$ se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

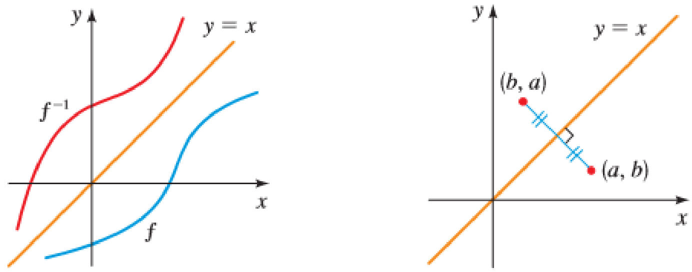


Figura 23. Gráfica de funciones inversas.
Fuente: Stewart, Redlin y Watson (2012, p. 204)

2.4 Funciones cuadráticas de dominio real

Una función cuadrática $y = f(x)$ es una función polinómica de grado 2 que tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0, b$ y c son constantes.

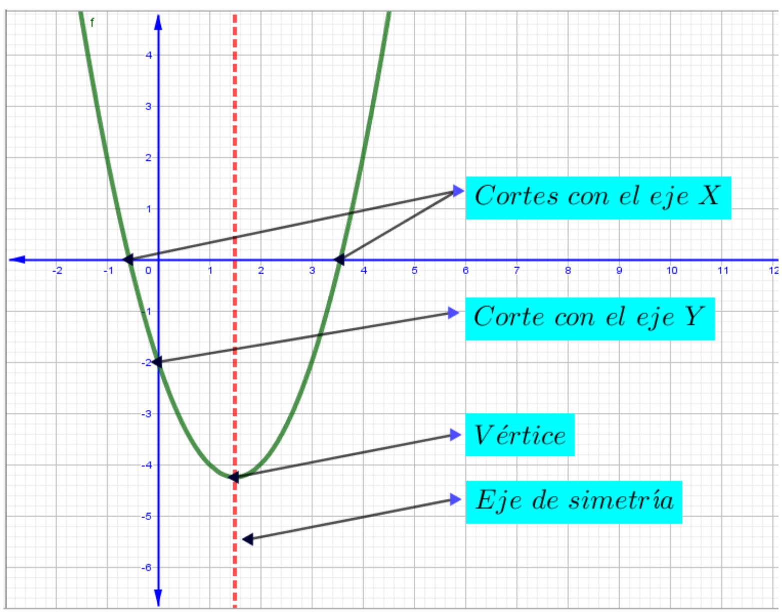


Figura 24. Gráfica de función cuadrática.
Fuente: Elaboración propia.

Los aspectos importantes o unidades significantes de la función cuadrática son:

- Gráfica: La representación gráfica de toda función cuadrática es una parábola cóncava hacia arriba si $a > 0$ o cóncava hacia abajo si $a < 0$. Esto se debe a que en los extremos cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$, el término principal ax^2, crece o decrece más rápido que la suma de los términos $bx + c$, es decir que el comportamiento final de $f(x)$, depende completamente del signo de ax^2, pero como en los extremos x^2 siempre es positivo, en realidad el comportamiento final estará limitado al signo de a.

- Dominio: El dominio de la función cuadrática como toda función polinómica es el conjunto de los números reales (R).
- Rango: El rango de la función cuadrática que tiene vértice (Vx, Vy) es el conjunto de los números reales comprendidos en el intervalo $(-\infty, Vy]$ si $a < 0$ o $[Vy, \infty)$ si $a > 0$.
- Vértice: En una parábola asociada a una función cuadrática, el vértice (Vx, Vy) es el punto máximo de la parábola si $a < 0$ o es el punto mínimo si $a > 0$. Veamos el siguiente análisis para deducir una fórmula que permita hallar el vértice de una parábola asociada a la función cuadrática:

Se tiene la función $f(x) = ax^2 + bx + c$,

$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}) + c.$

- *Se factoriza a en los términos cuadrático y lineal*

$$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a}$$

- *Se completa el trinomio cuadrado perfecto en* $(x^2 + \frac{b}{a})$

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Si se evalúa $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, su imagen será $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Si $a > 0$, el punto mínimo será $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Si $a < 0$, el punto máximo será $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

De esta forma se concluye que el vértice (Vx, Vy) de la parábola en una función cuadrática es

$\left(\frac{-b}{2a}, \ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, siendo $Vx = \frac{-b}{2a}$ y $Vy = \frac{4ac-b^2}{4a}$

- Corte con el eje y: en la función cuadrática el corte o intersección de la parábola con el eje y está en el punto $(0, c)$. Veamos:

Se tiene la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, la función cortará al eje y cuando $x = 0$

$$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$$

$$f(0) = c$$

- Corte con el eje x: Una gráfica corta al eje x cuando $y = 0$. Veamos:

En el análisis para hallar el vértice, se obtuvo la expresión

$$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

- *$f(x)$ se iguala a cero*

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

- *Se resta a ambos lados* $\frac{4ac-b^2}{4a}$

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = -[\frac{4ac - b^2}{4a}]$$

- *Se distribuye el menos al lado derecho de la ecuación*

$$a(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- *Se multiplica por* $\frac{1}{a}$ *a ambos lados de la ecuación*

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

- *Se aplica raíz cuadrada a ambos lados de la ecuación*

$$\sqrt{(x + \frac{b}{2a})^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

- *Se aplica la propiedad de radicación cuando el exponente del radicando es igual al índice par de la raíz*

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

- *La raíz de un cociente es igual al cociente de sus raíces*

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- *Se suma* $-\frac{b}{2a}$ *en ambos lados de la ecuación*

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- *Suma de fracciones homogéneas*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De acuerdo a la fórmula deducida se tienen tres posibilidades en cuanto a los cortes en el eje x de una parábola asociada a una función cuadrática:

I. Si el discriminante $b^2 - 4ac > 0$, la parábola tendrá dos cortes con el eje x

II. Si el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, la parábola tendrá un corte con el eje x

III. Si el discriminante $b^2 - 4ac < 0$, la parábola no tendrá cortes con el eje x

- Eje de simetría: en una parábola asociada a una función cuadrática el eje de simetría es la recta vertical $x = Vx$. Veamos el siguiente análisis:

La siguiente expresión se obtuvo en el proceso de hallar el vértice

$f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ Observe que el binomio al cuadrado en esta expresión hace que los valores que tome la variable "x" y que sean equidistantes a Vx, generen la misma imagen. Es decir que si se dobla el plano horizontalmente por la recta $x = Vx$, se obtendrá una equivalencia entre todos los puntos de los brazos de la parábola.

- Monotonía: en una parábola asociada a una función cuadrática la monotonía será creciente en el intervalo $(-\infty, Vx]$ y decreciente en el intervalo $[Vx, \infty)$ si la parábola es cóncava hacia debajo, en caso contrario será decreciente en el intervalo $(-\infty, Vx]$ y creciente en el intervalo $[Vx, \infty)$.

2.4.1 Registros de representación de la función cuadrática

2.4.1.1 Registro de representación gráfico cartesiano de la función cuadrática:

La representación gráfica de toda función cuadrática se puede obtener a partir de la representación gráfica de la función $f(x) = x^2$ mediante una sucesión de traslaciones, reflexiones, alargamientos y compresiones.

- La representación gráfica de $f(x) = ax^2$ con $a > 0$, es la representación gráfica de $f(x) = x^2$ alargada verticalmente cuando $a > 1$ y comprimida verticalmente cuando $0 < a < 1$ (Ver figura 22).
- La representación gráfica de $f(x) = ax^2$ con $a < 0$, es la representación gráfica de $f(x) = ax^2$ con $a > 0$, reflejada en el eje x (Ver figura 22).
- La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $b \neq 0$, es la gráfica de $f(x) = ax^2$ trasladada horizontalmente o verticalmente (Ver figura 22).

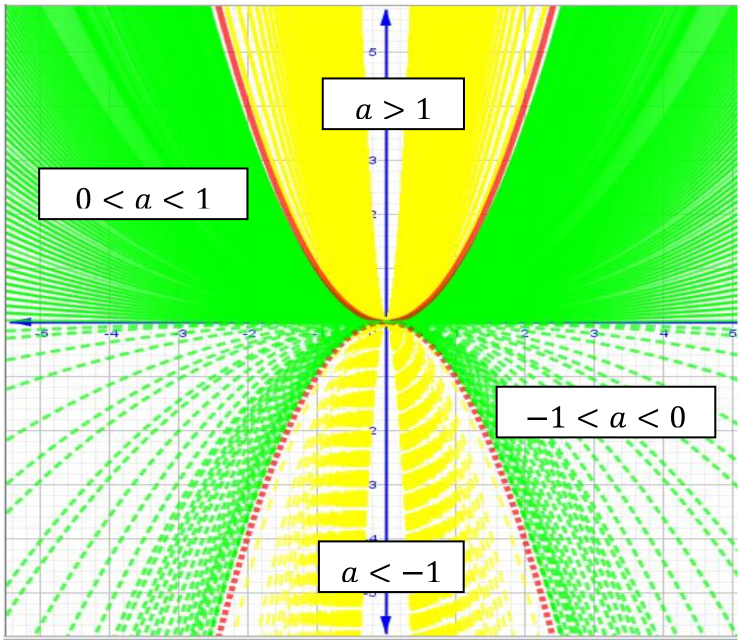


Figura 25. Reflexiones, alargamiento y compresiones de la función cuadrática.
Fuente: Elaboración propia.

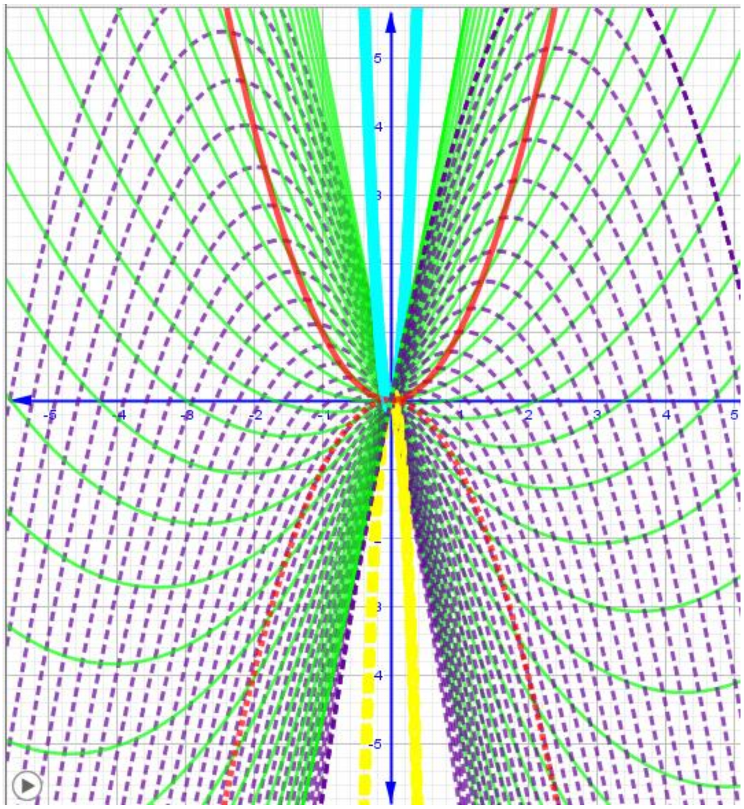


Figura 26. Algunas traslaciones de la representación gráfica de la función cuadrática.
Fuente: Elaboración propia.

2.4.1.2 Registro de representación simbólico algebraico de la función cuadrática:

- Registro de representación simbólico algebraico forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$

  Esta forma de representación de la función cuadrática hace evidente las unidades significantes orientación de la concavidad, alargamiento o compresión en relación con la función $f(x) = x^2$ y corte con el eje y.

- Registro de representación simbólico algebraico forma canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$

  Esta forma de representación de la función cuadrática hace evidente las unidades significantes orientación de la concavidad, alargamiento o compresión en relación con la función $f(x) = x^2$ y vértice $V(h, k)$.

- Registro de representación simbólico algebraico forma factorizada

  $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$

Esta forma de representación de la función cuadrática hace evidente las unidades significantes orientación de la concavidad, alargamiento o compresión en relación con la función $f(x) = x^2$ y cortes con el eje x $(en\ x1\ y\ x2.)$.

En la Tabla 3 se presentan las transformaciones de tratamiento en el registro simbólico algebraico:

Tabla 3. Tratamientos en el Registro de representación simbólico algebraico

Forma de origen Y destino	TRATAMIENTOS EN EL REGISTRO DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO ALGEBRAICO		
	Forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$	Forma canónica $f(x) = (x-h)^2 + k$	Forma factorizada $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$
Forma polinómica	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f(x) = a(x-h)^2 + k$ $f(x) = a(x^2 - 2xh + h^2) + k$ $f(x) = ax^2 - 2axh + ah^2 + k$ $a = a, b = -2ah \ y \ c = ah^2 + k$	$f(x) = a(x - x1)(x - x2)$ $f(x) = a(x^2 - xx2 - xx1 + x1x2)$ $f(x) = ax^2 - axx2 - axx1 + ax1x2$ $f(x) = ax^2 - a(x2 + x1)x + ax1x2$ $a = a, b = -a(x2 + x1) \ y \ c = ax1x2$
Forma canónica	$f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}) + c.$ $f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a}$ $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ $a = a, h = -\frac{b}{2a} \ y \ k = \frac{4ac - b^2}{4a}$	$f(x) = a(x-h)^2 + k$	$f(x) = a(x - x1)(x - x2)$ $f(x) = ax^2 - a(x2 + x1)x + ax1x2$ $f(x) = a(x^2 - (x2 + x1)x) + ax1x2$ $f(x) = a\left(x^2 - (x2 + x1)x + \frac{(x2 + x1)^2}{4}\right) - \frac{a(x2 - x1)^2}{4}$ $f(x) = a(x - \frac{(x2 + x1)}{2})^2 - \frac{a(x2 - x1)^2}{4}$ $a = a, h = \frac{(x2 + x1)}{2} \ y \ k = -\frac{a(x2 - x1)^2}{4}$
Forma factorizada	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $a = a, x1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \ y$ $x2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$f(x) = a(x-h)^2 + k$ $a = a, x1 = h + \sqrt{-\frac{k}{a}}$ y $x2 = h - \sqrt{-\frac{k}{a}}$	$f(x) = a(x - x1)(x - x2)$

Nota. La Tabla 3 discrimina los diferentes tratamientos en el registro de representación simbólico algebraico de la función cuadrática en las formas polinómica, canónica y factorizada.
Fuente: Elaboración propia.

2.4.1.3 Registro de representación tabular numérico de la función cuadrática:

Esta forma de representación de la función cuadrática hace evidente las unidades significantes cortes con el eje "x" y corte con el eje "y".

Tabla 4. Unidades significantes del registro tabular numérico de la función cuadrática

X	$F(X)$
0	C
$X1$	0
$X2$	0
….	….

Nota. La Tabla 4 muestra los cortes con el eje X y el eje Y como unidades significantes del registro de representación tabular numérico de la función cuadrática
Fuente: Elaboración propia.

2.4.1.3 Registro de representación lengua natural de la función cuadrática:

Toda situación representada en forma discursiva que involucre la función cuadrática pertenece a este registro. Las unidades significantes del registro de representación lengua natural de la función cuadrática dependen de cada situación en particular.

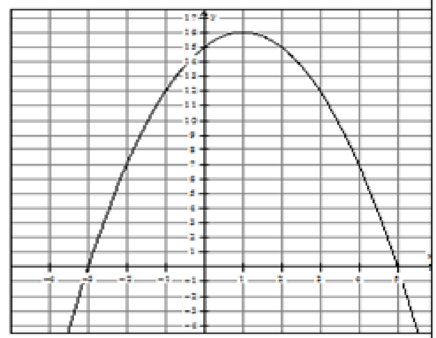
<table>
<tr><th>Registro de representación lengua natural</th><th>Registro de representación simbólico algebraico</th><th>Registro de representación tabular numérico</th><th>Registro de representación gráfico cartesiano</th></tr>
<tr>
<td>Considere el área de un rectángulo, cuya longitud es $x + 3$ y cuyo ancho es $5 - x$. Determine la expresión para calcular el área, A(x).</td>
<td>Expresión factorizada
$A(x) = (x+3)(5-x)$
Expresión polinómica
$A(x) = -x^2 + 2x + 15$
Expresión canónica
$A(x) = -(x-1)^2 + 16$</td>
<td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>15</td></tr><tr><td>1</td><td>16</td></tr><tr><td>2</td><td>15</td></tr><tr><td>3</td><td>12</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td></tr></table></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Figura 27. Registro de representaciones semióticas de la función cuadrática.
Fuente: Adaptado de Quiñones (2017).

Múltiples situaciones problemas se pueden abordar a través de la función cuadrática, sin embargo la investigación en estudio se centra en aplicaciones de la función cuadrática a las Ciencias Empresariales, por lo cual se definen a continuación algunos conceptos que involucran dichas situaciones:

- Oferta y demanda

Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirida por los consumidores depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ley de la demanda. La ley más simple es una relación del tipo $p = mx + b$, en donde p es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes. La gráfica de una ley de demanda se llama curva de demanda. Obsérvese que p se ha expresado en términos de x. Esto nos permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad x puede venderse. Es un hecho perfectamente conocido que si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, porque menos consumidores podrán adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye (es decir, el artículo se abarata) la demanda se incrementará. En otras palabras, la pendiente m de la relación de demanda es negativa. De modo que la gráfica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha, como se aprecia en la parte a) de la Figura 28. Puesto que el precio p por unidad y la cantidad x demandada no son números negativos, la gráfica de dicha ecuación sólo debe dibujarse en el primer cuadrante. La cantidad de un artículo determinado que sus proveedores están dispuestos a ofrecer depende del precio al cual puedan venderlo. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina ley de la oferta. La gráfica de una ecuación de la oferta (o ley de la oferta) se conoce como curva de la oferta.

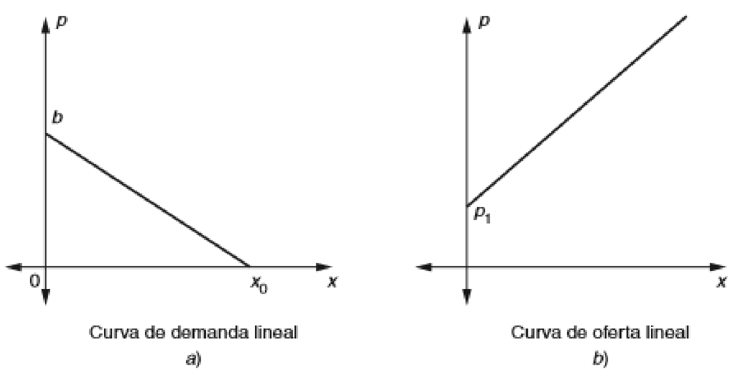


Figura 28. Curva de demanda y oferta.
Fuente: Arya, Lardner e Ibarra (2009, p. 177)

En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos, si pueden ponerle un precio alto, y con una cantidad más pequeña de artículos si el precio obtenido es más bajo. En otras palabras, la oferta aumenta al subir el precio. Una curva de oferta lineal típica aparece en la parte b) de la Figura 28. El precio p1 corresponde a un precio bajo del cual los proveedores no ofrecerán el artículo (Arya, Lardner e Ibarra, 2009, p. 143-144).

- Ingreso: se define como la cantidad de dinero que se obtiene en un negocio al vender un producto y/o servicio determinado. Su ecuación es $I = p * x$, donde I es el ingreso, p es el precio del producto y x es la cantidad vendida.
- Costo: es el valor que se invierte en un negocio con el fin de fabricar y/o comercializar bienes y servicios. La ecuación del costo total es $Ct = Cv + Cf$ donde Ct es el costo total, Cv es el costo variable y Cf es el costo fijo.
- Utilidad: es el dinero que queda después de haber restado el costo total al ingreso obtenido por la venta de un bien o servicio. su ecuación es $U = I - Ct$, donde U es la utilidad o ganancia, I es el ingreso y Ct es el costo total.

2.5 Software de matemática Geogebra.

Geogebra es un software interactivo de matemática que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo (Hohenwarter, 2009, p. 13).

Según el modelo TPACK (technological Pedagogical Content Knowledge) la selección e incorporación de cualquier herramienta tecnológica en el ámbito docente debe hacerse siempre en base a dos premisas:

- La herramienta tecnológica concreta que pretendamos incorporar debe cubrir algún aspecto de nuestra actividad en el aula de forma más eficiente que la alternativa tradicional utilizada hasta ese momento.
- La herramienta nunca debe ser una finalidad en sí misma, sino un medio que permita una mejor transmisión de contenidos matemáticos concretos, de forma que el aprendizaje que realice el alumnado resulte más significativo por su parte (Giménez, 2016, p. 28).

Este modelo contempla una clasificación de las actividades de aprendizaje en siete tipos: actividades para considerar, para practicar, para interpretar, para producir, para aplicar, para evaluar y para crear (Giménez, 2016, p. 28).

> Una de las mayores fortalezas didácticas de Geogebra radica en la posibilidad de generar varias representaciones simultáneas de un mismo objeto en forma dinámica. Las implicaciones didácticas de esta característica son ampliamente beneficiosas para el alumno, especialmente si es estimulado a reparar en ellas y analizarlas (Vitabar, 2016, p. 8).

Según Duval (2004), para lograr una comprensión integrativa de un objeto matemático, el docente debe organizar una situación de aprendizaje que permita al estudiante explorar todas las variaciones posibles de una representación en un registro, haciendo la previsión o la observación, de las variaciones concomitantes de las representaciones en el otro registro. Según Chevallard (1999), el docente debe verificar a través de las diferentes actividades que propone, la existencia de los seis momentos didácticos en el proceso de construcción de una OM. Por ejemplo el segundo momento exige la generación de una actividad donde el estudiante pueda explorar una técnica para resolver la situación problema. Por otra parte Vergnaud (1990) al igual que Duval (2004), hace énfasis en que una correcta comprensión de un objeto matemático debe contemplar la discriminación del significado (objeto representado) con el significante (diferentes representaciones del objeto) y es a través de la coordinación de los diferentes registros de representación de un objeto matemático que un alumno logra dicha diferenciación.

De acuerdo a lo anterior, se consideró a Geogebra como un instrumento mediador en la enseñanza de la función cuadrática, donde se utilizó en las diferentes actividades propuestas con diversos propósitos resumidos en procesos de Visualización, Exploración, Modelación, Representación, Verificación, Dinamización, Transformación, Variación y Coordinación.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE LA ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA

3 Diseño de la Organización didáctica

En este capítulo se describe el análisis a priori de las diferentes actividades que se diseñaron, teniendo en cuenta las condiciones de un aprendizaje fundado en la coordinación de los registros lengua natural, gráfico cartesiano, simbólico algebraico y tabular numérico (no se hizo énfasis en este último, para no robustecer demasiado la estrategia y además Duval (2004) sugiere mínimo dos registros para dicho proceso, sin embargo, fue necesario usar el registro tabular numérico, como registro pivote o intermedio, en la transformación de conversión entre los registros restantes), y la discriminación de las unidades significantes de la Función Cuadrática en dichos registros.

Según Chevallard (1999), toda construcción de una OM, requiere una organización didáctica donde se evidencien los seis momentos didácticos; fue pues necesario a través de las diferentes actividades poder evidenciar dichos momentos para estar seguros de haber realizado una construcción fundamentada de la OM en estudio. Vale la pena aclarar que los momentos didácticos que se discriminaron en cada actividad, son los más evidentes, pero es posible que cada alumno haya experimentado simultáneamente otros momentos didácticos a la hora de realizar las actividades propuestas.

Por otro lado el proceso de conceptualización de un objeto matemático es fundamental en la enseñanza de las matemáticas, y máxime cuando se trabaja con los momentos didácticos de Chevallard (1999) como marco teórico, ya que a la hora de institucionalizar la OM en juego, se debe precisar en la conceptualización del objeto; por tal razón, se introdujo la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1990) para verificar a través de las diferentes actividades propuestas, la existencia en el proceso de la tripleta (referencia, significado y significante) que implica una conceptualización matemática fundamentada.

El Software Geogebra a través de los procesos de Visualización, Exploración, Modelación, Representación, Verificación, Dinamización, Transformación, Variación y Coordinación se utilizó como instrumento mediador entre el objeto matemático Función Cuadrática y los estudiantes; no se discriminó el proceso mediador de Geogebra en cada una de las actividades, debido a que implícitamente uno o varios de los procesos descritos, podrían estar presentes en una actividad determinada.

Para el análisis sistematizado de las diferentes actividades se diseñó una plantilla que contiene los encabezados de *Sesión*, para denotar la actividad a trabajar en general y discriminar los diferentes encuentros del docente con los estudiantes en orden cronológico; *Actividad Propuesta,* para describir cada una de ellas; *Marco Teórico,* para relacionar la fundamentación de cada actividad con la teoría; *Objetivos Generales,* para ver permanentemente el norte que persigue la realización de cada actividad; *Mediación de Geogebra,* para discriminar los posibles procesos de intervención de Geogebra en cada actividad; *Objetivos Específicos*, para discriminar el aporte de cada actividad al objetivo general; y por último la *Acción Estudiante*, para describir la acción operatoria que se espera del estudiante, en relación con la actividad propuesta. En ocasiones, por lo extenso de la descripción de la acción que se esperaba por parte del estudiante, se hizo el análisis en una Figura adicional, que relaciona lo anterior con la numeración de cada pregunta:

<table>
<tr><th>SESIÓN N°</th><th>ACTIVIDAD PROPUESTA</th><th>MARCO TEÓRICO</th><th>OBJETIVOS GENERALES</th><th>MEDIACIÓN DE GEOGEBRA</th><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ACCIÓN ESTUDIANTE</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Nombre de la actividad</td><td rowspan="3">Descripción de la actividad</td><td>Registros de Representación Semiótica</td><td>Comprensión Integrativa del Objeto Matemático Función Cuadrática</td><td rowspan="3">▪ Visualización
▪ Exploración
▪ Modelación
▪ Representación
▪ Verificación
▪ Dinamización
▪ Transformación
▪ Variación
▪ Coordinación</td><td>Discriminar las unidades significantes en los registros involucrados en la actividad, Realizar Tratamientos y Conversiones</td><td></td></tr>
<tr><td>Organización Didáctica y Momentos de Estudio</td><td>Construcción de la OM Función Cuadrática</td><td>Denotar los Momentos Didácticos evidentes en cada actividad</td><td></td></tr>
<tr><td>Campos Conceptuales</td><td>Conceptualización de la Función Cuadrática</td><td>Describir la relación de la actividad propuesta con la referencia, Significado y/o Significante de la Función Cuadrática</td><td></td></tr>
</table>

Figura 29. Plantilla para el análisis a priori de las sesiones propuestas.
Fuente: Elaboración propia.

3.1 Análisis a priori de la sesión 1

Las actividades cognitivas de la representación ligadas a la semiosis según Duval (2004) son la formación de los registros, la transformación de tratamiento y la transformación de la conversión. En primera instancia el docente entrega la tarea en un registro determinado (formación del registro), donde el estudiante para dar respuesta satisfactoria, debe discriminar las unidades significantes de cada registro involucradas en la tarea y realizar las transformaciones de tratamiento y/o conversión requeridas.

El primer momento didáctico se puede etiquetar como el momento del primer encuentro con la OM, el cual se presenta cuando el estudiante se ve en la necesidad de indagar sobre dicha OM para dar respuesta a una tarea determinada. No necesariamente tiene que ser la primera vez que el discente se relaciona con la OM descrita, pues según lo contempla Chevallar (1999), puede ser un reencuentro con la OM para solucionar un tipo de tarea diferente. Los estudiantes del grupo 101 de la UNIAJC cuando cursaron el bachillerato tuvieron un primer encuentro con la OM Función Cuadrática, así que se puede decir que la tarea que se propone solucionar en este caso los ubica en la categoría de reencuentro con la OM.

Por otra parte Vergnaud (1990) asegura que la primera componente de la triada en un campo conceptual que se debe trabajar con el estudiante es la referencia, es decir, poner al estudiante en contacto con una o varias situaciones que le den sentido al objeto matemático que se desee abordar.

El departamento de ciencias básicas (DCB) en concordancia con el Modelo Pedagógico de la UNIAJC (2013), donde se sugiere a los docentes trabajar en la generación de estrategias que le permitan a los estudiantes lograr un aprendizaje Autónomo-Significativo-Colaborativo y teniendo en cuenta la distribución en los porcentajes aplicados a las notas obtenidas en cada asignatura (un 20% de la nota final de la asignatura Matemáticas I corresponde al desempeño logrado en la realización de un proyecto de curso), ha estandarizado la actividad de realizar en todas las asignaturas que orienta el DCB, un proyecto de curso donde se contextualicen algunos contenidos matemáticos a situaciones propias de cada programa. Este proyecto de curso es una actividad que se realiza desde la segunda semana de clases hasta la semana 16, cuyo avance es directamente proporcional al avance del docente en la orientación de las temáticas necesarias para realizar dicho proyecto. El proceso de evaluación del proyecto contempla tres entregas. Para efectos de lo que tiene que ver con el estudio de una OM, en la primera entrega, se analizaron los objetivos específicos propuestos por los estudiantes, en la segunda entrega, se analizó la resolución del problema y en la tercera entrega, se analizó la exposición del proyecto que sustenta el trabajo escrito y en este caso especial que se acompañó el planteamiento del problema con la inclusión de un recurso hecho en el software Geogebra, se analizó la correspondencia del recurso con la actividad propuesta.

Teniendo en cuenta cada una de las anotaciones anteriores se diseñó la siguiente actividad:

3.1.1 Actividad 1. Realizar un proyecto de curso. De acuerdo a los lineamientos del proyecto de curso establecido por el DCB, se propuso a los estudiantes, formar grupos de máximo 4 estudiantes y escoger una empresa donde laborara alguno de los integrantes del grupo, o en su defecto un negocio familiar o de algún conocido, teniendo en cuenta el acceso a la información requerida por el docente para generar el planteamiento del problema de investigación particular a dichos grupos. La información que se solicitó se describe en la siguiente tabla:

Tabla 5. Tabla tipo para la recolección de datos previos al proyecto de curso.

Empresa o Negocio:			
Rereferencia: (Escoger una sola referencia o un solo producto que comercialice la empresa o negocio)			
Mes	**Costo promedio de producción o adquisición por unidad**	**Precio promedio de venta por unidad**	**Cantidad vendida**
sept-16			
oct-16			
nov-16			
dic-16			
ene-17			

Nota: Cada grupo diligencia la Tabla 5 para que el docente asigne el planteamiento del problema respectivo.
Fuente: Elaboración propia.

Una vez que los estudiantes formaron los grupos (en total 9 grupos) y diligenciaron la Tabla 5, el docente procedió a generar los diferentes planteamientos de problemas con el firme criterio de involucrar en dicha situación la OM Función Cuadrática siempre y cuando fuera posible. El docente logró generar dos estructuras de planteamientos de problemas diferentes, articulados con cinco tipos de preguntas.

Estructura tipo 1. Planteamiento del problema

La Empresa "X" a través del historial de ventas, supone que existe una relación lineal entre el precio promedio de venta de cada referencia "Y" y la cantidad de unidades vendidas en el mes. Además ha notado que también hay una relación lineal entre el costo promedio de adquisición y procesamiento de cada unidad, y la cantidad de unidades vendidas en el mes.

Si la Empresa "X" le suministra una muestra de sus movimientos financieros en dos meses como se describe a continuación:

Tabla 6. Movimiento financiero de dos meses respecto al producto "Y" en la empresa "X"

Empresa o Negocio: "X"			
Rereferencia: "Y"			
Mes	**Costo promedio de producción o adquisición por unidad**	**Precio promedio de venta por unidad**	**Cantidad vendida**
Mes 1	costo 1	precio 1	cantidad 1
Mes 2	costo 2	precio 2	cantidad 2

Nota: El docente asigna el planteamiento del problema de acuerdo al movimiento financiero de la empresa o negocio en dos meses respectivos.
Fuente: Elaboración propia.

Preguntas tipo 1

- Determine cuál debe ser la cantidad de la referencia "Y" que debe vender la Empresa "X" para obtener la ganancia máxima mensual. ¿Cuánto es la ganancia máxima mensual?
- A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.

Preguntas tipo 2

- Determine cuál es la ganancia mensual que obtiene la empresa "X" en relación con la venta de la referencia "Y" cuando el costo total es máximo.
- A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.

Preguntas tipo 3

- Determine cuál debe ser el precio promedio de venta de la referencia "Y" para que la empresa "X" obtenga en un mes la ganancia mensual máxima. ¿cuánto es esa ganancia mensual máxima?
- A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.

Preguntas tipo 4

- Determine cuánto es la utilidad mensual que se obtiene en la empresa "X", en relación con la referencia "Y", cuando el ingreso mensual es máximo.

- A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta

Nota: en este caso el costo 1 era igual al costo 2

Estructura tipo 2. Planteamiento del problema

La Empresa "X" presenta una tabla que resume sus movimientos financieros desde el mes de septiembre del año 2016 hasta el mes de enero del año 2017 con respecto a la referencia "Y"

Tabla 7. Movimiento financiero de 5 meses respecto al producto "Y" en la empresa "X"

Empresa o Negocio:				
Rereferencia:				
Mes	**Costo promedio variable de producción o adquisición por unidad**	**Costo promedio fijo mensual de fabricación o adquisición del producto**	**Precio promedio de venta por unidad**	**Cantidad vendida**
sept-16	costo 1	costo 2	precio 1	cantidad 1
oct-16	costo 1	costo 2	precio 1	cantidad 1
nov-16	costo 1	costo 2	precio 1	cantidad 1
dic-16	costo 1	costo 2	precio 1	cantidad 1
ene-17	costo 1	costo 2	precio 1	cantidad 1

Nota: El docente asigna el planteamiento del problema de acuerdo al movimiento financiero de la empresa o negocio en los 5 meses respectivos.
Fuente: Elaboración propia.

Preguntas tipo 5

- Determine la cantidad de la referencia "Y" que debe vender la empresa "X" para lograr el punto de equilibrio en cada mes respecto al producto en estudio.
- A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.

Nota: Como el objeto matemático de estudio es la Función Cuadrática, los proyectos con estructura tipo 2 no fueron tomados en cuenta en el análisis, ya que el objeto matemático que estos involucraban en el proceso de resolución, es la Función Lineal, quedando de esta forma siete proyectos a analizar.

<table>
<tr><th>SESIÓN N° 1</th><th>ACTIVIDAD PROPUESTA</th><th>MARCO TEÓRICO</th><th>OBJETIVOS GENERALES</th><th>MEDIACIÓN DE GEOGEBRA</th><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ACCIÓN ESTUDIANTE</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Actividad 1. Realizar un proyecto de curso</td><td rowspan="3">Teniendo en cuenta la información suministrada en el planteamiento del problema, describa los objetivos generales y específicos del proyecto de curso correspondiente</td><td>Registros de Representación Semiótica</td><td>Comprensión Integrativa del Objeto Matemático Función Cuadrática</td><td rowspan="3">▪ Visualización
▪ Exploración
▪ Modelación
▪ Representación
▪ Verificación
▪ Dinamización
▪ Transformación
▪ Variación
▪ Coordinación</td><td>Discriminar las unidades significantes en el registro de representación lengua natural y proceder a plantear los objetivos que le permitan llegar a la solución del problema</td><td>En la primera entrega, se esperaba que el estudiante planteara a través de los objetivos, el procedimiento a seguir para dar respuesta a la situación descrita en el registro de representación lengua natural.

En la Figura 31 se discriminan dichos objetivos.</td></tr>
<tr><td>Organización Didáctica y Momentos de Estudio</td><td>Construcción de la OM Función Cuadrática</td><td>Momento del primer encuentro</td><td>Se esperaba que el estudiante se reencontrara con la OM Función Cuadrática y se viera en la necesidad de explorar una técnica que le permitiera plantear los objetivos requeridos en la primera entrega.</td></tr>
<tr><td>Campos Conceptuales</td><td>Conceptualización de la Función Cuadrática</td><td>Esta actividad se relaciona directamente con el componente referencia (Conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto)</td><td>Se esperaba que con la situación propuesta, la cual corresponde netamente a problemas específicos de la Facultad de Ciencias Empresariales, el estudiante fuera motivado a entrar en el proceso de conceptualización de la Función Cuadrática.</td></tr>
</table>

Figura 30. Análisis a priori de la actividad 1. Proyecto de curso, primera entrega.
Fuente: Elaboración propia.

ITEM	PROYECTO	PREGUNTAS	OBJETIVO GENERAL ESPERADO	OBJETIVOS ESPECIFICOS ESPERADOS
Proyecto 1 Proyecto 2 Proyecto 3	Ganancia máxima mensual en la empresa “X” en relación con la referencia “Y”	Determine cuál debe ser la cantidad de la referencia “Y” que debe vender la Empresa “X” para obtener la ganancia máxima mensual. ¿Cuánto es la ganancia máxima mensual? A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	Determinar cuántas unidades de la referencia “Y” debe vender la empresa “X” para obtener la ganancia máxima mensual, hallar la ganancia máxima mensual, y modelar a través de un recurso en Geogebra, la solución de la situación propuesta.	▪ Hallar las ecuaciones que relacionan la cantidad vendida de la referencia “X” con el precio y el costo. ▪ Hallar las ecuaciones de ingreso y costo total en la empresa “X” en relación con la referencia “Y” ▪ Hallar la ecuación de la utilidad para determinar la cantidad de la referencia “X” que debe vender la empresa “Y” para obtener la ganancia máxima mensual y determinar cuánto es la ganancia máxima mensual. ▪ Crear recurso en Geogebra que modele la solución propuesta
Proyecto 4	Ganancia mensual obtenida en la empresa “X” en relación con la referencia “Y”, cuando el costo total es máximo	Determine cuál es la ganancia mensual que obtiene la empresa “X” en relación con la venta de la referencia “Y” cuando el costo total es máximo. A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	Determinar cuál es la ganancia mensual que obtiene la empresa “X” en relación con la venta de la referencia “Y” cuando el costo total es máximo y modelar a través de un recurso en Geogebra, la solución de la situación propuesta.	▪ Hallar las ecuaciones que relacionan la cantidad vendida en el mes de la referencia “Y” en la empresa “X” con el precio y el costo ▪ Hallar la cantidad mensual vendida de la referencia “Y” en la empresa “X” que genera el costo máximo, y la ecuación de ingreso ▪ Hallar la ganancia mensual que se genera en la empresa “X” en relación con la referencia “Y” cuando el costo total es máximo ▪ Crear recurso en Geogebra que modele la solución de la situación propuesta.

Proyecto 5 Proyecto 6	Ganancia máxima mensual en la empresa "X" en relación con la referencia "Y"	Determine cuál debe ser el precio promedio de venta de la referencia "Y" para que la empresa "X" obtenga en un mes la ganancia mensual máxima. ¿Cuánto es esa ganancia mensual máxima? A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	Determinar cuál debe ser el precio promedio de venta de la referencia "Y" para que la empresa "X" obtenga en un mes la ganancia mensual máxima, hallar la ganancia mensual máxima y modelar a través de un recurso en Geogebra, la solución de la situación propuesta.	▪ Hallar las ecuaciones que relacionan la cantidad vendida en el mes de la referencia "Y" en la empresa "X", con el precio y el costo ▪ Hallar las ecuaciones de ingreso y costo total en la empresa "X" en relación a la cantidad vendida en el mes de la referencia "Y" ▪ Hallar la ganancia mensual máxima y el precio promedio que debe tener cada referencia "Y" para alcanzarla. ▪ Crear recurso en Geogebra que modele la solución de la situación propuesta
Proyecto 7	Utilidad mensual en la empresa "X" en relación con la referencia "Y" cuando el ingreso mensual es máximo	Determine cuánto es la utilidad mensual que se obtiene en la empresa "X" en relación con la referencia "Y", cuando el ingreso mensual es máximo. A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta	Determinar cuánto es la utilidad mensual que se obtiene en la empresa "X" en relación con la referencia "Y", cuando el ingreso mensual es máximo y modelar a través de un recurso en Geogebra, la solución de la situación propuesta.	▪ Hallar las ecuaciones que relacionan la cantidad vendida en el mes de la referencia "Y" en la empresa "X" con el precio y el costo ▪ Hallar el ingreso máximo que se obtiene en un mes en la empresa "X" por la venta de la referencia "Y" ▪ Hallar la utilidad mensual que se genera en la empresa "X" al obtener el ingreso máximo por la venta de la referencia "Y" ▪ Crear recurso en Geogebra que modele la solución de la situación propuesta

Figura 31. Análisis a priori de la actividad 1. Proyecto de curso, primera entrega (Objetivos esperados).
Fuente: Elaboración propia.

3.2 Análisis a priori de la sesión 2

Teniendo en cuenta la dificultad mayor que habla Duval (2004) en la discriminación de las unidades significantes del registro de representación lengua natural en relación con los demás registros, se hizo necesario introducir una tarea que involucrara los registros de representación gráfico cartesiano, simbólico algebraico y algunos tratamientos en dichos registros, con la firme intención de que el estudiante discriminara las unidades significantes de estos y fuera automatizando la actividad cognitiva de menor a mayor análisis. Además el proyecto de curso es una actividad de largo aliento (diseñada para realizarla a lo largo de todo el semestre) y se puede "pausar" un tiempo, hasta que el alumno a través de actividades que involucren un análisis menor, adquiera la destreza suficiente para avanzar y llegar a feliz término en la realización de dicho proyecto.

El segundo momento didáctico se puede etiquetar como el momento de la exploración de un tipo determinado de tareas y de la elaboración de una técnica alusiva a este tipo de tareas. El estudiante debe buscar la técnica que le ayude a resolver el tipo de tarea propuesta. El docente planea el segundo momento teniendo en cuenta la generación de un espacio donde el estudiante pueda explorar aspectos concernientes a la OM en juego y que le ayude a descubrir la técnica adecuada para resolver el problema planteado en el momento 1.

El tercer momento se nombra como el momento de la justificación de la técnica, en donde el estudiante se debe preguntar por qué la técnica usada en el momento 2 para dar cuenta de una tarea determinada funciona.

En la teoría de campos conceptuales (Vergnaud, 1990), el significante que es homólogo a los registros de representación semiótica de Duval (2004), sirve para explicitar características del concepto en estudio y el significado hace referencia al objeto representado, que contempla los invariantes operatorios (Concepto en acto y teoremas en acto). De esta forma se va completando la triada que conforma un campo conceptual.

Paralelo a lo anterior, el software de matemática Geogebra permite visualizar en línea diferentes registros de representación de un objeto matemático, como el gráfico cartesiano y el simbólico algebraico, además se pueden observar simultáneamente, varios tipos de tratamiento en dichos registros, no siendo menos importante el gran beneficio de poder interactuar con el objeto matemático al hacer cambios de parámetros a través de los deslizadores. Esto último favorece el método descrito por Piaget (como se citó en Duval, 2004) para discriminar el efecto de cada uno de los factores en un proceso multifactorial, el cual consiste en variar un solo factor, mientras los demás permanecen constantes, de igual forma Duval (2004) afirma que la discriminación de la unidades significantes en los registros de representación, se puede lograr haciendo variar un solo factor y observar los cambios que se producen en los diferentes registros disponibles.

La UNIAJC cuenta con salas de sistemas disponibles para la realización de trabajos que involucren las TICs. Estos computadores están equipados con diferentes software de carácter educativo, entre los cuales se encuentra Geogebra.

Teniendo en cuenta lo anterior, el docente diseñó el recurso “Semiótica de la Función Cuadrática” en Geogebra (2017) que le permitiera al estudiante explorar la técnica que requiere para resolver un cuestionario y que en la medida de lo posible, el estudiante discriminara los aspectos o características importantes (en palabras de Duval (2004) unidades significantes) de la Función Cuadrática. El cuestionario diseñado por el docente, es del tipo de selección múltiple con única respuesta. La intención de este tipo de cuestionario era que el estudiante al querer descartar las opciones incorrectas, dirigiera su atención a las diferentes variaciones de los registros de representación y se favoreciera el enfoque del aprendizaje deseado (coordinación de los registros). La exigencia de la justificación de cada una de las respuestas dadas, ubica al estudiante en el tercer momento didáctico (Justificación de la técnica).

3.2.1 Actividad 2. Cuestionario y recurso en Geogebra

Hoja de Justificación.

Favor consigne en esta hoja cada procedimiento realizado en el recurso en Geogebra para seleccionar la respuesta que usted considere correcta.

Antonio José Camacho INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA CIENCIAS BÁSICAS	ESTUDIANTE		DOCENTE	Ademir Lucumi Villegas		CALIFICACIÓN
	No. IDENTIFICACIÓN		E- MAIL	alucumi@admon.uniajc.edu.co		
	ASIGNATURA	Matemáticas I	ACTIVIDAD	Taller Función Cuadrática		
	PROGRAMA	Contabilidad - Mercadeo	GRUPO	101	FECHA 28/03/2017	

1. El punto de corte o intersección con el eje "Y" de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende de:
   a. El valor del parámetro a
   b. El valor del parámetro b
   c. El valor del parámetro c
   d. El valor de la variable independiente "x"
   e. Ninguna de las anteriores

2. La función cuadrática en su representación gráfica describe una parábola que es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. El sentido de esta concavidad depende de:
   a. El valor del parámetro a
   b. El valor del parámetro b
   c. El valor del parámetro c
   d. El valor de la variable independiente "x"
   e. Ninguna de las anteriores

3. El punto máximo o punto mínimo de la función cuadrática es el vértice de la parábola (denotaremos el vértice como V(Vx, Vy)).Teniendo en cuenta las cuatro representaciones de la función cuadrática explícitas en el recurso construido en Geogebra, seleccione la forma que usted considera más apropiada para determinar el vértice con prontitud y exactitud:
   a. Forma Gráfica
   b. Forma Factorizada
   c. Forma Canónica
   d. Forma General
   e. Ninguna de las anteriores

4. El eje de simetría de una parábola es la recta vertical que divide la parábola en dos partes simétricas o congruentes. La ecuación de dicha recta es:
   a. $x = Vy$, donde Vy es la ordenada del vértice
   b. $y = Vx$, donde Vx es la abscisa del vértice
   c. $y = mx + b$
   d. $y = ax^2 + bx + c$
   e. Ninguna de las anteriores

5. En relación con los puntos de corte de la parábola con el eje "x", se puede afirmar:
   a. Una parábola tiene un punto de corte con el "x"
   b. Una parábola tiene dos puntos de cortes con el eje "x"
   c. Una parábola no tiene puntos de corte con el eje "x"
   d. a o b o c
   e. ninguna de la anteriores

6. Teniendo en cuenta las cuatro representaciones de la función cuadrática explícitas en el recurso en Geogebra, ¿Cuál considera usted la forma que le permite conocer con mayor prontitud y exactitud los puntos de corte de la parábola con el eje "x"?
   a. Forma Gráfica
   b. Forma Factorizada
   c. Forma Canónica
   d. Forma General
   e. Ninguna de las anteriores

7. El dominio de la función cuadrática es:
   a. Todos los reales
   b. Todos los $f(x)$ menores o iguales al vértice si la parábola es cóncava hacia arriba
   c. Todos los $f(x)$ mayores o iguales al vértice si la parábola es cóncava hacia abajo
   d. Todos los x mayores o iguales al vértice
   e. Ninguna de las anteriores

8. El rango de la función cuadrática es:
   a. Todos los reales
   b. Todos los $f(x)$ menores o iguales al vértice si la parábola es cóncava hacia arriba
   c. Todos los $f(x)$ mayores o iguales al vértice si la parábola es cóncava hacia abajo
   d. Todos los x mayores o iguales al vértice
   e. Ninguna de las anteriores

9. La monotonía de una función nos permite saber la variación de $f(x)$ respecto a la variación de la variable independiente x, es decir la monotonía comprende los conceptos de crecimiento y decrecimiento de la función. De acuerdo a lo anterior se puede afirmar que la monotonía de la función cuadrática es:
   a. Estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, Vx)$, si la parábola es cóncava hacia arriba
   b. Estrictamente creciente en el intervalo $(Vx, +\infty)$, si la parábola es cóncava hacia abajo
   c. Estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, Vx)$, si la parábola es cóncava hacia abajo
   d. Estrictamente creciente en el intervalo $(Vy, +\infty)$, si la parábola es cóncava hacia abajo
   e. Ninguna de las anteriores

10. Si se ingresan los valores de $2, -8$ $y -2$ en las casillas de los parámetros a, b y c respectivamente, determinar los siguientes datos de la función resultante:
    a. Vértice
    b. Punto de corte o intersección con el eje "y"
    c. Puntos de corte o intersección con el eje "x"
    d. Eje de simetría
    e. Monotonía
    f. Dominio
    g. Rango

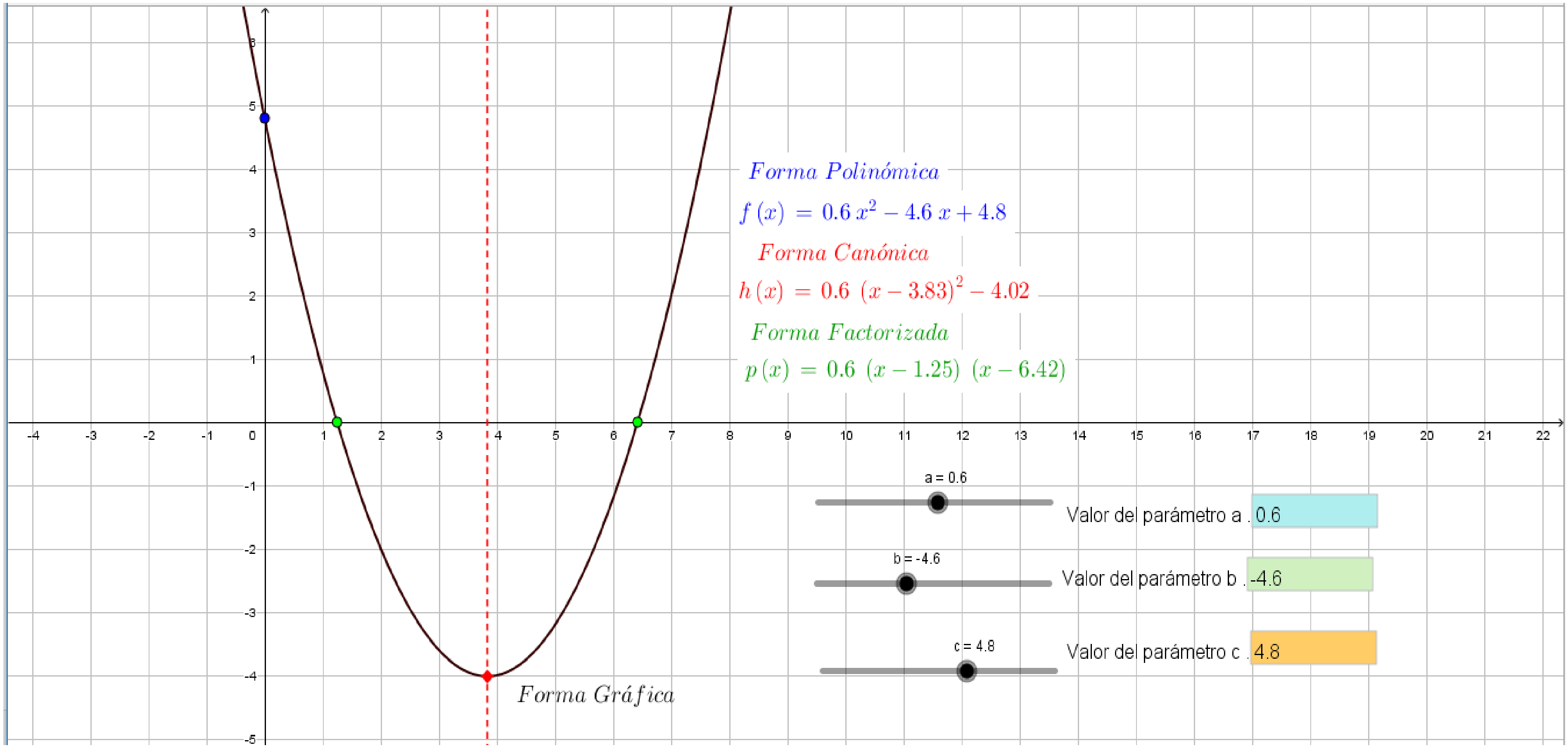


Figura 32. Recurso en Geogebra. Semiótica de la Función Cuadrática.
Fuente: Elaboración propia.

Nota: para evitar hacer 10 plantillas para el análisis de cada pregunta del cuestionario, se presenta la plantilla normalizada con algunos aspectos generales del cuestionario y en una Figura aparte se discriminó, la actividad que se esperaba que cada estudiante realizara.

SESIÓN N° 2	ACTIVIDAD PROPUESTA	MARCO TEÓRICO	OBJETIVOS GENERALES	MEDIACIÓN DE GEOGEBRA	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ACCIÓN ESTUDIANTE
Actividad 2. Cuestionario y Recurso en Geogebra	La actividad consiste en analizar el recurso en Geogebra para dar respuesta a 10 preguntas de selección múltiple con única respuesta	Registros de Representación Semiótica	Comprensión Integrativa del Objeto Matemático Función Cuadrática	▪ Visualización ▪ Exploración ▪ Modelación ▪ Representación ▪ Verificación ▪ Dinamización ▪ Transformación ▪ Variación ▪ Coordinación	Discriminar las unidades significantes en los registros de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico: Sentido de la concavidad, Vértice, Cortes con los ejes, Dominio, Rango, Eje de simetría y Monotonía	La actividad que se esperaba por parte del estudiante, se describe en una Figura aparte
		Organización Didáctica y Momentos de Estudio	Construcción de la OM Función Cuadrática		Momentos didácticos 1, 2 y 3	Se esperaba que el estudiante se reencontrara con la OM Función Cuadrática y se viera en la necesidad de explorar una técnica que le permitiera resolver las preguntas del cuestionario y además describiera la técnica usada en la hoja de justificación
		Campos Conceptuales	Conceptualización de la Función Cuadrática		Los componentes de la triada de conceptualización que se esperaban evidenciar en esta actividad son el significado y el significante de la Función Cuadrática	Se esperaba que el estudiante diferenciara el objeto representado del representante

Figura 33. Análisis a priori de la actividad 2. Cuestionario y recurso en Geogebra.
Fuente: Elaboración propia.

PREGUNTA N°	RESPUESTA CORRECTA	ACCIÓN QUE SE ESPERA QUE EL ESTUDIANTE REALICE EN RELACIÓN A LA ACTIVIDAD PROPUESTA
1	C	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que el punto de corte con el eje "y" permanece constante cuando varían a y b, pero que cambia de valor al variar c
2	A	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que el sentido de la concavidad solo se modifica cuando a es mayor o menor que cero
3	C	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que el punto máximo o mínimo (Vértice) coincidía con los valores de h y de k, explícitos en la forma canónica.
4	E	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que el eje de simetría es una recta vertical que pasa por Vx, es decir que la ecuación de la recta vertical sería $x = Vx$.
5	D	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que en ocasiones la parábola corta al eje x en dos puntos, otras veces en un punto y otras veces no lo corta.
6	B	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que los puntos de corte con el eje x, coinciden con los ceros de la función, explícitos en la forma factorizada.
7	A	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que la parábola no tiene limitación en su dominio, es decir que cualquier número real hace parte de él.
8	E	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que los valores que toma la función, van desde Vy hasta ∞ si la parábola es cóncava hacia arriba y que van desde $-\infty$ hasta Vy si la parábola es cóncava hacia abajo.
9	C	Se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que la función es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, Vx)$ si la parábola abre hacia abajo
10	Las respuestas correctas se especifican en el recuadro lateral derecho	Se esperaba que el estudiante al ingresar los valores dados, observara en los diferentes registros de representación simbólica algebraica el Vértice $(2, -10)$, El corte con el eje y en $y = -2$, Los cortes con el eje x en $x = -0{,}24$ y en $x = 4.24$, El Eje de Simetría era la recta $x = 2$, La Monotonía era decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$y creciente en el intervalo $(2, \infty)$, El Dominio es el conjunto de los números Reales y el Rango es el conjunto $[-10, \infty)$

Figura 34. Análisis a priori de la actividad 2. Cuestionario y recurso Geogebra.
Fuente: Elaboración propia.

3.3 Análisis a priori de la sesión 3

En la sesión 2 se trabajó un primer acercamiento a las transformaciones de conversión y tratamiento en los registros de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico (en las formas polinómica, canónica y factorizada) de la Función Cuadrática a través de la articulación de un recurso hecho en Geogebra y un cuestionario que orientaba al estudiante a descubrir las unidades significantes de dichos registros. En esta sesión se aprovecharon los resultados obtenidos en la sesión anterior como insumo principal para el siguiente momento didáctico puesto en juego.

Según Chevallard (1999), el quinto momento didáctico es el de la Institucionalización, que consiste en precisar lo que es exactamente la OM, resolver aquellos interrogantes que se hayan generado en el momento de la exploración de la técnica y si se ha suscitado un error en la concepción de algún elemento perteneciente a la OM en construcción, se debe corregir.

En esta instancia, los problemas planteados en el proyecto de curso, en el cuestionario anterior y la acción operatoria del estudiante, le han dado sentido al concepto en estudio, por tanto se puede avanzar en la construcción de la conceptualización de la Función Cuadrática, sumando la definición y mostrando los invariantes y las diferentes representaciones que aportan al significado y al significante.

3.3.1 Actividad 3. Institucionalización de la Función Cuadrática.

El docente estructuró su discurso presentando primero los resultados obtenidos en el momento de la exploración de la técnica, ya que estos muestran el avance del proceso de construcción de la OM y revelan aquellas temáticas relacionadas a la OM donde se debe hacer mayor énfasis. Teniendo en cuenta esto, se presentaron los registros más comunes de representación de la Función Cuadrática, las unidades significantes de cada registro y las diferentes transformaciones de tratamiento y conversión entre los registros gráfico cartesiano y simbólico algebraico. Como se dijo anteriormente, se usó el registro de representación tabular numérico como registro intermedio en las transformaciones de conversiones en ambos sentidos entre los registros privilegiados en este trabajo de investigación. La transformación de conversión del registro lengua natural a los otros registros antes mencionados, se dejó para el momento didáctico del trabajo de la técnica, debido a la complejidad mayor en la comprensión que este presenta, con el fin de afirmar primero en los estudiantes, la discriminación de las unidades significantes de los registros de destino (gráfico cartesiano y simbólico algebraico) en el momento de dicha conversión.

En la siguiente Figura se presenta el resumen de las unidades significantes propias de cada registro. La categoría implícita quiere decir que debe realizarse el tratamiento respectivo para hallar la unidad significante requerida. La categoría explícita quiere decir que la unidad significante requerida, se evidencia a simple vista en el registro correspondiente. En el registro gráfico aparece en algunas celdas “depende”, es decir, que de acuerdo a los valores de intersección de la abscisa y la ordenada en cada punto que relacione una unidad significante, será explícita si la intersección se da entre valores enteros, de lo contrario, será implícita.

Las diferentes transformaciones de tratamiento están explicadas y sustentadas en el capítulo de fundamentación teórica, por tal razón no se explicitaron en este capítulo. Esta sesión no cuenta con evaluación directa, ya que es el momento de la institucionalización (tarea del profesor), pero al final del proceso, se podrá evidenciar la eficacia o aporte de todos los momentos didácticos, incluyendo este, en la construcción de la OM en estudio.

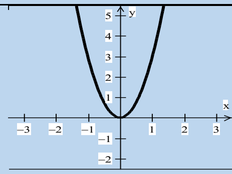
UNIDADES SIGNIFICANTES		REGISTRO DE REPRESENTACIÓN GRÁFICO CARTESIANO		REGISTRO DE REPRESENTACIÓN SIMBÓLICO ALGEBRAICO					
				FORMA POLINÓMICA $f(x) = ax^2 + bx + c$		FORMA CANÓNICA $f(x) = a(x-h)^2 + k$		FORMA FACTORIZADA $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$	
		Explícita	Implícita	Explícita	Implícita	Explícita	Implícita	Explícita	Implícita
1	Vértice: máximo o mínimo	Depende del punto de intersección			X	X			X
2	Orientación de la concavidad	X		X		X		X	
3	Alargamiento o compresión $f(x) = x^2$	X		X		X		X	
4	Corte con el eje Y	Depende del punto de intersección		X			X		X
5	Cortes con el eje X	Depende de los puntos de intersección			X		X	X	
6	Dominio	X		X		X		X	
7	Rango	Depende del punto de intersección			X	X			X
8	Eje de simetría	Depende del punto de intersección			X	X			X
9	Monotonía	Depende del punto de intersección			X	X			X

Figura 35. Relación de las unidades significantes de la Función Cuadrática y los registros de representación.
Fuente: Elaboración propia.

3.4 Análisis a priori de la sesión 4

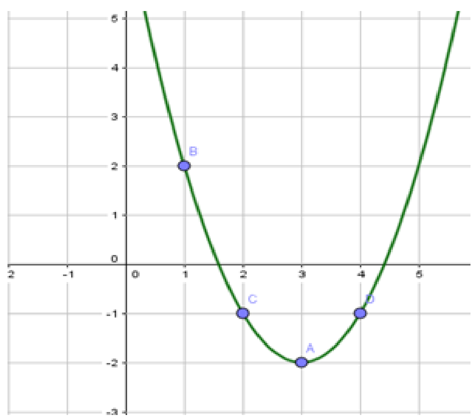
En la sesión 1 se introdujo la formación del registro de representación lengua natural para describir el planteamiento del problema de los proyectos de curso asignados a cada grupo, pero hasta el momento no se ha trabajado el proceso de conversión del registro de representación lengua natural a otro registro de representación de la Función Cuadrática y en la sesión 2, se introdujo a través del recurso en Geogebra, los registros de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico de la Función Cuadrática y la representación implícita de algunos tratamientos y conversiones, sin explicitar los procesos de transformación entre los diferentes registros mencionados. En esta sesión se mostró explícitamente el proceso de transformación de conversión en ambos sentidos entre los registros gráfico cartesiano y simbólico algebraico. Además se explicitó el proceso de transformación de tratamiento en el registro simbólico algebraico, integrando las representaciones simbólicas algebraicas de la Función Cuadrática en las formas polinómica, factorizada y canónica. También se realizaron ejercicios de transformación de conversión del registro lengua natural al registro algebraico simbólico; todo esto con el propósito de que los estudiantes lograran discriminar las unidades significantes en cada registro de representación y acercarlos cada vez más a una comprensión integrativa del objeto matemático en estudio.

El cuarto momento se puede etiquetar como el momento del trabajo de la técnica, en este momento se buscó que el estudiante practicara las técnicas usadas en los procesos de transformación de los registros gráfico cartesiano y simbólico algebraico. También se trabajaron ejercicios de conversión del registro de representación lengua natural al registro de representación simbólico algebraico.

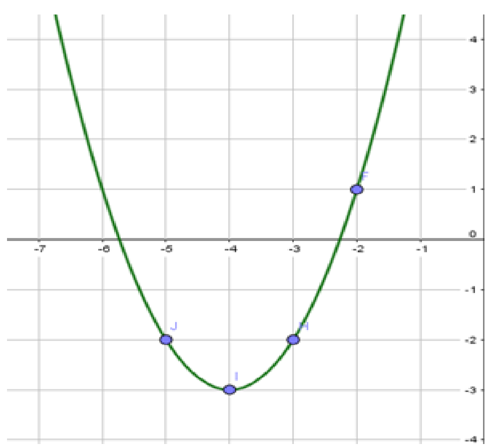
3.4.1 Actividad 4.1 Taller de Conversiones y Tratamientos

Antonio José Camacho INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA CIENCIAS BÁSICAS	ESTUDIANTE		DOCENTE	Ademir Lucumi Villegas			CALIFICACIÓN
	No. IDENTIFICACIÓN		E- MAIL	alucumi@admon.uniajc.edu.co			
	ASIGNATURA	Matemáticas I	ACTIVIDAD	Taller Función Cuadrática			
	PROGRAMA	Contabilidad - Mercadeo	GRUPO	101	FECHA	04/04/2017	

1. Hallar los aspectos importantes de las funciones que se describen a continuación:
   a. $f(x) = -3x^2 + 5x + 3$
   b. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$
   c. $f(x) = 2(x-1)^2 - 2$
   d. $f(x) = 3(x+1)^2 + 4$
   e. $f(x) = -(x+4)(x-3)$
   f. $f(x) = -5(x-2)(x+1)$
   g.



   h.



Nota: en el siguiente enlace, puede verificar los resultados obtenidos.

https://www.geogebra.org/m/yghkTkwM

2. (Ingreso máximo) El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $I(x) = 12x - 0.01x^2$ dólares. Determine el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

3. (Utilidad máxima) La utilidad $U(x)$ obtenida por fabricar y vender x unidades de cierto producto está dada por $U(x) = 60x - x^2$

   Determine el número de unidades que deben producirse y venderse con el objetivo de maximizar la utilidad. ¿Cuál es esta utilidad máxima?

4. (Ingresos y utilidad máximas) Una empresa tiene costos fijos mensuales de $2000 y el costo variable por unidad de su producto es de $25.
   a. Determine la función de costo.
   b. El ingreso I obtenido por vender x unidades está dado por $I(x) = 60x - 0.01x^2$. Determine el número de unidades que deben venderse al mes de modo que maximicen el ingreso. ¿Cuál es este ingreso máximo?
   c. ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse al mes con el propósito de obtener una utilidad máxima? ¿Cuál es esta utilidad máxima?
   d. ¿Cuántas unidades deben venderse como mínimo para que la empresa no tenga pérdidas?

5. (Costo mínimo) El costo promedio por unidad (en dólares) al producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 20 - 0.06x + 0.0002x^2$. ¿Qué número de unidades producidas minimizarían el costo promedio? ¿Cuál es el correspondiente costo mínimo por unidad?

6. (Cercado) Un granjero tiene 500 yardas de cerca con la cual delimitará un corral rectangular. ¿Cuál es el área máxima que puede cercar?

7. (Fijación del precio de un libro) Si un editor fija el precio de un libro en $20 cada uno, venderá 10,000 ejemplares. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 copias. ¿Qué precio debería fijar a cada libro de modo que el ingreso sea máximo? ¿Cuál es el valor de este ingreso máximo?

Nota: *Algunos ejercicios fueron tomados del libro de matemáticas aplicada a la administración de Arya.*

SESIÓN N° 4	ACTIVIDAD PROPUESTA	MARCO TEÓRICO	OBJETIVOS GENERALES	MEDIACIÓN DE GEOGEBRA	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ACCIÓN ESTUDIANTE
Actividad 4.1 Taller de Tratamientos y Conversiones	La actividad consiste en resolver diferentes situaciones que implican las transformaciones de conversión y tratamientos de los diferentes registros de representación en estudio	Registros de Representación Semiótica	Comprensión Integrativa del Objeto Matemático Función Cuadrática	▪ Visualización ▪ Exploración ▪ Modelación ▪ Representación ▪ Verificación ▪ Dinamización ▪ Transformación ▪ Variación ▪ Coordinación	Realizar transformaciones de tratamiento y conversión para dar cuenta de las unidades significantes en cada registro de representación presentado	La actividad que se esperaba por parte del estudiante, se describe en una Figura aparte.
		Organización Didáctica y Momentos de Estudio	Construcción de la OM Función Cuadrática		Momento didáctico 4	Se esperaba que el estudiante practicara las técnicas para realizar las transformaciones de tratamientos y conversión entre los registros requeridos para solucionar cada pregunta del taller
		Campos Conceptuales	Conceptualización de la Función Cuadrática		En esta actividad se esperaba evidenciar la relación entre los componentes de la triada que define la Función Cuadrática	Se esperaba que el estudiante afianzara el concepto de Función Cuadrática relacionando los componentes de la tripleta mencionada, a través de la resolución de los ejercicios

Figura 36. Análisis a priori de la actividad 4.1 Taller de conversiones y tratamiento.
Fuente: Elaboración propia.

PREGUNTA N°	ACCIÓN QUE SE ESPERA QUE EL ESTUDIANTE REALICE EN RELACIÓN A LA ACTIVIDAD PROPUESTA
1ª	Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes corte con el eje "y" (en y = 3), el sentido de la concavidad (cóncava hacia abajo) y el dominio (x Є R) del registro de representación simbólico algebraico forma polinómica. También se esperaba que el estudiante practicara los respectivos tratamientos en dicho registro para hallar el Vértice (0.83, 5.08), Cortes con el eje x (en $x = 2.14$ y en $x = -0.47$), Rango (-∞, 5.08], Eje de simetría (recta $x = 0.83$) y Monotonía (Creciente en (-∞, 0.83) y Decreciente en (0.83, ∞). Además se esperaba que el estudiante practicara la transformación de conversión del registro de representación simbólico algebraico, al registro de representación gráfico cartesiano.
1b	Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes corte con el eje "y" (en y = 2), el sentido de la concavidad (cóncava hacia arriba) y el dominio (x Є R) del registro de representación simbólico algebraico forma polinómica. También se esperaba que el estudiante practicara los respectivos tratamientos en dicho registro para hallar el Vértice (-1, 0), Corte con el eje x (en $x = -1$), Rango [0, ∞), Eje de simetría (recta $x = -1$) y Monotonía (Decreciente en (-∞, -1) y creciente en (-1, ∞). Además se esperaba que el estudiante practicara la tranformación de conversión del registro de representación simbólico algebraico, al registro de representación gráfico cartesiano.
1c	Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes Vértice (1, -2), el sentido de la concavidad (cóncava hacia arriba), Rango [-2, ∞), y el dominio (x Є R) del registro de representación simbólico algebraico forma canónica. También se esperaba que el estudiante practicara los respectivos tratamientos en dicho registro para hallar el punto de corte con el eje "y" (en y = 0), Cortes con el eje x (en $x = 0$ y en $x = 2$), Eje de simetría (recta $x = 1$) y Monotonía (Decreciente en (-∞, 1) y creciente en (1, ∞). Además se esperaba que el estudiante practicara la transformación de conversión del registro de representación simbólico algebraico, al registro de representación gráfico cartesiano.
1d	Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes Vértice (-1, 4), el sentido de la concavidad (cóncava hacia arriba), Rango [4, ∞), y el dominio (x Є R) del registro de representación simbólico algebraico forma canónica. También se esperaba que el estudiante practicara los respectivos tratamientos en dicho registro para hallar el punto de corte con el eje "y"(en y = 7), Cortes con el eje x (no tiene), Eje de simetría (recta $x = -1$) y Monotonía (Decreciente en (-∞, -1) y creciente en (-1, ∞). Además se esperaba que el estudiante practicara la transformación de conversión del registro de representación simbólico algebraico, al registro de representación gráfico cartesiano.
1e	Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes cortes con el eje x (en $x = -4$ y en $x = 3$), el sentido de la concavidad (cóncava hacia abajo) y el dominio (x Є R) del registro de representación simbólico algebraico forma factorizada. También se esperaba que el estudiante practicara los respectivos tratamientos en dicho registro para hallar el Vértice (-0.5, 12.25), Rango (-∞, 12.25], Corte con el eje y (en $y = 12$), Eje de simetría (recta $x = -1/2$) y Monotonía (Creciente en (-∞, -1/2) y Decreciente en (-1/2, ∞). Además se esperaba que el estudiante practicara la conversión del registro de representación simbólico algebraico, al registro de representación gráfico cartesiano.

1f	Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes cortes con el eje x (en $x = 2$ y en $x = -1$), el sentido de la concavidad (cóncava hacia abajo) y el dominio (x Є R) del registro de representación simbólico algebraico forma factorizada. También se esperaba que el estudiante practicara los respectivos tratamientos en dicho registro para hallar el Vértice (0.5, 11.25), Rango (-∞, 11.25], Corte con el eje y (en $y = 10$), Eje de simetría (recta $x = 1/2$) y Monotonía (Creciente en (-∞, 1/2) y Decreciente en (1/2, ∞). Además se esperaba que el estudiante practicara la transformación de conversión del registro de representación simbólico algebraico, al registro de representación gráfico cartesiano.
1g	Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes Vértice (3, -2) , el sentido de la concavidad (cóncava hacia arriba), La Monotonía (Decreciente en (-∞, 3) y creciente en (3, ∞) , Eje de simetría (recta $x = 3$), Dominio (x Є R) y el Rango [-2, ∞) del registro de representación gráfico cartesiano. También se esperaba que el estudiante practicara la transformación de conversión del registro gráfico cartesiano al registro simbólico algebraico y además practicara los respectivos tratamientos en este último para encontrar las unidades significantes Corte con el eje y (en $y = 13$) y Cortes con el eje x (en $x = -5.73$ y en $x = -2.27$).
1h	Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes Vértice (-4, -3), el sentido de la concavidad (cóncava hacia arriba), La Monotonía (Decreciente en (-∞, -4) y creciente en (-4, ∞), Eje de simetría (recta $x = -4$) Dominio (x Є R) y Rango [-3, ∞) del registro de representación gráfico cartesiano. También se esperaba que el estudiante practicara la transformación de conversión del registro gráfico cartesiano al registro simbólico algebraico y además practicara los respectivos tratamientos en este último para encontrar las unidades significantes Corte con el eje y (en $y = 7$) y Cortes con el eje x (en $x = 1.59$ y en $x = 4.41$).
2	Se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso son 600 unidades y el correspondiente ingreso máximo es de 3600 dólares.
3	Se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades que deben producirse y venderse cada mes con el propósito de maximizar la utilidad son 30 unidades y la utilidad máxima es de 900 dólares.
4	Para el inciso 4a, se esperaba que el estudiante dedujera con los conocimientos previos, la ecuación de costos $C(x) = 25x + 2000$. En el inciso 4b, se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico , realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso son 3.000 unidades y el correspondiente ingreso máximo es de 90.000 dólares. En el inciso 4c, Se esperaba que el estudiante hallara la función de utilidad $U(x) = -0.01x^2 + 35x - 2000$ y discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades que deben producirse y venderse cada mes con el propósito de maximizar la utilidad son 1.750 unidades y la utilidad máxima es de 28.625 dólares. En el inciso 4d, se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante cortes con el eje x, hiciera la transformación de conversión al registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y diera la respuesta en el registro lengua natural. Como mínimo deben venderse 59 unidades para que la empresa no tenga pérdidas.

5	Se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades producidas que minimizarían el costo promedio son 150 unidades y costo promedio mínimo por unidad sería 15.5 dólares.
6	Se esperaba que el estudiante con los conocimientos previos, hallara la ecuación del perímetro en función de la base y la altura, hiciera el proceso de sustitución para hallar la función del área a maximizar. Después de esto se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. El área máxima que el granjero puede cercar con 500 yardas es 15.625 yardas cuadradas.
7	Se esperaba que el estudiante con los conocimientos previos, hallara la ecuación de demanda $x = -400p + 18000$ después hallara la función de ingreso $I(p) = -400p^2 + 18000p$. Después de esto se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. El precio que el editor debería fijar a cada libro de modo que el ingreso sea máximo es de 22.5 dólares y el respectivo ingreso máximo es de 202.500 dólares.

Figura 37. Análisis a priori de la actividad 4.1 Taller de tratamientos y conversiones.
Fuente: Elaboración propia.

Nota: El taller de conversiones y tratamientos se realizó en clases con el acompañamiento didáctico del docente, era un taller para practicar los diferentes tratamientos y conversiones entre los registros dados y discriminar las unidades significantes propias a cada registro. El docente para evaluar la eficacia de esta actividad, realizó un quiz individual donde el estudiante diera cuenta de los procedimientos de transformaciones de tratamientos y conversiones entre los registros gráfico cartesiano y simbólico algebraico, además debían discriminar las unidades significantes en dichos registros. La otra parte de la evaluación de las transformaciones de conversión del registro lengua natural al registro simbólico algebraico, se evaluó con la segunda entrega del proyecto de curso, cuya resolución satisfactoria del mismo, implicaba la realización del último proceso descrito.

3.4.2 Actividad 4.2. Quiz Transformaciones de tratamientos y conversiones

Muestre el procedimiento para hallar los aspectos importantes de la función que se describe en las representaciones siguientes:

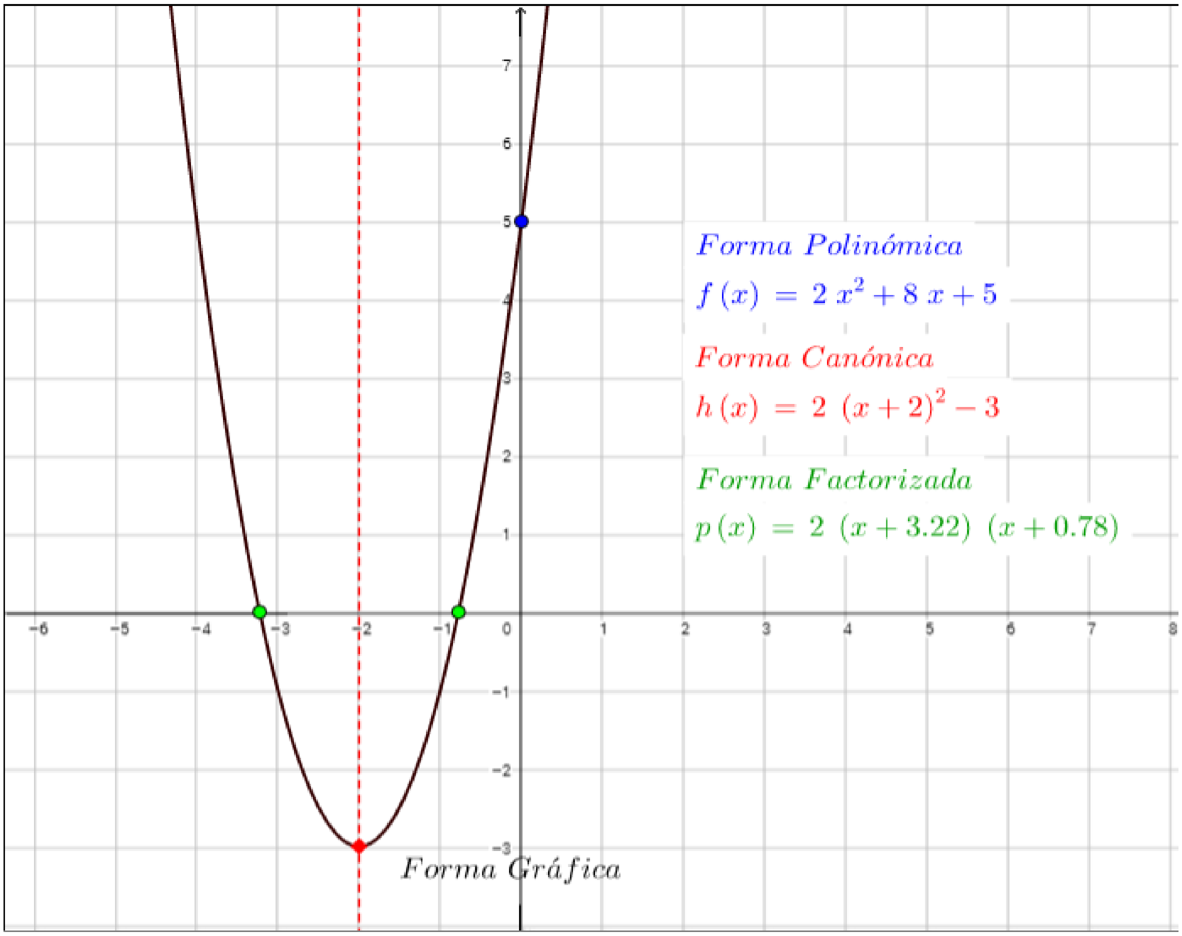


Figura 38. Actividad 4.2. Transformaciones y tratamientos.
Fuente: Elaboración propia.

PREGUNTA N° 1	ACCIÓN QUE SE ESPERA QUE EL ESTUDIANTE REALICE EN RELACIÓN A LA ACTIVIDAD PROPUESTA
Actividad 4.2. Quiz Transformaciones de tratamientos y conversiones	Se esperaba que el estudiante mostrara los procedimientos de transformación de tratamientos y conversiones entre los registros de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico. Además se esperaba que discriminara las unidades significantes de la Función Cuadrática propuesta: Vértice $(-2,-3)$, Cortes con el eje X (en $x = -3.22$ y en $\mathrm{x} = -0.78$), Corte con el eje y (en $y = 5$), Dominio $(x \in R)$, Rango $[-3, \infty)$, Eje de simetría (recta $x = -2$), Monotonía (Decreciente en $(-\infty, -2)$ y Creciente en $(-2, \infty)$).

Figura 39. Análisis a priori de la actividad 4.1. Quiz de tratamientos y conversiones.
Fuente: Elaboración propia.

3.4.3 Actividad 4.3. Proyecto de curso, segunda entrega

<table>
<tr><th>SESIÓN N° 4</th><th>ACTIVIDAD PROPUESTA</th><th>MARCO TEÓRICO</th><th>OBJETIVOS GENERALES</th><th>MEDIACIÓN DE GEOGEBRA</th><th>OBJETIVOS ESPECÍFICOS</th><th>ACCIÓN ESTUDIANTE</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Actividad 4.3. Proyecto de curso, segunda entrega</td><td rowspan="3">La actividad consiste en resolver las diferentes preguntas planteadas en el proyecto de curso, exceptuando la que tiene que ver con el recurso en Geogebra, el cual se expondrá en la tercera entrega</td><td>Registros de Representación Semiótica</td><td>Comprensión Integrativa del Objeto Matemático Función Cuadrática</td><td rowspan="3">▪ Visualización
▪ Exploración
▪ Modelación
▪ Representación
▪ Verificación
▪ Dinamización
▪ Transformación
▪ Variación
▪ Coordinación</td><td>Realizar trasnformaciones de tratamiento y conversión para dar cuenta de las unidades significantes en cada registro de representación presentado</td><td>En la segunda entrega se esperaba que el estudiante mostrara el procedimiento de resolución de la situación problema planteada. Se esperaba que realizara la transformación de conversión del registro lengua natural al registro simbólico algebraico, hiciera los respectivos tratamientos para hallar las unidades significantes que le permitan nuevamente dar respuesta a la pregunta respectiva en el registro lengua natural</td></tr>
<tr><td>Organización Didáctica y Momentos de Estudio</td><td>Construcción de la OM Función Cuadrática</td><td>Momento didáctico 4</td><td>Se espera que el estudiante a través de la resolución de este punto del proyecto de curso, mostrara la experticia lograda en el trabajo de la técnica al resolver el taller de conversiones y tratamientos</td></tr>
<tr><td>Campos Conceptuales</td><td>Conceptualización de la Función Cuadrática</td><td>La actividad propuesta ayuda a la correcta conceptualización de la Función Cuadrática</td><td>Se esperaba que con esta actividad el estudiante lograra una conceptualización fundamentada de la Función Cuadrática, a través de la integración de la triada que compone dicho concepto</td></tr>
</table>

Figura 40. Análisis a priori de la actividad 4.3. Proyecto de curso, segunda entrega.
Fuente: Elaboración propia.

3.5 Análisis a priori de la sesión 5

En todo proceso siempre es deseable conocer los frutos del trabajo realizado, y justamente esta sesión es la encargada de manifestar el porcentaje de eficacia de la estrategia desarrollada. Es oportuno recordar que Duval (2004) afirma que la comprensión integrativa se da cuando el alumno es capaz de coordinar varios registros de representación de un objeto matemático, dando cuenta de las unidades significativas implicadas en cada registro y realizando las transformaciones de tratamiento y conversión requeridas en una situación problema.

Por otro lado, Chevallard (1999) describe el sexto momento como el momento de la evaluación, donde se debe "medir" el conocimiento u OM construida en la organización didáctica. Aunque como bien está contemplado en la organización didáctica, los momentos de estudio no necesariamente se deben desarrollar en el orden numérico asignado a cada uno (del 1 al 6), pues de hecho, se evaluaron varias actividades a medida que se avanzó en el proceso, sin embargo se procedió a evaluar el aprendizaje global alcanzado a lo largo de la estrategia didáctica, a través de dos actividades concretas: una evaluación escrita y la exposición del proyecto de curso, incluyendo el recurso realizado en Geogebra.

3.5.1 Actividad 5.1. Evaluación escrita.

Con esta evaluación se pretendió conocer el tipo de comprensión alcanzado por el estudiante en cuanto al objeto matemático en estudio. Se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes de cada registro, he hiciera las transformaciones de tratamientos y conversiones requeridas para dar solución a cada problemática de la evaluación.

Antonio José Camacho INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA CIENCIAS BÁSICAS	ESTUDIANTE		DOCENTE	Ademir Lucumi Villegas			CALIFICACIÓN
	No. IDENTIFICACIÓN		E-MAIL	alucumi@admon.uniajc.edu.co			
	ASIGNATURA	**Matemáticas I**	ACTIVIDAD	**Parcial II**			
	PROGRAMA	**Contabilidad - Mercadeo**	GRUPO	**101**	FECHA	**25/04/2017**	

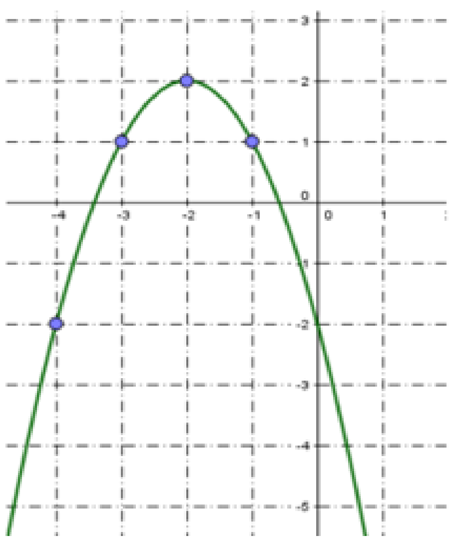
Nota: resuelva un solo ejercicio (a o b) de cada punto. Si resuelve más de uno de cada punto, solo se tendrán en cuenta los ejercicios con opción a.

1. Hallar los aspectos importantes de las funciones que se describen a continuación:

- Vértice
- Corte con el eje y
- Cortes con el eje x
- Eje de simetría
- Dominio
- Rango
- Monotonía
- Forma factorizada
- Forma canónica
- Forma polinómica o grafica

a. $f(x) = 4x^2 - 8x - 1$

b.



2.

a. (Ingreso Máximo) El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $I(x) = 8x - 0.02x^2$ dólares. Determine el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

b. (Costo mínimo) El costo promedio por unidad (en dólares) al producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 30 - 0.4x + 0.002x^2$. ¿qué número de unidades producidas minimizarían el costo promedio? ¿Cuál es el correspondiente costo mínimo por unidad?

Situación problema.

a. Se sabe que en cierto centro recreativo cuando el precio de la boleta es de $10.000, ingresan 50 personas al día y si la boleta se ofrece a $ 8.000, entonces ingresan 100 personas. Determine el precio que maximiza el ingreso. ¿Cuál es el respectivo ingreso máximo diario?

b. El ingreso de cierta compañía por la venta de un producto determinado obedece a la función $I(x) = 98x - 0.4x^2$ y el costo total demandado por la fabricación de dicho producto está determinado por la función $C(x) = 34x + 1560$. ¿Cuántas unidades deben venderse como mínimo para que la empresa no tenga pérdidas?

A continuación se presenta una Figura con las diferentes respuestas que se esperaban de los estudiantes:

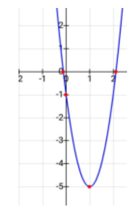
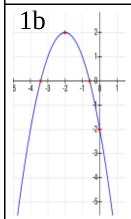
Pregunta	Vértice	Corte con el eje y	Cortes con el eje x	Eje simetría	Dominio	Rango	Monotonía	Forma factorizada	Forma canónica	Forma polinómica o gráfica
1a. Hallar los aspectos importantes de la función: $f(x) =$ $4x^2 - 8x - 1$	$(1, -5)$	$y = -1$	$x1 = -0.12$ $x2 = 2.12$	Recta $x = 1$	$x \in R$	$[-5, \infty)$	Decreciente $(-\infty, 1)$ creciente $(1, \infty)$	$f(x) = (x + 0.12)(x - 2.12)$	$f(x) = 4(x - 1)^2 - 5$	
1b 	$(-2, 2)$	$y = -2$	$x1 = -0.59$ $x2 = -3.41$	Recta $x = -2$	$x \in R$	$(-\infty, 2]$	Creciente $(-\infty, -2)$ Decreciente $(-2, \infty)$	$f(x) = -(x + 0.59)(x + 3.41)$	$f(x) = -(x + 2)^2 + 2$	$f(x) =$ $-x^2 - 4x - 2$
2a	$Vx = 200$ $Vy = 800$	Se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso son 200 unidades y el correspondiente ingreso máximo es de 800 dólares.								
2b	$Vx = 100$ $Vy = 10$	Se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades producidas que minimizarían el costo promedio son 100 unidades y costo promedio mínimo por unidad sería 10 dólares.								
3a	$Vx = 6000$ $Vy = 900.000$	Se esperaba que el estudiante con los conocimientos previos, hallara la ecuación de demanda $x = -(\frac{p}{40}) + 300$ después hallara la función de ingreso $I(p) = -(\frac{p^2}{40}) + 300p$. Después de esto se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. El precio que el centro comercial debe fijar al valor de la entrada al centro recreativo para obtener un ingreso máximo diario es de $ 6000 y el respectivo ingreso máximo es $ 900.000.								
3b		$x = 30$	Se esperaba que el estudiante hallara la función de utilidad $U(x) = -0.4x^2 + 64x - 1560$ y discriminara la unidad significante cortes con el eje x, hiciera la transformación de conversión al registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y diera la respuesta en el registro lengua natural. Como mínimo deben venderse 30 unidades para que la empresa no tenga pérdidas.							

Figura 41. Análisis a priori de la actividad 5.1. Evaluación escrita.
Fuente: Elaboración propia.

3.5.2 Actividad 5.2. Exposición proyecto de curso y recurso Geogebra

SESIÓN N° 5	ACTIVIDAD PROPUESTA	MARCO TEÓRICO	OBJETIVOS GENERALES	MEDIACIÓN DE GEOGEBRA	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	ACCIÓN ESTUDIANTE
Actividad 5.2 Exposición Proyecto de curso y recurso Geogebra	La actividad consiste en sustentar claramente a través de una exposición, los procedimientos seguidos para resolver el planteamiento del problema. También se debe mostrar el recurso realizado en Geogebra, de tal manera que este último modele la solución de la situación propuesta	Registros de Representación Semiótica	Comprensión Integrativa del Objeto Matemático Función Cuadrática	▪ Visualización ▪ Exploración ▪ Modelación ▪ Representación ▪ Verificación ▪ Dinamización ▪ Transformación ▪ Variación ▪ Coordinación	Dar cuenta de los procedimientos seguidos para solucionar el problema planteado. Seguramente el principal registro de representación en esta actividad, es el de la lengua natural, es decir que con sus propias palabras, el estudiante debe comunicar el objeto matemático Función Cuadrática contextualizado en la situación problema correspondiente.	Exponer claramente el proceso seguido en la resolución del problema planteado en el proyecto curso. Explicar la solución del problema a través del recurso realizado en Geogebra.
		Organización Didáctica y Momentos de Estudio	Construcción de la OM Función Cuadrática		Momento didáctico 6	A través de la exposición se espera que el estudiante muestre evidencia que construyó eficazmente la OM Función Cuadrática
		Campos Conceptuales	Conceptualización de la Función Cuadrática		La actividad propuesta ayuda a la correcta conceptualización de la Función Cuadrática	Se esperaba que con esta actividad el estudiante lograra una conceptualización fundamentada de la Función Cuadrática, a través de la integración de la triada que compone dicho concepto

Figura 42. Análisis a priori de la actividad 5.2. Exposición proyecto de curso y recurso Geogebra.
Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a la rúbrica de evaluación del proyecto de curso en la tercera entrega, se tuvo en cuenta los porcentajes asignados por el DCB en los lineamientos del proyecto.

Entregables	Elementos	Semana de entrega	% Evaluación
Primera Entrega "El Anteproyecto"	Documento escrito con el título del proyecto, reseña histórica del lugar donde se ejecutará el proyecto, definición o planteamiento del problema, justificación, objetivo general, objetivos específicos, metodología, cronograma de actividades, presupuesto y parte de la introducción y de la bibliografía).	Semana 4	4%
Segunda Entrega "Ejecución del Proyecto"	Documento escrito con la implementación de las correcciones realizadas en la primera entrega, adicionando la sistematización de la ejecución del proyecto, implementación de la estrategia de solución elegida, los resultados obtenidos, las conclusiones y recomendaciones, el resto de la introducción y la bibliografía.	Semana 9	4%
Tercera Entrega "El Proyecto terminado y sustentado"	Documento con el compendio del proyecto implementando las observaciones, sugerencias y correcciones realizadas en la primera y segunda entrega.	Semana 14	4%
	Elaboración de una presentación proyectada en Power Point o en algún programa similar (Con 5 diapositivas, nombre del proyecto e integrantes, objetivos, justificación, resultados obtenidos, conclusiones y recomendaciones)		4%
	Presentación y sustentación del proyecto		4%
Total			**20%**

Figura 43. Rúbrica de la tercera entrega del proyecto de curso y el recurso Geogebra.
Fuente: Elaboración propia.

También se contó con la participación de tres docentes del DCB, quienes dieron sus apreciaciones de acuerdo al siguiente formato:

Tabla 8. Rúbrica de la tercera entrega del proyecto de curso y el recurso Geogebra

Integrantes	Grupo	Diapositivas	Recurso Geogebra	Dominio del tema	Presentación personal	Observaciones

Nota. La Tabla 8 muestra las categorías tenidas en cuenta para calificar la tercera entrega y el recurso Geogebra de los proyectos de curso.
Fuente: Elaboración propia.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS A POSTERIORI DE LA ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA

4. Análisis a posteriori de la organización didáctica

En este capítulo se presenta el análisis de los resultados obtenidos por 32 estudiantes del grupo 101 de la Facultad de Ciencias Empresariales de la UNIAJC en el periodo 2017-1 en relación con cada una de las actividades descritas en el capítulo anterior, con el fin de verificar que el alumnado en mención, haya alcanzado una comprensión integrativa de la Función Cuadrática.

Estos resultados serán analizados teniendo en cuenta según Duval (2004), las condiciones necesarias para alcanzar una comprensión integrativa (dichas condiciones están descritas en el capítulo 2 de esta investigación), paralelamente se evidenciará la existencia de los seis momentos didácticos, que según Chevallard, son necesarios en el proceso de construcción de una OM, y por último, se describirá la relación de las actividades con el proceso de conceptualización propuesto por Vergnaud (1990) en la teoría de campos conceptuales.

4.1 Análisis a posteriori de la actividad 1

La actividad 1 está relacionada con la primera entrega del proyecto de curso. Esta actividad consistía en la formulación de objetivos que describieran el proceso de resolución al problema planteado a cada grupo. Esta actividad implícitamente comprende la discriminación de las unidades significantes en el registro de lengua natural y varias transformaciones de tratamiento en dicho registro. En general se formaron siete grupos (este proceso de formación de los grupos y la asignación de los problemas se especifica en el capítulo 2) cuyas respuestas se describen en la Figura siguiente:

ITEM	PROYECTO	PREGUNTAS	ANÁLISIS DE LOS OBJETIVOS PROPUESTOS POR LOS ESTUDIANTES
Proyecto 1	Ganancia máxima mensual en la empresa "X" en relación con la referencia "Y"	Determine cuál debe ser la cantidad de la referencia "Y" que debe vender la Empresa "X" para obtener la ganancia máxima mensual. ¿Cuánto es la ganancia máxima mensual? A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	El objetivo general planteado por el grupo 1 no corresponde al esperado, ya que la finalidad que proponen con la realización del proyecto es el bienestar de la compañía que tomaron como fuente de información, y olvidan que los intereses en esta instancia del estudio son netamente académicos. También involucran a la función lineal como el concepto requerido para encontrar el punto de equilibrio, ignorando que lo deben hallar es la ganancia máxima.
Proyecto 2			El objetivo general planteado por el grupo 2 no corresponde al esperado, ya que proponen dar solución al punto de equilibrio, cuando lo que deben hallar es la ganancia máxima.
Proyecto 3			El objetivo general planteado por el grupo 3 no corresponde al esperado porque aunque describen la utilidad de las matemáticas en el ámbito laboral, dejan de lado el problema planteado.
Proyecto 4	Ganancia mensual obtenida en la empresa "X" en relación con la referencia "Y", cuando el costo total es máximo	Determine cuál es la ganancia mensual que obtiene la empresa "X" en relación con la venta de la referencia "Y" cuando el costo total es máximo. A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	El objetivo general planteado por el grupo 4 no corresponde al esperado porque aunque describen la utilidad de las matemáticas en el ámbito laboral, dejan de lado el problema planteado.

<table>
<tr><td>Proyecto 5</td><td rowspan="2">Ganancia máxima mensual en la empresa “X” en relación con la referencia “Y”</td><td rowspan="2">Determine cuál debe ser el precio promedio de venta de la referencia “Y” para que la empresa “X” obtenga en un mes la ganancia mensual máxima. ¿Cuánto es esa ganancia mensual máxima?

A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.</td><td>El objetivo general planteado por el grupo 5 no corresponde al esperado, ya que la finalidad que proponen con la realización del proyecto es el bienestar de la compañía que tomaron como fuente de información, y olvidan que los intereses en esta instancia del estudio son netamente académicos.</td></tr>
<tr><td>Proyecto 6</td><td>Los objetivos específicos planteados por el grupo 6 se acercan a los esperados, ya que proponen hallar las ecuaciones que relacionan el costo promedio y el precio con la cantidad y después de esto, hallar el precio que maximiza la utilidad, sin explicitar las ecuaciones de ingreso y ganancia.</td></tr>
<tr><td>Proyecto 7</td><td>Utilidad mensual en la empresa “X” en relación con la referencia “Y” cuando el ingreso mensual es máximo</td><td>Determine cuánto es la utilidad mensual que se obtiene en la empresa “X” en relación con la referencia “Y”, cuando el ingreso mensual es máximo.

A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta</td><td>El objetivo general planteado por el grupo 7 no corresponde al esperado, ya que la finalidad que proponen con la realización del proyecto es el bienestar de la compañía que tomaron como fuente de información, y olvidan que los intereses en esta instancia del estudio son netamente académicos.</td></tr>
</table>

Figura 44. Análisis a posteriori de la actividad 1. Proyecto de curso, primera entrega (Formulación de objetivos).
Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo a los objetivos formulados por los estudiantes en cada grupo (Exceptuando al grupo 6), se evidencia primeramente una incoherencia entre el problema planteado y los objetivos formulados. En esencia esta incoherencia no es debida a problemas relacionados con la comprensión de objetos matemáticos, sino más bien a dificultades relacionadas con la formulación de proyectos en general, pues de otra forma, hubieran presentado como mínimo en el objetivo general, la intención de solucionar el problema propuesto, aunque la descripción del desarrollo del mismo fuera incorrecta. También se evidencia que cinco grupos proponen acciones que buscan beneficiar directamente a la compañía donde laboran y no centran su atención en el interés académico de este tipo de proyectos. Esto último se debió a una interpretación ingenua de los lineamientos del proyecto de curso del DCB, ya que en este documento se hace énfasis en la aplicación de los contenidos matemáticos a una situación real. Otra variable a considerar es que dos grupos involucraron el concepto de punto de equilibrio como una aplicación de la función lineal, desconociendo por completo la aplicación de la función cuadrática en situaciones relacionadas con la ganancia máxima. Este hecho tuvo su origen en que el único tema de aplicación a una situación contextualizada visto hasta ese momento en clase, era el punto de equilibrio. Vale la pena resaltar que solo el grupo 6, se acercó a lo que se esperaba en los demás grupos.

Objetivos específicos

- Definir las ecuaciones de precio promedio de venta y costo promedio de adquisición y procesamiento por unidad.
- Encontrar el precio por unidad para alcanzar la utilidad máxima.

Figura 45. Objetivos específicos propuestos por el grupo 6.
Fuente: Tomado de la primera entrega del proyecto de curso del grupo 6

Por otro lado se pudo evidenciar la existencia del momento didáctico del primer encuentro (o reencuentro) con la OM función cuadrática, ya que la actividad propuesta obligó a los estudiantes a investigar o por lo menos a disponerse a estudiar una OM que les ayudara en la resolución del problema planteado. También se evidenció coherencia con el proceso de conceptualización según Vergnaud (1990), debido a que la teoría de campos conceptuales contempla un momento inicial en el cual se debe exponer al sujeto a situaciones que le den sentido al concepto que desea aprehender. En este caso la situación propuesta en el proyecto de curso, le dio sentido a la conceptualización de la función cuadrática.

El proceso de discriminación de las unidades significantes en el registro de representación lengua natural es complejo para los estudiantes, por tal razón, la resolución del problema como tal, se recibió en la segunda entrega del proyecto de curso, una vez que los estudiantes fueron expuestos a transformaciones de tratamientos y conversiones entre registros con una complejidad menor.

Cabe señalar que el proyecto de curso está diseñado para tres entregas, en donde el docente va realizando las observaciones respectivas de la entrega anterior, de tal forma que en la siguiente entrega, estas sean tenidas en cuenta por parte de los estudiantes. En ese orden de ideas, se realizaron las observaciones pertinentes en la primera entrega, dándole continuidad al proceso de enseñanza que nos ocupa en esta investigación.

4.2 Análisis a posteriori de la actividad 2

El objetivo de la actividad 2 era que el estudiante lograra discriminar las unidades significantes en los registros de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico (Forma polinómica, forma canónica y forma factorizada), Sentido de la concavidad, Vértice, Cortes con los ejes, Dominio, Rango, Eje de simetría y Monotonía; a través de un cuestionario articulado con un recurso en Geogebra que facilitaba variar los parámetros $a, b\ y\ c$ de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$. Esta acción le permitía al estudiante observar las posibles variaciones en un registro y compararlas con las variaciones concomitantes en los registros representados en el recurso, y de esta forma deducir la respuesta correcta en cada pregunta del cuestionario. La cantidad de estudiantes que respondió acertadamente, se discrimina en la Figura siguiente:

PREGUNTA N°	PREGUNTA	RESPUESTA CORRECTA	ESTUDIANTES QUE ACERTARON
1	El punto de corte o intersección con el eje "Y" de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ depende de: a. El valor del parámetro a b. El valor del parámetro b c. El valor del parámetro c d. El valor de la variable independiente "x" e. Ninguna de las anteriores	c	32 / 100%
2	La función cuadrática en su representación gráfica describe una parábola que es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo. El sentido de esta concavidad depende de: a. El valor del parámetro a b. El valor del parámetro b c. El valor del parámetro c d. El valor de la variable independiente "x" e. Ninguna de las anteriores	a	32 / 100%
3	El punto máximo o punto mínimo de la función cuadrática es el vértice de la parábola (denotaremos el vértice como V (Vx, Vy)).Teniendo en cuenta las cuatro representaciones de la función cuadrática explícitas en el recurso construido en Geogebra, seleccione la forma que usted considera más apropiada para determinar el vértice con prontitud y exactitud: a. Forma Gráfica b. Forma Factorizada c. Forma Canónica d. Forma General e. Ninguna de las anteriores	c	27 / 84%
4	El eje de simetría de una parábola es la recta vertical que divide la parábola en dos partes simétricas o congruentes. La ecuación de dicha recta es: a. $x = Vy$, donde Vy es la ordenada del vértice b. $y = Vx$, donde Vx es la abscisa del vértice c. $y = mx + b$ d. $y = ax^2 + bx + c$ e. Ninguna de las anteriores	e	0 / 0%
5	En relación con los puntos de corte de la parábola con el eje "x", se puede afirmar: a. Una parábola tiene un punto de corte con el "x" b. Una parábola tiene dos puntos de cortes con el eje "x" c. Una parábola no tiene puntos de corte con el eje "x" d. a o b o c e. ninguna de la anteriores	d	27 / 84%

6	Teniendo en cuenta las cuatro representaciones de la función cuadrática explícitas en el recurso en Geogebra, ¿Cuál considera usted la forma que le permite conocer con prontitud y exactitud los puntos de corte de la parábola con el eje “x”? a. Forma Gráfica b. Forma Factorizada c. Forma Canónica d. Forma General e. Ninguna de las anteriores	b	22 / 69%
7	El dominio de la función cuadrática es: a. Todos los reales b. Todos los $f(x)$ menores o iguales al vértice si la parábola es cóncava hacia arriba c. Todos los $f(x)$ mayores o iguales al vértice si la parábola es cóncava hacia abajo d. Todos los x mayores o iguales al vértice e. Ninguna de las anteriores	a	26 / 81%
8	El rango de la función cuadrática es: a. Todos los reales b. Todos los $f(x)$ menores o iguales al vértice si la parábola es cóncava hacia arriba c. Todos los $f(x)$ mayores o iguales al vértice si la parábola es cóncava hacia abajo d. Todos los x mayores o iguales al vértice e. Ninguna de las anteriores	e	1 / 3%
9	La monotonía de una función nos permite saber la variación de $f(x)$ respecto a la variación de la variable independiente x, es decir la monotonía comprende los conceptos de crecimiento y decrecimiento de una función. De acuerdo a lo anterior se puede afirmar que la monotonía de la función cuadrática es: a. Estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, Vx)$, si la parábola es cóncava hacia arriba b. Estrictamente creciente en el intervalo $(Vx, +\infty)$, si la parábola es cóncava hacia abajo c. Estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, Vx)$, si la parábola es cóncava hacia abajo d. Estrictamente creciente en el intervalo$(Vy, +\infty)$, si la parábola es cóncava hacia abajo e. Ninguna de las anteriores	c	13 / 41%

Figura 46. Análisis a posteriori de la actividad 2. Cuestionario y recurso Geogebra.
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 9. Análisis a posteriori de la actividad 2. Cuestionario y recurso Geogebra

Pregunta 10	Vértice	Corte con el eje y	Cortes con el eje x	Eje simetría	Monotonía	Dominio	Rango
Hallar los aspectos importantes de la función: $f(x) = 2x^2 - 8x - 2$	$(2, -10)$	$y = -2$	$x1 = -0.24$ $x2 = 4.24$	Recta $x = 2$	Decreciente $(-\infty, 2)$ creciente $(2, \infty)$	$X \in R$	$[-10, \infty)$
Cantidad de estudiantes que respondieron acertadamente	13 /41%	16 /50%	25/41%	13 /41%	1 /3%	6 /19%	7 /22%

Nota. La Tabla 9 muestra los resultados obtenidos por los estudiantes en la actividad 2.
Fuente: Elaboración propia.

De acuerdo a los resultados obtenidos por los estudiantes en la actividad 2, se tienen las siguientes interpretaciones u observaciones:

- En la pregunta 1 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que el punto de corte con el eje "y" permanece constante cuando varían a y b, pero que cambia de valor al variar c. El 100% de los estudiantes alcanzó el objetivo.

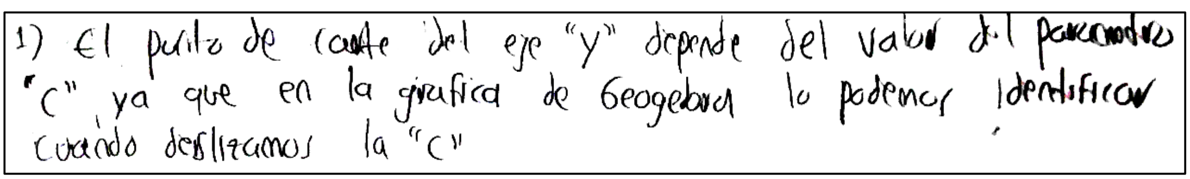

1) El punto de corte del eje "y" depende del valor del parametros "c" ya que en la grafica de Geogebra lo podemos identificar cuando deslizamos la "c"

Figura 47. Justificación de la respuesta a la pregunta 1 dada por un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

- En la pregunta 2 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que el sentido de la concavidad solo se modifica cuando a es mayor o menor que cero. El 100% de los estudiantes alcanzó el objetivo.

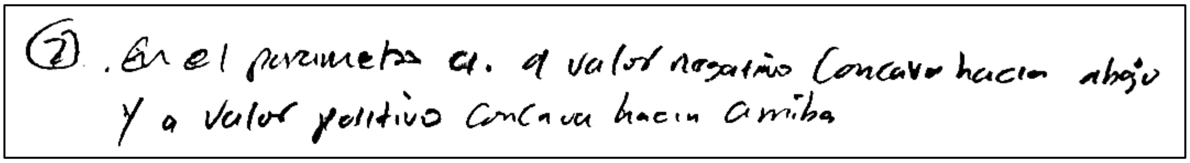

2 . En el parametro a. a valor negativo Concavo hacia abajo y a valor positivo Concava hacia arriba

Figura 48. Justificación de la respuesta a la pregunta 2 dada por un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

- En la pregunta 3 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que el punto máximo o mínimo (Vértice) coincidía con los valores de h y de k, explícitos en la forma canónica. El 84% por ciento de los estudiantes alcanzó el objetivo.

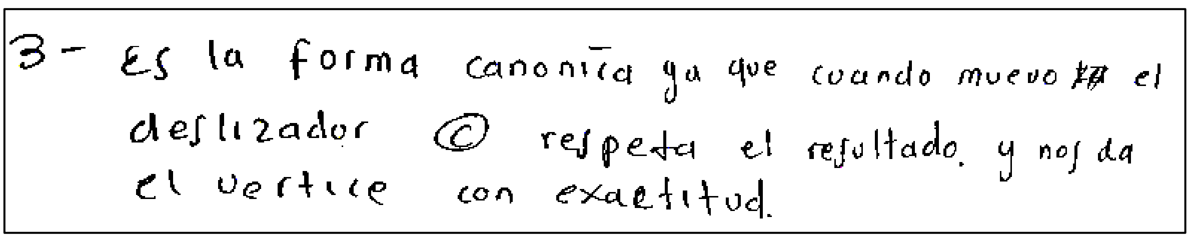

3 - Es la forma canonica ya que cuando muevo el deslizador c respeta el resultado. y nos da el vertice con exactitud.

Figura 49. Justificación de la respuesta a la pregunta 3 dada por un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

El argumento que dio el 16% restante de los estudiantes, no se puede aplicar a todos los casos y otros son incoherentes. Por ejemplo un estudiante afirma que para él la forma más fácil y rápida de identificar el vértice con exactitud es la forma gráfica, sin embargo bastaría con modificar el valor de los parámetros de tal forma que el vértice se ubicara en un punto cuyas coordenadas no sean números enteros y preguntarle al estudiante ¿Cuál es el vértice?

- En la pregunta 4 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que el eje de simetría es una recta vertical que pasa por Vx, es decir que la ecuación de la recta vertical sería $x = Vx$. Ninguno de los estudiantes alcanzó el objetivo en esta pregunta. De acuerdo a la justificación que hicieron para escoger una respuesta equivocada, se estima que no tenían claro el conocimiento previo de la ecuación de una línea recta paralela al eje y ($x = c, c$ es constante) y no asociaron correctamente el vértice ($Vx,\ Vy$) a las coordenadas cartesianas abscisa y ordenada respectivamente.

4) la ecuacion de dicha Recta es x= Vy ya que es la divide la parabola en dos partes iguales.

Figura 50. Justificación de la respuesta a la pregunta 4 dada por un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

- En la pregunta 5 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que en ocasiones la parábola corta al eje x en dos puntos, otras veces en un punto y otras veces no lo corta. El 84% de los estudiantes alcanzó el objetivo.

5) ¡Para mi es la a o b o c Porque al mover el valor del Parametro a. de -20 A 47 tiene 2 corte y 4.8 1 solo corte y de 4.9 a 20 No tiene corte

Figura 51. Justificación de la respuesta a la pregunta 5 dada por un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

De acuerdo a la justificación dada por el 16% restante de los alumnos, se estima que solo observaron los cortes de la gráfica con el eje x, cuando la variación de los parámetros a, b y c no alcanzaba a modificar la cantidad de cortes mencionados.

- En la pregunta 6 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que los puntos de corte con el eje x, coinciden con los ceros de la función, explícitos en la forma factorizada. El 69% de los estudiantes alcanzó el objetivo.

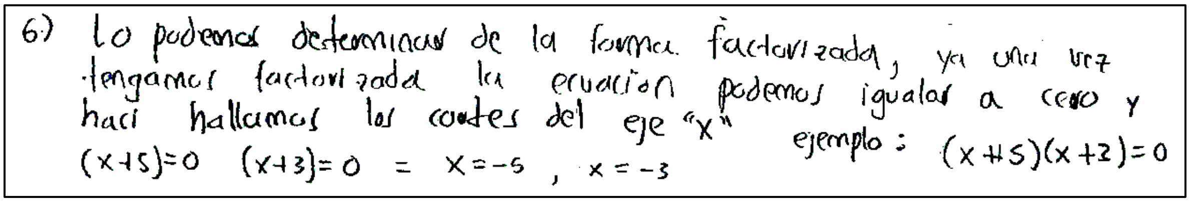

6) Lo podemos determinar de la forma factorizada, ya una vez tengamos factorizada la ecuación podemos igualar a cero y haci hallamos los cortes del eje "x" ejemplo: (x+5)(x+3)=0
(x+5)=0 (x+3)=0 = x=-5 , x=-3

Figura 52. Justificación de la respuesta a la pregunta 6 dada por un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

El 31% de los estudiantes restantes no logró asociar el valor de los cortes en el eje x de la gráfica con el valor de los ceros en la forma factorizada. Al parecer observaron el punto de corte de la gráfica con el eje "y" porque 9 de los 10 estudiantes que no respondieron acertadamente, seleccionaron la opción que evidencia el corte con el eje "y"(forma general).

- En la pregunta 7 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que la parábola no tiene limitación en su dominio, es decir que cualquier número real hace parte de él. El 81% de los estudiantes alcanzó el objetivo.

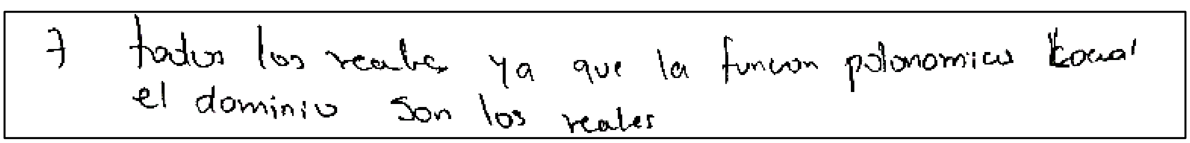
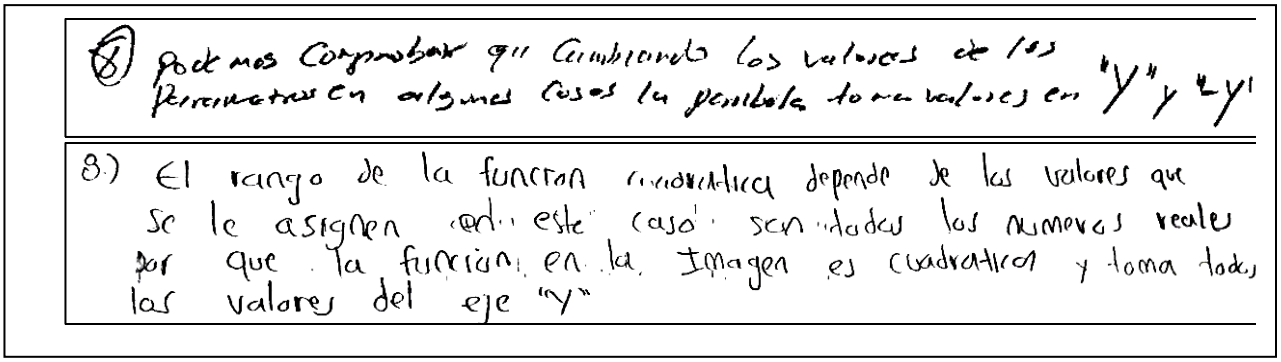

7 todos los reales ya que la funcion polonomica [illegible] el dominio son los reales

Figura 53. Justificación de la respuesta a la pregunta 7 dada por un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

De acuerdo a las otras opciones registradas por el resto de estudiantes, se estima que en estos no hubo claridad en la definición de dominio.

- En la pregunta 8 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que los valores que toma la función, van desde Vy hasta ∞ si la parábola es cóncava hacia arriba y que van desde $-\infty$ hasta Vy si la parábola es cóncava hacia abajo.


8 Podemos Comprobar qu Cambiando los valores de los Parametros en algunos Casos la parabola toma valores en "y" y -y'

8.) El rango de la funcion cuadratica depende de los valores que se le asignen en este caso son todos los numeros reales por que la funcion en la Imagen es cuadratica y toma todos los valores del eje "y"

Figura 54. Justificación de la respuesta a la pregunta 8 dada por dos estudiantes.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

Teniendo en cuenta la justificación que escribieron los estudiantes en esta pregunta, se estima que no discriminaron el rango de la función cuadrática de acuerdo a la orientación de la concavidad, sino que sumaron el rango de la función en ambos sentidos y obtuvieron como resultado el conjunto de los números reales.

- En la pregunta 9 se esperaba que el estudiante al modificar los valores de los parámetros a, b y c, a través de los deslizadores, observara que la función es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, Vx)$ si la parábola es cóncava hacia abajo. El 41% de los estudiantes alcanzó el objetivo.

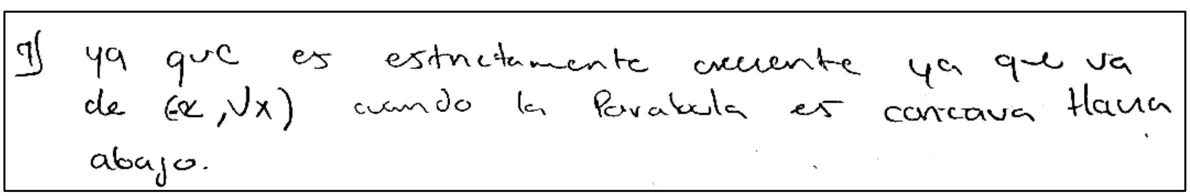

9) ya que es estrictamente creciente ya que va de (∞,Vx) cuando la Parabola es concava Hacia abajo.

Figura 55. Justificación de la respuesta a la pregunta 9 dada por dos estudiantes.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

El 59% de los estudiantes restantes no tuvo claridad en los aspectos de crecimiento y decrecimiento de una función.

- En la pregunta 10 se esperaba que el estudiante al ingresar los valores dados a través de las casillas de entrada del recurso en Geogebra, observara en los diferentes registros de representación simbólica algebraica y gráfico cartesiano el Vértice $(2, -10)$, El corte con el eje y en $y = -2$, Los cortes con el eje x en $x = -0{,}24$ y en $x = 4.24$, El Eje de Simetría en $x = 2$, La Monotonía decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y creciente en el intervalo $(2, \infty)$, que el Dominio de la función era el conjunto de los números Reales y el Rango era el conjunto $[-10, \infty)$. En general el porcentaje de estudiantes que respondieron acertadamente a los incisos del punto 10 fue bajo, vértice 41%, corte con el eje y 50%, cortes con el eje x 41%, monotonía 3%, dominio 19% y rango 22%.

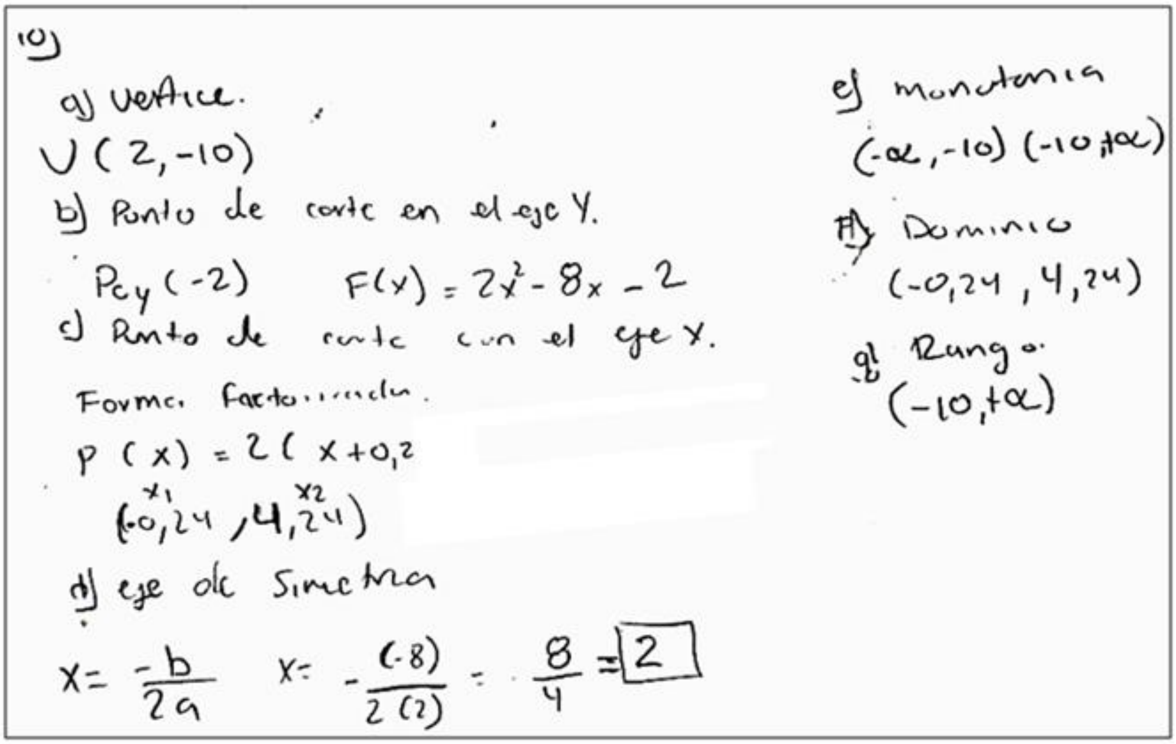


Figura 56. Respuesta a la pregunta 10 de un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 2 realizada por un estudiante.

En el análisis de las diferentes respuestas consignadas por los estudiantes, se discriminaron los errores comunes o de mayor frecuencia:

- Los intervalos que contienen infinitos, los denotaron con corchetes [ ], en vez de usar paréntesis ( ).

- No discriminaron el orden de las coordenadas cartesianas (abscisa y ordenada) en la notación de puntos en el plano.
- Algunos conjuntos los denotaron sin paréntesis, ni corchetes, ni llaves. Ejemplo $\infty, -10$.
- El dominio de la función lo limitaron al intervalo comprendido entre los dos puntos de corte del eje x.
- A la hora de expresar los cortes con el eje x que dedujeron de la forma factorizada, no realizaron el cambio de signo en los ceros de la función.
- Al intentar dar cuenta acerca de la monotonía de la función, solo presentaron los intervalos sin discriminar en cual la función era creciente y en cual era decreciente.
- El eje de simetría lo representaron como una recta horizontal, porque lo denotaron como $y = 2$.
- El vértice lo escribieron con una sola coordenada cartesiana.

Es conveniente aclarar que los errores consignados por parte de los estudiantes en las diferentes actividades, forman parte del proceso de la estrategia didáctica en desarrollo, ya que manifiestan el estado de construcción de la OM en estudio y se pueden comparar con guías que indican el camino a seguir en la siguiente actividad.

Durante el desarrollo de la actividad 2, se evidenciaron varios momentos didácticos entre los cuales se destacan el momento del primer encuentro (o reencuentro) con la OM función cuadrática, que tuvo su origen cuando los estudiantes se vieron expuestos al cuestionario y al recurso en Geogebra, donde manifestaron la novedad de este tipo de situaciones; otro momento fue el de la exploración de la técnica, donde los estudiantes debían explorar el recurso en Geogebra a través de la manipulación de los deslizadores con el fin de dar respuesta al cuestionario en mención; también se evidenció el momento de la justificación de la técnica cuando los estudiantes consignaban en su hoja de respuestas la justificación de la opción seleccionada.

En cuanto a la conceptualización de la función cuadrática, esta actividad aportó significativamente a la acción operatoria del estudiante con la OM en estudio, también la articulación de los diferentes registros de representación explícitos en el recurso de Geogebra con el cuestionario, le permitieron al estudiante diferenciar el significado (función cuadrática) del significante (registros de representación).

4.3 Análisis a posteriori de la actividad 3

Como bien se dijo en el análisis a priori de la actividad 3, esta sesión no contó con evaluación por parte de los estudiantes, debido a que se experimentó el momento didáctico de la institucionalización (tarea del profesor) en el cual en primera instancia, se socializó con los estudiantes, los resultados obtenidos en la actividad anterior, donde se mostraron a través de ejemplos concretos los errores cometidos en cada uno de los puntos del cuestionario con el fin de que los estudiantes reemplazaran el conocimiento que generó el error con el conocimiento nuevo que los evita. También se revisaron aquellas afirmaciones que solo eran correctas en ciertas condiciones (como el estudiante que dijo que la parábola tenía dos cortes con el eje x) evidenciando la no conveniencia de generalizar este tipo de técnicas. También se tuvo en cuenta precisar aquellos conocimientos previos involucrados en este proceso que no eran recordados por gran parte de los estudiantes (por ejemplo dominio y rango de una función, ecuación de rectas paralelas al eje, monotonía de una función, etc.). Se presentaron a su vez las unidades significantes pertenecientes a cada registro y las diferentes transformaciones de tratamientos existentes en el registro de representación simbólico algebraico (forma polinómica, forma canónica y forma factorizada). En cuanto a la conceptualización de la función cuadrática, se puede decir que ya había un terreno abonado a través de las dos actividades anteriores que le habían dado sentido al concepto y esto generó expectativas en los estudiantes para estar dispuestos a la aprehensión del concepto mencionado. Por último se presentaron definiciones y teoremas referentes a la función cuadrática y se respondieron interrogantes adicionales que se generaban en el momento en que se avanzaba en la institucionalización.

4.4 Análisis a posteriori de la actividad 4

Después del momento de la institucionalización de la función cuadrática descrita en el análisis anterior, el docente a través de un taller de tratamientos y conversiones, dio lugar al momento didáctico etiquetado como el trabajo de la técnica, que tuvo como fin, practicar y afianzar los procesos de transformación de tratamientos y conversiones entre los registros de representación gráfico cartesiano, simbólico algebraico y lengua natural. El registro tabular numérico se usó como registro pivote para realizar las transformaciones de conversión entre los registros lengua natural, gráfico cartesiano y simbólico algebraico en las diferentes combinaciones posibles y en ambas direcciones según la exigencia de cada ejercicio así lo demandara. El taller de tratamientos y conversiones se desarrolló en clases con la asesoría didáctica del profesor. La eficacia de esta actividad se evaluó a través de un quiz individual y la segunda entrega del proyecto de curso, cuyos resultados se discriminan a continuación:

Pregunta quiz	Vértice	Corte con el eje y	Cortes con el eje x	Eje simetría	Monotonía	Dominio	Rango
Hallar los aspectos importantes de la función: $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$	$(-2, -3)$	$y = 5$	$x1 = -3.22$ $x2 = -0.78$	Recta $x = -2$	Decreciente $(-\infty, -2)$ Creciente $(-2, \infty)$	$X \in R$	$[-3, \infty)$
Cantidad de aciertos	32 /100%	32 /100%	31/97%	32/100%	29 /91%	32/100%	30/94%

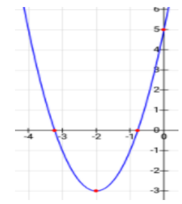
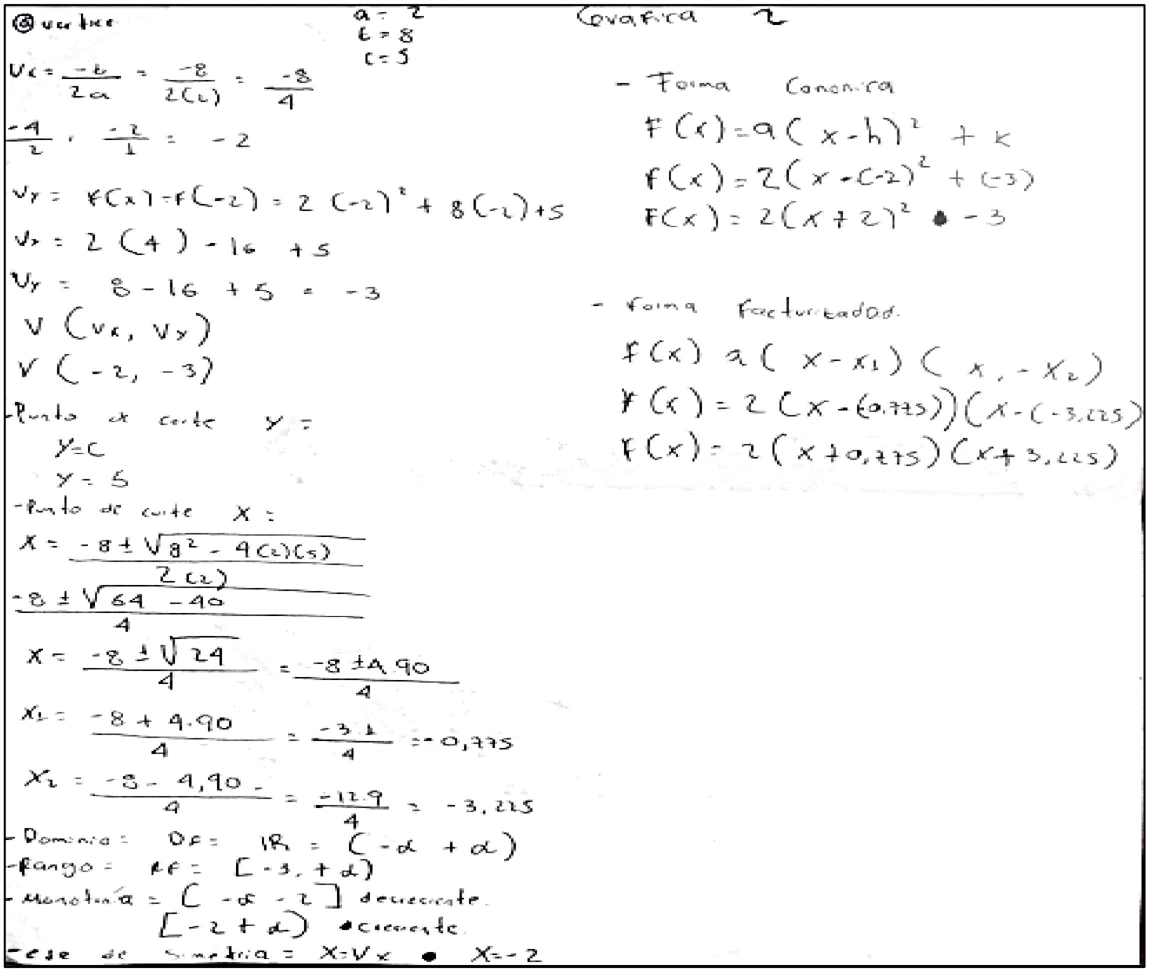
Registro simbólico algebraico forma polinómica	Tratamiento forma canónica	Tratamiento forma factorizada	Conversión forma gráfica	
$f(x) = 2x^2 + 8x + 5$	$f(x) = 2(x + 2)^2 - 3$	$f(x) = 2(x + 3.22)(x + 0.78)$		
Cantidad de aciertos	22/69%	24/75%	30/94%	

Figura 57. Análisis a posteriori de la actividad 4.2 Quiz tratamientos y conversiones. Fuente: Elaboración propia.

Tal como se esperaba después de exponer al alumno a los momentos didácticos de la institucionalización y trabajo de la técnica, los resultados obtenidos en el quiz de transformaciones de tratamientos y conversiones mejoraron significativamente en relación con los obtenidos en las actividades anteriores. Vale la pena resaltar que en esta actividad solo se pretendía evaluar la discriminación de las unidades significantes y los procedimientos de transformaciones de tratamientos en el registro simbólico algebraico y conversiones entre los registros simbólico algebraico y gráfico cartesiano.



③ vertice

$a = 2$, $b = 8$, $c = 5$

Grafica 2

$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{2(2)} = \frac{-8}{4}$

$\frac{-4}{2}, \frac{-2}{1} = -2$

$V_y = f(x) = f(-2) = 2(-2)^2 + 8(-2) + 5$

$V_y = 2(4) - 16 + 5$

$V_y = 8 - 16 + 5 = -3$

$V(V_x, V_y)$

$V(-2, -3)$

- Punto de corte y:

$y = c$

$y = 5$

- Punto de corte x:

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(2)(5)}}{2(2)}$

$\frac{-8 \pm \sqrt{64 - 40}}{4}$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{-8 \pm 4.90}{4}$

$x_1 = \frac{-8 + 4.90}{4} = \frac{-3.1}{4} = -0{,}775$

$x_2 = \frac{-8 - 4{,}90}{4} = \frac{-12.9}{4} = -3{,}225$

- Dominio: $D_f = \mathbb{R} = (-\infty + \infty)$
- Rango: $R_f = [-3, +\infty)$
- Monotonía $= (-\infty\ -2]$ decreciente.

$[-2\ +\infty)$ creciente.

- eje de simetria $= x = V_x$ $x = -2$

- Forma Canonica

$f(x) = a(x-h)^2 + k$

$f(x) = 2(x-(-2))^2 + (-3)$

$f(x) = 2(x+2)^2 - 3$

- Forma factorizada.

$f(x)\ a(x - x_1)(x, - x_2)$

$f(x) = 2(x-(0.775))(x-(-3{,}225))$

$f(x) = 2(x+0{,}775)(x+3{,}225)$

Figura 58. Procedimiento de resolución del quiz de un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 4 realizada por un estudiante.

La mayoría de los pocos errores cometidos por los estudiantes en esta actividad, se centran en los procedimientos de transformación de tratamiento en el registro simbólico algebraico, y más exactamente con los signos de los valores de h en la forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$ y los valores de $x1$ y $x2$ en la forma factorizada $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$.

Por otra parte se presentan los resultados de la segunda entrega del proyecto de curso para evaluar los procedimientos de transformación de conversión en los registros lengua natural a simbólico algebraico y viceversa.

ITEM	PROYECTO	PREGUNTAS	ANÁLISIS DE LAS SOLUCIONES ENTREGADAS POR CADA GRUPO
Proyecto 1	Ganancia máxima mensual en la empresa "X" en relación con la referencia "Y"	Determine cuál debe ser la cantidad de la referencia "Y" que debe vender la Empresa "X" para obtener la ganancia máxima mensual. ¿Cuánto es la ganancia máxima mensual? A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	El grupo 1 resolvió satisfactoriamente el problema planteado, obteniendo como solución 359 unidades a vender del producto "Y" para obtener una ganancia máxima mensual de $ 771.999 en la empresa "X"
Proyecto 2			El grupo 2 resolvió satisfactoriamente el problema planteado, obteniendo como solución 5.253 unidades a vender del producto "Y" para obtener una ganancia máxima mensual de $ 683.564 en la empresa "X"
Proyecto 3			El grupo 3 resolvió satisfactoriamente el problema planteado, obteniendo como solución 281.98 kg a vender del producto "Y" para obtener una ganancia máxima mensual de $ 1.325.529 en la empresa "X"
Proyecto 4	Ganancia mensual obtenida en la empresa "X" en relación con la referencia "Y", cuando el costo total es máximo	Determine cuál es la ganancia mensual que obtiene la empresa "X" en relación con la venta de la referencia "Y" cuando el costo total es máximo. A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	El grupo 4 resolvió satisfactoriamente el problema planteado entregando como solución la ganancia mensual de $ 564.123.971 en la empresa "X" con relación al producto "Y" cuando el costo total es máximo.
Proyecto 5	Ganancia máxima mensual en la empresa "X" en relación con la referencia "Y"	Determine cuál debe ser el precio promedio de venta de la referencia "Y" para que la empresa "X" obtenga en un mes la ganancia mensual máxima. ¿Cuánto es esa ganancia mensual máxima? A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	En la segunda entrega del proyecto de curso realizada por el grupo 5, no aparece la solución del problema planteado
Proyecto 6			El grupo 6 resolvió satisfactoriamente el problema planteado entregando como solución un precio de $ 56.750 para el producto "Y" con el fin de obtener una ganancia máxima mensual en la empresa "X de $ 2.268.750

Proyecto 7	Utilidad mensual en la empresa "X" en relación con la referencia "Y" cuando el ingreso mensual es máximo	Determine cuánto es la utilidad mensual que se obtiene en la empresa "X" en relación con la referencia "Y", cuando el ingreso mensual es máximo. A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta	El grupo 7 resolvió satisfactoriamente el problema planteado entregando como solución una utilidad mensual de $ 13.865.522 en relación con el producto "Y" en la empresa "X" cuando el ingreso es máximo

Figura 59. Análisis a posteriori de la actividad 4.3. Proyecto de curso, segunda entrega.
Fuente: Elaboración propia.

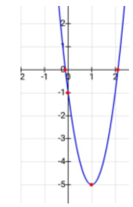
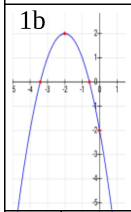
A excepción del grupo 5 que no presentó la solución del problema planteado, los grupos restantes presentaron el procedimiento de transformaciones de tratamientos y conversiones que siguieron para dar respuesta a la problemática planteada. Se observa un procedimiento de resolución claro y ordenado, donde evidencian la correcta discriminación de las unidades significantes involucradas en los registros lengua natural (Máximo) y simbólico algebraico (Vértice).

4.5 Análisis a posteriori de la actividad 5

Después de haber experimentado los diferentes momentos didácticos a través de las actividades que se desarrollaron, es importante notar que el momento de la evaluación se ha dado simultáneamente con otros momentos y aunque se ha destacado la existencia de algunos momentos en las diferentes actividades, es posible que otros momentos no discriminados se hayan presentado; sin embargo, la actividad 5 privilegió al momento didáctico de la evaluación, donde se buscó conocer en forma general, el estado de construcción de la OM función cuadrática y por consiguiente la eficacia de la estrategia didáctica desarrollada. La evaluación se llevó a cabo a través de dos actividades, una evaluación escrita que involucró la discriminación de unidades significantes en los diferentes registros trabajados, transformaciones de tratamiento y conversiones entre los mismos, y la actividad restante que se desarrolló fue la exposición y/o sustentación del proyecto de curso, el cual involucraba la formación de los registros simbólico algebraico, gráfico cartesiano y lengua natural a través de un recurso en Geogebra. El desarrollo satisfactorio de este par de actividades según Duval (2004), exige la coordinación entre los registros involucrados y por consiguiente una comprensión integrativa del objeto matemático en estudio.

4.5.1 Análisis a posteriori de la actividad 5.1. Evaluación escrita

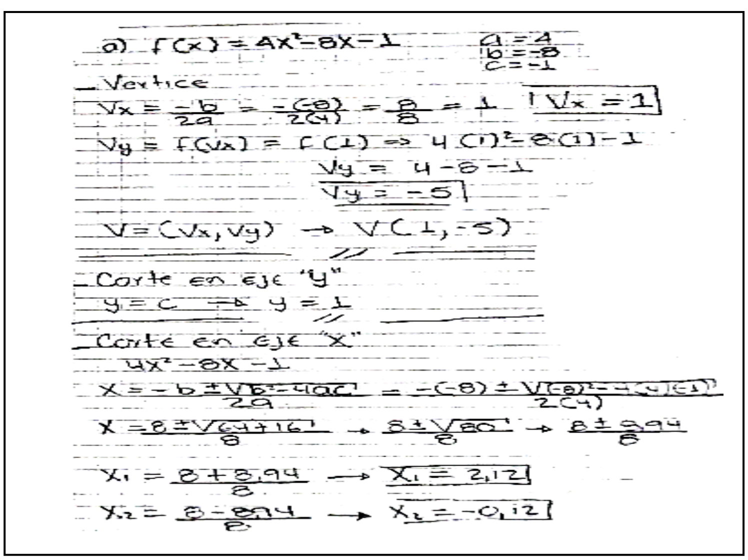
A continuación se presentan los resultados obtenidos por 32 alumnos del grupo 101 de la facultad de ciencias empresariales de la UNIAJC en la evaluación escrita.

Pregunta	Vértice	Corte con el eje y	Cortes con el eje x	Eje simetría	Dominio	Rango	Monotonía	Forma factorizada	Forma canónica	Forma polinómica o gráfica
1a. Hallar los aspectos importantes de la función: $f(x) =$ $4x^2 - 8x - 1$	$(1, -5)$	$y = -1$	$x1 = -0.12$ $x2 = 2.12$	Recta $x = 1$	$x \in R$	$[-5, \infty)$	Decreciente $(-\infty, 1)$ creciente $(1, \infty)$	$f(x) = (x + 0.12)(x - 2.12)$	$f(x) = 4(x - 1)^2 - 5$	
# de aciertos	28/93%	26/87%	24/80%	26/87%	30/100%	30/100%	22/73%	18/60%	26/87%	24/80%
1b 	$(-2, 2)$	$y = -2$	$x1 = -0.59$ $x2 = -3.41$	Recta $x = -2$	$x \in R$	$(-\infty, 2]$	Creciente $(-\infty, -2)$ Decreciente $(-2, \infty)$	$f(x) = -(x + 0.59)(x + 3.41)$	$f(x) = -(x + 2)^2 + 2$	$f(x) =$ $-x^2 - 4x - 2$
	2/100%	2/100%	2/100%	2/100%	2/100%	2/100%	2/100%	2/100%	2/100%	2/100%

2a	Aciertos 28/88%	$Vx = 200$ $Vy = 800$	Se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso son 200 unidades y el correspondiente ingreso máximo es de 800 dólares.
2b	Aciertos	$Vx = 100$ $Vy = 10$	Se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades producidas que minimizarían el costo promedio son 100 unidades y costo promedio mínimo por unidad sería 10 dólares.
3a	Aciertos 9/75%	$Vx = 6000$ Vy $= 900.000$	Se esperaba que el estudiante con los conocimientos previos, hallara la ecuación de demanda $x = -(\frac{p}{40}) + 300$ después hallara la función de ingreso $I(p) = -(\frac{p^2}{40}) + 300p$. Después de esto se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. El precio que el centro comercial debe fijar al valor de la entrada al centro recreativo para obtener un ingreso máximo diario es de \$ 6000 y el respectivo ingreso máximo es \$ 900.000.
3b	Aciertos 14/70%	$x = 30$	Se esperaba que el estudiante hallara la función de utilidad $U(x) = -0.4x^2 + 64x - 1560$ y discriminara la unidad significante cortes con el eje x, hiciera la transformación de conversión al registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y diera la respuesta en el registro lengua natural. Como mínimo deben venderse 30 unidades para que la empresa no tenga pérdidas.

Figura 60. Análisis a posteriori de la actividad 5.1. Evaluación escrita.
Fuente: Elaboración propia.

- En la pregunta 1a se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes corte con el eje "y" (en $y = -1$) y el dominio ($x \in R$) del registro de representación simbólico algebraico forma polinómica. También se esperaba que el estudiante realizara los respectivos tratamientos en dicho registro para hallar el Vértice $(1, -5)$, Cortes con el eje x (en x $= -0.12$ y en x $= 2.12$), Rango $[-5, \infty)$, Eje de simetría (recta $x = 1$) y Monotonía (Decreciente en $(-\infty, 1)$ y Creciente en $(1, \infty)$. Además se esperaba que el estudiante realizara la transformación de conversión del registro de representación simbólico algebraico, al registro de representación gráfico cartesiano. Las transformaciones de tratamiento permitían hallar la forma factorizada $f(x) = 4(x + 0.12)(x - 2.12)$ y la forma canónica $f(x) = 4(x - 1)^2 - 5$ de la función dada. En cuanto a la discriminación de las unidades significantes, se puede observar en los resultados, que en promedio el 89% de 30 estudiantes logró el objetivo; también se puede notar que en promedio el 74% de los estudiantes realizó satisfactoriamente las transformaciones de tratamiento y en cuanto a la transformación de conversión, el 80% logró el objetivo.


a) $f(x) = 4x^2 - 8x - 1$ $a = 4$ $b = -8$ $c = -1$

Vertice

$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2(4)} = \frac{8}{8} = 1$ $\boxed{V_x = 1}$

$V_y = f(V_x) = f(1) \Rightarrow 4(1)^2 - 8(1) - 1$

$V_y = 4 - 8 - 1$

$\boxed{V_y = -5}$

$V = (V_x, V_y) \rightarrow V(1, -5)$

Corte en eje "y"

$y = c \Rightarrow y = 1$

Corte en eje "x"

$4x^2 - 8x - 1$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)}$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 16}}{8} \rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{80}}{8} \rightarrow \frac{8 \pm 8.94}{8}$

$x_1 = \frac{8 + 8.94}{8} \rightarrow \boxed{x_1 = 2{,}12}$

$x_2 = \frac{8 - 8.94}{8} \rightarrow \boxed{x_2 = -0{,}12}$

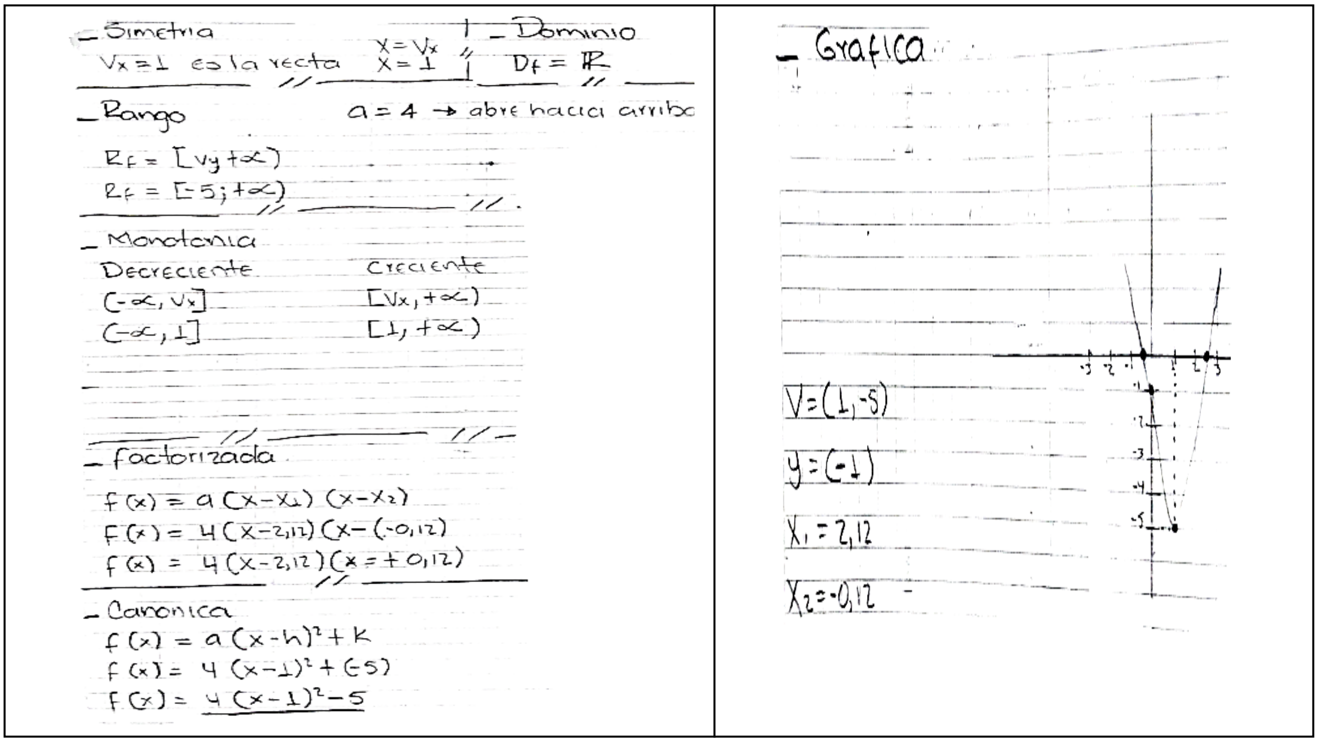
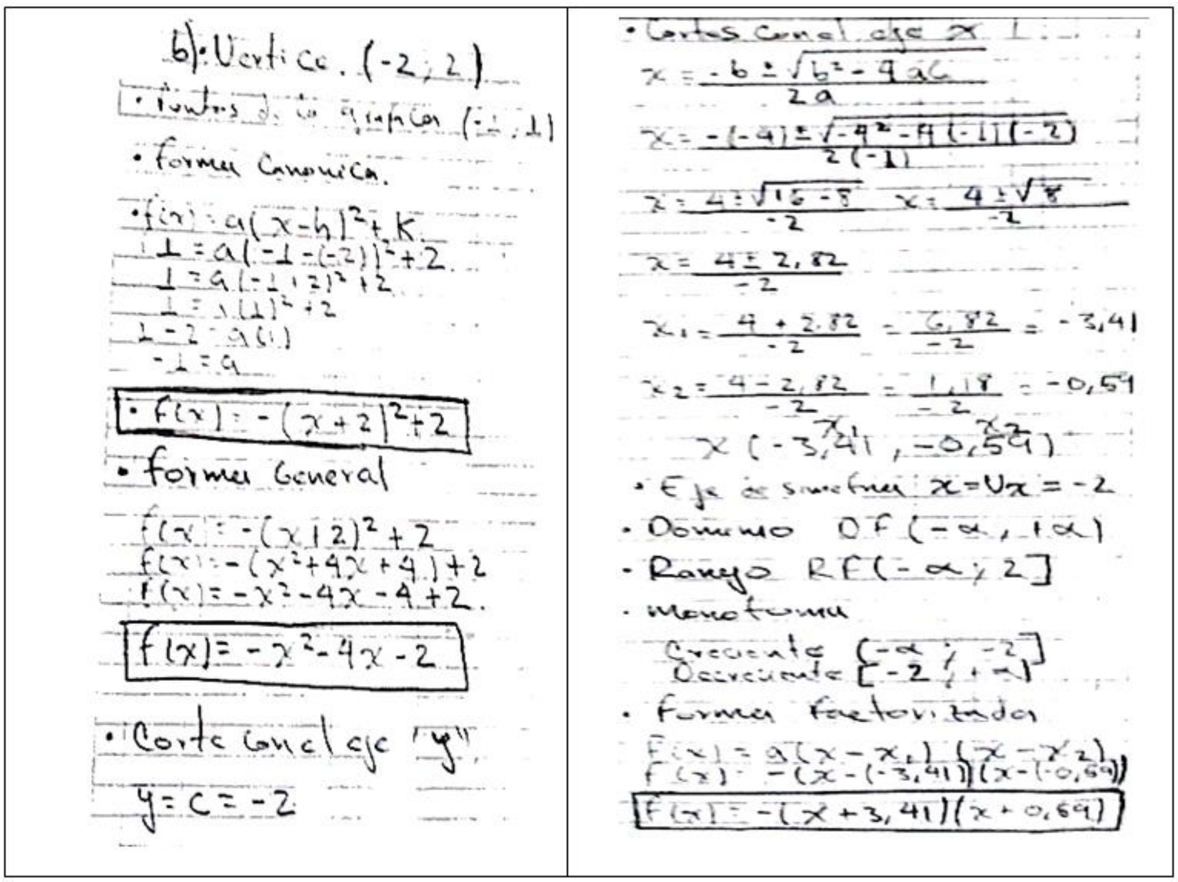


Figura 61. Respuesta a la pregunta 1a de un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 5 realizada por un estudiante

El 20% restante cometieron varios errores, entre los cuales se encuentran:

- Eligieron mal el valor de los parámetros a, b y c para reemplazar en la ecuación para hallar el vértice y en la ecuación cuadrática
- La ecuación cuadrática que usaron para hallar los cortes con el eje x, tenía errores en algunos signos.
- Cometieron errores en la multiplicación de números negativos
- Cometieron errores en resolver potencias
- En la monotonía tomaron como referencia a Vy en vez de Vx

- En la pregunta 1b se esperaba que el estudiante discriminara las unidades significantes Vértice $(-2, 2)$, la Monotonía (Creciente en $(-\infty, -2)$ y Decreciente en $(-2, \infty)$) , Eje de simetría (recta $\mathrm{x} = -2$), Dominio ($x \in R$) y el Rango $(-\infty, 2]$ del registro de representación gráfico cartesiano.También se esperaba que el estudiante realizara la transformación de conversión del registro gráfico cartesiano al registro simbólico algebraico y además practicara los respectivos tratamientos en este último para encontrar las unidades significantes Corte con el eje y (en y $= -2$) y Cortes con el eje x ($en\ x = -0.59\ y\ en\ x = -3.41$). Las transformaciones de conversión y tratamiento permitían hallar la forma factorizada $f(x) = -(x + 0.59)(x + 3.41)$, la forma canónica $f(x) = -(x + 2)^2 + 2$ y la forma polinómica $f(x) = -x^2 - 4x - 2$ de la función dada. De acuerdo a los resultados, los dos alumnos que escogieron esta opción alcanzaron los objetivos propuestos con esta pregunta.



b) • Vertice (-2 ; 2)
• Puntos de la grafica (-1 ; 1)
• forma Canonica.
• $f(x) = a(x-h)^2 + K$
$1 = a(-1-(-2))^2 + 2$
$1 = a(-1+2)^2 + 2$
$1 = a(1)^2 + 2$
$1 - 2 = a(1)$
$-1 = a$
$\boxed{f(x) = -(x+2)^2 + 2}$
• forma General
$f(x) = -(x+2)^2 + 2$
$f(x) = -(x^2+4x+4) + 2$
$f(x) = -x^2 - 4x - 4 + 2$
$\boxed{f(x) = -x^2 - 4x - 2}$
• Corte con el eje "y"
$y = c = -2$

• Cortes con el eje x
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{-4^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)}$
$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{-2}$ $x = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{-2}$
$x = \frac{4 \pm 2,82}{-2}$
$x_1 = \frac{4 + 2,82}{-2} = \frac{6,82}{-2} = -3,41$
$x_2 = \frac{4 - 2,82}{-2} = \frac{1,18}{-2} = -0,59$
$x\ (-3,41\ ,\ -0,59)$
• Eje de simetria $x = Vx = -2$
• Dominio $DF\ (-\infty\ ,\ +\infty)$
• Rango $RF\ (-\infty\ ;\ 2]$
• Monotonia
Creciente $(-\infty\ ;\ -2]$
Decreciente $[-2\ ;\ +\infty)$
• forma factorizada
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
$f(x) = -(x-(-3,41))(x-(-0,59))$
$\boxed{f(x) = -(x+3,41)(x+0,59)}$

Figura 62. Respuesta a la pregunta 1b de un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 5 realizada por un estudiante

- En la pregunta 2a, Se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. La cantidad de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso son 200 unidades y el correspondiente ingreso máximo es de 800 dólares. El 88% de 32 alumnos lograron el objetivo. El porcentaje restante cometió varios errores, entre los que se destacan:

  - Resta mal desarrollada $1600 - 800 = 15.200$
  - Concepto errado de potencia $200^2 = 400$

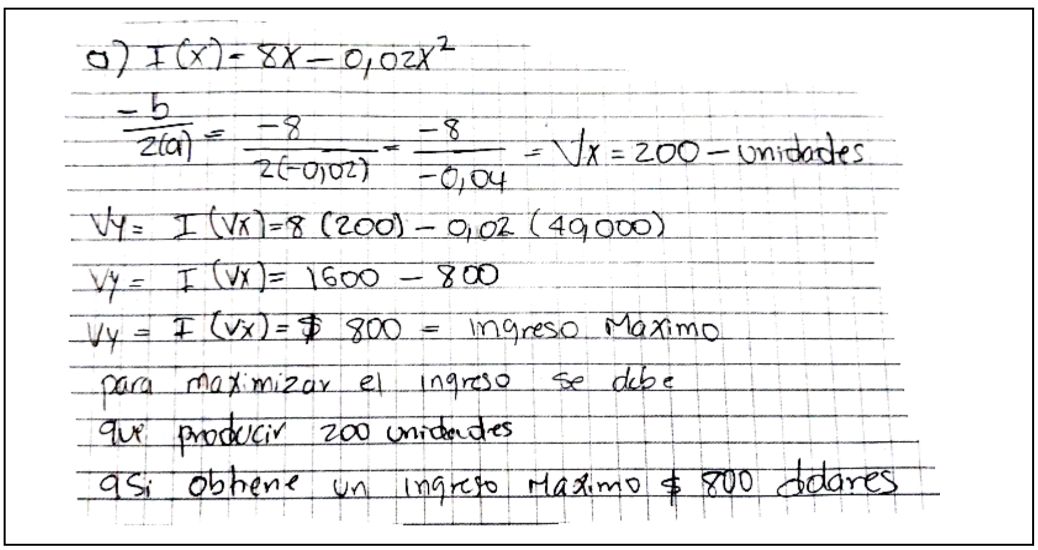
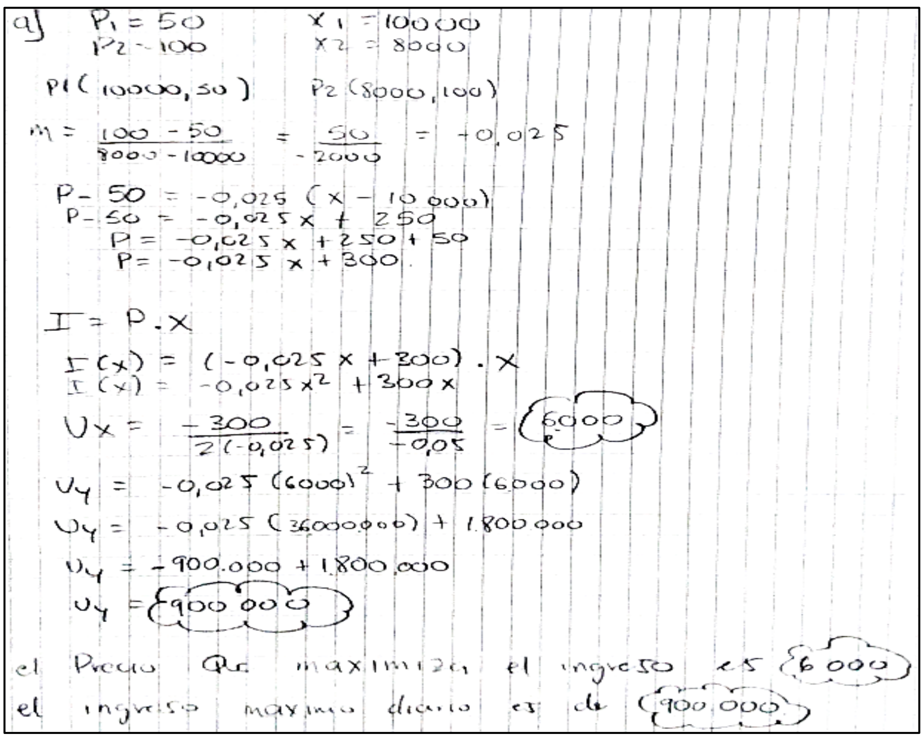


Figura 63. Respuesta a la pregunta 2a de un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 5 realizada por un estudiante.

- La pregunta 2b no fue escogida por ningún alumno.

- En la pregunta 3a, se esperaba que el estudiante con los conocimientos previos, hallara la ecuación de demanda $x = -(p/40) + 300$ después hallara la función de ingreso $I(p) = -\frac{p}{40}^2 + 300p$. Después de esto se esperaba que el estudiante discriminara la unidad significante Vértice en el registro de representación lengua natural, hiciera la conversión a registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y devolviera la respuesta en el registro lengua natural. El precio que el centro comercial debe fijar al valor de la entrada al centro recreativo para obtener un ingreso máximo diario es de \$ 6000 y el respectivo ingreso máximo es \$ 900.000. El 75% de 12 alumnos que escogieron esta pregunta, alcanzó el objetivo. El error principal en el porcentaje restante, fue la interpretación equivocada de la pregunta, ya que se les pedía hallar el ingreso máximo de dinero diario y ellos hallaron ingreso de personas al centro recreativo.



a) $P_1 = 50$ $x_1 = 10000$

$P_2 = 100$ $x_2 = 8000$

$P1(10000, 50)$ $P2(8000, 100)$

$m = \frac{100-50}{8000-10000} = \frac{50}{-2000} = -0,025$

$P - 50 = -0,025(x - 10000)$

$P - 50 = -0,025x + 250$

$P = -0,025x + 250 + 50$

$P = -0,025x + 300.$

$I = P.x$

$I(x) = (-0,025x + 300).x$

$I(x) = -0,025x^2 + 300x$

$Vx = \frac{-300}{2(-0,025)} = \frac{-300}{-0,05} = 6000$

$Vy = -0,025(6000)^2 + 300(6000)$

$Vy = -0,025(36000000) + 1.800000$

$Vy = -900.000 + 1.800.000$

$Vy = 900000$

el Precio Que maximiza el ingreso es 6 000

el ingreso maximo diario es de 900.000

Figura 64. Respuesta a la pregunta 3a de un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 5 realizada por un estudiante.

- En la pregunta 3b, se esperaba que el estudiante hallara la función de utilidad $U(x) = -0.4x^2 + 64x - 1560$ y discriminara la unidad significante cortes con el eje x, hiciera la transformación de conversión al registro simbólico algebraico, realizara el respectivo tratamiento y diera la respuesta en el registro lengua natural. Como mínimo deben venderse 30 unidades para que la empresa no tenga pérdidas. El 70% de 20 estudiantes lograron el objetivo.

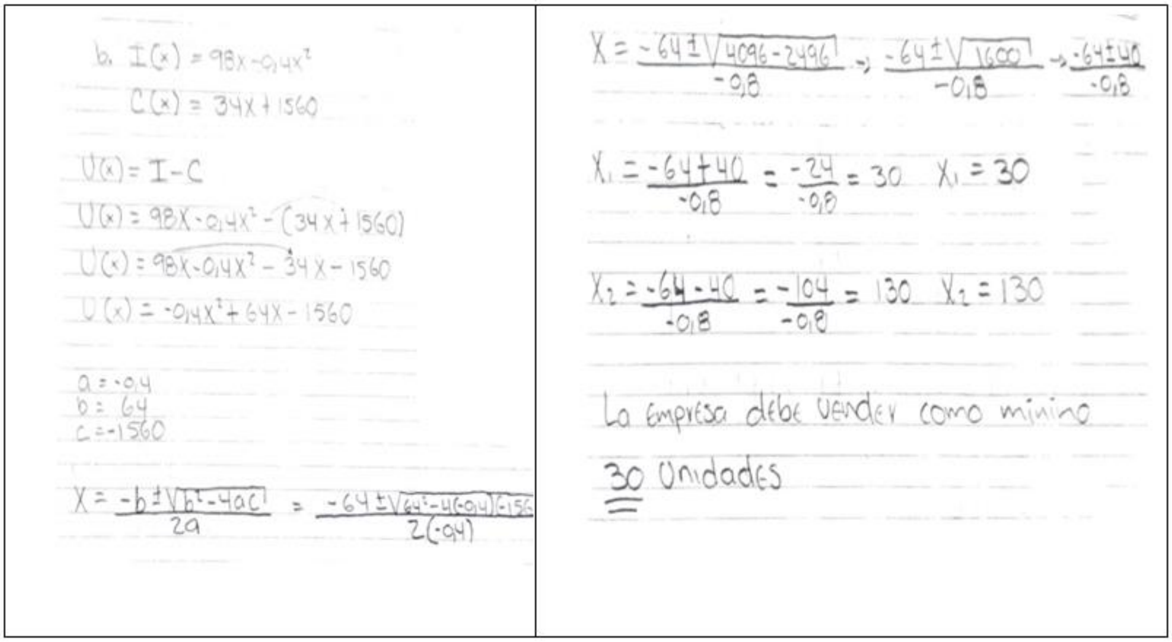


Figura 65. Respuesta a la pregunta 3b de un estudiante.
Fuente: Tomada de la actividad 5 realizada por un estudiante.

El porcentaje restante en general se equivocó en operaciones algebraicas a la hora de hallar los cortes con el eje x.

4.5.2 Análisis a posteriori de la Actividad 5.2. Exposición proyecto de curso y recurso Geogebra.

A continuación se presentan los resultados obtenidos en esta actividad.

ITEM	PROYECTO	PREGUNTAS	ANÁLISIS DE LAS EXPOSICIONES Y EL RECURSO DE GEOGEBRA
Proyecto 1	Ganancia máxima mensual en la	Determine cuál debe ser la cantidad de la referencia "Y" que debe	• El grupo 1 resolvió satisfactoriamente el problema planteado, obteniendo como solución 359 unidades a vender del producto "Y" para obtener una ganancia máxima mensual de $

	empresa "X" en relación con la referencia "Y"	vender la Empresa "X" para obtener la ganancia máxima mensual. ¿Cuánto es la ganancia máxima mensual? A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	771.999 en la empresa "X" • En la sustentación del proyecto el jurado (3 profes de DCB) hizo la observación de mejorar la explicación de procedimientos y la terminología usada • El recurso en Geogebra modela apropiadamente la solución del problema planteado. • La nota promedio asignada por el jurado fue 4.4
Proyecto 2			• El grupo 2 resolvió satisfactoriamente el problema planteado, obteniendo como solución 5.253 unidades a vender del producto "Y" para obtener una ganancia máxima mensual de $ 683.564 en la empresa "X" • En la sustentación del proyecto el jurado (3 profes de DCB) resaltó el buen manejo de los conceptos matemáticos, su creatividad, liderazgo y trabajo en equipo • El recurso en Geogebra modela apropiadamente la solución del problema planteado • La nota promedio asignada por el jurado fue 4.5
Proyecto 3			• El grupo 3 resolvió satisfactoriamente el problema planteado, obteniendo como solución 281.98 kg a vender del producto "Y" para obtener una ganancia máxima mensual de $ 1.325.529 en la empresa "X" • En la sustentación del proyecto el jurado (3 profes de DCB) hizo la observación de explicar mejor los procedimientos usados en la resolución del problema. Resaltó el entusiasmo del grupo. • El recurso en Geogebra modela apropiadamente la solución del problema planteado • La nota promedio asignada por el jurado fue 4.2
Proyecto 4	Ganancia mensual obtenida en la empresa "X" en relación con la referencia "Y", cuando el costo total es máximo	Determine cuál es la ganancia mensual que obtiene la empresa "X" en relación con la venta de la referencia "Y" cuando el costo total es máximo. A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	• El grupo 4 resolvió satisfactoriamente el problema planteado entregando como solución la ganancia mensual de $ 564.123.971 en la empresa "X" con relación al producto "Y" cuando el costo total es máximo. • En la sustentación del proyecto el jurado (3 profes de DCB) hizo la observación de mejorar la terminología usada, mucho texto en las diapositivas, resaltó trabajo en equipo • El recurso en Geogebra modela apropiadamente la solución del problema planteado • La nota promedio asignada por el jurado fue 3.9

Proyecto 5	Ganancia máxima mensual en la empresa "X" en relación con la referencia "Y"	Determine cuál debe ser el precio promedio de venta de la referencia "Y" para que la empresa "X" obtenga en un mes la ganancia mensual máxima. ¿Cuánto es esa ganancia mensual máxima? A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta.	• Hubo error en la resolución del problema planteado y como no hicieron la segunda entrega, no hubo tiempo para orientarlos • En la sustentación del proyecto el jurado (3 profes de DCB) hizo la observación de que los valores fueron adaptados y no concuerdan con el problema planteado • El recurso en Geogebra modela la solución que obtuvieron, pero no fue correcta. • La nota promedio asignada por el jurado fue 3.5
Proyecto 6			• El grupo 6 resolvió satisfactoriamente el problema planteado entregando como solución un precio de \$ 56.750 para el producto "Y" con el fin de obtener una ganancia máxima mensual en la empresa "X de \$ 2.268.750 • En la sustentación del proyecto el jurado (3 profes de DCB) hizo la observación que hay mucho texto en las diapositivas, resaltó que consideran el impacto del modelo pedagógico de la UNIAJC en su formación. • El recurso en Geogebra modela apropiadamente la solución del problema planteado • La nota promedio asignada por el jurado fue 4.1
Proyecto 7	Utilidad mensual en la empresa "X" en relación con la referencia "Y" cuando el ingreso mensual es máximo	Determine cuánto es la utilidad mensual que se obtiene en la empresa "X" en relación con la referencia "Y", cuando el ingreso mensual es máximo. A través de un recurso en Geogebra, modele la solución de la situación propuesta	• El grupo 7 resolvió satisfactoriamente el problema planteado entregando como solución una utilidad mensual de \$ 13.865.522 en relación con el producto "Y" en la empresa "X" cuando el ingreso es máximo • En la sustentación del proyecto el jurado (3 profes de DCB) resaltó que relacionan muy bien la información con los términos y contenidos matemáticos • El recurso en Geogebra modela apropiadamente la solución del problema planteado • La nota promedio asignada por el jurado fue 4.1

Figura 66. Análisis a posteriori de la actividad 5.2. Exposición proyecto de curso y recurso Geogebra.
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 10. Resultados de la actividad 5.2. Exposición proyecto de curso y recurso Geogebra

Grupo	Diapositivas				Recurso Geogebra				Dominio del tema				promedio
	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	promedio	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	promedio	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	promedio	general
1	4,0	4,0	5,0	**4,3**	5,0	5,0	4,5	**4,8**	4,0	4,0	4,5	**4,2**	**4,4**
2	5,0	4,0	5,0	**4,7**	4,5	4,0	4,5	**4,3**	5,0	4,0	4,5	**4,5**	**4,5**
3	4,0	4,0	5,0	**4,3**	4,0	4,0	4,5	**4,2**	3,5	4,0	4,5	**4,0**	**4,2**
4	4,0	3,5	4,0	**3,8**	4,0	3,5	3,5	**3,7**	5,0	4,0	4,0	**4,3**	**3,9**
5	3,5	3,5	4,5	**3,8**	3,5	3,0	3,5	**3,3**	3,8	3,0	3,5	**3,4**	**3,5**
6	3,8	4,0	5,0	**4,3**	4,0	4,0	3,5	**3,8**	4,0	4,0	4,5	**4,2**	**4,1**
7	4,0	4,0	5,0	**4,3**	4,0	3,0	4,5	**3,8**	4,0	4,0	4,5	**4,2**	**4,1**

Nota. La Tabla 10 muestra los resultados obtenidos por los siete grupos en la actividad 5.2.
Fuente: Elaboración propia.

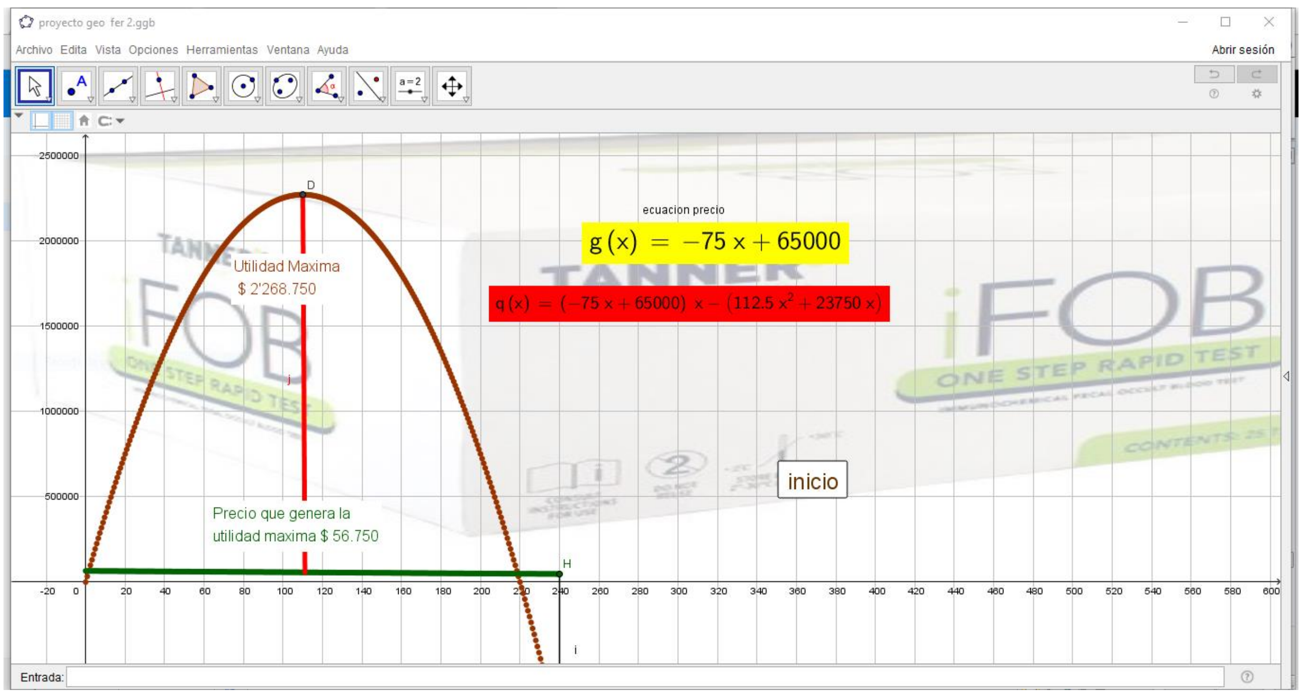


Figura 67. Recurso Geogebra del grupo 6.
Fuente: Tomada de la actividad 5 realizada por un grupo.

CAPÍTULO 5.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

5 Conclusiones y recomendaciones del trabajo de investigación

En este capítulo se analizaron los objetivos trazados en la presente propuesta y se compararon con el desarrollo de la misma, incluyendo las producciones de los estudiantes, con el fin de evaluar la pertinencia y/o eficacia de la estrategia implementada, frente a la pregunta generada en el planteamiento del problema.

5.1 ¿Los objetivos trazados responden satisfactoriamente al planteamiento del problema?

En primer lugar la pregunta que se generó en el planteamiento del problema fue "¿Cómo enseñar la función cuadrática a estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ciencias Empresariales de la UNIAJC de tal manera que alcancen una comprensión integrativa (Duval, 2004) del objeto matemático mencionado?" Y el objetivo general propuesto para responder a dicha pregunta fue "Diseñar una estrategia didáctica que permita enseñar la función cuadrática a estudiantes de la Facultad de Ciencias Empresariales de la UNIAJC, de tal forma que alcancen una comprensión integrativa del objeto matemático mencionado". No cabe la menor duda que este último responde satisfactoriamente al problema planteado, sin embargo, el punto a discutir no es este, sino que se requiere verificar si las condiciones necesarias para alcanzar una comprensión integrativa según Duval (2004), están contempladas en el desarrollo de los objetivos específicos.

A continuación se propone analizar el paso a paso descrito por Duval (2004) para alcanzar una comprensión integrativa de un objeto matemático:

Duval (2004) introduce la comprensión integrativa como la solución a los limitantes que tienen los alumnos que alcanzan una comprensión mono-registro, pues en otras palabras afirma que la comprensión mono-registro no puede ser útil en el momento en que se requiere resolver una situación que se sale del contexto en el cual se hizo el aprendizaje, aunque la solución de la misma, requiera el uso del objeto matemático estudiado en un solo registro. La argumentación prosigue en palabras de Duval (2004, p. 75).

> Solo una comprensión integrativa, es decir, una comprensión fundada en la coordinación de los registros, da tales posibilidades de transferencia. Entonces, se revela como necesario un aprendizaje específicamente centrado en la conversión de las representaciones y efectuado por fuera de toda tarea de tratamiento para pasar a una enseñanza que obre sobre un nuevo dominio o sobre una nueva red conceptual.

En la misma página prosigue:

> La conversión de las representaciones **requiere la identificación de las unidades significantes en el registro de partida y en el de llegada**. Ahora bien, frecuentemente es la discriminación de estas unidades significantes lo que hace falta.

En la página siguiente Duval (2004, p. 76) declara:

> La discriminación de las unidades significantes propias a cada registro, debe ser el objeto de un aprendizaje específico. **Tal discriminación es la condición necesaria para toda actividad de conversión, y por tanto, para el desarrollo de la coordinación de los registros de representación**. Y esto independientemente del carácter directo o indirecto de la conversión, es decir, del hecho de que la conversión se efectúe sin recurrir a una representación intermediaria o que requiera tal recurso.

En la página siguiente Duval (2004, p. 77) explica el método para discriminar las unidades significantes en un registro de representación:

> La discriminación de las unidades significantes en un registro de representación constituye, pues, un problema análogo al de la investigación de los diferentes factores de variación en el análisis de un conjunto de factores que, en la ocurrencia de un fenómeno, intervienen simultáneamente y no pueden ser aprehendidos aisladamente: para disociarlos

> es necesario recurrir al "**método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, mientras que los demás permanecen sin cambio**" (Piaget (como se citó en Duval, 2004)) . En otros términos, la discriminación de las unidades significantes de una representación y por tanto la posibilidad de una aprehensión de lo que ella representa, depende de la aprehensión de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia en un registro. **La organización de una situación de aprendizaje centrada en el carácter fundamental de la operación de conversión no puede ser más que la organización de un campo de variaciones posibles. Concretamente, es necesario poder explorar todas las variaciones posibles de una representación en un registro, haciendo la previsión, o la observación, de las variaciones concomitantes de las representaciones en el otro registro**. Como el costo de la tarea cognitiva cambia con el sentido de la conversión, cada uno de los dos registros de representación deben ser el objeto de un trabajo de exploración de las variaciones sistemáticas y de un trabajo de observación de las variaciones concomitantes.

Y por último en la página siguiente Duval (2004, p. 78) confirma:

> La organización de las situaciones de aprendizaje centradas en la coordinación de los registros, requiere que previamente se hayan identificado todas las variaciones cognitivamente pertinentes de una representación en un registro, de manera que una exploración según el "**método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, dejando a los otros sin cambio" pueda ser puesto en acto por los alumnos**.

Ahora bien, si se hace el proceso contrario, es decir, devolverse a cada uno de los apartados que se han explicitados, se encontrará la ruta para llegar a una comprensión integrativa de un objeto matemático según Duval (2004) y justamente esa ruta es la que describe los objetivos específicos propuestos.

Después de haber analizado que la descripción de los objetivos específicos propuestos conlleva a una comprensión integrativa del objeto matemático función cuadrática, resta verificar el cumplimiento de dichos objetivos en el desarrollo de la estrategia y los resultados de las producciones realizadas por los estudiantes en las diferentes actividades.

5.2 ¿Los objetivos trazados se evidenciaron a lo largo del desarrollo de la estrategia didáctica?

A continuación se citan los objetivos específicos y se relaciona la sesión del documento en donde pueden verificarse.

- Identificar las unidades significantes de la función cuadrática en los registros de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico en las formas polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$, canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y factorizada $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$

Desde la fundamentación teórica en el capítulo 2, el docente describe las unidades significantes de la función cuadrática en los registros de representación gráfico cartesiano y simbólico algebraico. En la Tabla 3 (capítulo dos), el docente discrimina los posibles tratamientos entre las formas polinómica, canónica y factorizada de la función cuadrática en el registro simbólico algebraico, cuyas transformaciones de tratamiento implican la discriminación de las unidades significantes en dicho registro. También se puede evidenciar la ejecución de este objetivo en cada una de las actividades propuestas en las sesiones de trabajo y más explícito aún en la sesión 3, en el momento de la institucionalización, el docente generó la Figura 35, donde se muestra al detalle las unidades significantes de los registros gráfico cartesiano y simbólico algebraico

- Diseñar recurso en Geogebra que permita variar los parámetros $a, b\ y\ c$ del registro simbólico algebraico forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$ y a su vez observar las variaciones concomitantes en el registro gráfico cartesiano y simbólico algebraico en su forma canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y factorizada $f(x) = a(x - x1)(x - x2)$ de la función cuadrática

El recurso diseñado en Geogebra con tales características se presentó en la sesión 2 y se puede verificar en el enlace https://www.geogebra.org/m/yghkTkwM. En esta sesión los alumnos guiados por un cuestionario cuya resolución implicaba la discriminación de las unidades significantes en los registros gráfico cartesiano y simbólico algebraico a través del “método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, dejando a los otros sin cambio” (Duval, 2004), lograron obtener los resultados que fueron analizados en el capítulo anterior en detalle y se resumen en la siguiente tabla.

Tabla 11. Resultados de la actividad 2. Cuestionario y recurso Geogebra

PREGUNTA N°	UNIDAD SIGNIFICANTE QUE SE PRETENDÍA DISCRIMNAR	ESTUDIANTES QUE ACERTARON
1	Corte con el eje y	32 / 100%
2	Sentido de la concavidad	32 / 100%
3	Vértice: máximo o mínimo	27 / 84%
4	Eje de simetría	0 / 0%
5	Cantidad de cortes con el eje x	27 / 84%
6	Cortes con el eje x en la forma factorizada	22 / 69%
7	Dominio	26 / 81%
8	Rango	1 / 3%
9	Monotonía	13 / 41%

Nota. La Tabla 11 muestra los resultados obtenidos por los estudiantes en la actividad 2.
Fuente: Elaboración propia.

En la sesión 3 el docente al institucionalizar el concepto de función cuadrática y al experimentar el momento de trabajo de la técnica en la sesión 4, los estudiantes incrementaron el nivel de comprensión en la discrimnación de las unidades significantes de la función cuadrática, lo cual se evidenció en los resultados obtenidos en la actividad siguiente:

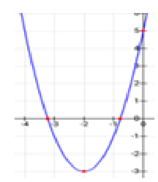
Pregunta quiz	Vértice	Corte con el eje y	Cortes con el eje x	Eje simetría	Monotonía	Dominio	Rango
Hallar los aspectos importantes de la función: $f(x) = 2x^2 + 8x + 5$	$(-2, -3)$	$y = 5$	$x1 = -3.22$ $x2 = -0.78$	Recta $x = -2$	Decreciente $(-\infty, -2)$ Creciente $(-2, \infty)$	$X \in R$	$[-3, \infty)$
Cantidad de aciertos	32 /100%	32 /100%	31/97%	32/100%	29 /91%	32/100%	30/94%
Registro simbólico algebraico forma polinómica		**Tratamiento forma canónica**		**Tratamiento forma factorizada**		Conversión forma gráfica	
$f(x) = 2x^2 + 8x + 5$		$f(x) = 2(x + 2)^2 - 3$		$f(x) = 2(x + 3.22)(x + 0.78)$			
Cantidad de aciertos		22/69%		24/75%		30/94%	

Figura 68. Resultados de la actividad 4.2 Quiz tratamientos y conversiones.
Fuente: Elaboración propia.

- Diseñar e implementar actividades donde el estudiante discrimine las unidades significantes de los registros de representación lengua natural, gráfico cartesiano, y simbólico algebraico en la forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$, canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$ y factorizada $f(x) = \boldsymbol{a(x - x1)(x - x2)}$, y a su vez el desarrollo de dichas actividades implique realizar transformaciones de tratamiento y conversión entre los registros mencionados.

La evidencia del cumplimiento de este objetivo, se puede verificar en cada una de las actividades que se desarrollaron en las cinco sesiones diseñadas:

- ✓ Actividad 1. Realizar un proyecto de curso
- ✓ Actividad 2. Cuestionario y recurso en Geogebra
- ✓ Actividad 4.1 Taller de Conversiones y Tratamientos
- ✓ Actividad 4.2. Quiz Transformaciones de tratamientos y conversiones
- ✓ Actividad 4.3. Proyecto de curso, segunda entrega
- ✓ Actividad 5.1. Evaluación escrita
- ✓ Actividad 5.2. Exposición proyecto de curso y recurso Geogebra

- Evaluar el tipo de comprensión alcanzado por los estudiantes en cuanto al aprendizaje de la función cuadrática, teniendo en cuenta las condiciones expuestas por Duval (2004) en la teoría de registros de representación semiótica.

Teniendo en cuenta las condiciones expuestas por Duval (2004) para lograr una comprensión integrativa, los objetivos trazados que obedecen exactamente a dichas condiciones, la verificación del cumplimiento de cada objetivo específico en la implementación de las actividades y la evolución de los resultados de las producciones de los estudiantes que fueron de menos a más a lo largo del desarrollo de la estrategia didáctica, se concluye que la Estrategia didáctica mediada por Geogebra para la enseñanza de la función cuadrática a estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ciencias Empresariales de la Institución Universitaria Antonio José Camacho es lo suficientemente potente para lograr una comprensión integrativa del concepto función cuadrática en los estudiantes que sean expuestos responsablemente a ella.

Otras conclusiones que permite afirmar el desarrollo de la presente estrategia didáctica.

- Ninguna OM puede construirse sin una organización didáctica y viceversa (Chevallard, 1999).

- Los momentos didácticos expuestos por Chevallard (1999) pueden aparecen simultáneamente en una actividad y no necesariamente deben tener un orden preestablecido sino que lo que es importante verificar, es que todos aparezcan por lo menos una vez a lo largo del proceso de enseñanza.
- No es posible la actividad matemática sin recurrir a algún tipo de representación del objeto estudiado. La semiosis es una condición necesaria para la aprehensión de un objeto matemático (Duval, 2004).
- Tal como lo afirma Duval (2004), la discriminación de las unidades significantes es una condición necesaria para realizar las transformaciones de conversión y por ende para la coordinación de los registros usados.
- El método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, dejando a los otros sin cambio es pertinente usarlo con la mediación de un software matemático que permita el dinamismo. En este caso se usó Geogebra y se tuvo éxito en la aplicación de dicho método
- Al observar como los estudiantes se motivaron con la realización del proyecto de curso, incluyendo la construcción de un recurso en Geogebra y el agradecimiento de todos al final de las exposiciones del proyecto, se concluye que efectivamente como lo planteó Vergnaud (1990), las situaciones que dan sentido al objeto hacen parte del campo conceptual a estudiar.

Algunas recomendaciones:

- Cuando se trabaja con el software Geogebra en la construcción de recursos, es importante probar con anterioridad la visualización del mismo en el equipo en que se va a exponer, debido a que el recurso adquiere características de forma y tamaño proporcionales a las características del equipo en que fue diseñado y se deben hacer adaptaciones (que no serían pertinentes hacerlas sobre la marcha) a este, cuando se usa un equipo con características diferentes

- En el análisis a priori de las actividades se consideran posibles variables a encontrarse en el aula de clases en relación con la operatividad de los estudiantes, sin embargo es importante tener en cuenta que en muchas ocasiones aparecen variables que no fueron consideradas en el análisis a priori y se debe estar dispuesto y atento para realizar los ajustes necesarios en acción y en las actividades posteriores.
- A la hora de la institucionalización, conviene que el docente tenga como prioridad conocer los vacíos o interpretaciones erradas del concepto estudiado que tengan los estudiantes hasta ese momento y a partir de ahí comenzar dicha institucionalización con la generación de situaciones donde el sujeto se vea en la necesidad de cambiar su limitada o equivocada técnica por un conocimiento superior.
- Cuando se está en el proceso de construcción de una estrategia didáctica para la enseñanza de algún concepto matemático, son muchos los obstáculos que se presentan (y a veces logran detenernos), pero si se llega a lograr el objetivo propuesto, la satisfacción que queda es mucho mejor que el alivio y el descanso generado al abandonar la aventura.

CAPÍTULO 6.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

6. Referencias bibliográficas

Álvarez, R. (2012). *Incidencia de las mediaciones pedagógicas en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función cuadrática* (tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia, Manizales, Colombia.

Artigue, M (1995). Ingeniería Didáctica. *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática.* Primera edición (p. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Arya J., Lardner R, e Ibarra B. (2009). *Matemáticas aplicadas a la Administración y a la Ecocomía 5 edición*. México, 2009 Pearson educación ISBN: 978-607-442-302-0.

Cejas, r., Navío, a. y Barroso, j. (2016). *Las competencias del profesorado universitario desde el modelo tpack (conocimiento tecnológico y pedagógico del contenido). Pixel-bit, revista de medios y educación*, (49), 105-119. Doi:10.12795/pixelbit.2016.i49.07.

Chevallard, (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico* (Ricardo Barroso Campos, trad.). España: Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla (Obra original publicada en 1998).

Colombia Digital. (6 de mayo de 2014) *Resultados de Colombia en Prueba PISA: ¿qué prueban y qué no?*. Recuperado de https://colombiadigital.net/opinion/columnistas/artifice- innovacion/item/6998-resultados-de-colombia-en-prueba-pisa-que-prueban-y-que-.html

Departamento de Ciencias Básicas. *(2016a). Plan de curso de matemáticas I de la Facultad de Ciencias Empresariales. El documento reposa en el archivo del DCB en la sede norte de la UNIAJC.*

Departamento de Ciencias Básicas. *(2016b). Resultados de la prueba diagnóstica del grupo101 de Ciencias Empresariales de la UNIAJC en el periodo académico 2016-2. El* *documento reposa en el archivo del DCB en la sede norte de la UNIAJC.*

Departamento de Ciencias Básicas. *(2017a). Resultados prueba diagnóstica de matemáticas aplicada a estudiantes de primer semestre periodo 2017-1 de la UNIAJC. El documento reposa en el archivo del DCB en la sede norte de la UNIAJC.*

Departamento de Ciencias Básicas. *(2017b). Caracterización del grupo 101 del periodo académico 2017-1 de la UNIAJC. El documento reposa en el archivo del DCB e n la sede norte de la UNIAJC.*

Duval, R. (2004*). Semiosis y pensamiento humano* (Myriam Vega Restrepo, trad.).Colombia: Universidad del Valle. (Obra original publicada en 1995).

Efe/eltiempo.com. (9 de julio de 2014). *Colombia, en el último lugar de nuevos resultados PISA*. Recuperado de http://www.eltiempo.com/estilo-de-vida/educacion/colombia-en-el-ultimo-lugar-en-pruebas-pisa/14224736

Fabián-Choco. (2006). *Historia de la UNIAJC*. Recuperado de https://www.emaze.com/@acflqwrw

Giménez, C. (Enero 2016). GeoGebra: ¿un juguete para el profesorado o una herramienta para su alumnado?. *Uno Revista de didáctica de las matemáticas,* Num 71, 26-32.

Gómez, P y Mesa, V. (1995). *Situaciones Problemáticas de precálculo, el estudio de las funciones a través de la exploración con calculadoras gráficas*. Bogotá DC, Grupo editorial Iberoamérica.

Hohenwarter, M. (2009). *Documento de ayuda Geogebra, Manual oficial de la versión 3.2*. Recuperado de http://www.geogebra.org/ayuda/search.html

Huapaya, E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria* (tesis de maestría). Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.

Institución Universitaria Antonio José Camacho (2013). *Modelo pedagógico* Santiago de Cali, Colombia: Programa Editoral uniajc.

Institución Universitaria Antonio José Camacho (2015). *Proyecto Educativo Institucional.*Santiago de Cali, Colombia: Programa Editoral uniajc.

Institución Universitaria Antonio José Camacho. (2016). *Caracterización y Deserción 2016-1. El documento oficial reposa en el archivo de la oficina asesora de planeación en la sede norte de la UNIAJC.*

Losada, R. (Enero 2016). GeoGebra en el aula, un descubrimiento gradual. *Uno Revista de didáctica de las matemáticas*, Num 71, 13-19.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). Estándares básicos de competencias. Recuperado de *https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles*-116042_archivo_pdf2.pdf

Mineducación. (29 de octubre de 2015). *Colombianos: conozcan resultados de las Pruebas Saber 11° en las regiones del país*. Recuperado de http://www2.icfes.gov.co/item/1742-colombianos-conozcan-resultados-de-las-pruebas-saber-11-en-las-regiones-del-pais

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología del Chaco, (2015). *Secuencia didáctica función cuadrática ecuación de segundo grado.* Recuperado de http://educacion.chaco. http://educacion.chaco.gov.ar/uploads/archivos/a861cefdc0e18526a96a7712b611473ca733fa01.pdf

Oliveira, *C.* (2009). *Organizaciones Matemáticas Locales Relativamente Completa. Universidad de Vigo.*

Programa de mejoramiento académico de la UNIAJC. (2015). *Resultados en matemáticas de las pruebas de estado de estudiantes que ingresaron al primer semestre en la UNIAJC en el periodo 2015-1. Documento reposa en el archivo del PMA en la UNIAJC sede norte*

Quiñones, W. (2017). *Una mirada didáctica a los procesos de articulación de los registros gráfico cartesiano y simbólico algebraico: el caso de la función cuadrática*. Universidad Nacional de Colombia.

Stewart J., Redlin L. y Watson S. (2012). *Precálculo, Matemáticas para el cálculo, 6 edición*. Mexico 2012, ISBN: 978-607-481-826-0.

Sureda, P. y Otero, M. (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias issn 1850-666.

Vergnaud, G. (1990): La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170. La Pensée Sauvage, Marseille.

Vitabar, F. (Enero 2016). GeoGebra: un extraño en el aula. *Uno Revista de didáctica de las matemáticas*, Num 71, 7-12.

ANEXOS

DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Antonio José Camacho
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
Calidad, excelencia y compromiso social

LINEAMIENTOS GENERALES PARA REALIZAR EL PROYECTO DE CURSO DE LAS ASIGNATURAS DEL DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Antonio José Camacho
INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
CIENCIAS BÁSICAS

Elaborada por: Luis Felipe Ramírez Otero, Liliana Andrea Potosí Cruz y Sandra Esther Suárez Chávez.

Presentación

El proyecto de curso pretende experimentar en un contexto real o en una simulación de casos, problemas que se puedan resolver aplicando los conceptos y herramientas que se asimilan durante una determinada asignatura. Así mismo el proyecto de curso es fundamental para valorar un porcentaje de la nota (20%), de la mayoría de las asignaturas del Departamento de Ciencias Básicas.

En la presente guía se exponen los lineamientos generales que facilitan la implementación y realización de un óptimo proyecto de curso.

Objetivo General

Potencializar el aprendizaje significativo del estudiante por medio del desarrollo de un proyecto donde se apliquen los conceptos y técnicas, vistos en una determinada asignatura, a una situación o problemática real, bien sea en contextos de la vida universitaria, situaciones de la vida cotidiana o en escenarios organizacionales e institucionales bajo la orientación del profesor, con la finalidad de contribuir en el desarrollo de la competencia tecnológica o profesional de cada estudiante de acuerdo al programa académico al que pertenezca.

Objetivos Específicos

- Elegir una situación problema o proceso teniendo en cuenta la posibilidad de acceso a la información, ya sea de carácter secundaria o primaria.
- Describir la situación problema o proceso elegido para el proyecto.

- Aplicar la metodología o etapas de la investigación con el propósito de resolver la situación problema.
- Identificar las oportunidades de mejora a través de la aplicación de conceptos y herramientas más adecuados para afrontar el problema.
- Formular plan de acciones o decisiones para el mejoramiento del proceso o problemáticas.

Descripción de la actividad

El proyecto de curso es una actividad que debe realizarse en grupo de máximo 4 estudiantes. El equipo de trabajo debe identificar una situación problema o proceso que pueda ser abordado desde la aplicación de conceptos y las herramientas de la asignatura. Se pretende que el equipo de trabajo aplique la metodología, la cual le permite el abordaje de la problemática usando un proceso científico, donde el estudiante tiene la posibilidad experimentar la toma de datos, la organización de los mismos, la interpretación y la toma de decisiones con el fin de aportar en la solución y/o mejorar los procesos que se estudian.

Desarrollo de la actividad

1. **Conformación del equipo de trabajo**. Se pretende que a más tardar en la segunda semana se conforme el grupo de estudiantes que trabajaran en el proyecto. Es importante que tenga en cuenta que el proyecto es una responsabilidad del grupo, y que por lo tanto la evaluación del mismo será grupal y no individual.

2. **Elección de la problemática a estudiar o proceso a mejorar**. El equipo de trabajo debe elegir una problemática real, que puede pertenecer a alguna de los siguientes contextos: empresa manufacturera, empresa de servicios, la universidad u otra entidad educativa o del entorno comunitario (barrio, comuna o un sector). En dicho contexto debe identificarse claramente el problema a ser abordado teniendo en cuenta la

posibilidad de tener datos ya sea mediante la recolección o si estos ya han sido recolectados.

3. **Aplicación de la metodología y evaluación**.
   Se aplican los pasos de la metodología elegida para la solución de la problemática.

4. **Presentación de los resultados finales.** El equipo de trabajo presentará a manera de exposición en la semana 15 los resultados de finales del caso de estudio al grupo. También se presentará trabajo escrito final teniendo en cuenta la siguiente estructura:

ESTRUCTURA PARA LA PRESENTACIÓN DEL INFORME ESCRITO DEL PROYECTO

El informe debe estar redactado con las normas APA (American Psychological Association) vigentes, con la siguiente estructura:

1. **Portada.** Con la siguiente información.
   - Título
   - Autores
   - Programa
   - Facultad - Universidad - Año

   Título del proyecto. El título no debe ser tan extenso, tratar de condensar la idea del proyecto con el menor número de palabras pero con tal exactitud que permita al lector ubicarse en el tema y atraer su interés.

2. **Introducción**. Es un compendio o resumen de todo el proyecto, en ese sentido se debe elaborar de último ya que tiene información desde el título del proyecto hasta conclusiones. Tiene fin ubicar y atrapar al lector

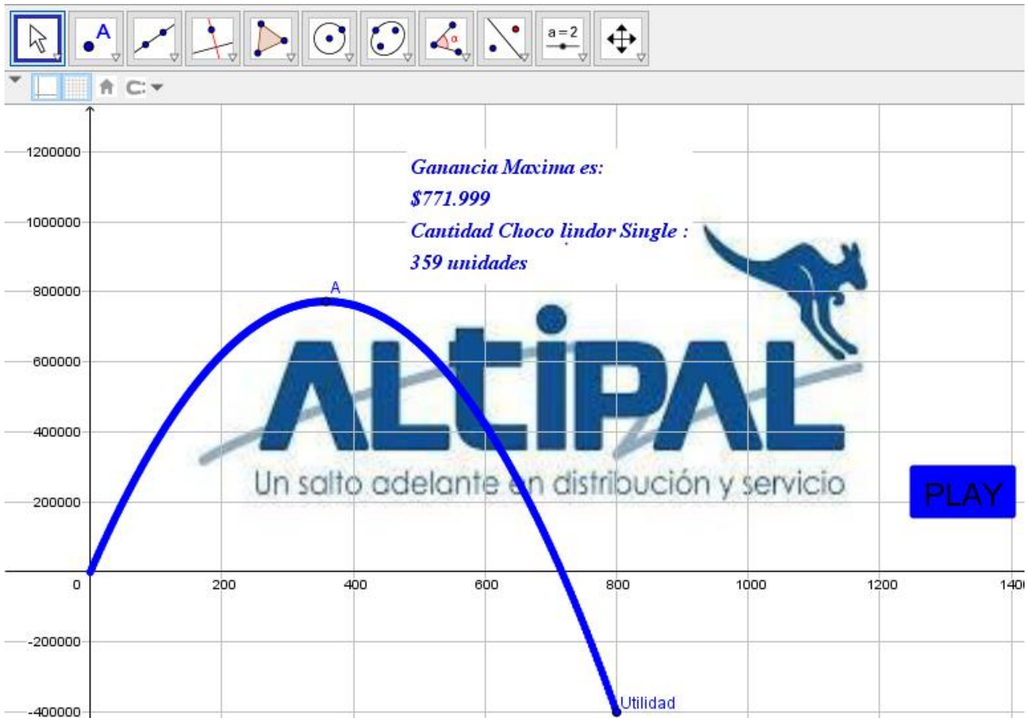
3. **Reseña del contexto**. En una página se describe la reseña de la empresa manufacturera, empresa de servicios, la universidad u otra entidad educativa o del entorno comunitario (barrio, comuna o un sector) que elige para el desarrollo del proyecto.
4. **Definición del problema.** Realice una descripción de la situación problema detallando la magnitud de la misma, la frecuencia de ocurrencia, las personas o instituciones que se ven afectados, los factores involucrados, las evidencias de sus consecuencias, etc. Así mismo, debe documentar el problema mediante datos históricos (si los hay) o recolectando información que sustente sus efectos. Puede usar algunas entrevistas iniciales para sustentar la problemática.
5. **Justificación.** Se sustenta la razón y la importancia de resolver el problema.
6. **Objetivo General y Objetivos Específicos.** El objetivo general es la definición de la meta a alcanzar al resolver el problema y los específicos son los logros parciales que deben abordarse para alcanzar la meta general. Para plantear los objetivos use los verbos en infinitivo, además tenga en cuenta que sean alcanzables con el desarrollo del proyecto.
7. **Metodología.** Corresponde a establecer como se llevará a cabo la solución del problema, es decir, tipos de estudio, método, fuentes de información, técnicas de recolección de información y los materiales utilizados.
8. **Sistematización de la ejecución del Proyecto.** Redactar de una forma sistemática el paso a paso de cómo se realizó el proyecto, analizando la información recolectada y procesada con la finalidad de implementar una estrategia de solución.
9. **Resultados Obtenidos.** Redacción de los resultados obtenidos después de implementada la estrategia de solución.
10. **Conclusiones y recomendaciones.** Los análisis y los resultados obtenidos deben concluirse teniendo en cuenta los objetivos propuestos y la situación problema definida.
11. **Bibliografía.**

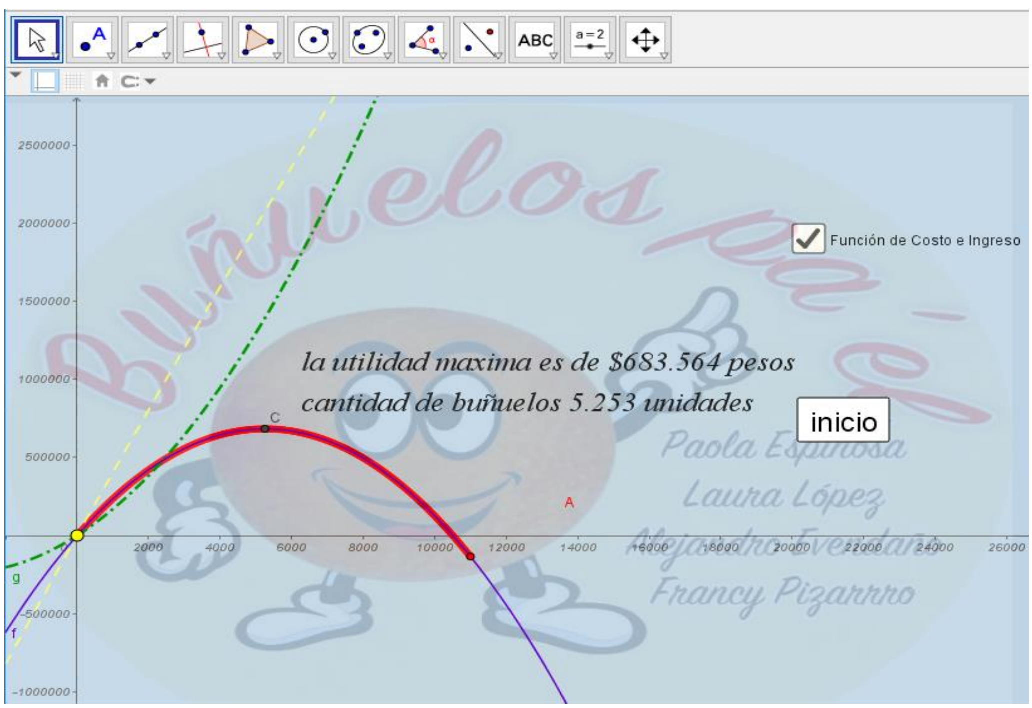
AVANCES

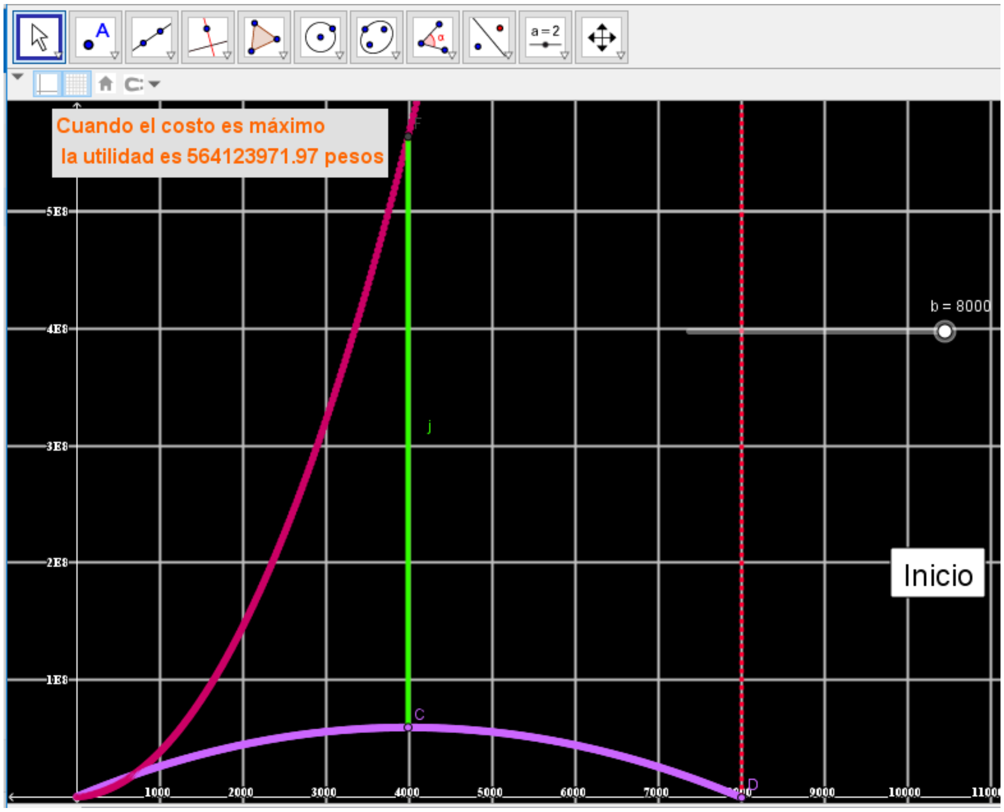
El proyecto se evaluará de forma continua, que se concretarán en tres momentos o avances, que consisten en tres entregas a lo largo de semestre, con los siguientes elementos:

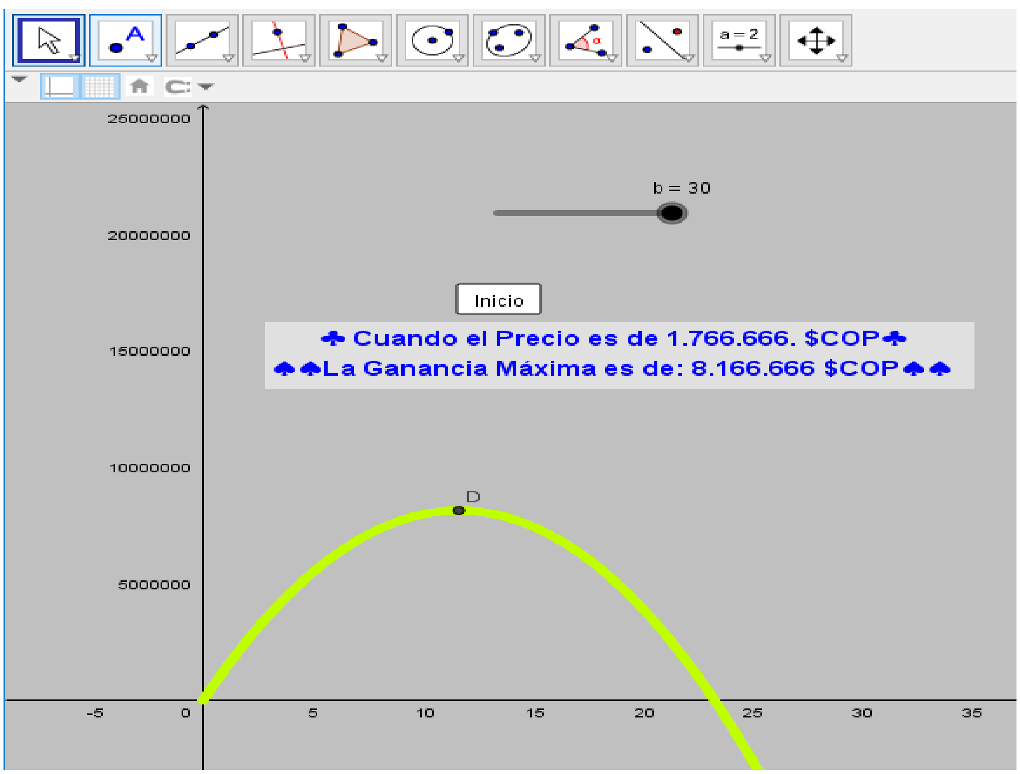
Entregables	**Elementos**	**Semana de entrega**	**% Evaluación**
Primera Entrega “El Anteproyecto”	Documento escrito con el título del proyecto, reseña histórica del lugar donde se ejecutará el proyecto, definición o planteamiento del problema, justificación, objetivo general, objetivos específicos metodología, cronograma de actividades, presupuesto y parte de la introducción y de la bibliografía).	Semana 4	4%
Segunda Entrega “Ejecución del Proyecto”	Documento escrito con la implementación de las correcciones realizadas en la primera entrega, adicionando la sistematización de la ejecución del proyecto, implementación de la estrategia de solución elegida, los resultados obtenidos, las conclusiones y recomendaciones, el resto de la introducción y la bibliografía.	Semana 9	4%
Tercera Entrega “El Proyecto terminado y sustentado”	Documento con el compendio del proyecto implementando las observaciones, sugerencias y correcciones realizadas en la primera y segunda entrega.	Semana 14	4%
	Elaboración de una presentación proyectada en Power Point o en algún programa similar (Con 5 diapositivas, nombre del proyecto e integrantes, objetivos, justificación, resultados obtenidos, conclusiones y recomendaciones)		4%
	Presentación y sustentación del proyecto		4%
Total			**20%**

Imágenes de recursos en Geogebra realizados por los estudiantes del grupo 101



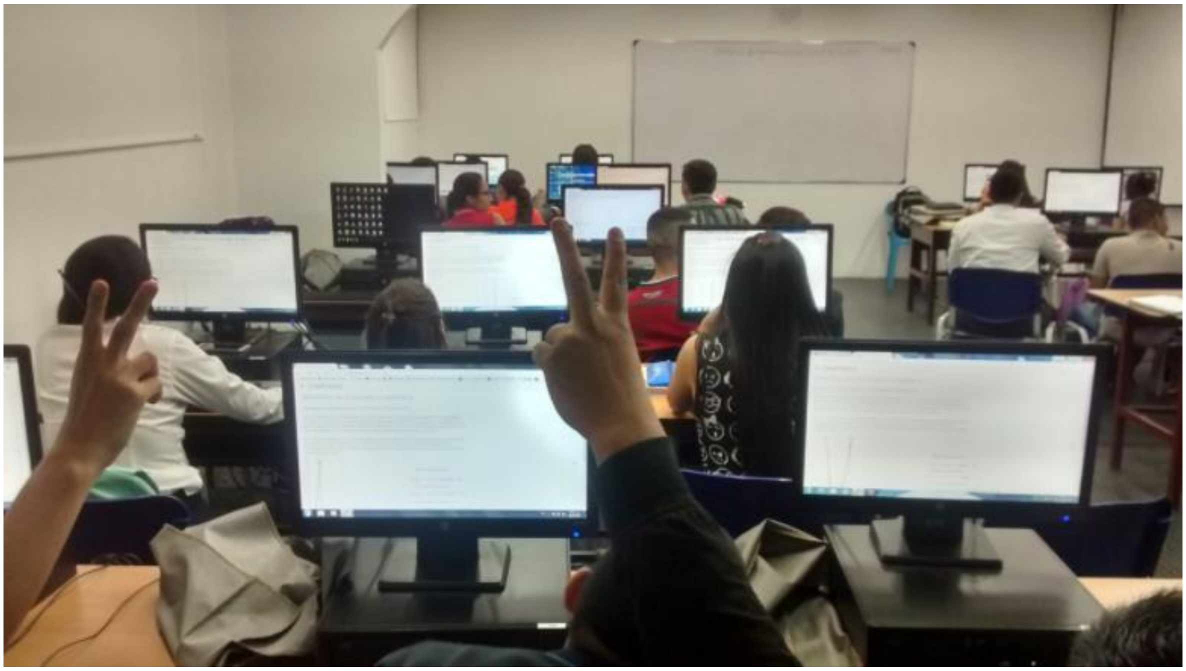



Cuando el costo es máximo
la utilidad es 564123971.97 pesos
b = 8000
Inicio
5E8
4E8
3E8
2E8
1E8
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
9000
10000
C
D
F
j


b = 30
Inicio
♣ Cuando el Precio es de 1.766.666. $COP♣
♠♠La Ganancia Máxima es de: 8.166.666 $COP♠♠
25000000
20000000
15000000
10000000
5000000
-5
0
5
10
15
20
25
30
35
D

Grupo 101 en actividad 5.1 Evaluación escrita

Grupo 101 en actividad 2. Cuestionario y recurso en Geogebra



Grupo 101 en actividad 5.2. Exposición proyecto de curso y recurso Geogebra