

Integración entre pedagogía y tecnología en la enseñanza del Cálculo de Varias Variables

Luis Carlos Rojas Florez
lrojas @ea t.edu.co

Universidad EAFIT
Facultad de Ciencias Básicas
Escuela de Ciencias y Humanidades
Medellín

Diciembre de 2010

Integración entre pedagogía y tecnología en la enseñanza del Cálculo de Varias Variables

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar al título de
Magister en Matemáticas Aplicadas

Luis Carlos Rojas Florez

Director

Pedro Vicente Esteban Duarte
Doctor en Ciencias Matemáticas



Escuela de Ciencias y Humanidades
Departamento de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas Aplicadas
Medellín

Nota de aceptacion

Coordinador de la Maestr a

Director del proyecto

Medell n, 10 de diciembre de 2010

Agradecimientos

A Dios, quien facilito los medios para cumplir con mi meta.

A mi familia, especialmente a mis padres, Octavio y Yolanda , quienes me enseñaron que el secreto del éxito es la constancia en los propósitos, a mis hermanas Angelica y Carolina por el apoyo y acompañamiento brindados para adelantar y culminar mis estudios y a mi novia Angie por su comprensión y apoyo incondicional durante todo este tiempo.

A la Universidad y mis profesores de la Maestría, especialmente al profesor Pedro Vicente Esteban, por la voluntad para compartir sus conocimientos y experiencias investigativas invaluable, por ser el gestor de este proyecto, por su apoyo constante y valiosa colaboración durante todo este proceso.

A las personas relacionadas en la bibliografía de este documento y las fuentes a las que acudí para realizar este trabajo de tesis.

Resumen

En la actualidad, las competencias que deben alcanzar los estudiantes en el ramas de las matemáticas y más específicamente en el Cálculo, están orientadas más a la comprensión y aplicación de los conocimientos a situaciones de la vida real que a la memorización y/o uso de estos en procedimientos mecánicos y repetitivos; es decir, exigen relacionarlos, interpretarlos y extrapolarlos a diferentes situaciones de manera exigible y eficaz. Lamentablemente la realidad que muestra gran parte de los claustros educativos en Iberoamérica aunque cada vez menos, en cuanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no reflejan el desarrollo de estas competencias; es por esto, que en esta región y más específicamente en Colombia, superar estas dificultades se ha convertido en una prioridad. Para ello, el Ministerio de Educación de Colombia ha venido fomentando el uso de modelos pedagógicos que involucren las Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (NTICs) como método para fortalecer la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a modo de ofrecer una educación de mayor calidad.

Desde esta perspectiva, este trabajo de investigación plantea la aplicación de la pedagogía constructivista que tiene por nombre la Enseñanza para la Comprensión (EpC), apoyada en herramientas tecnológicas provistas por la universidad EAFIT, como medio para fortalecer la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Vectorial.

Esta investigación se aplicó a dos grupos de ingeniería de la universidad EAFIT de la ciudad de Medellín (Antioquia), los cuales durante el semestre académico desarrollaron una serie de actividades orientadas por el docente, que buscaban asociar los conceptos propios del curso con situaciones reales. Para ello, se utilizaron de herramientas tecnológicas y diferentes fuentes como: textos, internet, videos, entrevistas a profesionales, entre otras; a fin de alcanzar mayores niveles de comprensión a través del proceso formativo.

La presentación de los logros de este proyecto, se basan en la aplicación de las herramientas pedagógicas propuestas: Portafolios, mapas conceptuales y matrices de evaluación. Asimismo, de la información recolectada en dos encuestas aplicadas a los grupos participantes de la investigación, las cuales fueron procesadas, interpretadas y analizadas utilizando el método estadístico multivariado de Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFC); método que permitió corroborar las ventajas de la implementación de esta metodología y obtener las siguientes conclusiones: (a) La aplicación del método de la EpC permitió a los estudiantes contextualizar el Cálculo con su entorno y su carrera. (b) La tecnología en el aula de clase y fuera de ella se convirtió en un escenario facilitador del conocimiento. (c) La tecnología en el proceso educativo evidencia su efectividad cuando viene acompañada por una metodología

constructivista, en nuestro caso el metodo de la Ensenanza para la Comprension.

Indice general

1. Elementos en la construccion del Calculo	1
1.1. Civilizacion Egipcia	2
1.1.1. Escritos Egipcios	3
El papiro de Ahmes o de Rhind	3
Representacion de fracciones	4
El papiro de Moscu	5
1.1.2. Educacion en el Antiguo Egipto	6
1.2. Antigua Babilonia	7
1.2.1. Numeracion cuneiforme	8
1.2.2. Ensenanza de la Matematica	9
1.3. Grecia	9
1.3.1. Periodo Clasico	9
1.3.2. Periodo Helen stico	10
1.4. China antigua	11
1.4.1. Numeracion China	11
Numeracion con varillas	12
El abaco	12
1.4.2. Edad Antigua	13
1.4.3. Edad Media	13
1.4.4. Edad Moderna	14
1.4.5. Ensenanza de la Matematica	14
1.5. India	15
1.5.1. Sistema de numeracion Hindu	16
1.5.2. Educacion en la antigua India	16
1.6. El Renacimiento	17
1.6.1. Educacion en el Renacimiento	19
1.7. El Calculo	19
1.7.1. El Calculo en la actualidad	21
1.7.2. Ensenanza del Calculo en la actualidad	23

2. Diseño Metodológico	25
2.1. Pedagogía tradicional	26
2.2. La Escuela Nueva	28
2.2.1. Planteamiento de John Dewey	28
Características del método educativo de Dewey	30
2.2.2. María Montessori	31
Método Montessori	32
2.2.3. Juan Jacobo Rousseau	35
El libro El Emilio	36
2.3. El Constructivismo	38
2.3.1. Enfoques Constructivistas	39
Constructivismo radical	39
Constructivismo social	40
Constructivismo Piagetiano	41
2.3.2. David Ausubel y el aprendizaje significativo	42
2.4. Mapas Conceptuales	44
2.5. Enseñanza para la Comprensión	45
2.5.1. Contenido	46
2.5.2. Métodos	46
2.5.3. Praxis	47
2.5.4. Formas	47
2.5.5. Temas generativos	48
2.5.6. Temas generativos y las nuevas tecnologías	49
2.5.7. Metas de Comprensión	50
2.5.8. Metas de Comprensión y las nuevas tecnologías	52
2.5.9. Desempeños de Comprensión	53
2.5.10. Desempeños de Comprensión y las nuevas tecnologías	55
2.5.11. Valoración Continua	56
2.5.12. Matriz de evaluación	58
2.5.13. Valoración Continua y nuevas tecnologías	63
2.6. Objetivos de la investigación	66
2.6.1. Objetivos	67
Objetivo general	67
Objetivos específicos	67
2.7. Propuesta metodológica para la enseñanza del Cálculo Vectorial	69
2.7.1. Temas Generativos	70
2.7.2. Hilo conductor	70
2.7.3. Metas de Comprensión	71
2.7.4. Desempeños de comprensión	72
Fase de exploración	72
Fase de investigación guiada	73

	Fase de proyecto final de síntesis	73
	Valoración Continua	74
2.8.	Mapas conceptuales en el aula de clase	74
2.8.1.	Mapas conceptuales como proceso	75
	Proceso de enseñanza	77
	Proceso de Aprendizaje	77
2.8.2.	La tecnología en el aula de clase	78
2.8.3.	El portafolio como herramienta de aprendizaje	80
2.9.	Metodología estadística	81
2.9.1.	Método experimental por encuestas	82
2.9.2.	Análisis factorial de correspondencia (AFC)	82
3.	Aplicación de la EpC apoyada con tecnología	87
3.1.	Aplicación de la encuesta inicial	87
	Encuesta preliminar	88
3.2.	Aplicación tecnológica	91
3.2.1.	Applets	92
	Applets para ilustrar conceptos	92
	Applets para calcular, operar o comparar	93
	Applets programables y recongurables	94
3.2.2.	Pizarra interactiva	97
	Mimio	97
3.2.3.	Pocket PC (PDA)	101
3.2.4.	Software	102
3.2.5.	Presentaciones Digitales	104
3.3.	Aplicación del diseño metodológico	106
3.3.1.	Fase de exploración	107
	Edificaciones donde está presente el Cálculo	112
	Jardín botánico Joaquín Antonio Uribe	112
	Planetario de Medellín Jesús Emilio Ramírez González	113
	Parque de los deseos	113
	Iglesia de la Consolata (Consoladora)	114
	Parque Explora	115
3.3.2.	Conclusiones	115
3.4.	Fase de investigación	116
3.4.1.	Elipsofona	117
	Diseño del producto	118
3.4.2.	Lámpara para noche	119
	Descripción del objeto	120
	Superficies involucradas en el objeto	120
	¿Por qué este objeto?	122

3.4.3.	Contenedor de basura	122
	Superficies que componen el objeto	123
3.4.4.	Conclusiones	125
3.5.	Proyecto final de síntesis	126
3.5.1.	Una visión Matemática de los tumores	127
	Diseño seleccionado	128
	Relación del diseño con el contexto	129
	Estructuración del diseño	129
	Radiobiología Clínica	129
	Modelos de isoefecto empíricos	130
	Supervivencia celular e isoefecto	132
	Aplicación del Cálculo en el diseño	133
	Propuesta Matemática	134
	Modelo NSD (Nominal dose standard factor)	134
	Modelo CRE (Cumulative radiation effect)	135
	Modelo TDF (time, dose and fractionary)	136
	Método actual de supervivencia celular (DBE)	136
	Modelo de Gompertz	136
3.5.2.	Control de Mando XBOX	140
	Superficies relacionadas	140
	Cálculos de áreas y volúmenes	142
3.5.3.	Lámpara nocturna	155
	Diseño seleccionado	155
	Aplicación Matemática	156
3.5.4.	Dirigible	157
	Diseño seleccionado	158
	Matematización del diseño	158
3.5.5.	Conclusiones	160
3.6.	Valoración continua	161
3.6.1.	Aplicación de la encuesta final	162
	Encuesta Final	162
4.	Tratamiento estadístico	167
4.1.	Encuesta inicial	168
4.1.1.	Análisis Univariado	168
	Conclusiones	172
4.1.2.	Análisis Multivariado	172
4.2.	Encuesta final	176
4.2.1.	Análisis Univariado	176
	Conclusiones	181
4.2.2.	Análisis Multivariado	181

4.2.3.	Analisis Univariado (Mimio y PDA)	186
	Conclusiones	189
4.2.4.	Analisis Multivariado (Mimio y PDA)	189
5.	Conclusiones y Recomendaciones	195
5.1.	Aplicacion Metodologica	196
	Matrices de evaluacion	196
5.1.1.	Conceptualizacion	197
5.1.2.	Expresion Oral	198
5.1.3.	Solucion del problema	200
5.1.4.	Recomendaciones	202
5.2.	Aplicacion Tecnologica	203
	Docente, Estudiante y Tecnologia	203
5.2.1.	Recomendaciones	204
5.3.	Aplicacion Pedagogica y Tecnologica	206
5.3.1.	Recomendaciones	207
5.4.	Divulgacion del trabajo de investigacion	208
5.4.1.	Art culos	208
5.4.2.	Ponencias	209
5.5.	Trabajos a futuro	209
A.	Art culo	211
B.	Encuesta inicial	219
C.	Encuesta nal	223
D.	Base de datos - Encuesta inicial	227
E.	Base de datos - Encuesta nal	229

Indice de guras

1.1. Simbologia Egipcia.	2
1.2. Numeracion Egipcia.	3
1.3. Papiro de Ahmes o de Rhind.	4
1.4. scale=0.9	5
1.5. Escritura Cuneiforme.	7
1.6. Representacion numerica cuneiforme.	8
1.7. Representacion para numeros grandes.	8
1.8. Numeracion China.	11
1.9. Numeracion con varillas.	12
1.10. Evolucion del abaco.	13
1.11. Suan-pan.	14
1.12. <i>Universidad</i> de Nalanda.	17
2.1. Ventajas de los mapas conceptuales en el aula.	76
3.1. Applet - Derivada direccional.	93
3.2. Applet - Plano tangente.	94
3.3. Applet - Suma de Riemann.	94
3.4. Applets en una sesion de clase.	95
3.5. Super cie con efecto solido y anagl co.	96
3.6. Applet - Curvas de nivel.	96
3.7. Super cie relacionada con el concepto de integral triple.	97
3.8. Mimio - Pizarra interactiva convencional.	98
3.9. Mimio - Modo captura electronica.	99
3.10. Uso del Mimio en el aula.	99
3.11. Resultado del uso del Mimio.	100
3.12. Mimio - Modo interactivo.	100
3.13. PDA - Software 3D universal.	101
3.14. PDA s en el aula.	102
3.15. 3D Universal.	103
3.16. 3D Universal en el aula de clase.	104

3.17. Diapositiva utilizada en el aula.	105
3.18. Presentación digital en Slideshare.	105
3.19. Hiperboloide de dos hojas - Lente óptico.	107
3.20. Hiperboloide - Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida.	108
3.21. Péndulo de la ciudad de Medellín.	108
3.22. Gota de agua.	109
3.23. Concha marina.	109
3.24. Botella Kelin.	110
3.25. Superficies cuádricas.	111
3.26. Catenaria - Columnas del Parc Güell.	112
3.27. Jardín Botánico Joaquín Antonio Uribe.	113
3.28. Planetario Jesús Emilio Ramírez González.	113
3.29. Parque de los deseos.	114
3.30. El hombre creador de energía.	114
3.31. Iglesia de la Consolata.	115
3.32. Parque temático Explora.	115
3.33. Elipsoide, Cilindro, Hiperboloide de una hoja.	118
3.34. Elipsofá modelado en 3D.	118
3.35. Lámpara nochera modelada en 3D.	122
3.36. Contenedor de basura.	123
3.37. Esfera.	123
3.38. Cilindro.	123
3.39. Cono elíptico.	124
3.40. Contenedor de basura modelado en 3D.	124
3.41. Superficie modelada de un tumor en 3D.	129
3.42. Maqueta - Tumor.	130
3.43. Visita a la unidad de Cancerología	130
3.44. Cálculo de dosis total método NSD.	135
3.45. Cálculo de dosis total método CRE.	135
3.46. Cálculo de dosis total método TDF.	136
3.47. Cálculo de dosis total DBE.	137
3.48. Método Gompertz - Línea de tendencia del crecimiento.	138
3.49. Mapa conceptual - Vectores.	139
3.50. Control de mando XBOX.	140
3.51. Elipsoide.	140
3.52. Paraboloides.	141
3.53. Prisma rectangular.	141
3.54. Subdivisiones del control de mando XBOX.	142
3.55. Superficie $(E1)$	143
3.56. Región de integración plano (r, θ)	144
3.57. Superficie $E(2)$	146

3.58. Region de integracion plano ($x y$).	147
3.59. Superficie $E(3)$.	149
3.60. Region de integracion plano ($x y$).	150
3.61. Prisma rectangular.	152
3.62. Mapa conceptual - Derivadas parciales.	154
3.63. Lampara de nochoero modelada en 3D.	155
3.64. Region de integracion.	156
3.65. Lampara - Exposicion del producto.	157
3.66. Dirigible.	158
3.67. Forma del Dirigible.	159
3.68. Exposicion final - Proyecto Dirigible.	160
4.1. Grafo - Encuesta inicial pregunta 2.	168
4.2. Grafo - Encuesta inicial preguntas (1, 5, 6, 7).	169
4.3. Grafo - Encuesta inicial preguntas (3, 4, 8, 9).	170
4.4. Grafo - Encuesta inicial preguntas (10, 12, 15).	171
4.5. Grafo - Encuesta inicial pregunta 14.	171
4.6. Tabla de contribuciones - Encuesta inicial.	173
4.7. Mapa perceptual multivariado - Encuesta inicial.	174
4.8. Grafo - Encuesta Final pregunta 1.	177
4.9. Grafo - Encuesta Final preguntas (2, 6).	177
4.10. Grafo - Encuesta Final preguntas (12, 13, 14, 15).	178
4.11. Grafo - Encuesta Final preguntas (16, 17).	179
4.12. Grafo - Encuesta Final pregunta 11.	180
4.13. Grafo - Encuesta Final pregunta 5.	180
4.14. Tabla de contribuciones - Encuesta Final.	182
4.15. Mapa perceptual multivariado - Encuesta Final.	183
4.16. Grafo - Encuesta Final preguntas (8, 3, 4).	187
4.17. Grafo-Encuesta Final preguntas (8, 3, 4).	188
4.18. Grafo-Encuesta Final pregunta 7.	188
4.19. Tabla de contribuciones Grafo - Encuesta Final (Mimio y PDA s).	190
4.20. Mapa perceptual multivariado - Encuesta Final (Mimio y PDA s).	191
5.1. Niveles de comprension - Criterio Conceptualizacion.	197
5.2. Niveles de comprension - Expresion oral.	199
5.3. Niveles de comprension - Solucion del problema.	201
D.1. Datos de la encuesta inicial - Imagen capturada del software SPAD.	227
E.1. Datos de la encuesta Final (Mimio y PDA s)	229
E.2. Datos de la encuesta Final - Imagen capturada del software SPAD.	230

Indice de cuadros

2.1. Características de la metodología tradicional.	27
2.2. Metodo de Dewey versus el tradicional.	30
2.3. Metodo Montessori versus el tradicional.	34
2.4. Metodo Rousseau versus el tradicional.	37
2.5. Aprendizaje significativo versus el tradicional.	43
2.6. Pilares y elementos de la EpC.	48
2.7. Nucleos Prioritarios.	50
2.8. Ventajas tecnológicas en las metas	53
2.9. Ventajas de las nuevas tecnologías en los desempeños de comprensión.	56
2.10. Desempeños de comprensión - Conceptualización.	60
2.11. Desempeños de comprensión - Expresión oral.	61
2.12. Desempeños de comprensión - Solución del problema planteado.	62
2.13. Valoración continua sustentada en las nuevas tecnologías.	64
2.14. Comparación EpC con metodología tradicional	65

Capitulo 1

Elementos en la construccion del Calculo

Una gran parte de lo que hoy se conoce como matematica es el resultado de un pensamiento que en principio se concentro en las nociones de numero, magnitud y forma, relacionadas con diferencias y contrastes y posteriormente con semejanzas. Por ejemplo, las diferencias y semejanzas entre un humano y un grupo, entre una caverna y muchas cavernas, etc. Seguidamente, al observar cierto grado de repeticiones en un numero de experiencias, nacieron ciertas igualdades y semejanzas: como la relacion entre las manos, los pies, los ojos, entre otros, con objetos del entorno, tanto en la cantidad como en las formas, originandose as las primeras nociones matematicas.

Todos los conceptos de numero, magnitud, forma diferencias y semejanzas, el ser humano los fue adquiriendo a traves de su desarrollo cognoscitivo y su relacion con el medio que lo rodeaba. Todav a hay una gran cantidad de preguntas sin respuesta relativas al origen de la matematica; usualmente se supone que esta ciencia aparecio para responder a necesidades practicas del hombre, pero hay estudios antropologicos que sugieren la posibilidad de un origen alternativo. Se ha sugerido que el arte de contar pudo aparecer en conexion con ciertos rituales religiosos primitivos y que el aspecto ordinal precedio al concepto cuantitativo¹.

El concepto de numero nacio como consecuencia de la necesidad practica de contar objetos. En los albores de la humanidad las personas contaban con ayuda de algunos medios disponibles: dedos, piedras, trozos de palos, huesos, etc, para representar cantidades (basta recordar por ejemplo, que la palabra calculo deriva de la palabra latina *calculus* que signi ca contar con piedras). El concepto de numero natural

¹Vease A. Seidernberg, The Ritual Origin of Counting , Archive for History of Exact Sciences. 1962.

era, obviamente limitado, pero la necesidad de ampliar este concepto representó una importante etapa en el camino hacia la matemática moderna.

Algunos científicos que apoyan la teoría de la evolución, sostienen que ciertos animales poseen cualidades como la memoria y algún indicio de imaginación, alcanzando a distinguir el concepto de número, tamaño, orden y forma; por lo que concluyen que el sentido matemático no es propiedad exclusiva del género humano.

En el transcurso de los tiempos las civilizaciones existentes desarrollaron diferentes tipos de simbologías, sistemas de numeración, que significaron progresos tanto en el ámbito cultural como en el intelectual, entre otros. Como se ilustrará en el presente Capítulo.

1.1. Civilización Egipcia

El sistema de numeración utilizado por los egipcios fue el jeroglífico, dicho sistema de numeración estaba estructurado en una escala numérica de base 10, es decir decimal. Usaban símbolos diferentes para las unidades, decenas, centenas, etc. Estos símbolos se representaban como se muestra en la Figura 1.1². Un tronco vertical representaba una unidad, un asa o herradura invertida se usaba para representar el número 10, una especie de lazo representaba el 100, una flor de loto para el 1 000, un dedo doblado para el 10 000, una especie de ave para representar el 100 000 y una figura humana de rodillas y con los brazos levantados representaba 1 000 000.

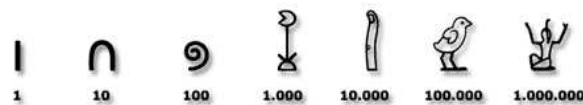


Figura 1.1: Simbología Egipcia.

Por ejemplo, ubicando los diferentes símbolos de izquierda a derecha, empezando con el símbolo de mayor valor y terminando con el de menor valor, se muestra a la izquierda, en la Figura 1.2³, el número 3 453 y a la derecha el 200, 60 y el 6 en simbología jeroglífica.

Las inscripciones Egipcias revelan una sorprendente familiaridad con números grandes desde una fecha muy antigua; por ejemplo, en un museo de Oxford se conserva

²Tomado de: http://es.wikipedia.org/wiki/Numeracion_egipcia

³Tomado de: <http://www.monografias.com/trabajos60/sistemas-numeracion/sistemas-numeracion2.shtml>



Figura 1.2: Numeracion Egipcia.

una masa de hace mas de 5 000 anos, en la que aparece registrado un numero de 120 000 prisioneros y de 1 422 000 cabras capturadas [57, p. 2].

1.1.1. Escritos Egipcios

La civilizacion Egipcia es considerada como la primera que alcanzo un cierto desarrollo matematico. Es muy poca la informacion de tipo matematico que se puede obtener de las piedras grabadas, en las piramides, templos y calendarios encontrados. Pero a pesar de esto y del tiempo se han hallado algunos papiros de hace mas de tres milenios y medio. Estos papiros constituyen unas de las mayores fuentes de informacion matematica que se tiene de la civilizacion Egipcia hasta el momento.

El papiro de Ahmes o de Rhind

Este papiro (Figura 1.3⁴) representa la mejor fuente de informacion sobre matematica egipcia que se conoce. Consta de 84 problemas todos de caracter aplicado y su resolucio. Nos da informacion sobre cuestiones aritmeticas basicas, fracciones, calculo de areas, volumenes, progresiones, repartos proporcionales, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometria basica. Este papiro no se encuentra escrito en forma jeroglca, sino en una escritura cursiva, que se adapta mejor al uso del pincel y la tinta sobre las hojas de papiro, escritura que se conoce con el nombre de hieratica o sagrada, para distinguirla de la forma posterior llamada escritura demotica o popular.

⁴Tomado de: <http://ushebtisegipcios.blogia.com/2009/062701-papiro-de-ahmes.php>



Figura 1.3: Papiro de Ahmes o de Rhind.

Se conoce muy poco sobre el objetivo del papiro. Se ha indicado que podría ser un documento con claras intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno.

Representación de fracciones

Si nos remontamos a los inicios de la humanidad, los hombres no tenían la necesidad de usar fracciones, pero al pasar el tiempo creció su intelecto cultural, es así como en la edad de bronce surgió la necesidad de representar situaciones en las que se debían utilizar cierto tipo de fracciones, fue allí donde nació un sistema de notación capaz de representarlas. En las inscripciones jeroglíficas Egipcias se encontró una notación especial para las fracciones que tienen como numerador uno (fracciones unitarias). Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{3}$ vendría a representarse por $\overset{O}{III}$, $\frac{1}{10}$ se escribía en jeroglífico como $\overset{O}{X}$, en el sistema de notación hierático que aparece en los papiros, el óvalo se reemplaza por un punto que viene colocado encima de la cifra que representa al número. Por ejemplo la fracción $\frac{1}{8}$, se denotaba como $\overset{\cdot}{=}$.

Las fracciones, en general fueron una incógnita para los egipcios, pero a la fracción $\frac{2}{3}$ le asignaban un papel muy especial en sus cálculos aritméticos. Tanto así, que para calcular un tercio de un número hallaban primero los dos tercios y luego calculaban la mitad del resultado. En el papiro de Ahmes aparece la tabla de $\frac{2}{n}$, seguidamente se muestra una tabla de $\frac{n}{10}$, para n de 1 a 9, en la que de nuevo estas fracciones se expresan en términos de fracciones unitarias y de la fracción $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, la fracción $\frac{9}{10}$ aparece descompuesta en $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{3}$ [8, pp. 33 - 36].

El papiro de Moscu

El papiro de Moscu, es junto con el de Rhind, los documentos matemáticos más importantes del Antiguo Egipto. El papiro fue escrito en hierática en torno al 1890 a. C. (XII dinastía) por un escriba desconocido, que no era tan meticuloso como Ahmes, el escriba del papiro Rhind. Se desconoce el objetivo con el que fue escrito⁵.

Este papiro contiene 25 problemas relacionados con la vida diaria de los egipcios, y de estos, se destacan dos: uno es el problema 14, donde aparece una figura que parece representar un trapecio isósceles, Figura 1.4⁶. El desarrollo del problema deja ver que lo que pide es calcular el volumen de una pirámide truncada de altura de 6 unidades.

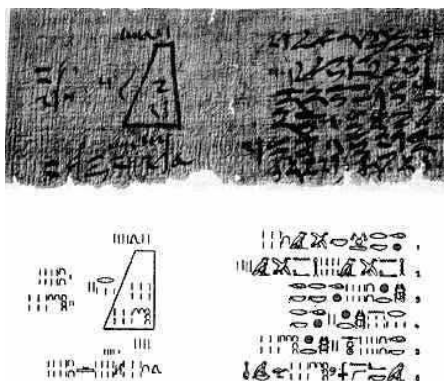


Figura 1.4: Papiro de Moscu.

No se tiene indicios de cómo los egipcios lograron estos resultados, pero al parecer la regla para el volumen de la pirámide tuvo un origen experimental, y posiblemente también para el volumen del tronco de pirámide rectangular. Para este último, se ha sugerido que los egipcios pudieron proceder de una manera similar a como hicieron en los casos del triángulo isósceles y del trapecio, se cree que descompusieron el tronco de pirámides en paralelepípedos, prismas y pirámides [22, pp. 552 - 555].

El otro problema destacado es el 10, el cual presenta un mayor grado de complejidad que el problema anteriormente mencionado, en este se pide calcular el área de una superficie parecida a un cesto. Estudios posteriores [8, p. 86] sugirieron que la cesta pudiese haber sido un tejado semicircular, en este caso basta con conocer la longitud de una semicircunferencia, y puede obtenerse con gran facilidad de una manera experimental, cosa prácticamente imposible para la semiesfera. Aunque a pesar de estos estudios vale la pena mostrar el grado de conocimientos matemáticos que se tenían,

⁵Las Matemáticas en el Antiguo Egipto. [en línea]. <http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/bibliografia.htm>. [citado en 10 de octubre de 2009].

⁶Tomado de: http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_moscu.htm.

puesto que en este último problema se muestra, aunque de una manera muy abstracta, el área de una superficie curvilínea.

1.1.2. Educación en el Antiguo Egipto

En el antiguo Egipto, los templos eran el centro de la vida. En ellos no solo se les rendía culto a los dioses sino que eran también centros económicos e intelectuales. Las escuelas del templo no solo enseñaban religión, sino también los principios de la escritura, ciencias, matemáticas y arquitectura [56, p. 9]. La enseñanza de las matemáticas hacía referencia siempre a casos concretos de la vida cotidiana, lo importante era asimilar de manera automática la fórmula de la operación. Los razonamientos, teorías y justificaciones lógicas, quedaban reservados a grados superiores de estudio.

El concepto de Educación estaba determinado por la necesidad de transmitir sus costumbres y tradiciones, se destacaban las relacionadas con la agricultura, pues eran estas las que aseguraban en gran parte la supervivencia de su cultura. Dado que el fin de la educación era la obediencia [16, p. 15], el castigo físico formaba parte de esta, como lo describen numerosos papiros y pictogramas encontrados.

En las clases altas, la educación temprana en el antiguo Egipto estaba a cargo de nodrizas, las cuales se encargaban del cuidado y educación de los niños y niñas, hasta los cuatro años de edad, en las clases pobres este papel era asumido por la madre. Como se muestra en muchos de los papiros encontrados, la mujer constituía parte esencial como educadora en esta etapa de la vida. A partir de los 6 años los niños comenzaban la escuela, como era de esperarse, en esta época solo accedían a ellas los hijos de los nobles, pero después esta estuvo al alcance de toda la población.

A mediados de la época, nace una educación que tiene su centro en la corte o palacio, este tipo de formación estaba reservada a los príncipes y a otros jóvenes de la realeza. Se basaba en dos elementos principales [16, p. 8]. Por un lado, existía en palacio una escuela especial, los estudiantes se basaban en un texto escrito y tenían como prioridad el aprendizaje memorístico, las clases se impartían con el maestro sentado sobre una estera, y con los alumnos a su alrededor; los alumnos solían tararear juntos los textos que tenían que aprender; una costumbre que parece destinada a permanecer por mucho tiempo. Por otro lado los jóvenes eran confiados a una persona profesional encargada de formarlos en su parte física.

Hoy en día se han planteado una serie de preguntas entre las más mencionadas están: ¿Cómo se utilizaba el caudal de río Nilo en los cultivos? ¿Cómo se construyeron las pirámides? se han presentado muchas teorías como respuesta a estos interrogantes, desde intervenciones extraterrestres hasta uso de esclavos. Pero una de las que más

fuerza tiene, esta basada en el dominio que poseen los Egipcios de las técnicas matemáticas.

1.2. Antigua Babilonia

La civilización Babilónica data de los años 2.000 a. C. hasta el 200 a. C., trajo consigo un gran desarrollo cultural, el uso de la escritura, la rueda y de los metales. Actualmente⁷ la información sobre esta civilización, en cuanto a matemática se refiere, es mucho mayor que la que existe sobre la civilización Egipcia, debido a que en lugar de papiros, utilizaban escritura cuneiforme⁸ sobre tablillas de arcillas (Figura 1.5⁹), mucho más resistentes al paso del tiempo. De las 10 000 tablillas conservadas, solo 250 tienen contenido matemático.



Figura 1.5: Escritura Cuneiforme.

Babilonia fue un importante cruce de rutas comerciales. La Matemática de los babilonios influyó en muchos aspectos de su vida [60, p. 23]. La utilizaron para el intercambio de monedas y mercancías, para el cálculo de interés simple y compuesto, de los impuestos y de las porciones de una cosecha a pagar al granjero, al templo o al Estado, a problemas de herencias y divisiones de campos. La mayoría de los problemas que aparecen en las tablillas son problemas económicos. Por tanto, no hay duda de la influencia de la economía en el desarrollo de la aritmética. La construcción de presas, canales y sistemas de riego y el uso de ladrillos exigían cálculos y planteaba problemas geométricos.

⁷Nacimiento: Hasta VI - V a. C. [en línea]. <http://almez.pntic.mec.es/~agos0000/Nacimiento.html>. [citado en 10 de octubre de 2009].

⁸La escritura cuneiforme consiste en la combinación de unos pocos signos rectos producidos con un clavo o punzón sobre una superficie húmeda de barro, que al secarse queda fija y se puede conservar por mucho tiempo.

⁹Tomado de: http://tipowiki.netne.net/wiki/Escritura_Cuneiforme.

Utilizaron el sistema de numeración sexagesimal carente de cero, al parecer adaptaron este sistema por los intereses de la metrología¹⁰, ya que una magnitud de 60 unidades puede dividirse fácilmente de manera exacta en dos, tres, cuatro, cinco, seis, diez, doce, quince, veinte o treinta partes iguales, lo que permite diez divisiones exactas [8, p. 49].

1.2.1. Numeración cuneiforme

La escritura cuneiforme se caracterizó inicialmente por usar la muesca en forma de cuna hecha con la punta de estilo o calamo sobre arcilla fresca, de forma tal que para los números del 1 al 9 se utiliza la muesca repetida tanta veces como sea necesario [32, pp. 20 - 21].

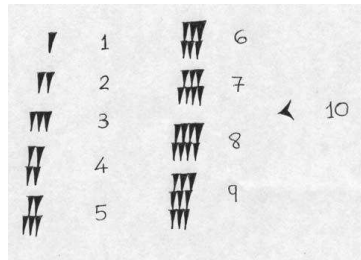


Figura 1.6: Representación numérica cuneiforme.

Cuando se trataba de cantidades grandes se representaba la decena como se observa en la Figura 1.7. Cuando se llega a contar setenta unidades los signos dejan paso de nuevo a una unidad, colocada a la izquierda de las cantidades hasta ahora representadas.

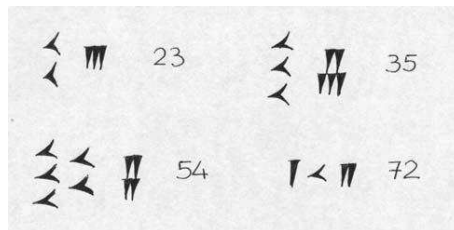


Figura 1.7: Representación para números grandes.

Comparando los conocimientos geométricos que tenían los Egipcios y los Babilónicos, estos últimos los desarrollaron en una manera más amplia, se han encontrado

¹⁰Metrología: La Metrología es la ciencia y arte de medir. Considera tanto los aspectos teóricos como prácticos de las mediciones en todos los niveles de exactitud y campos de aplicación, ya sean estos el científico, industrial o legal.

elementos de medición de ángulos y relaciones trigonométricas que avalan esta última afirmación. Algunas tablillas encontradas contienen cálculos de áreas, problemas de volúmenes de graneros, superficies de campos y de figuras comunes en la geometría [20, p. 320].

1.2.2. Enseñanza de la Matemática

Estudios revelan que existieron escuelas donde los estudiantes aprendían la escritura y técnicas matemáticas. Estos [32, p. 69] se basan en la presencia de abundantes tablillas con ejercicios repetitivos y otros formatos escolares, más que en la constancia arqueológica de lugares en que se enseñara. Se han hallado tablas de multiplicaciones, rectángulos, cuadrados y sus respectivas raíces, etc. Junto a estas se han hallado también pequeñas tablillas rectangulares donde se aprecian dos columnas de signos, una correctamente realizada, la del maestro, y otra defectuosa, que sería la del estudiante.

1.3. Grecia

La civilización Griega data de los años 800 a. C. a 600 d. C. Los griegos tomando como base y punto de partida elementos desarrollados en civilizaciones anteriores, lograron construir unas de las más brillantes civilizaciones de la humanidad, y fue esta una de las más influyentes en los fundamentos matemáticos que conocemos hoy en día.

A diferencia de egipcios y babilonios, los griegos trabajaron matemática abstracta. Estos buscaban verdades y comprendieron que para llegar a verdades absolutas debían partir de verdades y estar seguros de no suponer ningún hecho no garantizado. De ahí que los matemáticos griegos no concebían demostrar utilizando el método que hoy en día se conoce como contradicción [60, pp. 55 - 57]. Los griegos identificaron la matemática con la realidad del mundo físico. Encontraron la asociación entre la matemática y la naturaleza, lo que constituye desde entonces la base de la ciencia moderna. Desde el punto de vista matemático se distinguen dos periodos: el clásico entre el 600 al 300 a. C., y el Alejandrino o helenístico entre el 300 a. C. al 600 d. C.

1.3.1. Periodo Clásico

La matemática clásica griega se desarrolló en diferentes escuelas que se precedían unas a otras, basándose en los trabajos y experiencias realizados de sus predecesoras. En cada uno de estas escuelas, un grupo de matemáticos preparaban y trabajaban sus

actividades bajo la dirección de uno o más sabios. Este tipo de grupos permanecen vigentes hoy en día, en las universidades, centros de investigación, entre otros.

Ubicando cronológicamente las diferentes escuelas, se encuentran entre (640 - 550 a. C.). La primera de estas escuelas, la Jónica, fue fundada por Tales (640 - 546 a. C.) en Mileto, Tales vivió en Egipto, donde al parecer aprendió sobre las matemáticas Egipcias. Esta escuela se guiaba por el filósofo naturalista y fue la primera en matematizar fenómenos naturales.

La segunda fue fundada por Pitágoras (585 - 500 a. C.) que más tarde se le llamó escuela Pitagórica. Se sugiere que este pudo haber aprendido matemáticas de Tales, esta escuela estaba limitada por un número de miembros que aprendían de un maestro, las enseñanzas impartidas al grupo se mantenían en secreto. Fundan las matemáticas como sistema deductivo, entre los principales aportes se pueden mencionar la división de los números naturales en pares e impares, conocen las proporciones aritméticas, geométricas y armónicas, así como sus medias [40, pp. 77 - 80].

La tercera fue la Eleática [64, pp. 91 - 94], esta fue fundada por Parménides en el siglo V a. C. se caracterizó por ser crítico de los trabajos pitagóricos por medio de paradojas que iban dirigidas a los planteamientos. Zenón fue uno de los más importantes discípulos de los que se tiene conocimiento, intentó probar la unidad del ser, afirmando que la creencia en la realidad de cambio, la diversidad y el movimiento lleva a paradojas lógicas. Los aportes de Zenón se convirtieron en enigmas que filósofos y lógicos de todas las épocas han intentado resolver. Entre los aportes más importantes de esta escuela se encuentran los recursos de orden lógico, metodológico y técnico, su proceso dicotómico se usa como recurso de demostración y el método de reducción al absurdo, es una consecuencia del principio de contradicción de sus razonamientos.

1.3.2. Periodo Helenístico

La vida urbana tuvo un progreso sorprendente, surgieron nuevos centros y cultos *universitarios*, se desarrollaron grandes ciudades, a la par de esto surgieron múltiples avances en ciencias, medicina, astronomía y matemáticas.

Durante este periodo la educación dejó de ser exclusivamente privada. Los niños que pertenecían a familias adineradas eran cuidados por *paidagos*¹¹. La educación se extendió entre los 7 y 19 o 20 años. Las clases se realizaban en las casas de los maestros, a partir de los 12 años sus estudios comenzaban a incluir deportes como la lucha, atletismo, tirar el disco y lanzar la jabalina. En Atenas algunos jóvenes asistían a una

¹¹Paidagos: Era la persona encargada de aplicar la disciplina, seguía al niño por donde quiera que fuera.

academia para estudiar otras disciplinas como las ciencias, la musica y las artes. El joven terminaba sus estudios al cumplir 18 años, luego hacia parte de la efebía, etapa de formación cívica y militar, esta se realizaba entre los 18 y 20 años [14, pp. 93 - 95].

1.4. China antigua

Los conocimientos matemáticos de los chinos se remontan al siglo XIV a. n. e.¹² Esta civilización resulta cronológicamente comparable a las Egipcias y Mesopotámicas. Según registros existentes, la primera obra matemática pudo haber sido el *Choi Pei* (horas solares), que data aproximadamente del 1200 a. C., junto a esta, la más importante de las obras matemáticas *La matemática en nueve capítulos*, que se compone de una colección de todos los conocimientos matemáticos conocidos hasta esa época, se cree que fue escrita por el científico Chuan Tsanom [47, p. 31]. Gran parte de esta obra consiste en problemas matemáticos acerca de labores prácticas, como la parcelación de tierras, división de bienes y el trazado de edificios a gran escala.

1.4.1. Numeración China

El sistema de numeración utilizado era el decimal jeroglífico (ver Figura 1.8¹³), los chinos disponían de nueve signos distintos para los primeros nueve números, este sistema carecía de un signo específico para el cero, pero dieron por sentado la existencia de números negativos, aunque en la revisión de sus obras nunca los aceptaron como solución de una ecuación.

Numeración en China									
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
百	千	万	十	万	百	万			
100	1.000	10.000	100.000	1.000.000					

Figura 1.8: Numeración China.

Una de las contribuciones más importantes que se tiene de esta civilización fue la resolución de sistemas lineales. Para todos los sistemas se establece un método de

¹²a. n. e: Antes de nuestra era.

¹³Tomado de: <http://popecasillas.wordpress.com/2010/01/27/la-numeracion-china/>.

resolución muy similar al que hoy en día conocemos como el método de Gauss [34, p. 43].

Numeración con varillas

Se han encontrado en restos arqueológicos de la dinastía Han, piezas alargadas construidas con bambú, huesos y otros materiales, en estos restos se muestra al final una descripción detallada de los mismos y de su uso en operaciones dentro del Sun Tsu Suan Ching (Manual de aritmética del maestro Sun).

El sistema de numeración a base de varilla (Figura 1.9¹⁴) es esencialmente un sistema decimal, los dígitos del 1 al 9 se representaban por: una unidad por varilla y cinco para la varilla puesta de forma perpendicular. Se emplean varillas verticales para las posiciones de las unidades, centenas, miríadas, etc., mientras que las horizontales se emplean para las decenas, los millares, los centenares de millar, etc. Las varillas rojas representan números positivos, mientras que las negras representan números negativos. Aunque como se había dicho anteriormente no tenían símbolo para el cero, pero en lugar de esto dejaban un espacio en blanco.

Números positivos										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vertical							⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥
Horizontal		—	==	===	====	=====	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥
Números negativos										
	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Vertical							⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥
Horizontal		—	==	===	====	=====	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥

Figura 1.9: Numeración con varillas.

El método desarrollado con varillas de contar para realizar cálculos matemáticos se denominó cálculo con varillas. Se empleaba para una gran variedad de cálculos, como hallar el valor de π del cual alcanzaron a conocer hasta 5 decimales considerando un polígono de 3072 lados, raíces cuadradas, cúbicas o n-ésimas, como también para resolver sistema de ecuaciones lineales.

El ábaco

La numeración a base de varillas, no se utilizaba únicamente para realizar simples operaciones, los comerciantes de la época llevaban consigo colecciones de varillas que

¹⁴Tomado de: http://es.wikipedia.org/wiki/Numeración_con_varillas.

utilizaban no solo para contar lo comprado y lo vendido, sino tambien para calcular el costo de sus art culos.

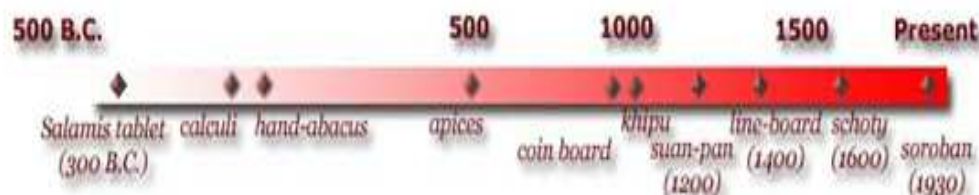


Figura 1.10: Evolucion del abaco.

El uso de varillas para realizar calculos resulto siendo tan e caz, que el abaco o marco de calcular, no se empezo a utilizar sino tiempo despues de su aparicion [8, p. 261]. El abaco como instrumento esencial para el calculo en diferentes campos, este fue evolucionando a traves de la historia, dicha evolucion se puede dividir en tres edades: Edad Antigua, Edad Media y Edad Moderna. En la Figura 1.10¹⁵ se muestra el desarrollo del abaco desde sus comienzos hasta nuestra era¹⁶.

1.4.2. Edad Antigua

Entre las evidencias físicas de la existencia del abaco que se tienen de esta edad, se encuentran: La Tabla Salmis, fue utilizada por los babilónicos alrededor del 300 a. C. lleva este nombre debido a que fue descubierta en la isla de Salmis. El Calculi Romano y el abaco manual fueron utilizados por los romanos hasta el final del imperio alrededor del 500 d. C., este último se convirtió en el primer instrumento portable para los ingenieros, comerciantes y colectores de impuesto.

1.4.3. Edad Media

Los apices, la tabla de monedas y la tabla de líneas, son del periodo alrededor del 500 d. C. hasta alrededor 1400 d. C. La madera fue el principal material con el cual estas tablas de contar fueron fabricadas; la orientación de los cálculos ya no era en forma vertical sino en forma horizontal. Cuando se empezó a contar usando números escritos en la Edad Media, el uso del abaco comenzó a disminuir progresivamente.

¹⁵Tomado de: <http://www.ee.ryerson.ca/~elf/abacus/espanol/images/timelines.jpg>.

¹⁶Una breve historia del abaco. Tomado de: <http://www.ee.ryerson.ca/~elf/abacus/espanol>. [citado en 20 de octubre de 2009]

1.4.4. Edad Moderna

El Suan-pan Figura 1.11¹⁷, o más conocido como contador de bolas, que en su nombre chino signifi ca tablilla de cálculo, es el único instrumento de cálculo utilizado por los Chinos, que ofrece la ventaja de realizar de una manera rápida y simple todas las operaciones aritméticas. Hoy en día el Suan-pan aun permanece vigente, en su gran mayoría lo utilizan mercaderes, personas que no saben leer ni escribir, comerciantes, entre otros¹⁸.



Figura 1.11: Suan-pan.

1.4.5. Enseñanza de la Matemática

Las matemáticas en la antigua China se enseñaban como parte del curso para convertirse en funcionario del gobierno, para aspirar a puestos importantes se realizaba un examen civil, el que en teoría, permitía seleccionar los mejores estudiantes para desarrollar cierto cargo. Este tipo de sistema se mantiene aun vigente en la China, como en muchos otros países incluyendo Colombia.

Mei Wending (1633 - 1721) miembro de una de las familias más importantes de la antigua China la familia Mei, prefería no aceptar un cargo en el gobierno, como si lo hicieron la mayoría de los matemáticos, a cambio de esto se dedicó a viajar por toda la China enseñando matemáticas, lo cual lo llevó a ser muy reconocido por la gran cantidad de pupilos que se unieron a él, la mayoría de estos continuaron trabajando en astronomía y matemáticas, su nieto Mei Juecheng editó el trabajo de su abuelo en el *Meishi congshu jiyao* (Recopilación de trabajos de la familia Mei) en 1761 [28, p. 101].

A partir del siglo XIV las matemáticas Chinas empezaron a entrar en declive. El modelo para la enseñanza de las matemáticas [28, p. 23] siguió basándose en el libro de los nueve capítulos, el que se convirtió en la base para nuevos trabajos realizados

¹⁷tomado de: <http://www.abacuswest.com/UserFiles/Image/SuanPan.jpg>.

¹⁸Tomado de: <http://www.masquemates.com/abacus.htm>. [citado en 20 de octubre de 2009].

por matematicos de la epoca. Tiempo despues los mas importantes de estos trabajos dejaron de ser desarrollados, se cree que esto sucedio debido a la falta de profesores que transmitieran el conocimiento, ya que los metodos que se describ an en estos libros resultaban muy avanzados y complicados para que los alumnos aprendieran solos directamente de ellos.

1.5. India

Excavaciones arqueologicas muestran el alto nivel cultural de esta civilizacion cuyo origen data de 500 a 1200 d. C., al igual que en Egipto, el origen de la geometr a en la India se desarrollo similarmente, los conocimientos se fueron construyendo y decantando de la construccion de templos, altares, entre otros. Con el tiempo, estos adoptaron la forma de un cuerpo de conocimientos conocido como *sulvasūtras*¹⁹. Todo indica que el desarrollo de la geometr a estuvo estrechamente relacionado con la practica de ritos y sacri cios que ten an lugar para alabar a los dioses [8, p. 270].

Durante el siglo sexto, vivio uno de los mas importantes matematicos, Aryabhata, su obra mas conocida fue escrita hacia el 499 d. C. titulada Aryabhatiya, libro bastante similar a los Elementos de Euclides; este libro escrito en verso, consta de diversos temas de astronom a y matematicas. Una tercera parte de esta obra trata de matematicas, en esta, se muestran los nombres de las potencias de diez, se exponen una serie de instrucciones para calcular ra ces cuadradas y cubicas de numeros enteros, seguidamente se muestran metodos para calcular areas y volumenes, de los cuales, un poco mas de la mitad estan dados en forma erronea. Sobresale una regla, la cual senalan con gran orgullo historiadores Hindues de la matematica, que es la siguiente²⁰:

Suma 4 a 100, multiplica por 8 y sumale 32.000. El resultado te da aproximadamente la circunferencia de un circulo cuyo diametro es 20.000.

Otra parte del Aryabhatiya es la que trata de progresiones aritmeticas, la cual contiene reglas para calcular la suma de los terminos de una progresion, y tambien para hallar el numero de terminos de la progresion, conocido el primer termino, la diferencia de la progresion y la suma de todos los terminos. No se presenta, como todo a lo largo del Aryabhatiya, alguna motivacion o justi cacion para esta u otras reglas tratadas en la obra. Se cree que la regla antes mencionada fue obtenida resolviendo una ecuacion de segundo grado, cuyo conocimiento podr a haber venido de Mesopotamia o de Grecia [8, pp. 273 - 275].

¹⁹Sulvasutras: Libros sagrados que constituyen el fundamento de la tradicion religiosa de la India.

²⁰Aryabhatiya. (p. 28). Citado por Boyer, Carl B. Historia de las Matematicas. 1986.

En este periodo se produjo en la India una importante transformación de la trigonometría [69, p. 78], se pasó de la trigonometría de cuerdas a la trigonometría de senos, este cambio tuvo implicaciones importantes en el desarrollo posterior, puesto que la relación entre lados y ángulos de un triángulo es especialmente fácil de formular con la trigonometría de senos. Todo esto condujo a resultados que hoy en día conocemos como teoremas generales, entre algunos están: el teorema del seno y del coseno de la trigonometría esférica. Fue así como la India se convirtió en el país de origen de la trigonometría moderna.

1.5.1. Sistema de numeración Hindu

No obstante a los resultados obtenidos en la geometría y trigonometría, la matemática hindu se caracterizó por su alto nivel de aritmética y álgebra. El aporte más importante a la matemática moderna, por parte de esta civilización, fue el invento del sistema decimal posicional de los números, el cual es utilizado actualmente.

La segunda mitad del Aryabhatiya habla de la medida y cálculo de tiempos y de trigonometría esférica, y es aquí donde se encuentra enmarcado el sistema de numeración posicional decimal. No se sabe exactamente la manera como Aryabhata efectuaba los cálculos, pero en su afirmación de que de un lugar a otro, cada uno es diez veces el que le precede, se observa que hay una clara indicación de aplicación del principio posicional. El significado de este sistema de numeración el cual pareciera hoy en día tan simple, no es apreciado como debería serlo. Su simplicidad subyace en el modo en el que facilitó el cálculo. En consideración a esto, la importancia del invento se aprecia con más facilidad cuando se considera que estaba mucho más allá que las ideas de dos de los mayores hombres de la antigüedad, Arquímedes y Apolonio [27, pp. 45 - 54].

Los hindus utilizaban nueve símbolos en su sistema de numeración, a diferencia de los diez utilizados en el sistema moderno, el símbolo, el cual no hizo referencia sino hasta dos siglos después de la aparición de este sistema, era el que denota al cero. Con la introducción de este décimo símbolo quedó completo el sistema de numeración que hoy en día conocemos, aunque las formas de los diez numerales son muy distintas a las que se usan hoy en día, el principio teórico fue lo que marcó el sistema que actualmente se usa en todo el mundo [67, pp. 23 - 25].

1.5.2. Educación en la antigua India

De igual manera que en el antiguo Egipto, la educación en esta cultura estaba en manos de los sacerdotes. Los hindus alcanzaron un enorme desarrollo educativo, sus centros educativos se hicieron tan famosos que muchos estudiantes de Asia, especialmente

chinos, iban a estudiar las enseñanzas de Buda. El más importantes de estos centros se encontraba en Nalanda (Figura 1.12²¹), centro que llevaba el mismo nombre de la ciudad. Excavaciones arqueológicas revelan que este centro educativo posea dependencias residenciales para albergar hasta diez mil alumnos, salas de conferencias, centros de meditación, dormitorios y escaleras.



Figura 1.12: *Universidad* de Nalanda.

La India extendió su dominio educativo al enviar a sus graduados *universitarios* a enseñar en distintos lugares de Asia. Sin embargo, a partir siglo XIII, primero bajo el control musulmán y después bajo el gobierno británico, la contribución de los indios a la educación se redujo y con ella la aplicación de métodos educativos novedosos²².

1.6. El Renacimiento

Este período, siglos XV y XVI, fue testigo de una gran revolución científica; donde la Tierra y de paso el hombre dejaron de ser el centro del Universo. En las matemáticas, se produjo el crecimiento de una de las ramas más importantes de esta ciencia, el Álgebra.

La astronomía fue clave en el progreso de las matemáticas y de las ciencias en general; puesto que las grandes exploraciones geográficas de la época se habían convertido en asuntos decisivos para los europeos y estas requieren mayor precisión en los cálculos astronómicos. Un ejemplo de esto se evidencia en las tablas trigonométricas, las cuales debieron ser mejoradas para ajustar las observaciones de la nueva teoría astronómica [53, p. 204].

²¹Tomado de: <http://sobreindia.com/2009/09/28/la-antigua-universidad-de-nalanda/>.

²²India. [En línea]. <http://www.nuevaalejandro.com/01/sanluisg/Conflictos/Pakind/India.htm> [citado en 21 de octubre de 2009].

A principios del siglo XVI las civilizaciones árabes e hindúes ya aceptaban el cero y los irracionales. En este mismo siglo, Cardano, Stevin, Pacioli y el alemán Stifel introdujeron nuevos tipos de irracionales. Vieta dio una excelente aproximación al número Π usando otras formas de irracionales. Entre algunos de los más influyentes matemáticos de la época se destacan Pascal y Barrow, quienes opinaban que números como $\sqrt{3}$ eran simplemente magnitudes geométricas, y acudían a la teoría de las magnitudes de Eudoxo para justificar las operaciones con ellos. Por el contrario Stevin, afirmaba que los irracionales eran números independientes, e incluso los aproximó por medio de números racionales, en esta misma dirección Wallis y Descartes llegaron a la afirmación que los irracionales eran números.

Algo parecido ocurrió con los números negativos. Entre los siglos XVI y XVII varios matemáticos, entre estos Stifel, afirmaban que estos números eran “absurdos”, Cardano obtuvo estos números en algunas ecuaciones, pero no los consideraba números, afirmaba que eran “absurdos y ficticios”. Vieta los descartó completamente. Mientras que Descartes si los aceptó, aunque solo en parte ya que al referirse a las raíces negativas las llamaba *Falsas*.

Cardano encontró raíces complejas en ecuaciones cuadráticas y cúbicas, pero fue Bombelli quien formuló las cuatro operaciones con los complejos que actualmente conocemos. Pero tanto Cardano como Bombelli consideraban que se trataba de algo sin utilidad y de naturaleza sofística. Mientras tanto, Descartes creía que estos números no eran verdaderos y dijo que eran “imaginarios” esta última expresión se quedaría como consignación de estos números. Sin importar lo que haya pasado, estos métodos algebraicos abrieron las puertas al estudio de lo que debía considerarse números, sin embargo este proceso tardó mucho tiempo para esclarecerse plenamente [53, pp. 206 - 207].

Uno de los más celebres investigadores de la época fue Leonardo Da Vinci, sus creaciones en el campo de la pintura determinaron la evolución del arte durante más de un siglo después de su muerte sus investigaciones científicas anticiparon muchos de los avances de la ciencia moderna. Los primeros intentos de una perspectiva matemática para representar en un plano objetos situados en el espacio tridimensional se hicieron a mediados del siglo XV en Florencia, desde ese instante la técnica para crear una realidad sólida sobre un lienzo se extendió por toda Europa. Pacioli en su obra “De divina proportione” estudiaba polígonos, poliedros regulares, y figuras que se atribuían a Da Vinci. Sin embargo y a pesar de sus dotes en la materia su forma inquieta de percibir la realidad le impidió ser un gran matemático [39, p. 22].

1.6.1. Educacion en el Renacimiento

Durante el Renacimiento, la educacion continuo con la estructura de la ensenanza medieval, organizada en funcion de las necesidades de la Iglesia de formar clerigos que deb an conocer el lat n. En general, la ensenanza era semejante en todos lados: el profesor le a y comentaba un manual y se acud a muy poco a las fuentes. Luego, los alumnos se dedicaban a la discusion de los temas planteados. En una misma aula hab a varios profesores con distintos grupos de alumnos. Para evitar esta superposicion se fue iniciando una distribucion de los alumnos segun su nivel de conocimiento, que con el correr del tiempo trajo como consecuencia la separacion de los alumnos por edades²³.

El renacimiento puso al hombre como punto de referencia para el arte, la literatura y el gobierno, hizo enfasis en el desarrollo integral del individuo, lo que provoco el interes por la educacion. Surgio el concepto de humanismo²⁴, la invencion de la imprenta estimulo la evolucion y expansion del conocimiento, lo cual causo un vuelco en la forma de fabricacion y disponibilidad de informacion impresa; los libros se encontraban a bajo costo lo que facilito que las personas desarrollaran su propio pensamiento cr tico y rechazaran el actuar de las autoridades.

El pensamiento pedagogico renacentista se caracterizo por tener una nueva mentalidad frente a la educacion. Michel de Montaigne quien fue uno de los losofos renacentistas mas in uyentes, critico duramente el estilo de educacion de su epoca, rechazaba la erudicion y la escolastica. Por esto, hoy en d a es considerado unos de los fundadores de la pedagog a de la Edad Moderna. Montaigne constantemente se lamentaba de que solo se trabajara con la memoria, dejando vac as la razon y la conciencia, deseaba un hombre exible y abierto a la verdad.

1.7. El Calculo

La palabra Calculo proviene del lat n calculus, que signi ca contar con piedras. Precisamente desde que el hombre ve la necesidad de contar comienza su historia. El Calculo constituye uno de los mas grandes logros intelectuales que ha conseguido el hombre en su historia. Una vez construido, la matematica nunca fue igual, el algebra, la aritmetica, la trigonometr a, entre otras, se situaron en una nueva perspectiva.

²³La Educacion en el renacimiento. [en linea]. http://grupos.emagister.com/documento/la_educacion_en_el_renacimiento/1012-4464. [citado en septiembre 17 de 2010]

²⁴Humanismo: de nido desde la losof a se trata de una condicion que enfatiza en la dignidad y el valor de la persona humana, considerandola como un ser racional capaz de practicar el bien y encontrar la verdad.

El origen del Cálculo se remonta a la geometría griega, en los cálculos de área y volumen que hizo Arquímedes en el siglo III a. C. Pero solo hasta el siglo XVII apareció el Cálculo como lo conocemos hoy en día, esto debido a distintas causas, entre otras, la falta de un sistema de numeración adecuado, el desarrollo del álgebra y la geometría analítica, que permitieron el tratamiento algebraico de las curvas, posibilitando el cálculo de tangentes, máximos y mínimos, entre otros. Esta rama de las matemáticas fue creada para resolver los principales problemas científicos del siglo XVII, cristalizó conceptos y métodos que el hombre buscaba dominar durante toda su historia. Se constituyó en una de las herramientas más poderosas en el estudio de la naturaleza y sus aplicaciones hicieron eco en muchos otros campos del conocimiento científico.

Matemáticos como Kepler, Cavalieri, Wallis y Descartes, fueron los primeros en emprender el largo camino que llevaría al descubrimiento del Cálculo, pero fue solo hasta 1680 que Isaac Newton y Gottfried Leibniz, de forma independiente, cristalizaron esta rama de las ciencias. Este último, publicó primero sus hallazgos, y curiosamente Newton reclamó la autoría de sus métodos. Este altercado alteró las relaciones entre los matemáticos ingleses y los de Europa continental durante más de un siglo. El desarrollo del Cálculo siguió durante el siglo XVIII con el trabajo de Bernoulli, Euler, Lagrange y otros. Fue en el siglo XIX, con el trabajo de Dirichlet, Cauchy, Weierstrass, Riemann, cuando sus fundamentos le dieron una base matemática sólida.

El Cálculo es la base de una de las ramas más importantes de la matemática actual: *el Análisis Matemático*. Está compuesto por dos partes muy asociadas entre sí: el Cálculo diferencial y el Cálculo integral. El primero fue desarrollado por Fermat, Barrow, Wallis y Newton, entre otros, con un argumento fundamental, el estudio de las funciones mediante series de potencias propuesto por Newton, especialmente a partir del teorema de Taylor. Esta rama del Cálculo estudia por ejemplo, la forma y rapidez con que se producen los cambios, los valores que deben tomar ciertas variables para que los resultados sean óptimos. Además de esto, aporta técnicas sencillas en el estudio de diferentes ramas de las ciencias como física, química, economía, entre otras, por ejemplo [41, pp. 15 - 18]:

- En geometría analítica; permite determinar las ecuaciones de la recta tangente y normal a una curva en un punto.
- En física; determinar la velocidad instantánea y la aceleración.
- En química; determinar la velocidad de reacción.
- En economía; determinar la tasa de variación.

Isaac Newton junto a Gottfried Leibniz comparten el crédito por el desarrollo del Cálculo integral y diferencial, pero fue Bernoulli, quien escribió el primer curso

sistemático de Cálculo integral en 1742, basado en los estudios realizados por Newton y Leibniz. Sin embargo, fue Euler quien llevó la integración hasta sus últimas consecuencias, de tal forma que los métodos de integración moderna alcanzaron prácticamente su nivel actual.

El Cálculo integral, es muy común en la ingeniería y en la matemática en general. Entre muchas de las aplicaciones están: la resolución del problema de determinar una función a partir de la información sobre la rapidez con que cambia, calcular el área de una figura encerrada por una curva, determinar el trabajo realizado por una fuerza variable, hallar volúmenes, entre muchas otras más.

A comienzos del siglo XIX Augustin Louis Cauchy, logró un enfoque lógico y apropiado del Cálculo; basó su visión solo en cantidades infinitesimales y el concepto de límite. Sin embargo, esta solución planteó un nuevo problema, el de la definición lógica de número real. Aunque la definición de cálculo de Cauchy estaba basada en este concepto, no fue sino el matemático alemán Julius W. R. Dedekind quien encontró una definición adecuada para los números reales, a partir de los números racionales, que todavía se enseña en la actualidad²⁵. De igual forma, estos estudios contribuyeron al descubrimiento de una serie de resultados de la teoría de las funciones especiales, como las funciones gamma y beta, el logaritmo integral y las funciones elípticas.

1.7.1. El Cálculo en la actualidad

A través del tiempo, el Cálculo se convirtió en el pilar fundamental de las matemáticas. Las aplicaciones de esta rama de las matemáticas son tan amplias que actualmente sería extraño que un científico, un ingeniero o un economista no se hubieran topado con él [11, p. 82]. El éxito del cálculo ha sido extendido con el tiempo a las ecuaciones diferenciales, al cálculo de vectores, al cálculo de variaciones, al análisis complejo, a la topología diferencial entre muchas otras como mostraremos en esta sección.

Newton inventó el Cálculo para explicar el movimiento de los planetas. En la actualidad, se usa para calcular las órbitas de los satélites y de las naves espaciales, predecir los tamaños de las poblaciones, estimar la rapidez con que se elevan los precios y en diversas áreas del conocimiento lo utilizan para crear modelos matemáticos que ayudan a entender el universo y el mundo que nos rodea.

El Cálculo junto a la invención del ordenador [42, p. 15], dio un gran impulso a ciertas ramas de las matemáticas, como el Análisis Numérico y las matemáticas finitas, generó nuevas áreas de investigación matemática como el estudio de los algoritmos,

²⁵Historia de la Matemática. [en línea]. <http://soko.com.ar/historia/Historiamatem.htm>. [citado en septiembre 19 de 2010].

se convirtió en una herramienta poderosa en campos tan diversos como la Teoría de Números, las Ecuaciones Diferenciales y el Álgebra Abstracta. Además, el ordenador permitió encontrar soluciones a muchos de los problemas matemáticos que no se habían podido resolver anteriormente.

Una de las aplicaciones menos conocidas del entorno de la Computación es la creación de software para la generación de otros aparatos que facilitan la tarea de otras personas no dedicadas al área de las matemáticas; por ejemplo, que haría un físico-matemático si no contara con un software que tenga como tarea primordial el cálculo de funciones matemáticas, o la graficación de estas mismas, la labor de este tipo de científicos se volvería muy tediosa, es por ello que en la actualidad se genera software como el Mathematica, Derive, Maple, Theorist, entre otros, los cuales pueden crear hermosas gráficas de objetos matemáticos, y además realizar muchos tipos de cálculos incluyendo integración y derivación simbólica [17, p. 10].

Gracias al Cálculo integral el desarrollo computacional ha alcanzado niveles tan altos que no nos hubiésemos imaginado a hace 10 años. Gracias a estos, el conocimiento matemático y tecnológico está avanzando más rápido que nunca. Entonces, ¿Qué sería del mundo actual sin la ayuda de las computadoras? Seguramente el nivel de desarrollo tecnológico no hubiera podido avanzar, no existiría Internet, por tanto, tendríamos que recurrir de nuevo a la mensajería para el envío de documentos, las reuniones habrían que convocarlas por teléfono o fax y probablemente las láminas y acetatos seguirían siendo la última tecnología para presentar una exposición.

Aunque el Cálculo se desarrolló para resolver problemas de física, su poder y exhibición lo ha hecho útil en muchos campos del conocimiento. Por ejemplo, las actuales aplicaciones del Cálculo diferencial incluyen investigaciones en muchas áreas como: la rapidez o tasa de crecimiento en un cultivo de bacterias, la predicción del resultado de una reacción química, la medición de los cambios instantáneos de una corriente eléctrica, la descripción del comportamiento de las partículas atómicas, la estimación de la reducción de los tumores con la radioterapia, la predicción de las ganancias y pérdidas económicas, el análisis de las vibraciones de un sistema dinámico, la determinación del número de pozos que hay que perforar en un campo de petróleo para lograr una producción más eficiente. Estas son tan solo algunas aplicaciones entre muchas que actualmente son utilizadas en la solución de diversos problemas.

El uso de la integral al igual que la derivada es igualmente amplio; es extraordinaria las numerosas aplicaciones que encontramos en la actualidad, como por ejemplo: en la ingeniería de Instrumentación y Control [46, p. 5], con frecuencia se presenta el problema de nivel de tanque o recipiente, y para solucionar este problema se lo puede hacer mediante el uso de la integral. En la Ingeniería en Hidrocarburos, un modelo matemático puede ayudar a la producción de gas natural. En la Medicina, modelos de propagación de enfermedades contagiosas. En la Informática, en proyectos que

involucran modelos matematicos complejos representados con ecuaciones integrales. Se aplica en el espacio, en armamentos, en calculos de ujos sangu neos, en el ujo de colorantes, en estudios angiometricos, en genetica, en problemas cardiovasculares y ahora con el avance ciberneticos, su uso y aplicacion se ha visto crecer de forma exponencial. Pero todo esto no se hubiese podido llevar a cabo sin la ayuda de lo que son precisamente las Ciencias de la Computacion, entre ellas, el Calculo, y especialmente el Calculo Integral.

1.7.2. Enseñanza del Calculo en la actualidad

Desde Egipto hasta nuestra era, la historia de la enseñanza de las matematicas se ha caracterizado por su modelo tradicional; modelo, que actualmente se encuentra fuertemente cuestionado por los limitados alcances de aprendizaje y comprension que deber an obtener los estudiantes en la actualidad. Para nadie es un secreto que los problemas, soluciones e intereses de los estudiantes de hoy en d a, no son los mismos que los de hace poco mas de 20 anos y menos cuando nos remontamos en la historia. Por esto, la enseñanza de las matematicas y en especial del Calculo, debe adaptarse a las necesidades de los estudiantes de ahora, situarse en la problematica e interes actuales, a n de capacitarlos y brindarles herramientas que esten mas acorde con la realidad del mundo.

Actualmente se reconoce que la problematica de la enseñanza y el aprendizaje de las matematicas y mas particularmente del Calculo, adquiere tintes muy particulares que conciernen a aspectos cognitivos (como se aprende), didacticos (como se enseña) y epistemologicos (como se concibe el saber a enseñar y aprender). Por lo tanto, es de esperarse que en el modelo tradicionalista, donde predomina lo repetitivo y se premia la mecanica, el estudiante adopte un papel pasivo durante el proceso de transmision del contenido y que su aprendizaje se evidencie mediante el dominio de esa estructura de conceptos y procedimientos rigurosamente organizados, aunque en mayor medida a traves de su habilidad para resolver ejercicios rutinarios de corte algor tmico y mecanicos que han sido disenados para facilitar al profesor la emision de una evaluacion [54, p. 361].

Robert y Speer [1, pp. 283 - 299], muestran una amplia revision de estudios a nivel mundial en los ultimos treinta anos con respecto a la enseñanza y aprendizaje en cursos de Calculo a nivel medio y superior de educacion. Estos re ejan elevados ndices de reprobacion, aprendizaje sin comprension y actitud negativa hacia el aprendizaje. De igual forma Artigue [2, pp. 97 - 140] hizo publica una realidad que para 1995 era dif cil de justi car frente a la problematica de enseñanza del Calculo: existe gran di cultad en lograr que los estudiantes muestren una comprension satisfactoria de sus conceptos y metodos y la enseñanza tradicional se protege en el aprendizaje de

prácticas algorítmicas y algebraicas que son a la vez el centro de la evaluación. Por su parte Cantoral y otros [9, p. 360] manifiestan que la estructura general del discurso matemático teórico constituye la base menos propicia para comunicar las ideas del Cálculo. Señalan que debe olvidarse que su enseñanza es para futuros usuarios del mismo y no para expertos en su discurso teórico, pero aclaran que no están a favor de técnicas como aligerar conocimientos o emplear rutinas.

Por lo tanto, el principal objetivo a lograr en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en la actualidad, es imponerse a la limitada comprensión de nociones y procedimientos que carecen de un norte; por esto, resulta evidente que este paradigma de enseñanza y aprendizaje debe ser reformulado; para lo cual, deben proponerse alternativas basadas en estrategias didácticas, y en el uso de herramientas tecnológicas que propicien un mayor interés en los estudiantes hacia el curso, así como involucrarlos en su proceso formativo y animarlos a descubrir y desarrollar nuevas habilidades en función del Cálculo.

Capítulo 2

Diseño Metodológico

La transformación de una comunidad es una tarea que corresponde principalmente a las instituciones educativas, estas deben ser las encargadas de formar a la persona y brindarle instrumentos que les permitan desempeñarse de la mejor manera dentro su entorno. Una pedagogía apropiada resulta ser indispensable cuando se quiere construir conocimiento, y a su vez formar individuos que sean capaces de desempeñarse en diferentes campos.

La educación a través de la historia, se ha visto influenciada por diferentes teorías y tendencias pedagógicas, como también lo ha hecho de una forma vertiginosa la ciencia y la tecnología. Si nos adentramos en los diferentes métodos pedagógicos utilizados en los procesos de enseñanza, encontramos que la pedagogía tradicional ha sido uno de los métodos más utilizados en la historia de la humanidad. Esta metodología trae consigo muchas ventajas, pues no en vano ha sido la encargada de formar un gran número de hombres de ciencia que han permitido alcanzar muchos de los logros que actualmente conocemos. Sin embargo, deja de lado muchos aspectos que hoy por hoy son de vital importancia en el desarrollo intelectual y colectivo que puede alcanzar un individuo. Por esta y otras razones, es de suma importancia brindar a nuestros alumnos nuevas opciones de enseñanza, que estén enfocadas al aprovechamiento y potenciación de los recursos creativos e intelectuales que cada uno de estos posee.

En este Capítulo se presentarán algunas corrientes pedagógicas vigentes en diferentes ámbitos educativos, empezando por las tradicionales, hasta llegar a la que se tomó como base para el desarrollo de este trabajo: La Enseñanza para la Comprensión EpC¹. Asimismo, la forma utilizada para recolectar la información de la aplicación del diseño metodológico que se expone, posteriormente el método estadístico utilizado para comprobar los alcances y el impacto producido al implementar el mismo. Se comenzará analizando algunas de las metodologías que se encuentran en el medio y posteriormente

¹EpC: Enseñanza para la Comprensión

presentaremos el método pedagógico utilizado para el desarrollo de este trabajo de investigación, la EpC.

2.1. Pedagogía tradicional

Remontándonos a la historia de la educación, y como se muestra en el Capítulo 1, se han encontrado restos arqueológicos que evidencian el tipo de enseñanza que utilizaban diversas civilizaciones. Al compararla con el tipo de enseñanza que se está impartiendo actualmente en gran parte de nuestros claustros, podemos observar grandes similitudes. En este tipo de pedagogía el docente transmite sus conocimientos de una manera mecánica, se premia el aprendizaje memorístico y repetitivo, los tópicos se muestran con poca innovación o estrategia, su única forma de enseñanza es por medio de un texto que conlleva a que el estudiante realice un aprendizaje poco reflexivo, crítico y analítico.

Actualmente, algunos docentes de matemáticas se basan en esta pedagogía y muestran resistencia a cambiar su estilo de enseñanza. Al impartir la instrucción en el aula de clase, los temas expuestos se presentan en forma aislada, con poca o ninguna relación con la cotidianidad. El estudiante se limita, la mayor parte del tiempo, a tomar apuntes durante el desarrollo de la clase, creando una base de información a partir de fórmulas, axiomas, teoremas, ejemplos, etc., dejando de lado la relación que tienen estos con el entorno en que se encuentra.

La educación impartida por medio de este tipo de enseñanza está encaminada a un resultado sin análisis y razonamiento, el docente brinda al estudiante información, la cual debe ser memorizada, propone una serie de tareas a realizar y califica estas utilizando, en general, un examen escrito. Este modelo de enseñanza, donde predomina lo repetitivo y memorístico, limita al educando en la construcción del conocimiento, el que debería estar basado en las necesidades propias de cada uno de ellos. En la pedagogía tradicional, la labor fundamental recae en el profesor a través de la explicación, se elige un conjunto de conocimientos y habilidades las cuales se desarrollan de modo empírico, por lo que no hay un desarrollo del pensamiento teórico-práctico del estudiante. El desarrollo del conocimiento es de carácter clasificatorio.

Esta pedagogía no considera el trabajo a largo plazo del estudiante, la evaluación del aprendizaje va dirigida al resultado, los ejercicios evaluativos son básicamente repetitivos, por lo que el énfasis no se hace en el análisis ni el razonamiento. En este modelo los objetivos están diseñados en forma narrativa y explicativa, están dirigidos más al trabajo del docente en el aula que a las acciones que el alumno debe realizar dentro y fuera de ella, no establece las habilidades que el alumno debe formar, lo que

hace que se aprecie más al profesor como sujeto del proceso de enseñanza que a los propios estudiantes.

El siguiente cuadro muestra las principales características con las que generalmente se identifica a la pedagogía tradicional y el papel del estudiante en cada uno de ellas.

PEDAGOGIA TRADICIONAL	
DOCENTE	ESTUDIANTE
Las actividades dentro y fuera del aula de clase giran en torno a él.	Su papel es pasivo, se considerado únicamente como receptor de conocimientos.
Lo más importantes son los contenidos de las materias o asignaturas.	El interés por descubrir nuevos conocimientos queda en un segundo plano.
El tipo de enseñanza es exclusivamente memorística y mecánica.	Se convierte en una persona sin capacidad crítica y aplicativa lo que conlleva a una pobre comprensión.
Se limita a evaluar por medio de exámenes. Su única finalidad es comprobar un conocimiento, o la obtención de una respuesta esperada.	No tiene la posibilidad de mostrar su comprensión por medio de otras actividades, limitando sus propias capacidades de construir conocimiento.
Todo el trabajo educativo se realiza dentro del aula de clase.	Se convierte en una persona que no soluciona problemas que se presenten en su entorno.
Se dirige al alumno promedio, sin considerar las diferencias individuales.	La comprensión de algunos estudiantes se puede ver relegada en comparación con otros.

Cuadro 2.1: Características de la metodología tradicional.

Es claro que esta tendencia desarrolla algunas habilidades importantes en cualquier proceso de aprendizaje, pero asimismo, carece de muchos aspectos en cuanto al nivel cognitivo y de praxis que debe alcanzar un estudiante, ya que se enfoca en el trabajo puntual del docente, sin preocuparse de la forma y procesos que intervienen en la asimilación y construcción de los conocimientos del alumnado.

2.2. La Escuela Nueva

Este movimiento pedagógico surgió a finales del siglo XIX, se caracterizó por su crítica a la pedagogía tradicional, al papel protagonista del maestro en la enseñanza, al autoritarismo del maestro, a la falta de interactividad, el formalismo con el cual se impartían las clases, al hecho de que la educación se ajustara a un manual escolar, la memorización y al trabajo mecánico.

Por el contrario, la escuela nueva defendió la idea de que la enseñanza debía fundamentarse en los intereses propios y necesidades de los alumnos, esta debía estar estrechamente relacionada con la práctica. La enseñanza no estaba centrada en el profesor, este ocupaba un papel de guía, los verdaderos protagonistas del aprendizaje eran los alumnos. El paidocentrismo² sustituye al magistrocentrismo³, se prescindía en lo posible de los libros, y la escuela se convierte en la vida misma, lo que incluye la convivencia⁴. A continuación se presentará a algunos de los más importantes representantes de esta teoría.

2.2.1. Planteamiento de John Dewey

Filósofo norteamericano fundador del pragmatismo⁵, su objetivo principal era el de enseñar a la persona a vivir en el mundo real. Los principios educativos que proponía era que el aprendizaje debía desarrollarse a través de actividades de diferente índole más que por medio de contenidos curriculares. Pensaba que lo ofrecido por el sistema educativo de su época no proporcionaba a los ciudadanos una preparación adecuada para la vida en sociedad. Además, consideraba que la educación no debía ser estrictamente una preparación para la vida futura, sino que debía proporcionar y tener pleno sentido en su mismo desarrollo y realización [19, p. 1].

Su pensamiento teórico se fundamentaba en que el alumno aprende a partir de la experiencia, por tanto, debe fomentarse, como una inclinación natural, el preguntar, explorar e indagar habitualmente⁶. En su teoría destacaba la necesidad

²Paidocentrismo: Tendencia pedagógica la cual presenta un fuerte énfasis en el desarrollo de las actividades orientadas hacia el conocer, descubrir, construir, expresar y recrear.

³Magistrocentrismo: Tendencia pedagógica en la cual el maestro es la base y condición del éxito de la educación. A él le corresponde organizar el conocimiento, aislar y elaborar la materia que ha de ser aprendida, trazar el camino y llevar por él a sus alumnos.

⁴Educación social. La escuela nueva. Tomado de: <http://meroka-educacionsocial.blogspot.com/2007/08/la-escuela-nueva.html>. [citado en enero 4 de 2010].

⁵Pragmatismo: Escuela filosófica nacida en los Estados Unidos a finales del s. XIX se caracterizó por la insistencia en las consecuencias como manera de determinar la verdad o significado de las cosas.

⁶Tomado de: <http://ceunikino.blogspot.com>. [citado en enero 4 de 2010].

de comprobar el pensamiento por medio de la acción si se quiere que este se convierta en conocimiento. Dewey considera cuatro etapas en el pensamiento humano⁷:

- **Etapa 1.** La experiencia. El alumno busca una situación real. Esta primera fase, tratándose de la enseñanza, debe ser lo más anti-escolar posible, pues se trata de estimular el pensamiento. La situación debe ser de una naturaleza tal, que se presente lo que es nuevo, pero ligado con los hábitos existentes para despertar una respuesta eficaz.
- **Etapa 2.** Los datos. Son extraídos por el alumno de su memoria, observación, lectura y comunicación; el pensador ha de disponer de recursos y estar habituado a revisar sus experiencias pasadas para ver lo que le ofrecen. El material del pensar no son los pensamientos, sino las acciones, los hechos, los sucesos y las relaciones de las cosas. En otras palabras... debemos haber tenido u obtener ahora experiencias que nos ofrezcan recursos para vencer la dificultad que se presenta. Una dificultad es un estímulo indispensable para pensar; pero no todas las dificultades provocan pensamiento [13, p. 171].
- **Etapa 3.** La constituyen las ideas. Estas se convierten en la base creadora, la cual juega un rol muy importante, que tiene como fin construir pensamientos originales que lleven a plantearse nuevos y diferentes interrogantes, que a su vez permitan al estudiante buscar soluciones por sus propios medios, todo esto trascendiendo del hecho de que solo el que descubre piensa, lo demás es almacenar información.
- **Etapa 4.** Aplicación y comprobación. Debe ser el alumno el encargado de labrarse su propio pensamiento. A través de métodos y aplicaciones es él, quien construye, muestra y proporciona significados a sus propios interrogantes. Los pensamientos, precisamente como pensamientos, son incompletos. En el caso mejor, son como tentativas; son sugerencias, son indicaciones, puntos de vista y métodos para tratar las situaciones de la experiencia. Hasta que se aplican a estas situaciones carecen de pleno sentido y realidad. Solo la aplicación los comprueba y solo la comprobación les confiere pleno significado y un sentido de su realidad [13, p. 176].

Dewey pedía a los maestros que integraran la psicología en el programa de estudios, con el fin de buscar y construir un entorno en el que las actividades del alumno se confronten con situaciones problemáticas, en las que necesiten conocimientos teóricos y prácticos para resolverlas [65, pp. 289 - 305].

⁷El Experimentalismo de John Dewey. Unidad 4. Tomado de: www.ua1.edu.mx/Biblioteca/TeoriasEducativasII/Pdf/Unidad04.pdf. [citado en enero 4 de 2010].

Características del método educativo de Dewey

Entre las principales características del método de Dewey se destacan:

- **Aprender haciendo.** Por lo cual el saber adquirido en los libros deben llevarse a una experiencia real.
- **El alumno.** Debe tener una experiencia directa, es decir, una actividad en la que este interesado. Se debe hacer énfasis en el problema, buscando siempre, que el estudiante sea el encargado de encontrar sus propias soluciones.
- **El ambiente.** Se deben buscar diferentes espacios en los cuales el estudiante pueda demostrar sus avances, buscando que los problemas y soluciones que surjan, sean desarrolladas de un modo ordenado.
- **El maestro.** Su papel se reduce a ser un guía, no una persona que transmita conocimientos y que garantice que estos sean asimilados, ni tampoco un dirigente en sí del proceso de enseñanza.

A continuación se muestra un paralelo entre el método de Dewey y el Tradicional.

DEWEY	TRADICIONAL
El estudiante construye su propio conocimiento a partir de una experiencia real.	La única experiencia que adquiere el estudiante se basa en seguir un texto y realizar una serie de ejercicios propuestos por el maestro.
El surgimiento de problemas a partir de la experiencia, resulta un estímulo para el pensamiento.	El pensamiento del estudiante se ve limitado debido a las pocas herramientas de enseñanza que se le ofrece.
El estudiante investiga y propone soluciones a los problemas de un modo ordenado.	La investigación por parte del estudiante se limita a las tareas o trabajos designados por el maestro.
El alumno tiene la oportunidad de demostrar sus ideas y a descubrir por sí mismo la validez.	El demostrar los conocimientos se restringe estrictamente a un examen.
El maestro se convierte en un guía a través del proceso de enseñanza y de aprendizaje.	El maestro es quien prepara y dirige los ejercicios de forma que se desarrollen según el lo crea necesario.

Cuadro 2.2: Método de Dewey versus el tradicional.

Entre muchas de las ventajas que tiene esta metodológica sobresale la libertad que tiene el estudiante de presentar sus conocimientos con base a un problema formulado

por el mismo, lo que lleva a desarrollar en él, un pensamiento autocrítico y reflexivo, fomentando así un verdadero conocimiento que se basa en experiencias adquiridas por sí mismo.

2.2.2. María Montessori

Sus padres la estimularon para que fuera maestra, puesto que esta era la única carrera a la que podían aspirar las mujeres en esa época, desde muy joven se interesó primero por las matemáticas y luego por la biología, más tarde en 1896, se graduó de la Escuela de Medicina de la Universidad de Roma.

En 1901 se convirtió en directora de una clínica psiquiátrica asociada a la Universidad de Roma dedicada al cuidado de niños con retrasos mentales. Allí estudió la condición de los niños con los que trabajaba. Llegó a la conclusión que más que un problema médico, las deficiencias mentales que tenían estos niños se debían a un problema pedagógico. Montessori puso en práctica sus teorías sobre el desarrollo y la educación del niño, logrando así lo que más tarde se conoció como el primer milagro Montessori: un grupo de 8 niños del Instituto tomaron el examen oficial de aptitud en lectura y escritura para niños normales de su misma edad y lo pasaron con notas por encima del promedio. Este resultado, llevó a Montessori a reflexionar sobre el estado en el cual se encontraba la educación general⁸:

En tanto que todo el mundo admiraba el progreso de mis idiotas⁹, yo buscaba las razones que mantenían a los niños de las escuelas comunes y corrientes en un nivel tan bajo, que podían ser igualados en los exámenes de inteligencia por mis desafortunados alumnos! Llegué a convencerme de que métodos similares aplicados a niños normales, desarrollarían o liberarían su personalidad en una forma sorprendente y maravillosa

Esto llevó a Montessori a dedicarse al campo de la educación de tiempo completo, regresó a la universidad de Roma a estudiar filosofía, psicología, educación y antropología.

Entre 1899 y 1901 fue nombrada directora de la escuela estatal Ortofrenia, fue allí donde se encargó de capacitar a maestros en los métodos especiales de observación y de educación de niños con retraso mental. Durante este tiempo, en el cual Montessori se ocupó de estos niños, le dieron lo que ella consideró como su verdadero título de

⁸Fundación Argentina María Montessori. Tomado de: <http://www.fundacionmontessori.org/Maria-Montessori.htm>

⁹El término idiota era comúnmente usado para referirse a personas discapacitadas.

pedagoga. A partir de esto, se convirtió en lo que sus padres pretendían ser para ella, una maestra, pero una maestra diferente a las tradicionales.

Desde 1909 el método Montessori se empezó a usar en los albergues para huérfanos y hogares infantiles. Para 1911 su método se convirtió en el sistema oficial de educación en países como Italia y Suiza. Hoy en día aun permanece vigente el modelo pedagógico desarrollado por Montessori [38, pp. 149 - 171].

Metodo Montessori

Según Montessori, los niños absorben como *esponjas* todas las informaciones que requieren y necesitan para su actuación en la vida diaria. El niño aprende a hablar, escribir y leer de la misma manera que lo hace al gatear, caminar, correr, etc, es decir, de forma espontánea.

En las escuelas tradicionales la educación se imparte de manera frontal. El maestro se dirige a los estudiantes de manera grupal, por lo que el avance en el tema de estudios es colectivo. Al ser de esa forma, algunos niños quedan con lagunas y por tanto relegados en su educación. En las escuelas Montessori, en cambio, la meta de la educación es cultivar el deseo natural de aprender.

El maestro es el encargado de guiar al estudiante, desempeña un papel de guía, con el propósito de proponer cambios y/o novedades. El error o equivocación, hace parte del aprendizaje, por tal razón no es castigado, resaltado o señalado, sino que por el contrario, valorado e interpretado como una etapa del proceso de enseñanza.

Los principios básicos de la Pedagogía Montessori son: la libertad, la actividad, individualidad, el orden, la concentración, el respeto por los otros y por sí mismo, la autonomía, la independencia, la iniciativa, la capacidad de elegir, el desarrollo de la voluntad y la autodisciplina. Esta pedagogía inspirada por el humanismo integral, postula la formación de los seres humanos como personas únicas y plenamente capacitadas para actuar con libertad, inteligencia y dignidad. Para el desarrollo de esta metodología se debe tener presente los siguientes elementos:

El ambiente preparado. Este debe ser elaborado cuidadosamente, con el fin de ayudarlo al estudiante a expresar sus ideas y potenciar su aprendizaje. Algunas de las características que debe tener son:

- **Proporcionado.** A las dimensiones del estudiante.
- **Limitado.** El ambiente se encarga de ayudar y propiciar en el estudiante nuevos conocimientos, lo ayuda a ordenar sus ideas y aclarar su mente.

- **Sencillo.** En la calidad de las cosas, debe haber lo suficiente y necesario, no debe excederse puesto que esto puede favorecer falta de concentración.
- **Espacio al error.** El poder darse cuenta del error lleva al niño a un razonamiento cada vez mayor, lo cual es necesario para lograr una verdadera comprensión.

El Entorno. Las aulas son lugares amplios y luminosos, rodeados de naturaleza (plantas y flores). El principal objetivo de estos ambientes es el de estimular el deseo del conocimiento, la independencia, y la confianza del niño.

En este ambiente, los niños son libres de escoger sus propios materiales y actividades, como en el método Montessori: El niño debe estar libre, para ser de verdad un amo de su ser, él debe estar libre para tomar sus decisiones y hacer sus descubrimientos aprendiendo por sí mismo.

El material. El material utilizado debe cubrir todas las áreas de estudio. El material es natural, atractivo, progresivo y con su propio control de error. Facilitar gran variedad de materiales implicará brindar bases sólidas a todas las habilidades e inteligencias del alumno. Los materiales deben ser distribuidos en diferentes áreas a las que los niños tienen libre acceso y en donde pueden elegir la actividad que quieren realizar.

Los materiales son elaborados cuidadosamente, adecuados al tamaño de los niños, todos y cada uno de ellos, tienen un objetivo específico de aprendizaje. Estos exigen movimientos dirigidos por la inteligencia hacia un fin de nido y constituyen un punto de partida entre la mente del niño y una realidad externa, permitiéndoles realizar gradualmente ejercicios de mayor dificultad [59, pp. 5 - 12].

El siguiente cuadro muestra algunas comparaciones entre el método Montessori y el tradicional.

MONTESSORI	TRADICIONAL
Enfasis en estructuras cognoscitivas y desarrollo social.	Enfasis en conocimiento memorizado y mecanico.
El maestro desempeña un papel sin obstaculos en la actividad del salon. El rol del alumno es activo en el proceso de ensenanza y de aprendizaje.	El maestro desempeña un papel autoritario y activo en la actividad del salon. El alumno es un participante pasivo en el proceso ensenanza aprendizaje.
Los Estudiantes son motivados a enseñar, colaborar y ayudarse mutuamente	La ensenanza la hace el maestro y no se motiva el trabajo en grupo.
El alumno escoge su propio trabajo de acuerdo a sus intereses y habilidades.	La estructura curricular se enfoca mas hacia el trabajo del docente, con poco o ningun enfoque hacia el interes del estudiante.
El alumno expone sus propios conceptos a partir de sus propias experiencias.	El maestro entrega los conceptos al estudiante directamente.
El niño descubre sus propios errores a traves de la retroalimentacion del material.	Si el trabajo es corregido, los errores son usualmente senalados por el maestro.
El aprendizaje es reforzado internamente a traves de la repeticion de una actividad, de la misma forma recibe alientos con el proposito incentivarlo en su proceso de ensenanza aprendizaje.	El aprendizaje es reforzado externamente por el aprendizaje de memoria, repeticion, recompensa o desaliento.

Cuadro 2.3: Metodo Montessori versus el tradicional.

Este metodo resulta ser un enfoque distinto de lo que es la educacion en la gran mayor a de nuestros claustros educativos. Busca que el estudiante desarrolle todos sus potenciales a traves de la interaccion con un ambiente previamente dispuesto, rico en materiales e infraestructura. En este modelo educativo, el desarrollo del aprendizaje no tiene obstaculo alguno, los estudiantes tienen la oportunidad de aprender todo lo que quieran, desean y requieran de modo dinamico, divertido e interesante, siempre basado en su propia motivacion.

2.2.3. Juan Jacobo Rousseau

Sus planteamientos referentes a la educación están dentro de un proyecto humanístico que buscaba rescatar en el hombre aquello que perdió al convertirse en un ser social: su libertad. Según Rousseau la educación se recibe en tres instancias:

- **Naturaleza.** A través del desarrollo interno de nuestras facultades.
- **Hombres.** A través de sus enseñanzas, que nos muestran como utilizar lo que nos ha dado la naturaleza.
- **Cosas.** Según nos relacionemos con ellas.

Cada una de ellas tienen una meta en común: como hacer que el hombre viva en sociedad, guardando sus características naturales, en especial su igualdad y su libertad? [51, p. 1].

Rousseau concebía la educación como una cuestión previa a toda reforma social. Según él, el estudio cuidadoso de la naturaleza y sus procesos podrían conducir a objetivos de vida apropiados, y es en la naturaleza del hombre el cumplimiento de la meta de la naturaleza [31, p. 205].

Para Rousseau, el niño al nacer solo tiene la capacidad de aprender a través de la experiencia. La educación debe ser el instrumento mediante el cual debe desarrollar todas las habilidades que este posee. El maestro resulta ser un modelo y guía, a la par que un compañero y amigo cuyo principal objetivo es formar a un hombre racional.

La imagen del maestro debe ser de prudencia, sencillez y mesura, inagotablemente dueño de sus actos, que no se lamenta por las incomodidades que sufre a causa de la formación de sus alumnos y tampoco enaltece sus servicios, con el ánimo de obtener gratitud. Para encaminarse a esta gratitud y valoración de la educación de los hombres, el maestro ha de tener la habilidad de hacer creer al alumno que él es el dueño, cuando en verdad la situación es otra, como sostiene Rousseau: «siguiendo un camino opuesto al de vuestro alumno; crea el que siempre es el amo, sedlo vosotros de verdad. No hay sujeción tan completa como la que presenta las apariencias de la libertad, porque así esta cautiva la voluntad misma» [51, p. 4].

La relación entre maestro y alumno debe ser de plena confianza. Si entre maestro y alumno es posible crear una relación en la que medie el ejemplo, la amistad y el respeto mutuo, se garantiza un ambiente que marcará no solo la formación de valores sino también la relación con el conocimiento.

El libro *El Emilio*

Es una de las obras literarias más importantes y destacadas de Rousseau, llena de un gran contenido pedagógico, en la que propone una serie de pautas y principios educativos. En esta obra el rechazo que tenía hacia las costumbres tradicionalistas de enseñanza hacia los niños. Esta obra se divide en 5 libros de los cuales se hará una breve reseña a continuación.

Libro I. En este primer libro, Rousseau muestra lo que será su alusión a lo largo de toda la obra: seguir a la naturaleza. Esta primera parte se desarrolla en base a un modelo de educación para el niño hasta los 5 años, basada en sensaciones y experiencias no represivas con el ambiente, es decir, el niño no tiene límites que partan de las voluntades sociales de los adultos (los hábitos) ni del proteccionismo paterno, sino que el niño llegue a tener el control de las decisiones (caprichos) [24, p. 2].

Rousseau expone, tres tipos de educación: la educación de la naturaleza (desarrollo de nuestros órganos y de nuestras facultades innatas), la educación de los hombres (el uso que, de los mayores, aprendemos a darles a nuestros órganos y facultades), y la educación de las cosas (la experiencia que tenemos de los objetos que nos afectan). La primera educación no depende de nosotros, pues está determinada desde el nacimiento. La tercera está sujeta, en mayor o menor grado, al azar. La segunda, en cambio, es el campo propio de la labor del maestro, y depende plenamente de la relación que se establezca entre el preceptor y su alumno [35, p. 76].

Libro II. Se enfoca en la niñez, desde que el niño comienza a hablar hasta que tiene unos doce años. Hace énfasis en la educación integral del niño a través de los sentidos (oído, gusto, olfato, de las habilidades motrices, del lenguaje...). El maestro continúa formando a Emilio en las necesidades naturales. En este momento la educación física y los juegos (jugar, correr, saltar, nadar...) son los ejes de la educación del niño proporcionándole experiencias para un posterior desarrollo de su inteligencia en un entorno de libertad y diversión. La educación intelectual debe partir siempre de un interés sensible, y ha de excluirse cualquier sistema teórico que solo confundir a al niño [35, p. 76].

Libro III. De los 12 a los 15 años, se busca despertar la curiosidad de Emilio hacia conocimientos más complejos e intelectuales (matemáticas, astronomía, física...). Estos deben darse según el principio de la utilidad, y así se hace igualmente oportuno el aprendizaje de los fundamentos científicos de los diversos saberes. En este proceso, el maestro enseña a Emilio a trabajar no solo por necesidad, sino también por utilidad, resalta la importancia de contrastar en la experiencia aquello que se va adquiriendo, y a reflexionar sobre ello en base a sus propios juicios [35, p. 77].

Libro IV. En este libro se toca la etapa de la adolescencia de Emilio entre los 15

y 20 años. La educación se caracteriza en torno a los valores, la amistad, respeto y tolerancia, partiendo de la experiencia o de historias cuando estas fuesen enganosas. En este ciclo, la educación por utilidad abre paso a la educación por la razón, Emilio se encuentra en condiciones de leer lo que se le antoje, pues será capaz no solo de comprender, sino también de juzgar los libros con propiedad. Será capaz de extraer de ellos todo lo que considere útil y conveniente, y no se dejará dominar por falsos razonamientos ni falsos prejuicios. Gracias a la razón, Emilio aprenderá a moderar sus pasiones, y se irá preparando para hacerse dueño de sus propios actos [35, p. 77].

Libro V. Se enfoca en la vida adulta de Emilio de los veinte a veinticinco años. Aparece en escena una joven de nombre Sofía, quien se convertirá en la futura compañera de Emilio. Por prejuicios de la época, Rousseau le da menor importancia a la formación intelectual de Sofía y prefiere para ella una instrucción moral más severa. Por esto, el análisis de la educación de la mujer se orienta hacia su papel de madre, esposa en el hogar, recatada, fiel y honesta [35, p. 77 - 78].

El siguiente cuadro muestra algunas comparaciones entre la pedagogía de Rousseau y la tradicional.

ROUSSEAU	TRADICIONAL
La enseñanza se fundamenta en la práctica.	Predomina el tipo de enseñanza memorístico.
La educación se basa en adquirir conocimientos por medio de la experiencia propia.	La disciplina y los ejercicios escolares son suficientes para desarrollar las virtudes humanas en los alumnos.
El alumno es el encargado de razonar y decidir por sí mismo.	El alumno no razona, el encargado de hacerlo es el maestro.
El papel del maestro debe ser de guía, donde sobresale su prudencia, sencillez y mesura.	El maestro es el modelo y el guía, al que se debe imitar y obedecer.

Cuadro 2.4: Método Rousseau versus el tradicional.

Para Rousseau el no imponer al niño aprendizajes de tipo memorístico, no significa que sus capacidades naturales permanezcan inactivas. Por el contrario, observar las acciones de los hombres, sus discursos y todo cuanto se acerca a él constituye el libro con que, sin pensar en ello, continuamente enriquece su memoria hasta tanto que lo pueda aprovechar su razón [51, p. 3], ya que esta y el interés van estrechamente unidos. Pero la educación tradicional, aquella la cual critica Rousseau para el alumno, olvida hacer razonar al alumno, raciocina el maestro por el alumno y solo ejercita la memoria

del niño.

2.3. El Constructivismo

Cuando se habla de la formación integral de una persona, la educación hace parte fundamental de esta. Los claustros educativos y por tanto sus maestros son los encargados de dotar de instrumentos y herramientas que permitan al alumno un excelente desempeño en su vida y por consiguiente personas que le aporten significativamente a una sociedad. Si lo que se busca es educar al individuo para que se desempeñe en un mundo que está en constante cambio, resulta inadecuado educar en y para la repetición, lo que se requiere es fomentar la actividad y autonomía creativa y reflexiva del estudiante.

Los trabajos de investigaciones pedagógicas y didácticas que se han desarrollado en los últimos tiempos, en el área de las ciencias, han tomado como fundamento y punto de partida lo que ha sido denominado como constructivismo. Este plantea: para lograr un verdadero conocimiento el estudiante debe interactuar con el mundo que lo rodea, lo que conlleva a construir nuevas experiencias, con el fin de lograr un mayor nivel de complejidad, diversidad e integración frente al mundo. En otras palabras, el estudiante es el encargado de construir su propio conocimiento, conforme el interactúa con su entorno.

Como plantean Granell y Coll: el conocimiento no es el resultado de una mera copia de la realidad preexistente, sino de un proceso dinámico e interactivo a través del cual la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente que va construyendo progresivamente modelos explicativos cada vez más complejos y potentes [23, p. 221]. Para lograr la construcción del conocimiento, el maestro debe crear escenarios de aprendizaje individual y grupal, con el propósito de fomentar las relaciones interpersonales del estudiante y del grupo en un contexto social establecido. Mediante la creación de estos escenarios, el docente desarrolla una enseñanza indirecta, donde el énfasis se hace en la actividad y comunicación, favoreciendo así el desarrollo intelectual y la autonomía del que aprende.

El maestro se convierte en un mediador entre el alumno y el contenido de enseñanza. Su papel no consiste en transmitir información, hacerla repetir y evaluar su retención; pero sí, en crear una atmósfera de respeto y tolerancia, en la que cada uno construye su conocimiento, mediante situaciones que se caracterizan por sus problemas y conflictos cognoscitivos, posibles de solucionar y generadores del desarrollo [46, p. 6].

Según Jean Piaget, quien fue uno de los más destacados pedagogos constructivistas, el conocimiento es un antes, que se desarrollara de manera posterior, siempre y cuando

existan las condiciones para construir dicho conocimiento, el cual se desarrollara o no de manera posterior, segun la interacciones que la persona mantenga con el objeto de conocimiento. En definitiva, el mundo, es el producto de la interaccion humana con los estmulos naturales y sociales que hemos alcanzado a procesar desde nuestras operaciones mentales. Segun Piaget el constructivismo debe ser [45, p. 3]:

- Una pedagogía centrada en el alumno.
- El alumno es el referente principal del trabajo pedagógico.
- Una pedagogía diferenciada, cada alumno, posee características individuales, culturales y una experiencia de vida diferente, que debe ser considerada, a la hora de aprender.

En resumen, la enseñanza y el aprendizaje constructivista se basa en procesos de investigación participativos, que están ligados a experiencias e intereses propios de cada estudiante. Esta pedagogía aplicada de manera adecuada, garantiza el mejoramiento y el rendimiento académico del estudiante. Además, propicia el desarrollo cognitivo y metacognitivo en el alumnado, beneficiando el desarrollo socioafectivo que hoy por hoy es de suma importancia para la convivencia en sociedad.

2.3.1. Enfoques Constructivistas

Tal como ocurre con muchas teorías y métodos aplicativos a la ciencia, el constructivismo se divide en diferentes ramas del conocimiento, que mantienen ciertas diferencias de enfoque y contenido. A continuación se describirán las más relevantes e importantes de estas.

Constructivismo radical

Esta tendencia constructivista surgió hacia mediados del siglo XX, desde su aparición, se ha convertido en uno de las más influyentes en los medios académico-educativos. Afirmación: la realidad no se encuentra fuera de quien la observa, sino que es construida por el aparato cognitivo del hombre [36, p. 2]. Sostiene que el sistema nervioso no puede distinguir entre la percepción y la alucinación, ya que ambos son simples patrones de excitación nerviosa. Segun esta visión, el individuo es el único responsable de sus pensamientos, su conocimiento y de sus acciones. En esencia, el conocimiento no es más que una propuesta que responde a una forma de situarse frente a la experiencia,

en el cual el individuo no recibe pasivamente el conocimiento sino que lo construye activamente.

Segun Glaserfeld [68, p. 25], los principios fundamentales del constructivismo radical son:

- El conocimiento no se recibe pasivamente, ni a traves de los sentidos, ni por medio de la comunicacion, sino que es construido activamente por el sujeto cognoscente.
- La funcion del conocimiento es adaptativa, en el sentido biologico del termino, tendiente hacia el ajuste o la viabilidad.
- La cognicion sirve a la organizacion del mundo experiencial del sujeto, no al descubrimiento de una realidad ontologica objetiva.

Este tipo de Constructivismo, segun von Glaserfeld¹⁰, es una corriente que rechaza la idea segun la cual, lo que se construye en la mente del que aprende es un reflejo de algo existente fuera de su pensamiento. Se trata de una concepcion que niega la posibilidad de una transmision de conocimientos del profesor al alumno, ya que ambos construyen estrictamente sus significados.

Constructivismo social

Lev Semionovich Vygotsky quien fue el maximo exponente y precursor de esta teoria constructivista, considera¹¹: El hombre es un ser social por excelencia, que aprende por influencia del medio y de las personas que lo rodean; por lo tanto, el conocimiento mismo es un producto social [50, pp. 2 - 6]. Para Vygotsky, son cinco los conceptos fundamentales a tener en cuenta para el desarrollo de esta teoria: las funciones mentales, las habilidades psicologicas, la zona de desarrollo proximo, las herramientas psicologicas y la mediacion.

Funciones Mentales. Para Vygotsky existen dos tipos de funciones mentales: las inferiores y las superiores. Las inferiores, esencialmente son aquellas con las que nace el individuo, son las funciones naturales y estan determinadas geneticamente. Mientras que las funciones mentales superiores se adquieren y se desarrollan a traves de la interaccion social.

¹⁰El Constructivismo como modelo pedagogico. [en linea]. <<http://www.colombiaaprende.edu.co>>. [citado en febrero 20 de 2010].

¹¹El Constructivismo social de Vygotsky. [en linea]. <<http://enfoqueducacional.wordpress.com>> [citado en febrero 20 de 2010].

Habilidades Psicológicas. Las funciones mentales superiores se desarrollan en dos etapas. En la primera, las habilidades psicológicas, las cuales se manifiestan en el ámbito social, y en la segunda, en el ámbito individual. La memoria, la observación, la representación de conceptos y teorías son primero un fenómeno social que gradualmente se transforman en una propiedad del individuo. Cada función mental superior, primero es social, es decir, primero es interpsicológica y después es individual, personal, es decir, intrapsicológica.

Zona de desarrollo próximo. El potencial que las personas tienen para desarrollar habilidades psicológicas en un primer instante, dependen del ambiente que lo rodea. Este potencial se logra a través de la interacción que el individuo tiene con las demás personas, Vygotsky lo llama *zona de desarrollo próximo*.

La zona de desarrollo próximo es la posibilidad que tienen los individuos de aprender en un ambiente social. Nuestro conocimiento y la experiencia de los demás es lo que posibilita el aprendizaje; por lo tanto, mientras más interacción se tenga con las demás personas, nuestro conocimiento será más rico y amplio.

Herramientas Psicológicas. Las herramientas psicológicas son el puente entre las funciones mentales inferiores y las superiores, y dentro de estas, el enlace entre las habilidades interpsicológicas (sociales) y las intrapsicológicas (personales). Nuestra capacidad de pensar, sentir y actuar depende de las herramientas psicológicas que usamos para desarrollar esas funciones mentales superiores, ya sean interpsicológicas o intrapsicológicas.

La Mediación. El ser humano, en cuanto sujeto que conoce, no tiene acceso directo a los objetos; el acceso es mediado a través de las herramientas psicológicas, de que dispone, y el conocimiento se adquiere, se construye, a través de la interacción con los demás, mediadas por la cultura, desarrolladas históricamente y socialmente.

Constructivismo Piagetiano

Esta teoría constructivista que lleva el nombre de su autor, Jean William Fritz Piaget, tiene como principal premisa: el individuo, mediante actividades físicas y mentales que desarrolla en su entorno, crea un ambiente en el cual se propicia de manera significativa su propio aprendizaje. Luego, el conocimiento adquirido no se encuentra en las cosas ni en nosotros mismos, este es el resultado de un proceso en el cual participa de forma activa la persona con el ambiente que lo rodea. Esta teoría hace mayor énfasis en la importancia del proceso interno de razonar, que a la manipulación externa en la construcción del conocimiento; si bien, reconoce la influencia que hay entre la experiencia de los sentidos y de la razón, es el sujeto quien construye su propio conocimiento.

Los trabajos basados en esta teoría se han centrado fundamentalmente en estructuras y operaciones de carácter lógico, que conllevan al estudiante de una mayor capacidad intelectual y, por tanto, le permiten una mayor aproximación a objetos de conocimiento más complejos. Para Piaget [23, p. 16], el proceso de construcción del conocimiento, es fundamentalmente interno e individual, el alumno es quien lo construye, si no se presenta una actividad mental propia, que obedezca a necesidades vinculadas al desarrollo evolutivo, el conocimiento no se produce.

2.3.2. David Ausubel y el aprendizaje significativo

David Ausubel es considerado uno de los autores más importantes y representativos de las teorías de aprendizaje moderno. El aprendizaje significativo de Ausubel es una propuesta en la que el trabajo escolar está diseñado para superar el memorismo tradicional de las aulas y lograr un aprendizaje más integrador, comprensivo y autónomo. Ausubel define el aprendizaje significativo como un proceso a través del cual la tarea de aprendizaje puede relacionarse de manera no arbitraria y sustantiva con la estructura cognitiva de la persona que aprende [66, p. 21]. Ahora, con la inclusión de nuevas tecnologías en el aula se busca favorecer un aprendizaje de carácter interactivo, en el cual los implicados en el proceso encuentren nuevos y diferentes medios para desarrollar conocimiento.

El aprendizaje significativo surge cuando el alumno, como principal actor de su propio conocimiento, relaciona y aplica los conceptos a aprender y les da un sentido a partir de la estructura de conocimientos que ya posee. Es decir, construye nuevos conocimientos a partir de los que ha adquirido anteriormente porque quiere y está interesado en ello.

Se puede considerar este aprendizaje como una teoría psicológica que se ocupa de los procesos mismos que el individuo pone en juego para aprender. Pero desde esa perspectiva [3, p. 1] no trata temas relativos a la psicología misma ni desde un punto de vista general, ni desde la óptica del desarrollo, sino que pone el énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprenden, en la naturaleza de ese aprendizaje, en las condiciones que se requieren para que este se produzca, en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación.

Esta teoría aborda todos los elementos, factores, condiciones y tipos que garantizan la adquisición, la asimilación y la retención del contenido que la escuela ofrece al alumnado, de modo tal que adquiera significado para el mismo, como afirma Palmero M. [49, p. 1], si lo que se quiere es lograr un verdadero aprendizaje significativo, es necesario que el individuo tenga predisposición y receptividad a construir nuevos conocimientos.

Las ideas, premisas, conceptos o conocimientos con los que dispone el alumno, es lo que proporciona un significado a un nuevo contenido, no se trata de una simple unión de conocimientos, sino que es un proceso en el cual los nuevos contenidos adquieren nuevos y diferentes significados para el sujeto [49, p. 4]. Se produce una interacción profesor, aprendiz y materiales educativos en la que se definen las responsabilidades correspondientes a todos y cada uno de los protagonistas del evento educativo. El Cuadro 2.5 muestra un paralelo entre el aprendizaje significativo de Ausubel y el aprendizaje tradicional.

APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	TRADICIONAL
Favorece el poder alcanzar nuevos y diversos conocimientos relacionados con los adquiridos anteriormente, ya que al estar claros en la estructura cognitiva, facilita la retención del nuevo conocimiento.	El alumno no realiza un esfuerzo para integrar los nuevos conocimientos con los ya adquiridos.
La nueva información al ser relacionada con la anterior, es guardada en la memoria a largo plazo.	Al priorizarse un aprendizaje repetitivo y mecánico, el conocimiento adquirido tiende a olvidarse rápidamente.
El docente orienta y guía la actividad mental constructiva de sus alumnos, proporcionándoles ayuda pedagógica ajustada a sus competencias.	El alumno se orienta exclusivamente hacia las actividades diseñadas por el profesor.
El alumno aprende aquello que se le presenta porque lo considera valioso.	El alumno reacciona a las actividades realizadas por el maestro.

Cuadro 2.5: Aprendizaje significativo versus el tradicional.

Este aprendizaje depende de las motivaciones e intereses del estudiante, el no puede engañarse a sí mismo, dando por sentado que ha atribuido los significados contextualmente aceptados, cuando solo se ha quedado con algunas generalizaciones vagas sin significado psicológico y sin posibilidades de aplicación [37, p. 57].

La Teoría del Aprendizaje Significativo tiene grandes implicaciones psicológicas y pedagógicas [49, p. 9]. El aprendizaje se construye de manera evolutiva, se ocupa de lo que ocurre dentro y fuera del aula, postula los principios programáticos para organizar la docencia y, en este sentido, adquiere un valor especial la necesidad de realizar un análisis conceptual del contenido.

2.4. Mapas Conceptuales

Cuando lo que se busca es lograr un verdadero aprendizaje significativo, las herramientas heurísticas, tales como los mapas conceptuales, resultan ser un instrumento esencial para la enseñanza y la comprensión de cualquier tópico a estudiar. Cuando los contenidos están organizados, tienen una estructura y están relacionados entre sí, el aprendizaje se percibe con mayor facilidad. Si lo que se quiere es elaborar un trabajo, ya sea de investigación o sencillamente escolar, la primera pregunta que surge es: ¿Cómo ubicar en el contenido del trabajo los conocimientos que se tienen de una forma coherente? Para responder a esta pregunta es preciso relacionar, ordenar, integrar y sintetizar las ideas o conceptos con los cuales se cuenta.

Los mapas conceptuales aparecen en los trabajos realizados por Joseph D. Novak a mediados de los años sesenta en un proyecto de investigación en psicología del aprendizaje. Novak creó los mapas conceptuales como instrumento para facilitar y mejorar el aprendizaje. Además, para apreciar visiblemente el tipo de enseñanza adquirida. Según Novak [52, p. 2], un mapa conceptual es un conjunto de proposiciones sobre un determinado tema ordenadas en forma de árbol. En los nodos de este árbol se colocan los conceptos y en las conexiones entre estos nodos irán situadas frases de enlace expresando la relación entre los conceptos conectados.

Los mapas conceptuales aparecen como una técnica dentro del aprendizaje, por reestructuración de la estrategia de aprendizaje organizada jerárquicamente. Este tipo de aprendizaje consiste en la conexión de los conceptos nuevos con los conocimientos anteriormente adquiridos, ampliando así su significado [63, p. 64]. La elaboración de un mapa conceptual se asemeja a la forma como las personas organizan sus conocimientos, este puede ser considerado como una representación visual de la jerarquía y las relaciones entre conceptos contenidos en la mente. En consecuencia, si se proporciona a los estudiantes nuevos conocimientos de forma estructurada, se facilitará su integración cognitiva al aportar el andamiaje de su estructura [15, p. 126].

Según Novak y Gowin¹² los pasos para la construcción de un mapa conceptual deben ser:

- Identificar los conceptos de un texto.
- Seleccionar el concepto más importante.
- Ordenar jerárquicamente la lista precedida por el concepto seleccionando.

¹²Novak y Gowin (1984). Citado por: Ana García-Valcarcel et al. Perspectivas de las nuevas tecnologías en la educación, p. 74.

- Construir el mapa conceptual.
- Elegir las palabras de enlace.
- Corregir y reescribir los conceptos y palabras enlace.
- Descubrir relaciones cruzadas.
- Reconstruir el mapa.
- Hacerlo público.

La construcción de mapas conceptuales en grupos de estudiantes, cumplen una significativa función dentro del aprendizaje de cada uno de ellos, al originarse discusiones en clase referentes a los conceptos tratados, los estudiantes siempre están aportando algo de ellos mismos lo cual favorece una mayor interacción y participación en el desarrollo del tema o tópico tratado.

Para el profesor los mapas conceptuales resultan de sumo interés, puesto que le permiten descubrir falsos pensamientos e ideas que tienen los alumnos al comenzar el estudio o aprendizaje de un curso. Le sirven para comprobar lo que los estudiantes conocen acerca de este y el nivel en donde se encuentran; con base en esto, el docente puede planificar de una mejor forma el currículo y adaptarlo con el fin de construir nuevos conocimientos y ampliar los que ya se tienen [21, p. 73].

2.5. Enseñanza para la Comprensión

La Enseñanza para la Comprensión (EpC) es un método pedagógico que surgió como resultado de la investigación que se llevó a cabo a comienzos de los años 90 por un grupo de investigadores de la Escuela de Postgrados de la Universidad de Harvard, llamado el Proyecto Zero. Este proyecto fue fundado en 1967 por el filósofo Nelson Goodman. En 1971 Goodman se retiró del proyecto, por lo cual David Perkins asumió como director y un año más tarde se unió a él Howard Gardner como codirector. Durante los últimos 30 años este grupo se ha dedicado al estudio del desarrollo del progreso del aprendizaje en niños y adultos, en ayudar a crear personas con pensamientos reflexivos, críticos y creativos. La misión del Proyecto Zero¹³ es comprender y promover el aprendizaje, el pensamiento, y la creatividad en las artes y en otras disciplinas en individuos e instituciones.

¹³History of Project zero. [En línea] <<http://pzweb.harvard.edu/History/History.htm>>. [citado en Marzo 16 de 2010].

La Enseñanza para la Comprensión fue el resultado de cinco años de investigación, en los cuales su principal propósito fue el diseñar, desarrollar y probar una pedagogía de la comprensión. En un principio se dirigió a cuatro asignaturas (Matemáticas, Inglés, Historia y Ciencias). La investigación involucró a estudiantes y docentes universitarios y de escuelas primarias. Los resultados obtenidos permiten hoy tener acceso a toda una conceptualización en torno al significado de la comprensión y a la manera lógica y ordenada en que se puede organizar una enseñanza orientada al desarrollo de esta [7, p. 13].

La comprensión es un proceso en el que una persona organiza coherentemente y relaciona los conocimientos nuevos con los adquiridos anteriormente, reexamina y aplica estos en diferentes contextos. En otras palabras, la comprensión es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se sabe. Como lo plantea Perkins [6, p. 42] comprender un tema es poder realizar una presentación flexible de él: explicarlo, justificarlo, extrapolarlo, relacionarlo y aplicarlo de manera que vayan más allá del conocimiento y la repetición rutinaria de habilidades. La comprensión concebida como la capacidad de tener un desempeño flexible abarca cuatro dimensiones. Sus principios se exponen a continuación.

2.5.1. Contenido

Su objetivo es desarrollar los conceptos propios de una materia, facilitar la interrelación y formar redes conceptuales que permitan al estudiante abordar de una manera clara y organizada los tópicos que se desean estudiar. Esta dimensión [48, p. 53] hace énfasis en la estructura conceptual de una disciplina y muestra cómo los conceptos se diferencian entre sí, determinando una jerarquización que facilita el aprendizaje de los mismos.

2.5.2. Métodos

Cada disciplina a estudiar se caracteriza por tener su manera específica de construir conocimiento. En esta dimensión, el docente se ocupa de estudiar, analizar y escoger las alternativas más adecuadas para el desarrollo del curso. El objetivo es despertar en los estudiantes un prejuicio sano, que aprendan los métodos propios de cada disciplina y que favorezca la investigación y el desarrollo de nuevos conocimientos. Buscando que, más que percibir el conocimiento como incuestionable, información fácil de conseguir registrada en libros de texto, los alumnos construyan y validen descripciones dignas de confianza¹⁴.

¹⁴Stone, M. (1998). La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica. Paidós (p. 18). Citado por: Rendon, Paula. En Conceptualización de la razón de cambio en

2.5.3. Praxis

El conocimiento permite explorar el mundo, interpretarlo y transformarlo, pero requiere que se pueda llevar a la práctica, de tal manera que con su aplicación se pueda transformar la realidad, trascendiendo el simple acto de acumular conocimiento a través de prácticas memorísticas¹⁵. Por medio de la práctica, el estudiante desarrolla una capacidad reflexiva frente al mundo, muestra sus propios puntos de vista e interpreta y actúa en base a la experiencia adquirida.

2.5.4. Formas

Todos y cada uno de los estudiantes pueden expresar y mostrar los conocimientos adquiridos de diferentes formas. Esta dimensión considera la variedad de opciones que posee el alumno para demostrar sus conocimientos, tales como escribir informes, hacer representaciones, producir objetos, dramatizaciones, etc., teniendo en cuenta el público o la audiencia objeto de la comunicación. Es en esta dimensión donde el papel que juega la tecnología posee un lugar especial dentro del proceso de enseñanza y de aprendizaje, al existir numerosas herramientas, le permiten al docente mostrar, analizar y trabajar conceptos propios del curso de manera interactiva, captando así la atención del alumnado, por otra parte el alumno tiene la posibilidad de escoger entre ininidad de herramientas que estas ofrecen para mostrar los logros adquiridos, ampliando así la variedad de formas con las que puede expresar sus ideas y conocimientos.

Para lograr una verdadera comprensión se debe tener en cuenta¹⁶:

- Aquello que comprendemos se refiere a un conocimiento que utilizamos.
- Para cualificar nuestra comprensión es necesaria la retroalimentación.
- Para lograr una verdadera comprensión se requiere de tiempo (Praxia).

El marco de la Enseñanza para la Comprensión, enlaza lo que David Perkins ha denominado los cuatro pilares de la pedagogía con cuatro elementos de planeación e instrucción, ver Cuadro 2.6.

el marco de la Enseñanza para la Comprensión, 2009, p. 54.]

¹⁵Enseñanza para la comprensión. [En línea]. http://www.colegiocarlomagno.edu.co/index.php?option=com_content&task=view&id=18&Itemid=183. [citado en Marzo 16 de 2010].

¹⁶Universidad de Harvard. ¿En qué consiste el marco de la enseñanza para la comprensión? [en línea]. <<http://learnweb.harvard.edu/andes/tfu/info3.cfm>>. [citado en Marzo 16 de 2010].

PREGUNTAS CENTRALES DE LA ENSEÑANZA	ELEMENTOS DE LA EpC
Que debemos enseñar?	Temas Generativos.
Que vale la pena comprender?	Metas de Comprension.
Como debemos enseñar para comprender?	Desempenos de Comprension.
Como pueden saber estudiantes y maestros lo que comprenden los estudiantes y como pueden desarrollar una comprension mas profunda?	Valoracion Continua.

Cuadro 2.6: Pilares y elementos de la EpC.

A continuacion se expondran cada uno de los elementos de la EpC, sus principales caracteristicas, importancia y relevancia dentro del marco pedagogico utilizado en este proyecto, al igual que algunos ejemplos de cada uno de ellos.

2.5.5. Temas generativos

Establecer el contenido del curr culo de un curso es un trabajo arduo que conlleva muchas responsabilidades. Vito Perrone [61, p. 15] menciona: los docentes deben seleccionar la materia y ajustar la forma del curr culo para responder a las necesidades de sus alumnos, con el fin de conectar el trabajo escolar con la vida cotidiana. El curr culo debe involucrar a los alumnos en constantes espirales de indagacion, que los lleven desde un conjunto de respuestas hacia preguntas mas profundas que revelen conexiones entre el tematico que se esta tratando y otras ideas, preguntas y problemas fundamentales.

Los temas generativos constituyen el nucleo del curr culo, son conceptos, temas, teor as, ideas, etc., que se prestan de igual manera a la Ensenanza para la Comprension. A continuacion se muestra las caracteristicas de los temas generativos [61, pp. 15 - 16].

Centrales para un dominio o disciplina. El curr culo construido alrededor de temas generativos involucra a los alumnos en el desarrollo de comprensiones que ofrecen una base para un trabajo mas sistematizado en el dominio o en la disciplina.

Accesibles e interesantes para los alumnos. Los temas generativos se relacionan con las experiencias propias de los alumnos. Pueden abordarse desde diversas perspectivas disciplinarias, con gran variedad de estrategias, materiales, recursos y actividades de aprendizaje.

Interesantes para el docente. La capacidad generativa de un tópico depende de la manera en que se lo enseña, por tanto es trascendental el tiempo invertido y la manera como el docente presenta el tópico. La pasión, la curiosidad y el asombro del docente sirven como modelo de compromiso intelectual para alumnos que recién están aprendiendo como explorar terreno poco familiar y complejo con preguntas de nivel abierto.

Conexiones múltiples. Los tópicos generativos se relacionan con experiencias previas de los alumnos (tanto fuera como dentro del aula de clase) y con ideas importantes dentro de las disciplinas y entre ellas. A menudo tienen la cualidad de no tener un fondo, en el sentido de que la indagación del tópico lleve a preguntas más profundas.

A continuación se muestran algunos ejemplos de tópicos generativos²⁰.

En Matemáticas: el concepto de cero, patrones, igualdad, representaciones con signos y símbolos, tamaño y escala.

En Biología: la definición de vida, selvas tropicales, dinosaurios, especies en vías de extinción, calentamiento del planeta.

En Historia: desastres marítimos, supervivencia, revolución, conflictos, poder.

En Literatura: interpretación de textos, cuentos populares, humor, perspectivas múltiples.

Ahora bien, los tópicos generativos deben estimular y facilitar el acceso a los nuevos conocimientos por parte del alumnado. Estos tópicos implican al docente en la exploración de su materia, a sus alumnos y a los recursos con los que dispone. De igual manera, realizar una lluvia de ideas preferiblemente entre colegas, ayudaría a una mejor y adecuada escogencia de los temas a estudiar, esto suscitaría una planificación más acorde a los objetivos y metas que se desean alcanzar a lo largo del curso académico.

2.5.6. Tópicos generativos y las nuevas tecnologías

Al utilizar nuevas tecnologías en un currículo, los temas a estudiar suelen ser más llamativos e interesantes. *Internet* brinda una gran cantidad de experiencias asociadas al mundo real, los estudiantes logran conectar los trabajos propuestos con problemas auténticos. Los medios audiovisuales y el *software* ofrecen imágenes, videos y audio que son opciones que tiene el docente para enriquecer y abordar temas desde diversos ángulos; expandir la variedad de materiales y medios curriculares para tener acceso a la información, les da a los alumnos la posibilidad de seguir sus propios caminos en la investigación, en lugar de ir dando los pasos prescritos en una guía o un libro de texto [62, p. 69]. Ahora al brindar la posibilidad al estudiante de abordar los temas del

curr culo de modo tal que se incentive y propiciando que sea este el encargado de seguir sus propias y preferidas formas de aprendizaje, existe mayor probabilidad de construir un mayor y mejor conocimiento.

Al elaborar los topicos generativos el docente debe preguntarse Cuales son los temas o nucleos prioritarios , (ver Cuadro 2.7¹⁷) del curso que resultan dif cil de comprender? y Como podran facilitarse con el uso de nuevas tecnolog as? El centro tecnologico Educativo de la escuela de Graduados en Educacion de Harvard recomienda¹⁸ que esos nucleos prioritarios del curr culo que presenta di cultad fueran considerados temas en los que val a la pena enfocar el uso de nuevas tecnolog as.

NUCLEOS PRIORITARIOS QUE PRESENTAN DIFICULTAD
Aspectos puntuales que siempre resultan dif ciles de enseñar y aprender.
Temas centrales y cr ticos de la materia que se esta enseñando.
Temas que pueden comprenderse mas facilmente mediante el uso de las nuevas tecnolog as.

Cuadro 2.7: Nucleos Prioritarios.

Esos topicos generativos que presentan mayor di cultad ameritan que se les dedique mayor esfuerzo y dedicacion, que se disene y plani que un plan que integre de manera precisa, apropiada y con able las nuevas tecnolog as educativas, a n de favorecer la ensenanza de estos topicos.

2.5.7. Metas de Comprension

Los topicos generativos ofrecen la oportunidad de desarrollar muchas comprensiones diferentes. Para crear una direccion, los maestros deben identi car metas espec cas de comprension para un topico o tema. Estas metas de comprension [61, p. 16] son lo que espera el docente que los alumnos lleguen a comprender. Mientras que los topicos o temas generativos delimitan la materia que los estudiantes investigaran, las metas de ñen de manera espec ca las ideas, procesos, relaciones o preguntas que los alumnos comprenderan mejor por medio de su indagacion.

¹⁷Tomado de: Stone, M. Enseñar para la comprensión con nuevas tecnologías. 2005. (p. 70).

¹⁸Education Technology Center, Making Sense of the Future, 1998. Citado en: Martha, Stone. Enseñar para la comprensión con nuevas tecnologías, 2005, (p. 70).

Definir metas de comprensión requiere que los docentes diferencien entre las metas académicas finales y las metas intermedias (por ejemplo en el estudio del Cálculo vectorial, aprender a dibujar curvas de nivel y aprender a derivar parcialmente). Estas últimas pueden ser importantes, pero enfocarse en ellas no necesariamente lleva a desarrollar la comprensión que se persigue en los alumnos. Al seleccionar específicamente lo que se quiere que los alumnos comprendan, y definiendo claramente las metas de comprensión, al docente le resulta mucho más sencillo diseñar desempeños y criterios de evaluación como también las veces y la forma para desarrollarlos.

¿Cuál es la principal comprensión que deben conseguir los estudiantes al final del curso académico? es una pregunta que trae a primer plano las metas fundamentales de comprensión que los docentes esperan que sus alumnos alcancen. Muchas veces estas apuntan a metas de comprensión a largo plazo, por ejemplo en un curso de literatura: Los alumnos comprenderán cómo expresarse con claridad, tanto oralmente como por escrito [61, p. 18]. Este tipo de metas que exigen un mayor esfuerzo, son llamadas dentro del marco de la EpC *Metas de Comprensión Abarcadoras o Hilos Conductores*, estas describen las comprensiones más importantes que deben desarrollar los estudiantes durante el curso.

Las metas de comprensión para un tópico o una unidad en particular deben relacionarse estrechamente con al menos una de las metas de comprensión abarcadoras del curso. El objetivo de esta relación debe fundamentarse en las múltiples conexiones que el alumno debe encontrar entre los temas estudiados y el hilo conductor seleccionado.

Los mapas conceptuales resultan ser un instrumento eficaz cuando se quiere enriquecer las concepciones de los docentes acerca del territorio de tópicos generativos, sino también ayudan a revelar las metas. A medida que los docentes preparan tales mapas descubren los vínculos entre ideas principales dentro de las materias y entre ellas. Cuando los docentes consideran sus metas de largo plazo en relación con unidades curriculares o tareas particulares, muchas veces pueden articular un conjunto de comprensiones más específicas o submetas [61, p. 18 - 19]. El marco de la EpC considera que las metas de comprensión deben ser [61, p. 19]:

Explícitas y públicas. Las metas de comprensión son especialmente poderosas si se hacen explícitas y públicas. Cuando estas son expuestas públicamente ayudan a todos a saber hacia dónde va la clase, a avanzar y a centrar la atención en la agenda principal.

Dispuestas en una estructura compleja. Un conjunto de metas de comprensión organizado en una estructura compleja ayuda a clarificar las conexiones entre cualquier ejercicio particular y los objetivos más amplios del curso.

Centrales para la materia. Las metas de comprensión deben centrarse en las ideas,

modalidades de indagación y formas de comunicación que resultan fundamentales si se quiere que los alumnos entiendan la materia en cuestión.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de Metas de comprensión¹⁶.

- Para una unidad de geometría cuyo Topico Generativo es: Estudiar las relaciones geométricas : Los estudiantes desarrollarán la comprensión tanto del enfoque inductivo como del deductivo para demostrar varios enunciados (por ejemplo que dos triángulos son congruentes, que dos líneas son paralelas, etc.).
- Para una unidad de historia cuyo Topico Generativo es: El precio de la libertad: comprender la Declaración de Derechos : Los estudiantes comprenderán la relación entre derechos y responsabilidades en una sociedad democrática.
- Para una unidad de literatura cuyo Topico Generativo es: Las novelas policíacas y cómo se logran : Los estudiantes comprenderán de qué manera el autor crea, desarrolla y mantiene el suspenso en la trama .
- Para una unidad de biología cuyo Topico Generativo es: El significado de la vida : Los estudiantes comprenderán cómo el biólogo establece una diferencia entre los seres vivos y las cosas inanimadas .

La experiencia recogida a través del tiempo por parte de los docentes, resulta necesaria a la hora de elegir las metas de comprensión de un curso. Es importante contar con referencias de prácticas educativas de la materia que se desea abordar; analizar y discutir las posibles metas, depurar los resultados obtenidos y así mismo decantarse en una mejor experiencia educativa.

2.5.8. Metas de Comprensión y las nuevas tecnologías

Gran parte de los docentes tienen claro los objetivos que persiguen cuando se trata de estudiar un tema o tópico de un currículo, pero solo una pequeña parte de ellos expresan lo que esperan que sus alumnos comprendan. La utilización de nuevas tecnologías beneficia y profundiza la comprensión de los contenidos de un currículo, estas pueden emplearse de muchas formas para promover la enseñanza y el aprendizaje de las metas. Así mismo, cuando las metas de comprensión son claras, ayudan a que los docentes, alumnos y otros participantes del proceso educativo (padres, especialistas en tecnología, encargados de diseñar las políticas educativas, ...) se aseguren de que la tecnología ofrece una significativa ventaja educativa [62, p. 93].

Las metas de comprensión claramente formuladas pueden constituir una guía para utilizar con inteligencia la tecnología, brindan significativas ventajas a los alumnos ya

que permiten percibir las metas de comprensión como objetivos variados, memorables y accesibles. Cuando el docente tiene claro el modo como la aplicación de la tecnología en el aula de clase promueve directamente el progreso hacia las metas de comprensión brinda seguridad de que la tecnología le ofrece una verdadera ventaja educativa. Del mismo modo, las nuevas tecnologías constituyen un excelente estmulio educativo que facilita alcanzar ciertas metas de comprensión que de otra manera serían inaccesibles o sumamente difíciles de alcanzar [62, pp. 103 - 105]. El Cuadro 2.8 muestra las principales ventajas que ofrecen las nuevas tecnologías como instrumento para lograr las metas de comprensión.

TECNOLOGIAS	VENTAJAS
Multimedia	Ofrecen a los alumnos la posibilidad de expresar sus comprensiones a través de múltiples formatos que incluyen video, imágenes, texto, entre otras.
Gráficos	Permiten comprender la relación existente entre una expresión simbólica y el gráfico de una función, así como el análisis y una inmejorable visualización.
Simulaciones	Facilitan la comprensión de conceptos al mostrar situaciones que en realidad no son visibles.
Fuentes digitales	Proporcionan acceso a datos históricos y hacen que los estudiantes aprecien la importancia de las fuentes primarias.

Cuadro 2.8: Ventajas tecnológicas en las metas de comprensión.

Identificar metas de comprensión concretas, permite al docente encaminar el uso que sus estudiantes hagan de la tecnología, a fin de que estos se concentren en las prioridades clave en lugar de desviarse hacia actividades que solo sirvan de distracción. En resumen [62, p. 106], las metas de comprensión y las nuevas tecnologías pueden potenciarse recíprocamente y llegar a ser innovaciones educativas sinérgicas.

2.5.9. Desempeños de Comprensión

Los desempeños de comprensión seguramente sean el elemento más significativo del marco conceptual de la EpC, pues son estos donde el estudiante muestra en la práctica su propia comprensión. Estos desempeños son las actividades que proporcionan a los estudiantes las ocasiones de aplicar todos los conocimientos adquiridos en los textos,

revistas, artículos, *internet*, clases entre otras, mediante un instrumento adecuado que conduzca a la práctica, con el propósito de crear algo nuevo reconstruyendo, expandiendo y aplicando lo que ya saben, así como innovando y construyendo a partir de esos conocimientos que conllevan a demostrar la comprensión.

Este elemento del marco, centra la atención en la labor de los alumnos más que en lo que hacen los docentes. Estos últimos frecuentemente señalan que un aspecto de su valor educativo es la forma en que les exige analizar lo que sus alumnos están haciendo y aprendiendo [61, p. 20]. Para que el alumno se interese en mostrar su comprensión, los docentes deben diseñar una serie de actividades que comiencen con tareas preliminares basadas en los intereses y conocimientos previos de los estudiantes. A través de estos los docentes promueven en los estudiantes la adquisición de nuevos conocimientos, así como la habilidad de aplicar lo que saben en la creación de productos y presentaciones cada vez más complejas [62, p. 41]. Se caracterizan tres fases en el desarrollo de los desempeños de comprensión [61, pp. 21 - 22]

Etapas de exploración. Estos desempeños consisten en explorar los elementos, reconocer su respeto por la investigación inicial, todavía no estructurada por métodos y conceptos basados en la disciplina. Estas actividades ayudan a que los alumnos encuentren conexiones entre el tópico generativo y sus propios intereses y experiencias previas. Investigar los elementos puede ofrecer, tanto al docente como a los alumnos, información acerca de los conocimientos con los que el alumno cuenta y con aquellos que están interesados en aprender.

Investigación guiada. Estos desempeños involucran a los alumnos en el uso de ideas o modalidades de investigación que el docente considera centrales para la comprensión de las metas. Durante las etapas iniciales de una unidad o un curso, estos desempeños pueden ser relativamente simples o elementales. A medida que se avanza en el curso, los alumnos pueden implicarse en formas más complejas de investigación, aprenden como aplicar conceptos y métodos disciplinarios, a integrar su creciente cuerpo de conocimientos y a poner en práctica una comprensión cada vez más compleja y sofisticada.

Proyecto final de síntesis. El proyecto final de síntesis se asemeja a los proyectos y/o exposiciones que muchos docentes establecen como trabajos finales para completar una unidad curricular. Tales desempeños estimulan a los alumnos a desarrollar sus avances de manera más independiente de como lo hicieron en sus desempeños preliminares y a sintetizar las comprensiones que han logrado a lo largo de la unidad curricular o de una serie de unidades.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de desempeños de comprensión de algunas unidades curriculares¹⁶.

- En una unidad de matemáticas, cuyas Metas de Comprensión son: Los estudiantes comprenderán cómo pueden utilizarse los porcentajes para describir acontecimientos del mundo real y Los estudiantes comprenderán cómo se representa la información numérica en gráficos claros :

Durante dos semanas, los estudiantes trabajarán en grupos recolectando y recopilando información acerca de la asistencia escolar. Calcularán el porcentaje de estudiantes que se ajustan a las diversas categorías (porcentajes de estudiantes ausentes, de estudiantes presentes, de estudiantes que llegan tarde a la escuela, etc.). Luego confeccionarán gráficos para representar visualmente sus datos, recibirán retroalimentación de la clase y revisarán los gráficos respectivamente.

- Para una unidad de ciencias naturales cuya Meta de Comprensión es: Los estudiantes comprenderán de qué manera la luz y las imágenes se ven afectadas cuando pasan a través de los *lentes cotidianos* tales como lentes de aumento, teleobjetivos, etc.

Los estudiantes experimentan con una variedad de lentes cóncavos, cóncavos y con una linterna. Tratan de descubrir qué combinaciones actúan como lentes de aumento, de teleobjetivo, y de grado angular. Luego dibujan diagramas para ilustrar cómo se desplaza la luz de esas combinaciones de lentes.

Resumiendo, los desempeños de comprensión deben vincularse directamente con las metas de comprensión, se aplican y desarrollan por medio de la práctica, utilizan variados estilos de aprendizaje y formas de expresión, promueven un trabajo reflexivo con tareas que se convierten en un desafío y que son posibles de realizar.

2.5.10. Desempeños de Comprensión y las nuevas tecnologías

Como se definió en la Sección 2.5, página 45, la comprensión es un proceso en el cual una persona organiza coherentemente y relaciona los conocimientos nuevos con los adquiridos anteriormente, reflexiona y aplica estos en diferentes contextos. Estas actividades fueron denominadas por el proyecto zero como los desempeños de comprensión, llegaron a la conclusión que por medio de estos podrían comprobar el grado de comprensión que tenían los estudiantes acerca de una unidad o un curso.

La exposición que el docente hace de los tópicos de un curso en el aula de clase es clave en el desarrollo del aprendizaje y comprensión del estudiante, pero no es la única manera de propiciarlo. El profesor debe asegurarse de que los estudiantes pasen gran parte del tiempo utilizando y expandiendo activamente sus mentes y no recibiendo pasivamente lo que otros han creado.

La utilizacion de nuevas tecnolog as dentro y fuera del aula de clase pueden mejorar y enriquecer los desempenos de comprension en muchas formas, en el Cuadro 2.9 se muestra las ventajas que ofrecen al docente y a los estudiantes el uso de las nuevas tecnolog as.

TECNOLOGIAS	VENTAJAS
Multimedia	Permite que los estudiantes expongan nuevas ideas, y den a conocer sus conocimientos utilizando gran variedad de herramientas audiovisuales como videos, presentaciones digitales, diaporamas, entre otras.
<i>Software</i>	Le permiten al docente mostrar los topicos de una manera atractiva, exible y asequible para el estudiante, posibilita una mejor asimilacion de los temas y una optima visualizacion cuando de gra cos se hace referencia.
<i>Internet</i>	Existen numerosas herramientas que fortalecen el proceso de ensenanza y de aprendizaje. En <i>internet</i> se tiene a disposicion una gran cantidad de recursos de tipo gra co, interactivo y didactico, la utilizacion del correo electronico, foros, audioforos y herramientas tipo skype, permiten una comoda y facil comunicacion cuando no se esta en el aula de clase.

Cuadro 2.9: Ventajas de las nuevas tecnolog as en los desempenos de comprension.

Como se ha visto, las nuevas tecnolog as pueden bene ciar los desempenos de comprension, este elemento de la EpC puede ayudar a los docentes a disenar estrategias para que el alumno saque el mayor provecho educativo del empleo de las nuevas tecnolog as.

2.5.11. Valoracion Continua

Para aprender sobre comprension los estudiantes necesitan criterios de retroalimentacion, oportunidades para re exionar desde el inicio y durante la secuencia de la instruccion (desempeno). En el marco este proceso [61, p. 24] se denomina *Valoracion Continua*. Los criterios para valorar los desempenos de Comprension deben tener las siguientes caracter sticas:

Relevantes, explícitos y públicos. Los criterios de evaluación están directamente vinculados con las metas de comprensión. Se articulan inicialmente en el proceso de hacer borradores de los desempeños de comprensión. Los criterios se hacen públicos para los alumnos, a quienes se da la oportunidad de aplicarlos y comprenderlos antes de que se los use para evaluar sus desempeños.

Evaluaciones continuas. Las evaluaciones se hacen frecuentemente, desde el comienzo del plan curricular hasta su fin. Las actividades de evaluación diagnóstica se realizan simultáneamente con cada desempeño significativo de comprensión.

Múltiples fuentes. Los alumnos se benefician no solo de las evaluaciones de su trabajo por parte de sus docentes, sino también del hecho de hacer evaluaciones de sus propios desempeños y de los de sus compañeros.

Claros. Enunciados explícitamente al comienzo de cada desempeño de Comprensión, aunque pueden elaborarse en el transcurso del desempeño mismo, sobre todo si es la primera vez que el docente y los estudiantes lo abordan.

Estimar el avance y con guar la planificación. Los alumnos tienen la oportunidad de aprender sobre sus propios desempeños y de cómo pueden mejorarlos. La evaluación continua de los desempeños indica al docente cómo responder, tanto individualmente como a la totalidad de la clase a la hora de diseñar las siguientes actividades educativas.

Cuando el propósito del conocimiento es la comprensión, el proceso de valoración es más que una evaluación: es una parte importante del proceso de aprendizaje y debe contribuir significativamente al mismo. Las valoraciones que promueven la comprensión (más que simplemente evaluarla) tienen que ser algo más que un examen al final de una unidad; estas valoraciones deben informarles a los estudiantes y a los docentes las metas de comprensión que se han alcanzado, cómo proceder en la enseñanza y aprendizaje de las metas posteriores.

La Valoración Continua debe efectuarse en el contexto de los desempeños de comprensión, alcanzados a su vez en las metas de comprensión y la retroalimentación. A continuación se muestra un ejemplo de la valoración continua en una clase de matemáticas¹⁶.

Metas de Comprensión. Ayudar a los estudiantes a comprender los porcentajes y sus usos en la vida cotidiana describiendo los datos. Ayudar a los estudiantes a comprender que las encuestas son una herramienta para recoger datos que pueden ser expresados matemáticamente.

Desempeños de Comprensión. Los estudiantes entrevistan a sus compañeros para recolectar información sobre su salud (por ejemplo, el número de resfríos que padecen

en un año) y sobre algunas variables que asocian con la buena salud (por ejemplo, el porcentaje de tiempo que le dedican al deporte fuera del horario escolar). Deciden como usarán los gráficos y cuadros para representar mejor sus datos. Por ejemplo, el 80% de los estudiantes que dijeron haberse enfermado menos de una vez al año, pasan más del 50% de su tiempo libre haciendo ejercicios físicos.

Criterios para la Valoración Continua. El docente comparte con sus estudiantes una hoja donde se describen las dos categorías de criterios para valorar el trabajo: las cualidades de una buena encuesta y las características del uso eficaz de los porcentajes en este tipo de trabajo.

Retroalimentación para la Valoración Continua. Los estudiantes comparten entre sí los borradores de las encuestas para someterlos a crítica y recibir retroalimentación. Entregan al docente el primer bosquejo de los gráficos y los cuadros, quien aporta sus comentarios. Para la calificación definitiva, el docente tiene en cuenta la versión final del trabajo y también la autoevaluación que la acompaña.

2.5.12. Matriz de evaluación

Partiendo de la premisa de que el propósito fundamental de la evaluación es proporcionar información sobre los distintos logros de aprendizaje que alcanza el estudiante a medida que transcurre un curso o semestre, es vital establecer criterios y niveles de calidad con los cuales se pueda medir y establecer el grado de apropiación y comprensión de cualquier tópico o temática referente a un currículo por parte del estudiante.

Con este objetivo y buscando cualificar la verdadera comprensión de los estudiantes frente a las temáticas del curso de Cálculo III (vectorial), se optó por construir un instrumento (Matriz de evaluación) que encierra múltiples formas de medición del desempeño de los estudiantes, como lo son el aprendizaje, logros, motivación, actitud respecto a las actividades del proceso de aprendizaje, entre otras. Entre muchas de las ventajas que ofrece este tipo de evaluación sobresalen¹⁹:

- Promueve expectativas sanas de aprendizaje, pues clarifica cuáles son los objetivos del maestro y de qué manera los pueden alcanzar los estudiantes.
- Enfoca al maestro para que determine de manera específica los criterios con los cuales va a medir y documentar el progreso del estudiante.

¹⁹Matriz de evaluación. [en línea]. <<http://www.eduteka.org/MatrizValoracion.php3>> [citado en 23 de mayo de 2009]

- Permite que los estudiantes conozcan los criterios de calificación con que serán evaluados.
- Aclara al estudiante cuáles son los criterios que debe utilizar al evaluar su trabajo y el de sus compañeros.
- Permite que el estudiante evalúe y haga una revisión final a su trabajo, antes de entregarlo al profesor.
- Indica con claridad al estudiante las áreas en las que tiene falencias y con este conocimiento planear con el maestro los correctivos a aplicar.
- Proporciona a los estudiantes retroalimentación sobre sus fortalezas y debilidades en las áreas que deben mejorar.
- Reduce la subjetividad en la evaluación.
- Ayuda a mantener el o los logros del objetivo de aprendizaje centrado en los estándares de desempeño establecidos y en el trabajo del estudiante.

Habitualmente las matrices de evaluación se diseñan de tal forma que el estudiante logre ser evaluado en forma objetiva y coherente. Así mismo, que permita al docente especificar claramente lo que se espera del estudiante y cuáles son los criterios de valoración con los cuales va a cualificar los objetivos previamente establecidos. A continuación se muestran las matrices de evaluación utilizadas en el presente proyecto.

<p style="text-align: center;">DESEMPEÑOS DE COMPRESION MATRIZ DE EVALUACION CONCEPTUALIZACION</p>				
ASPECTO EVALUADO	INGENUO	NOVATO	APRENDIZ	EXPERTO
Dominio y preparacion del tema	Presenta di cultad para relacionar conceptos lo que le impide profundizar en los contenidos de estudio.	Genera algunas relaciones conceptuales pero aun le falta profundizar en los contenidos de estudio.	Se aprecia dominio del tema y apropiacion de los conceptos.	Maneja y aplica los conceptos de manera organizada valiendose de la argumentacion teorica.
Integracon tematica	Se le di culta relacionar los conceptos objeto de estudio con el entorno	Conoce las relaciones de los conceptos aprendidos con el entorno, pero la exploracion de estas se estudian super cialmente.	Logra integrar los conceptos con situaciones de diaria ocurrencia.	Demuestra comprension del proceso. Relaciona e cientemente los conceptos extrapolandolos a diferentes situaciones.
Ayudas metodologicas	El material utilizado no es el apropiado para soportar los conceptos objeto de estudio.	Utiliza herramientas que le permiten mostrar los conceptos tratados, pero aun le hace falta interes para presentarlos de una forma mas elaborada	Utiliza herramientas que le permiten mostrar con su ciencia los conceptos objeto de estudio.	Las herramientas utilizadas le permiten mostrar y explicar los conceptos de manera clara y precisa.

Cuadro 2.10: Desempenos de comprension - Conceptualizacion.

<p style="text-align: center;">DESEMPEÑOS DE COMPRESION MATRIZ DE EVALUACION EXPRESION ORAL</p>				
ASPECTO EVALUADO	INGENUO	NOVATO	APRENDIZ	EXPERTO
Manejo del lenguaje	Usa lenguaje descontextualizado	Utiliza de manera superficial lenguaje relacionado con el tema abordado.	Se expresa adecuadamente sobre el tema y conceptos estudiados.	Demuestra uidez verbal y total dominio del tema abordado.
Debate	No propicia espacios que generen discusión respecto al tema tratado.	Esporadicamente propicia espacios que generan debate sobre el tema abordado.	Presenta habilidad para generar espacios que propician debates sobre el tema abordado.	Genera dinámicas participativas que motivan el debate sobre el tema abordado.
Socialización	No demuestra capacidad para transmitir de manera significativa los conceptos de la temática abordada.	Pocas veces logra transmitir claramente los conceptos objeto de estudio.	Expone de acuerdo a expectativas. Sus aportes son significativos. Muestra la temática de manera adecuada.	De acuerdo a su propuesta con marco teórico y análisis del contexto. Logra transmitir claramente los conceptos objeto de estudio.
Logros-desempeños de comprensión	No posee elementos conceptuales que le permitan explicar de diferentes maneras el problema tratado.	Conoce el tema superficialmente, expone de acuerdo a expectativas.	Logra explicar el tema relacionando los diferentes conceptos que hacen parte de este	Profundiza y dinamiza el tema propuesto. Logra conectar y explicar de manera objetiva los conceptos objeto de estudio.

Cuadro 2.11: Desempeños de comprensión - Expresión oral.

<p style="text-align: center;">DESEMPEÑOS DE COMPRESION MATRIZ DE EVALUACION SOLUCION DEL PROBLEMA PLANTEADO</p>				
ASPECTO EVALUADO	INGENUO	NOVATO	APRENDIZ	EXPERTO
Comprension y contextualizacion del problema	Sus argumentos demuestran que no comprende ni contextualiza el problema.	Denota mediana comprension del problema. Argumenta la importancia de este en el contexto.	Logra explicar ordenadamente el problema. Muestra la relacion y aplicacion con el medio.	Expone claramente y de manera argumentada la solucion del problema planteado, su aplicacion y contextualizacion.
Estrategias para solucionar el problema.	No plantea estrategias para solucionar el problema.	Trata de manejar estrategias individuales y grupales para solucionar el problema.	Utiliza adecuadas estrategias, tanto individuales como grupales, para solucionar el problema. Aporta apropiados elementos para la solucion del problema	Expone y muestra con su ciencia y de manera pertinente estrategias para solucionar el problema planteado.
Manejo de la discusion para la solucion del problema.	No utiliza estrategias adecuadas que permiten discutir la solucion del problema	Dirige la discusion. No resalta aspectos importantes ni llega a conclusiones sobre la solucion del problema.	Utiliza estrategias adecuadas para la solucion del problema. Genera adecuados ambientes de discusion sobre el mismo.	La discusion para la solucion del problema es liderada e -cientemente genera controversia y participacion.

Cuadro 2.12: Desempenos de comprension - Solucion del problema planteado.

La evaluación es una herramienta básica en cualquier proceso de enseñanza, hoy por hoy, se ha visto limitada al tipo tradicional. Esta forma de enfocarla, aunque tiene aspectos positivos cuando se la aplica adecuada y correctamente, se queda corta al no poder evidenciar, con mayor claridad las actitudes, cualidades, habilidades y destrezas de los estudiantes, así como su grado de aprendizaje, comprensión y competencia.

Ahora, utilizar instrumentos de evaluación como los que se exponen en este proyecto, ofrece al docente la oportunidad de valorar y apreciar de forma justa e imparcial el grado de comprensión que tienen sus estudiantes, puesto que al utilizar diferentes criterios de evaluación amplía el panorama para cualificarlos. A su vez, permite a estos últimos apropiarse y responsabilizarse del proceso de aprendizaje, favoreciendo así un mejor desempeño tanto en el aula de clase como fuera de ella.

2.5.13. Valoración Continua y nuevas tecnologías

En gran parte de los claustros educativos, al analizar un curso, el rendimiento de los estudiantes se califica por medio de un examen final, el cual muchas veces representa un importante porcentaje de la nota. Esta forma de medir el rendimiento, limita y localiza la comprensión del estudiante en una simple y única respuesta la cual es esperada por el docente. A menudo la evaluación se basa en tareas que tienen poco que ver con las metas reales que el profesor desea que alcancen sus alumnos. O puede basarse en un producto final realizado con gran esfuerzo por el estudiante y que nunca nadie, salvo el profesor, vea [62, p. 159]. Como se pudo observar en una investigación²⁰, los estudiantes que entienden el aprendizaje como un proceso progresivo de desarrollo de la comprensión, tienden a aprender mejor que aquellos que lo consideran como algo que se consigue o no se consigue.

Las nuevas tecnologías brindan al docente variadas y novedosas formas para cualificar los desempeños de los estudiantes, ofrecen al alumnado opciones que les permiten de manera cómoda y accesible extrapolar los conocimientos adquiridos y tienen la oportunidad de presentarlos de diferentes maneras como se puede observar en el Cuadro 2.13.

Ahora bien, el uso de nuevas tecnologías aplicadas a la evaluación continua, resulta ser una contribución valiosa, ya que permite que los estudiantes mejoren sus trabajos y presentaciones de manera significativa, favorece el desarrollo de la comprensión de los tópicos estudiados, contribuye a la constante autoevaluación y retroalimentación de diferentes conceptos o temas tratados por el docente.

²⁰Dweck, C.S., *Self-theories: Their in Motivation, personality, and Development*. Citado en: Martha Stone Wiske. *Enseñar para la comprensión con nuevas tecnologías* (p. 83). Editorial Paidós. Buenos Aires, 2005.

TECNOLOGIAS	VENTAJAS
<i>Digitales</i>	Registran el trabajo de los alumnos, se pueden almacenar facilmente, manipular comodamente facilitando su revision. A si mismo permiten crear carpetas individuales para mostrar y evaluar el progreso experimentado por cada alumno en el transcurso del curso.
<i>Software</i>	Reduce el tiempo que se dedica al desarrollo de algunas actividades, permitiendo tanto al docente como al estudiante mostrar multiples conceptos de una forma clara, rapida, sencilla y atractiva.
<i>Internet</i>	Los estudiantes tienen la oportunidad de subir sus avances on-line, lo cual permite que diferentes personas revisen y comenten sus avances de una manera rapida y facil. A demas de esto, el docente puede crear foros donde el estudiante tiene la oportunidad de mostrar sus conocimientos y hacer una retroalimentacion de los mismos.

Cuadro 2.13: Valoracion continua sustentada en las nuevas tecnolog as.

Para analizar se muestra a continuacion un paralelo entre el metodo pedagogico de la Enseñanza para la comprension y la metodolog a tradicional.

ENSEÑANZA PARA LA COMPRESIÓN	METODOLOGÍA TRADICIONAL
La enseñanza se fundamenta en la práctica.	El docente generalmente exige al alumno la memorización de lo que narra y expone.
El estudiante es el encargado de construir su propio conocimiento a partir de una experiencia real.	El maestro es considerado el principal y único transmisor de conocimiento. La única experiencia que adquiere el estudiante se basa en seguir un texto y realizar una serie de ejercicios propuestos por el maestro.
El surgimiento de problemas a partir de la experiencia, resulta un estímulo para el pensamiento.	Se desarrolla un pensamiento empírico de carácter clasificador y cataloguador.
El currículo es flexible, busca conectar los conocimientos adquiridos con conocimientos nuevos. Facilita la interrelación entre diferentes cursos.	El currículo es muy rígido, no establece relaciones entre materias, trata las temáticas en forma aislada.
El maestro no representa obstáculo alguno en el desarrollo de la clase. Por tanto, el rol del alumno es activo en el proceso enseñanza aprendizaje.	El rol del estudiante es pasivo, es considerado únicamente como receptor de conocimientos, con poca independencia cognoscitiva y pobre desarrollo del pensamiento.
La evaluación hace énfasis en el análisis y el razonamiento del trabajo individual y colectivo de los estudiantes.	La evaluación del aprendizaje va dirigida al resultado. Los ejercicios evaluativos son esencialmente repetitivos.

Cuadro 2.14: Enseñanza para la comprensión versus Metodología tradicional.

Independientemente de la pedagógica que se utilice, la tecnología debe estar en correspondencia con ella; por tal razón, los docentes necesitan escoger cuidadosamente las tecnologías que mejor se adapten al modelo de enseñanza que practican y por ende, centrarse en su uso, a fin de que sacar el mayor provecho para incentivar a sus estudiantes a involucrarlas en su proceso de aprendizaje.

Con base en lo expuesto en el presente capítulo y analizando las ventajas que tienen los métodos pedagógicos constructivistas, se determinó utilizar como base pedagógica

a implementar en el presente trabajo de investigacion la metodolog a de la Ensenanza para la Comprension. A continuacion se exponen la formulacion del problema, los objetivos y la metodolog a aplicada.

2.6. Formulacion y objetivos del problema de investigacion

En la actualidad el docente se enfrenta a diversos paradigmas de la ensenanza de las ciencias. Por un lado, al presentar los conceptos lo hace a partir de clases magistrales y de la realizacion de los ejercicios propuestos en el texto gu a. Por el otro, los docentes buscan estrategias de calidad que al ejecutarlas permitan al alumno comprender de manera signi cativa. Es decir, se busca que los estudiantes relacionen y apliquen sus conocimientos en contexto, y que estos les sirvan para acceder a conceptos mas complejos. El reto que tienen los docentes en la ensenanza del Calculo es grande, pues el modelo de ensenanza de esta materia ha cambiado. Si nos situamos bajo el enfoque constructivista, se requiere que el alumno forme parte activa en la apropiacion del conocimiento, se deja a un lado el aprendizaje memor stico y se privilegia el aprendizaje comprensivo para que despues entre en juego la memoria a largo plazo. Para esto hay que utilizar distintos procesos de mejoramiento continuo con la ayuda de herramientas tecnologicas y estrategias de las cuales los alumnos deberan apropiarse.

Uno de los problemas estructurales de la ensenanza y del aprendizaje de las matematicas es que el alumno se limita a tomar apuntes durante el desarrollo de la clase impartida por el profesor. Es decir, el estudiante crea una base de informacion con las formulas, axiomas, teoremas, ejemplos, etc., dejando a un lado la relacion que tienen los conceptos con el entorno en que vive. Hoy en d a existen herramientas tecnologicas como applets, software, Mimio, poket PC, entre otros, que le permiten al docente presentar los conceptos de formas innovadoras, para que el estudiante pueda participar activamente en el entendimiento y la comprension de los conceptos matematicos.

Con el desarrollo de estas nuevas innovaciones tecnologicas y la aplicacion de los metodos pedagogicos establecidos, se logra optimizar y racionalizar el recurso tecnico y humano. A partir de lo anterior se puede plantear la siguiente hipotesis: Como la integracion entre la pedagog a y la tecnolog a propician la comprension de conceptos del Calculo III? Con la gran variedad de ayudas tecnologicas que tienen hoy en d a las universidades, los docentes tienen la responsabilidad de preparar a los estudiantes en un entorno que esta en permanente cambio, ensenandoles a re exionar y tomar decisiones a partir del conocimiento que poseen y a aplicarlo de manera exible.

De las indagaciones emp ricas generadas y de las investigaciones experimentales

desarrolladas²¹, se ha consolidado el papel que juega el computador en la enseñanza en general y de las matemáticas de manera específica. En los diferentes estamentos educativos se está hablando de un gran proceso, en el que la incorporación de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación y sus aplicaciones a la educación puede ser tan profunda que incluso se convierta en un factor de cambio de los paradigmas clásicos de la educación. Es por esto que nuestro principal objetivo es aportar en la enseñanza del Cálculo III (vectorial), en estudiantes de la universidad EAFIT, utilizando el modelo pedagógico de la EpC y nuevas tecnologías que se encuentran disponibles en la Universidad, para ofrecer nuevas herramientas pedagógicas y tecnológicas a los docentes del área para que puedan diseñar nuevas experiencias de aprendizaje encaminadas a impulsar la comprensión del cálculo en sus estudiantes.

2.6.1. Objetivos

El cálculo vectorial es un curso que gira en torno al estudio de superficies (gráficas en 3-dimensiones), por tal razón es de suma importancia la visualización de estas. La interpretación de los temas tratados cuando se utilizan herramientas computacionales y diseños pedagógicos adecuados en el aula de clase se obtiene una mejor asimilación y comprensión por parte de los estudiantes.

Objetivo general

Propiciar en los estudiantes la comprensión de conceptos del curso de Cálculo en Varias Variables.

Objetivos específicos

Aplicación desde el punto de vista tecnológico.

- Integrar al desarrollo de la clase y fuera de ella tecnologías que se encuentran disponibles en la Universidad EAFIT y en *internet*.
- Relacionar los conceptos propios del curso en forma interactiva, para que los estudiantes amplíen su red de relaciones.

²¹Lopez, Ricardo. Educación Matemática y Tecnologías de la Información. [en línea] http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_07/n7_art_ricardo_lopez.htm [citado en 11 de mayo de 2009].

Aplicacion desde el punto de vista pedagogico.

- Aplicar el metodo de la ensenanza para la comprension (EpC), como soporte pedagogico en el curso.
- Emplear instrumentos pedagogicos que permitan sintetizar y caracterizar la comprension de los estudiantes a partir del la aplicacion del modelo de la EpC apoyado en nuevas tecnolog as.

Aplicacion desde el punto de vista tecnologico y pedagogico.

- Valorar mediante un diseno de encuestas y con base en un metodo de tipo exploratorio multivariado, si la metodolog a de la Ensenanza para la Comprension (EpC), articulado con nuevas tecnolog as, propician una mayor comprension de los topicos del curso en los estudiantes.

La educacion actual esta estrechamente ligada a las transformaciones socioeconomicas y pol ticas que se estan produciendo en el ambito mundial, estas relaciones hacen parte de la formacion integral de cada individuo bien sea en el ambito cultural o en el crecimiento de sus propios conocimientos.

Es necesario buscar continuamente nuevas estrategias de ensenanza y aprendizaje que aporten a una mejor calidad del sistema educativo y al desarrollo de los recursos humanos, con el n de mejorar el bienestar de la sociedad.

La base del metodo pedagogico que se utilizara en este proyecto es el constructivismo, este postula: el alumno, a traves de un proceso de mejoramiento continuo, va descubriendo la razon de lo que hace. De esta forma [10], bajo una orientacion adecuada puede interesarse en la construccion de conceptos matematicos a partir de sus propios intereses y necesidades, orientados por aplicaciones relacionadas con su entorno.

Segun investigadores del proyecto cero de la Universidad de Harvard [7], la comprension se desarrolla en el alumno al estimular la capacidad de generar con un topico una variedad de experiencias que estimulen el pensamiento, tales como: explicar, demostrar, dar ejemplos, generalizar, establecer analog as y volver a presentar el topico de una nueva manera . Por lo tanto comprender , trasciende el solo hecho de saber incorporar el conocimiento, sino que ademas debe utilizarlo de una manera innovadora.

El uso de la tecnolog a en la educacion se ha convertido en una prioridad de las instituciones educativas. Abundan paquetes educativos y propuestas didacticas (informatica educativa, realidad virtual, la Internet, el correo electronico, software,

entre otras). La implementacion de la tecnologia en el aula es algo que merece una consideracion profunda. Los esfuerzos de muchos investigadores se han centrado en como utilizar las nuevas tecnologias para facilitar el aprendizaje y hacerlo mas signi cativo. En particular se debe tener en cuenta: la relacion de lo estudiado con el entorno, con herramientas computacionales adecuadas con base en un diseno pedagogico que permita la integracion y comprension de lo conceptos estudiados.

Para el desempeno de la comprension, se debe tener un maestro dispuesto a apoyar a sus alumnos en el proceso, as como alumnos listos a ser guiados. Tanto el maestro como el alumno deben tener sus metas claras y objetivos jos a seguir; con el apoyo de las tecnologias, el alumno puede desarrollar mas e cientemente sus tareas y el profesor puede lograr mejores resultados de aprendizaje hacia sus alumnos.

La Comprension permite que el estudiante se convierta en un individuo pensante, creativo y critico en un mundo cambiante, por tanto lo indispensable no solo es tener conocimientos sino tambien utilizarlos de manera competente y ordenada ante nuevas situaciones.

2.7. Propuesta metodologica para la ensenanza del Calculo Vectorial en el marco de la EpC

Como se expuso en la Seccion 2.5, pagina 45, la propuesta de la Ensenanza para la Comprension (EpC), es una metodolog a cuyo principal objetivo se centra en brindar nuevas y diferentes opciones de ensenanza y aprendizaje, con el n de a anzar y fortalecer el conocimiento, buscando siempre la comprension de los temas y/o topicos estudiados durante un curso.

Ensenar para la comprension, implica a los docentes plantearse una serie de preguntas tales como: Que temas vale la pena comprender? Que aspectos de esos temas deben ser comprendidos? Como se puede promover la comprension? y Como saber lo que comprenden los alumnos? una vez planteadas y discutidas cada una de estas preguntas, se expusieron diferentes puntos de vista acerca de la ensenanza y del como propiciar la comprension de los temas a tratar dentro del curso al cual hace referencia a este trabajo (Calculo vectorial).

Tomando como base y punto de partida los elementos de la EpC descritos anteriormente en la Seccion 2.5 y apoyado en experiencias adquiridas, se elaboro el diseno del curso Calculo Vectorial basado en el marco metodologico de la EpC, para trabajarlo con dos grupos de estudiantes de ingenier a de la universidad EAFIT. A continuacion se expondra el diseno del curso objeto de este trabajo.

2.7.1. Temáticos Generativos

Los estudiantes al iniciar un curso tienen muchos deseos de aprender, pero lastimosamente se dispone de muy poco tiempo en las clases. Incentivar a los estudiantes en el estudio de un curso, es una de las principales tareas que tiene el docente. Establecer el material de enseñanza que se utilizará a través de él, resulta una labor fundamental para propiciar el buen desempeño en los diferentes temas a estudiar.

A gran parte de los estudiantes les resulta difícil relacionar la matemática con su vida cotidiana y más aun con su carrera. Conocer a los estudiantes es la primera etapa que el docente debe tener en cuenta al iniciar su práctica de enseñanza. Preguntas tales como: ¿Que les interesa y que no les interesa? ¿Que asuntos en sus vidas les despierta interés? ¿Cuáles son las formas con las cuales se siente más cómodo al momento de expresar sus ideas? Resultan ser esenciales al momento de iniciar un curso.

Por lo expuesto anteriormente y en base a las dificultades que una gran mayoría de los estudiantes tienen con respecto a la relación de la Matemática con su entorno, se decidió trabajar como tema generativo la siguiente pregunta:

- ¿Cómo pueden aplicar los estudiantes comprensivamente el Cálculo en su carrera?

Conocer los intereses del alumnado e integrarlos en el proceso de aprendizaje es uno de los pasos más importantes que deben trazarse en los temas generativos; como en nuestro caso, estos deben apuntar al desarrollo de comprensiones profundas, que causen curiosidad e interés, que invite a conectar el tema con el entorno y que lleven consigo la necesidad imperiosa de analizar y reflexionar sobre sus formas y posibles aplicaciones que se puedan encontrar conforme el alumno avanza en su proceso formativo.

2.7.2. Hilo conductor

Ante la variedad de temas que abarcan los programas de estudio, afrontar cualquiera de estos, implica a los estudiantes abordar diferentes conceptos, algunos de ellos más complejos que otros. A su vez, existen conceptos que son más relevantes, estos son los que describen las comprensiones más importantes que deberán desarrollar los alumnos durante el curso. Por lo anterior, el currículo deberá organizarse alrededor de los temas que el docente crea que son los más significativos para los estudiantes.

El estudio del Cálculo Vectorial no es la excepción, dentro de este, existen gran variedad de temas, de los cuales algunos de estos merecen ser estudiados y analizados con mayor profundidad. Estos temas son los que se denominan hilos conductores en el

marco de la EpC; estos topicos deben despertar en los estudiantes curiosidad por los temas a estudiar, mostrar profundidad, rigurosidad y a su vez simpleza. As mismo, deben salirse de lo tradicional y centrarse en los temas esenciales de cada aspecto del proceso formativo. Por lo tanto, el curr culo deber a organizarse alrededor de los temas que el docente crea que son los mas signi cativos para los estudiantes, a n de evitar, de este modo, que las comprensiones complementarias del curso queden dispersas.

Por lo anteriormente mencionado, el hilo conductor referente al curso objeto de este trabajo se formulo de la siguiente manera:

- Los estudiantes apreciaran como el concepto de super cie es clave para la comprension del Calculo Vectorial.

Las derivadas parciales y direccionales, las integrales multiples, los campos vectoriales, entre otros, son conceptos del Calculo Vectorial que se aplican a las super cies, es decir, se utilizan en el estudio de objetos tan basicos como puede ser una esfera hasta edi cacion de gran complejidad; por lo tanto, comprender este concepto es sumamente importante en el estudio de esta asignatura; mas aun, si nos referimos a un grupo de futuros ingenieros como es nuestro caso, se debe hacer enfasis en la relacion y aplicacion que tiene este concepto con su entorno y su carrera.

2.7.3. Metas de Comprension

Las metas de comprension desarrolladas en este trabajo estan enfocadas en grandes temas, que van mas alla de memorizar datos, teoremas o de repetir mecanicamente una serie de formulas. Abarcan conocimientos, metodos de indagacion y razonamientos, como tambien la relacion y aplicacion en otros cursos vistos durante el semestre academico. Estas metas estan enfocadas al desarrollo de las actividades propuestas y apuntan a la profundizacion de los diferentes conceptos. A continuacion se presentan las metas de comprension propuestas.

Los alumnos comprenderan:

- Los vectores en el plano y en el espacio, representandolos geometricamente en diversas situaciones que ocurren en su entorno, aplicandolos en los cursos co-curriculares del semestre y en la solucion de diversos problemas relacionados con las super cies.
- Los conceptos de derivadas parciales y direccionales aplicados a las super cies, como una generalizacion del concepto de derivada estudiado en cursos anteriores.

- Las integrales multiples y de linea como herramientas para estudiar superficies, a traves de aplicaciones con el entorno y en otros cursos co-curriculares.

Las metas de comprension fueron disenadas con base a los temas en los que los alumnos deben enfocar su comprension, de manera especifica los procesos y relaciones de los conceptos que se espera alcancen por medio de su indagacion. Establecen conexiones con situaciones reales, lo cual promueve el interes por los temas a estudiar.

Principalmente estas metas estan enfocadas en lo que deben aprender los estudiantes a partir de las actividades disenadas, permiten enfocar la instruccion y centrarlos en los objetivos que se desean abordar, involucrarlos en los desempenos de comprension alrededor de cada una de las metas, sin olvidar el camino demarcado por el hilo conductor designado.

2.7.4. Desempenos de comprension

Durante el proceso de aprendizaje, y junto a las instrucciones que el docente imparte en el aula de clase, se deben realizar evaluaciones continuas, a fin de que los alumnos fortalezcan y mejoren paulatinamente sus desempenos de comprension. Estas evaluaciones deben relacionarse claramente con las metas de comprension.

Como se detallo en la Seccion 2.5.9, pagina 54, se enunciaron tres fases que hacen parte de las actividades propuestas a los estudiantes para el desarrollo de los desempenos de comprension. A continuacion se describira cada uno de ellos.

Fase de exploracion

Los estudiantes a traves de una red de ideas iran aportando todas aquellas que consideran lo que entienden del Calculo y los conceptos con los cuales se relacionan en su vida. El docente expondra ejemplos concretos de aplicaciones del Calculo. A continuacion se dejaran las preguntas abiertas a los estudiantes: Como puedo aplicar el Calculo a mi carrera? Que asuntos importantes puedo solucionar en mi carrera utilizando el Calculo? Se abre la exploracion del topico a traves de las preguntas anteriormente formuladas, y se pide a los estudiantes investigar sobre estas. Para responder a las preguntas los alumnos deben:

- Consultar diversas fuentes confiables (Textos, Internet, videos, entre otras) que les puedan aportar sobre la utilidad del Calculo y su aplicabilidad en la vida diaria.

- Entrevistar a profesionales que les puedan hablar sobre la utilidad del Calculo y su aplicabilidad en la vida diaria.
- Reconocer objetos (superficies) de la vida diaria que se relacionan con el Calculo.

Con base a las preguntas y a las experiencias adquiridas en esta fase, los estudiantes elegiran un problema para ser resuelto por ellos a traves del calculo, que tenga relacion con su carrera.

Fase de investigacion guiada

En esta fase de investigacion, el docente busca estimular un aprendizaje activo y un pensamiento creativo, los estudiantes construyen la comprension mediante actividades especificas previamente ordenadas que parten de la fase previa realizada (fase de exploracion).

Es importante delinear las actividades que se desarrollaran, se deben tener claros los pasos a seguir para obtener el objetivo planteado (Comprension del Calculo), y las potenciales dificultades que se puedan presentar, a fin de encontrar las soluciones del trabajo investigativo. Para el curso objeto de nuestro estudio se eligio como fase de investigacion guiada la siguiente actividad:

- Los estudiantes comenzaran a resolver el problema elegido por ellos en la fase de exploracion, utilizando los contenidos del curso y las herramientas tecnologicas como apoyo para el desarrollo de este.

En esta fase se pretende que los estudiantes emprendan la tarea de utilizar y manipular los conceptos del Calculo vectorial, para resolver problemas reales, que se presenten a medida que avanzan en el desarrollo de la investigacion.

Fase de proyecto final de sintesis

Los desempenos de comprension no se pueden quedar simplemente como experiencias unicas y privadas, estos deben ser socializados a fin de lograr una constante retroalimentacion de conceptos, ademas estos ofrecen pruebas acerca de la comprension lograda por los alumnos. De esta manera, los desempenos se transforman en un metodo de reconocer, hacer publico y aprender a partir de la comprension de los estudiantes. La aplicacion de esta fase en nuestro trabajo establece:

- Los estudiantes demostraran la comprension lograda del Calculo vectorial en forma de exposicion, basados en un trabajo (proyecto) cuya finalidad es el estudio de un objeto concreto.

Con el desarrollo de esta fase se busca que todos y cada uno de los alumnos conozcan los logros alcanzados por sus companeros durante el semestre academico, comenten y contribuyan al mejoramiento de la comprension del Calculo en su carrera, a fin lograr un verdadero aprendizaje significativo.

Valoracion Continua

La evaluacion o valoracion continua, se fundamenta en criterios publicos, vinculados estrechamente con las metas de comprension, son creados por los alumnos y los docentes. Lo cual permite a estos ultimos, realizar un diagnostico del grado de comprension que han alcanzado sus alumnos y con base a esto, reforzar aquellos que presentan mayor dificultad.

Para alcanzar el mejoramiento y posteriormente la perfeccion de los desempenos de comprension, se deben satisfacer las caracteristicas que hacen referencia a la valoracion continua, las que fueron expuestas en la Seccion 2.5.11, pagina 56. Por lo anterior y buscando cualificar de manera mas objetiva al alumnado, se tomo como base las matrices de evaluacion expuestas en la seccion 2.5.12 paginas 60, 61, 62 para evaluar a los estudiantes de forma cualitativa; de igual forma, el docente realizara evaluaciones formales para complementar dicha evaluacion.

Lo anteriormente descrito, tiene como fin favorecer el desarrollo cognitivo e intelectual del estudiante. Pues es aqu, donde el estudiante encontrara los espacios para mostrar sus avances y logros en el transcurso del proceso de aprendizaje.

2.8. Mapas conceptuales en el aula de clase

Utilizar estrategias que faciliten y favorezcan la ensenanza y el aprendizaje, se ha convertido en uno de los principales objetivos que tienen gran parte de los docentes en la actualidad. Uno de los principales problemas que se evidencia en los estudiantes, es la dificultad que tienen al percibir de manera global la informacion que reciben, les resulta complejo establecer relaciones entre conceptos y por tanto el aprendizaje y comprension de los mismos. La ensenanza puede ser facilitada si los profesores ayudan a los alumnos a emplear tecnicas adecuadas de representacion de informacion y de resumen [44, pp. 11 - 25].

El utilizar instrumentos heurísticos como los mapas conceptuales resultan ser una excelente herramienta que posibilita al estudiante representar gráficamente los conocimientos adquiridos. Por medio de esta herramienta, el docente puede *medir* el grado de comprensión que tienen sus alumnos en los diferentes tópicos tratados durante un curso, permitiéndole así identificar en qué temas los estudiantes tienen falencias para posteriormente reforzar los mismos.

2.8.1. Mapas conceptuales como proceso de síntesis en el aula de clase

Los mapas conceptuales brindan grandes ventajas durante un proceso de enseñanza y aprendizaje. Estos se pueden convertir en una importante estrategia que todo docente debe considerar para lograr que sus estudiantes organicen sus conocimientos y por tanto mejoren el entendimiento y la asimilación de los mismos. En la Figura 2.1 se muestra un mapa conceptual que evidencia las ventajas e importancia de utilizarlos en el aula de clase.

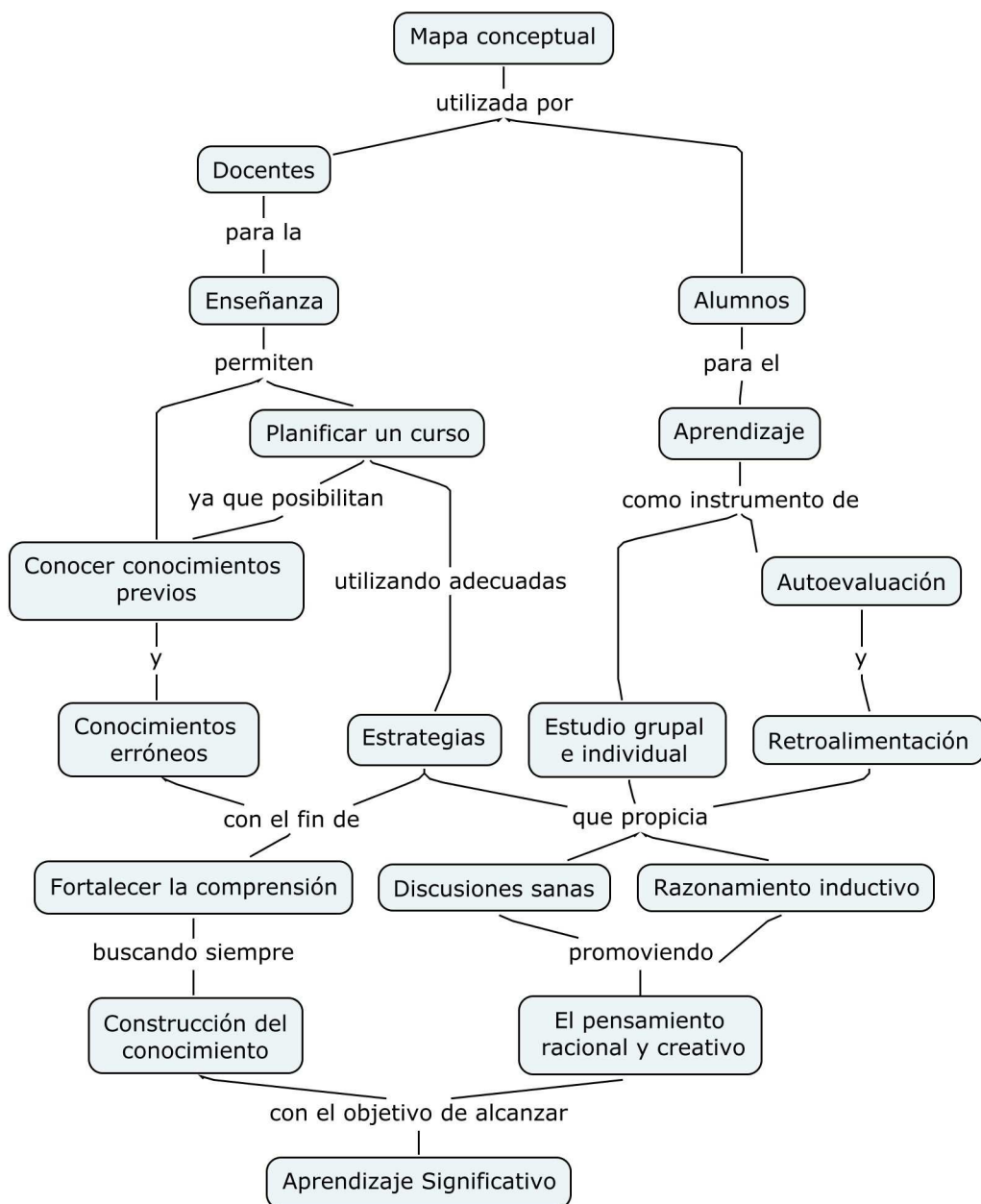


Figura 2.1: Ventajas de los mapas conceptuales en el aula.

A continuacion se mostraran las ventajas mas relevantes que se obtienen al utilizar mapas conceptuales tanto en el proceso de ensenanza como en el proceso de aprendizaje.

Proceso de ensenanza

Mapa conceptual como esquema en el tema a desarrollar en un curso. Al docente le resulta util contar con un mapa conceptual de este tipo, por medio de el puede hacer expl citos los diferentes niveles conceptuales, le ayuda a reconocer los conceptos y bases mas importantes que le ayudaran al alumno en la tarea del aprendizaje de nuevos conocimientos.

Mapa conceptual como herramienta diagnostica. Le permite al docente conocer los conocimientos que los alumnos tienen respecto a un tema, de esta forma puede plani car las estrategias a utilizar en el aula de clase. Conocer la manera en que el alumno relaciona un concepto con otros, ayuda al diseno de estrategias de instruccion para transformar las concepciones erroneas y as facilitar aprendizajes que de otra forma ser an imposibles.

Mapa conceptual como instrumento de evaluacion. Permite observar el cambio en las estructuras cognitivas de los estudiantes, con base a esto evaluar el aprendizaje de los alumnos y los efectos de la instruccion aplicada por el docente. As mismo los mapas conceptuales se convierten en un sistema de autoevaluacion para el alumno.

Mapa conceptual como dinamica grupal para construir conocimiento. La elaboracion de mapas conceptuales en grupos, es una excelente forma de propiciar la participacion de los alumnos, permiten discutir los temas tratados, favoreciendo la construccion de conocimiento.

Mapa conceptual como organizador previo. Un mapa conceptual elaborado con los conceptos mas generales, permiten que el esquema sirva como puente conceptual entre lo que el alumno sabe (conocimientos previos) y el nuevo material a aprender.

Proceso de Aprendizaje

El mapa conceptual como herramienta para el aprendizaje. El proceso de construccion de un mapa conceptual implica relacionar conocimientos nuevos con los adquiridos anteriormente, estas relaciones dependen del dominio del conocimiento, y de la informacion con la que se cuenta. El uso de mapas conceptuales en el aula de clase se convierte en una estrategia que fomenta la comprension de los temas tratados, la elaboracion de estos, tanto individual como grupalmente, ayudan al estudiante a pensar, organizar sus propios conocimientos y por tanto a comprenderlos.

El mapa conceptual como metodo de estudio. La elaboracion de un mapa conceptual puede ser una tecnica de estudio, el docente puede pedir al alumno realizar un mapa conceptual a partir de lecturas, temas, lecciones o incluso de un curso completo. La socializacion del mapa conceptual en el aula de clase se convierte en una estrategia fundamental; muestra al alumno que el esfuerzo de aprender signi cativamente le brinda satisfacciones, le capacita y le invita a participar y entender mas facilmente el desarrollo de los temas.

El mapa conceptual como facilitador del conocimiento. En el desarrollo de un mapa conceptual, el estudiante debe relacionar los diferentes conceptos de una manera jerarquica. En esta etapa, el docente y el mismo estudiante evidencian en que conceptos, temas y/o topicos se presentan di cultades. Es aqu donde el mapa conceptual media como facilitador del conocimiento, puesto que el docente identi ca cuales son los conceptos que se deben reforzar en el aula de clase. Una vez estudiado y fortalecidos estos, el estudiante deber a tener la capacidad de mostrar y evidenciar la comprension de los conceptos por medio de un nuevo mapa conceptual.

2.8.2. La tecnolog a en el aula de clase

Es evidente que la tecnolog a cada d a ocupa mas espacio en nuestras vidas. En nuestras casas, en el trabajo y en general, en muchos de los lugares que usualmente frecuentamos, nos encontramos con tecnolog as que facilitan muchos de los procesos que habitualmente realizamos. Las universidades y por tanto los docentes deben darse cuenta que el mundo tiende a una direccion que esta encamina al uso frecuente de las tecnolog as como instrumento de solucion a diversos problemas que nos aquejan diariamente.

Hoy por hoy, los estudiantes de los diferentes grados de educacion son usuarios frecuentes de diversas tecnolog as, como lo son *Internet*, Moviles, Camaras digitales, Iphone, entre otros. Al usar la tecnolog a en el aula de clase, son los estudiantes los que sacan el mayor provecho de ella ya que se sienten comodoss con el uso de estas. Por lo anterior, vale la pena plantearse las preguntas Por que no utilizar tecnolog as en el aula de clase? Que ventajas trae el uso de estas? Que y como aportan a la ensenanza y el aprendizaje? en efecto, cualquier persona que haya asistido a una clase de matematicas tradicional, pudo observar que gran parte del tiempo utilizado en su desarrollo, el docente y el estudiante destinan la mayor parte a efectuar calculos o repetir procedimientos de forma mecanica. Ahora bien, con la incorporacion de la tecnolog a, esa clase puramente repetitiva puede llegar a convertirse en una en la que se estudia en un ambiente activo y dinamico lo que conlleva a un mayor interes tanto por parte del docente como de los estudiantes.

Cuando se incorporan nuevas tecnolog as en el aula de clase y al aplicarlas

adecuadamente, se garantiza que el desarrollo de las clases se tornen atractivas, innovadoras e interesantes. El uso de estas, le permite al docente mostrar y transmitir sus conocimientos de diferentes y renovadas formas, ya que por medio de las tecnologías, este puede apoyar sus exposiciones magistrales brindándole al estudiante nuevas opciones para construir conocimiento.

A diferencia de un ambiente de aprendizaje tradicional en el aula de clase, al incorporar de manera adecuada la tecnología, permite que los alumnos se conviertan en protagonistas del proceso de aprendizaje, son ellos, los encargados de buscar respuestas a sus preguntas, convirtiendo de esta manera este proceso mucho más interesante y re-exivo para cada uno de ellos.

Los docentes que optan por utilizar la tecnología como instrumento para la enseñanza, tienen la oportunidad de proyectar y diseñar experiencias instruccionales orientadas a explorar, crear, investigar y desarrollar al máximo su potencial profesional y el de sus estudiantes. Convierte a los estudiantes de receptores pasivos a participantes activos en el aula. Se crea un ambiente propicio para la generación de conocimiento, no solo el docente es el encargado de construir verdades, sino que es el estudiante el que por medio de sus intervenciones y conjeturas apoya al docente y a sus mismos compañeros de aula a crear las mismas. Como mencionan Servil y otros [58, pp. 5 - 6], en cuanto a la inclusión de la tecnología y la importancia de la visualización en el Cálculo:

El papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del Cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de Cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y... en el proceso, el espíritu del Cálculo se ha perdido.

La inclusión de tecnologías en el aula de clase, debe ser el resultado de un trabajo previamente planificado que atienda los siguientes principios [18, pp. 3 - 4]:

1. La tecnología debe ser un herramienta de apoyo al proceso instruccional, por lo que debe ser un elemento transparente del proceso. La tecnología no debe convertirse en el centro de atención hacia donde se enfoque el estudiante, sino el medio a través del cual ocurre el intercambio de información y conocimiento durante el proceso instruccional.
2. La inclusión de tecnologías permite transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Existen numerosas herramientas tecnológicas asociadas a los sis-

temas computacionales que permiten diseñar, desarrollar, implantar e implementar gran variedad de actividades que benefician el proceso educativo.

3. La inclusión de tecnologías en el aula, debe atender a las necesidades instruccionales del maestro y del estudiante. El uso de estas debe estar enmarcado en la necesidad común del educador y el estudiante: debe buscar como principal objetivo, el lograr que el proceso instruccional se desarrolle dentro de un ambiente que propicie el éxito para ambos.
4. Los métodos de inclusión deben fundamentarse en las teorías de aprendizaje y las prácticas de enseñanza. Al involucrar tecnologías en el aula, debe considerarse la armonía de los estilos de enseñanza de los docentes y los estilos de aprendizaje de los estudiantes para que el proceso sea efectivo.

Este proceso de inclusión y de integración de tecnologías en el aula, requiere de gran disposición por parte de los docentes. Su finalidad se fundamenta en lograr un plan que permita maximizar los beneficios y el potencial que cierta tecnología pueda proporcionar. La elaboración de un plan de inclusión implica investigar sobre diversos tipos de tecnologías, y de cómo utilizarlas en el aula de clase para favorecer el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Además de esto, requiere realizar reuniones entre docentes para discutir opciones y tomar las mejores decisiones del uso de estas tecnologías en bien de contribuir a un mejor desempeño de los mismos en el aula de clase y fuera de ella.

De igual forma, la tecnología por sí sola no asegura formar mejores alumnos ni mejores ciudadanos, este proceso de inclusión debe ser guiado y acompañado por el docente. La incorporación de nuevas tecnologías al proceso educativo necesita estar subordinada a una concepción pedagógica que busque maximizar sus beneficios.

2.8.3. El portafolio como herramienta de aprendizaje

Al utilizar en la educación metodologías y estrategias activas y participativas de enseñanza y aprendizaje, se vuelve necesario recurrir a técnicas de evaluación que permitan valorar los aprendizajes obtenidos por el alumno durante el transcurso de una etapa académica o de la totalidad de un curso. El portafolio como herramienta de aprendizaje permite valorar de manera gradual los avances que los estudiantes realizan durante un curso, favorece la creatividad, autorreflexión y desarrollo del pensamiento, brinda la oportunidad al docente de considerar y meditar sobre el crecimiento del aprendizaje de sus estudiantes, asimismo, permite que el alumnado aprecie el proceso de enseñanza como algo propio. El portafolio de nido como herramienta de apoyo en un proceso educativo se puede definir como [4, p. 24]:

El portafolio es un instrumento que tiene por objetivo demostrar la formación alcanzada en competencias, valiéndose de la selección fundamentada de las evidencias que debe reunir un alumno para lograr los objetivos de su formación en ciertas competencias cognitivas, procedimentales, actitudinales y de valores que serán necesarias para su práctica profesional.

El Portafolio como instrumentos de enseñanza, aprendizaje y evaluación continua permite coleccionar evidencias que posteriormente posibilita juzgar las capacidades del alumnado en el marco de una materia o disciplina de estudio. Estas evidencias por una parte, son las que garantizan que el alumno está alcanzando el aprendizaje y por tanto el desarrollo de las metas trazadas. Por otra parte, permiten al docente el seguimiento del proceso de aprendizaje de sus alumnos y por lo tanto, también, evaluar y autocriticar su propio proceso de enseñanza.

Además de una forma de evaluación para el alumno [5, p. 8], la elaboración del portafolio le provee la oportunidad de aprender a proyectar y gestionar su aprendizaje a partir de las indicaciones del profesor y de su propia experiencia. Le permite ser más independiente y autónomo en su proceso de aprendizaje así mismo le motiva a tomar sus propias decisiones y autoevaluarse durante la actividad de aprendizaje.

El Portafolio se enmarca en dos situaciones fundamentales del proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante, por un lado envuelve toda una metodología de trabajo y de estrategias pedagógicas en la interacción entre docente y estudiante; y por otro, sirve como instrumento de evaluación que permite articular y coordinar una serie de evidencias con las cuales el docente emite una valoración lo más ajustada posible a la realidad. Resultado que muchas veces es difícil conseguir solamente con instrumentos de evaluaciones tradicionales.

2.9. Metodología estadística

Para comprobar el impacto y verificar los alcances logrados por los estudiantes al implementar la metodología propuesta en este trabajo, se utilizó la encuesta como medio de recolección de datos, posteriormente y una vez recopilada la información, se aplicó el método estadístico Multivariado de Análisis de Correspondencia para analizar y sacar las respectivas conclusiones.

2.9.1. Metodo experimental por encuestas

La investigacion experimental consiste en la manipulacion de unas variables experimentales no comprobadas, en condiciones rigurosamente controladas, con el fin de describir de que modo o por que causa se producen unas situaciones o acontecimientos en particular.

A menudo, los investigadores proponen estrategias de observacion de una poblacion dada, a fin de relevar sobre ese conjunto numerosas caracteristicas, cada una de ellas compuestas de un numero pequeno de modalidades o atributos (alternativas de respuesta). Una de esas estrategias son las llamadas encuestas, estas ofrecen numerosas ventajas en comparacion con otros metodos de recoleccion de datos, entre estas sobresalen: El bajo costo, son de facil aplicacion, no existe riesgo de que el encuestado sea influenciado por factores externos, la informacion a recolectar suele ser mas exacta, mayor rapidez en la obtencion de resultados, permite obtener informacion sobre hechos pasados de los encuestados, ayuda a identificar lo que se quiere conocer de la persona o personas encuestadas, la codificacion, el analisis y la interpretacion son relativamente sencillos, entre otras.

2.9.2. Analisis factorial de correspondencia (AFC)

El Analisis Factorial de Correspondencias es una tecnica estadistica que se aplica al analisis de tablas de contingencia de n individuos (estudiantes) y un conjunto de caracteristicas descriptivas, atributos o modalidades especificados por el investigador. Es un metodo de estadistica descriptiva o exploratorio multivariante, en donde se representa graficamente las filas y las columnas de una matriz de datos en un espacio de bajas dimensiones o dimension reducida y esta basado en la descomposicion del Chi-cuadrado. El estudio de tal dependencia se realiza por una representacion grafica (mapas perceptuales) y por parametros numericos que ayudan a su interpretacion. A continuacion se muestra los principales objetivos que se persiguen al aplicar el metodo AFC:

1. Facilitar la construccion de tipologias de individuos permitiendo la comparacion de todas las unidades de observacion a traves de todas las modalidades de las caracteristicas observadas.
2. Estudiar la asociacion entre las caracteristicas observadas.
3. Resumir el conjunto de caracteristicas observadas en un pequeno numero de variables (factores) cuantitativas relacionadas con el conjunto de variables cualitativas estudiadas.

4. Permitir la comparación de modalidades de las características observadas.

Como se describió anteriormente, la aplicación de este método estadístico se basa en el estudio de mapas perceptuales, básicamente estos están estructurados de la siguiente manera [25, pp. 571 - 593]:

1. Consisten en reducir un espacio de grandes dimensiones (número de modalidades o categorías a otro de menor dimensión (generalmente dos factores) en el que se ubiquen o proyecten simultáneamente las modalidades de las variables.
2. Se puede observar las semejanzas entre modalidades de una misma variable y asociaciones y repulsiones entre modalidades de distintas variables.
3. En el Análisis de Correspondencias, el criterio para extraer factores es captar la mayor parte de asociación entre modalidades. A esa asociación la llamamos inercia (punto de equilibrio del mapa), es decir, extraemos los factores de modo que se produzca lo más elementalmente posible las asociaciones entre modalidades.
4. Los datos se transforman de tal manera que las modalidades de una variable juegan el papel de variables y las de la otra de observaciones y viceversa.
5. La segmentación de variables, modalidades y de individuos es común en este método exploratorio, pues reflejan un buen grado de asociación dentro de un contexto establecido.
6. El valor Chi-cuadrado se transforma en una medida de similitud.
7. Los valores negativos indican menor similitud y los positivos mayor semejanza.

Esta naturaleza multivariante puede revelar relaciones que de otro modo pueden no detectarse a nivel univariado o bivariado, y no solo descubre que hay una relación, sino que también ayuda a mostrar cómo es la relación entre las variables. El gráfico (mapa perceptual) que se obtiene con este análisis permite detectar relaciones estructurales entre categorías o modalidades de variables. Por tal razón, se puede hablar de segmentación de variables, de modalidades y de individuos para un mejor análisis. A continuación se describe la forma de interpretar los mapas perceptuales [25, pp. 574 - 593]:

1. Las modalidades más cercanas al punto de inercia (El centro del mapa) son las más relevantes; es decir las que reflejan la mayor información brindada por los encuestados (estudiantes).

2. Los ejes o factores no representan ningun concepto formado por los atributos agrupados en ellos. Es decir es dificil asociarles un nombre que los identi que simplemente son percepciones.
3. La interpretacion del mapa perceptual se hace en terminos muy intuitivos: entre mas cercana este una caracter stica observable de un atributo o atributos mayor asociacion entre ellos.
4. Atributos o modalidades que esten formando angulo recto con respecto al punto de inercia no estan asociadas.
5. Los atributos que aparecen muy cercanos entre ellos son similares, los que aparecen muy separados son diferentes.
6. Si el angulo entre un atributo y otro(s) es agudo ($<90^\circ$), existe una asociacion positiva, esta asociacion aumenta cuanto mas pequeno es el angulo; mientras que a un mayor angulo las asociaciones son negativas. Vale notar que atributos o modalidades que formen angulo llano (180°) con respecto al origen o punto de inercia arrojan interpretaciones contrarias.
7. El centro del mapa (punto de inercia o de equilibrio) donde se interceptan los ejes y los vectores, esto si se quiere trazar una l nea recta entre este punto y cada modalidad, representa el promedio general de cada atributo; y es el punto a partir del cual las modalidades o respuestas de los estudiantes se dispersan o se diferencian.
8. Esto concluye que aquellas modalidades mas cercanas al centro del mapa sean las mas signi cativas.
9. Otra interpretacion es el llamado efecto Guttman, este se obtiene cuando la nube de puntos (modalidades) tiene forma de parabola. Basicamente es el resultado de opiniones extremas y contradictorias; el centro de gravedad esta en el interior de la parabola. En general este efecto re eja opiniones o puntos de vista at picas, es decir, muy lejos de una realidad expresada por un gran numero de individuos.

La razon de escogencia de este metodo estad stico para el analisis de nuestro trabajo de investigacion, radica en lo siguiente [25, pp. 547 - 548]: El analisis factorial de correspondencia es una tecnica de analisis multidimensional que puede inferir las dimensiones subyacentes de una serie de juicios de preferencia o similitud realizados por los encuestados sobre los objetos de estudio. En nuestro caso la aplicacion de la metodolog a de la EpC apoyado en las NTICs²².

²²NTICs: Nuevas Tecnolog as de la Informacion y la Comunicacion.

Una vez aplicada la encuesta y dispuestos los datos, este análisis multivariante puede ayudar a determinar:

- Que modalidades o categorías utilizan los encuestados cuando evalúan los objetos.
- Cuántas modalidades o categorías pueden utilizarse en una situación en particular.
- La importancia relativa de cada modalidad.
- Como se relacionan las modalidades en los mapas perceptuales y sus interpretaciones.

Por lo tanto, este análisis multidimensional permite al investigador determinar la imagen percibida de un conjunto de objetos (EpC y herramientas tecnológicas), cuyo propósito es transformar los juicios del consumidor (Estudiantes) de similitud o preferencia (es decir, preferencia por un tipo de pedagogo o el uso de tecnologías) en distancias representadas en un espacio multidimensional [25, p. 548]. Por otra parte, este método, más que preguntar, escucha a las personas interesadas, partiendo del supuesto de que esa opinión es fundamental para llevar a cabo cualquier proceso de cambio.

Para analizar este capítulo, se quiere resaltar como el modelo pedagógico de la EpC apoyado en herramientas tecnológicas, beneficia la aplicación de los conceptos tratados en el curso por parte de los estudiantes, y la enseñanza del mismo por parte del docente. En el siguiente capítulo se expondrán los resultados de la aplicación metodológica propuesta.

Cap tulo 3

Aplicacion de la EpC apoyada con tecnolog a

En lo que sigue, se exponen los resultados derivados de la aplicacion del metodo pedagogico de la Ensenanza para la Comprension (EpC) llevada a cabo en cuatro cursos de Calculo III (Vectorial) en la universidad EAFIT, durante el ano 2009. Para recolectar la informacion referente a la aplicacion de la metodolog a propuesta, se utilizo la encuesta (ver Seccion 2.9.1, pagina 82), por sus grandes ventajas en comparacion con otros metodos.

Seguidamente se muestra la encuesta preliminar que se realizo al grupo de estudiantes y posteriormente en la Seccion 3.2, pagina 91 las diferentes tecnolog as aplicadas al curso, su uso y modo de empleo en el aula de clase y fuera de ella. Luego en la Seccion 3.3, pagina 106, se describe el desarrollo de las actividades realizadas por los alumnos durante el transcurso del semestre academico y por ultimo en la Seccion 3.6.1, pagina 162 la aplicacion de la encuesta nal.

Resulta importante resaltar que la informacion expuesta en este Cap tulo ayudo a complementar el analisis estad stico derivado de la aplicacion de las encuestas. Este analisis se presenta en cap tulo 4.

3.1. Aplicacion de la encuesta inicial

Como se mostro en el Cap tulo 2, Seccion 2.9.1, pagina 82, se utilizo la encuesta como medio de recoleccion de datos. La aplicacion de esta, se llevo acabo al iniciar cada semestre academico. Su proposito era detectar el grado de comprension del Calculo y la utilizacion de tecnolog as en los procesos de ensenanza y aprendizaje llevados a cabo en cursos anteriores. Una vez recolectada la informacion se utilizo el metodo estad stico

de analisis factorial de correspondencias AFC descrito en el Capitulo 2 seccion 2.9.2 pagina 82, para analizar e interpretar dicha informacion. Estos resultados se exponen en el Capitulo 4.

A continuacion se muestra la encuesta aplicada. Se seleccionaron cinco estudiantes al azar y se transcriben las respuestas escogidas a cada una de las preguntas formuladas. El numero de estudiantes que seleccionaron dicha respuesta se muestra en frente de cada una de ellas.

Encuesta preliminar

La siguiente encuesta que a continuacion usted va a contestar, tiene como proposito fundamental, detectar el grado de comprension del Calculo al momento de empezar el curso de Calculo III, cuyo enfoque estara marcado por el metodo de ensenanza y de aprendizaje que tiene por nombre la Ensenanza para la Comprension (EpC), con el soporte tecnologico de applets, calculadoras, mimio, entre otras, que seran utilizado en el aula de clase durante el transcurso del semestre.

Senale con una X su respuesta.

1. Considera que el Calculo se refleja en la vida diaria?
 - a) Nunca. (1)
 - b) Algunas veces. (3)
 - c) Todas las veces. (1)

2. Aparte de los exámenes presentados en los diferentes cursos de su carrera, ha aplicado el Calculo en alguna situacion de su entorno?
 - a) Si. (1)
 - b) No. (4)

3. Son necesarias funciones de varias variables para modelar fenomenos que ocurren en la naturaleza?
 - a) Si. (3)
 - b) No. (0)
 - c) No tengo informacion al respecto. (1)

4. Las propiedades de continuidad, derivabilidad e integrabilidad para funciones de una variable, se podran extender a funciones de varias variables?
- a) Si. (3)
 - b) No. (1)
 - c) No tengo informacion al respecto. (1)

En el desarrollo de los cursos de Calculo estudiados anteriormente, ha empleado herramientas tecnologicas como:

5. Applets?
- a) Nunca. (5)
 - b) Algunas veces. (0)
 - c) Siempre. (0)
6. PDA s (Poket PC)?
- a) Nunca. (5)
 - b) Algunas veces. (0)
 - c) Siempre. (0)
7. Mimio?
- a) Nunca. (5)
 - b) Algunas veces. (0)
 - c) Siempre. (0)
8. Piensa usted que con el uso de herramientas tecnologicas dentro del aula de clase, se logra descubrir, comprender y visualizar los conceptos relacionados con el Calculo?
- a) Si. (4)
 - b) No. (0)
 - c) No tengo informacion al respecto. (1)
9. El Calculo se aplica a todos los fenomenos de la vida diaria? (f sico, qu micos, biologicos, economicos, sociales, ambientales, etc.)
- a) Si. (4)

- b) No. (0)
 - c) No tengo informacion al respecto. (1)
10. El Calculo estudia entre otros temas funciones, l mites derivadas, integrales simples y multiples.
- a) Si. (4)
 - b) No. (0)
 - c) No tengo informacion al respecto. (1)
11. Una funcion con derivada negativa es:
- a) Decreciente. (4)
 - b) Creciente. (0)
 - c) No recuerdo haberlo estudiado. (1)
12. Todo proceso socio-economico, administrativo, nanciero, industrial, biologico, ambiental, etc., involucran funciones de varias variables?
- a) Si. (3)
 - b) No. (0)
 - c) No tengo informacion al respecto. (2)
13. La derivada de una funcion signi ca en la vida diaria: velocidad, razon de cambio instantanea, costos marginales, utilidades marginales, etc.?
- a) Si. (4)
 - b) No. (0)
 - c) No recuerdo haberlo estudiado. (1)
14. Que signi ca la Integral de una funcion?
- a) La antiderivada. (1)
 - b) Longitudes de arcos. (0)
 - c) Fuerza, promedios, varianza, momentos, etc. (1)
 - d) Todas las anteriores. (3)
 - e) ninguna de las anteriores. (0)

15. Con funciones de varias variables se podr a modelar el ingreso de una familia, la cuenta de los servicios publicos de un hogar, sus ingresos personales, entre otros?
- a) Si. (3)
 - b) No. (0)
 - c) No tengo informacion al respecto. (2)

3.2. Aplicacion tecnologica

Para nadie es un secreto que el uso de tecnolog as se ha convertido en algo habitual en el d a d a de las personas. Actualmente, la tecnolog a ha modi cado la forma de vivir de la gran mayor a de nosotros, nos facilita muchas de las actividades que realizamos diariamente y a su vez podemos disfrutar de una mayor calidad de vida. Ahora bien, el uso adecuado de esta depende exclusivamente de nosotros, de la forma de utilizarlas y de como sacarle el mayor provecho en bene cio de todos y cada uno de nosotros. Como plantea Cuban [12, p. 17], en un silogismo sobre creencias del uso de la tecnolog a en muchos profesionales de Silicon Valley: El cambio produce una sociedad mejor-La tecnolog a produce cambios- Entonces, la tecnolog a crea una sociedad mejor .

Poner a disposicion del alumnado diferentes opciones de aprendizaje, se convirtio en uno de los principales objetivos trazados en este proyecto. Fue all donde la inclusion de la tecnolog a, tanto dentro como fuera del aula, desempeno un papel fundamental y relevante dentro del marco metodologico de ensenanza y aprendizaje que se planteo en este trabajo. Hoy por hoy, la inclusion de herramientas tecnologicas en el ambito educativo resulta ser una poderosa forma que optimiza cualquier proceso pedagogico, sin embargo, no basta con incorporar cualquier tecnolog a, es necesario escoger cuidadosamente cuales son las que ofrecen mayor bene cio para el docente y el alumno, as como tambien, cuales son las mas adecuadas para desarrollar un curr culo.

Jose Mar a Izquierdo [26], frente al uso de la tecnolog a en la educacion y al rol que debe tener el docente en el aula de clase, plantea:

Los profesores tenemos la obligacion de educar a nuestros alumnos con los recursos tecnologicos propios de su generacion, si queremos estimular y mantener el interes del estudiante. La educacion debe ser divertida y no a la fuerza, y la tecnolog a permite acomodarse a los distintos estilos de aprendizaje de cada estudiante.

A continuacion se describen las tecnolog as utilizadas durante el proceso de ensenanza y aprendizaje del curso objeto de este estudio.

3.2.1. Applets

La metodología desarrollada en esta investigación tiene como uno de sus pilares la implementación de Applets en el curso de Cálculo Vectorial, como herramienta para la enseñanza y comprensión del mismo. Los docentes encargados de impartir los cursos, seleccionaron de internet Applets apropiados para desarrollar las temáticas a tratar. Al iniciar el semestre académico, las páginas web donde se encontraban los Applets fueron enviadas vía e-mail a los estudiantes, con el mismo propósito de incentivar y motivar el estudio fuera del aula. Los docentes encargados de cada curso, expusieron los temas tanto teóricos como analíticamente, apoyados siempre en los Applets como herramienta de enseñanza. A continuación se hará una reseña acerca de los applets y posteriormente la aplicación de estos en el curso.

Un applet es una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo un navegador web. A diferencia de un programa, un applet no puede ejecutarse de manera independiente, ofrece información gráfica y en muchas ocasiones el usuario puede interactuar con él. Son multiplataforma, es decir, son compatibles con todos los sistemas operativos (Windows, Mac, Linux, etc.), por lo que su uso se ha hecho frecuente.

Los applets son pequeños programas escritos en lenguaje Java, diseñados para ser ejecutados desde internet, son usados no solo por programadores, sino también por diseñadores o usuarios que los incluyen en sus páginas web a fin de dinamizar la navegación, animar textos, imágenes, menús, incluir banners, formularios, juegos entre otras, y por supuesto, para crear aplicaciones educativas.

La utilización correcta de applets, permite reducir esfuerzos y tiempos dedicados a tareas propuestas, que muchas veces resultan ser tediosas si no se utilizan las herramientas adecuadas. A su vez sirven de apoyo y complemento a la exposición magistral del docente puesto que le permite mostrar los conceptos de una manera clara, atractiva e interesante. Al tener una inmejorable visualización, el docente y el alumnado se ven beneficiados en cuanto al tiempo que gasta el docente en explicar un concepto y en la comprensión del mismo por parte del alumnado.

En internet, y más exclusivamente en las web de contenido Matemático, se está creando un estilo de páginas que combinan applets con explicaciones y ejercicios a resolver, utilizando múltiples aplicaciones que se podrán clasificar en tres niveles:

Applets para ilustrar conceptos

Applets que muestran imágenes con las cuales se puede interactuar ofreciendo nombres, conceptos o ventanas con explicaciones. Por ejemplo, operaciones con vectores, trazas,

curvas de nivel, derivadas parciales, entre otras mas.

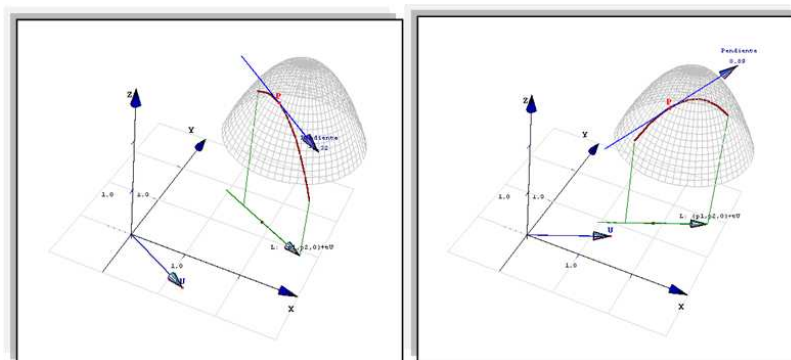


Figura 3.1: Applet - Derivada direccional.

En el Calculo Vectorial, la comprension de conceptos esta estrechamente ligada con la visualizacion, si el docente logra mostrarlos de una forma clara, se garantiza en gran parte la asimilacion de estos. El uso de applets dentro del proceso de ensenanza y aprendizaje del Calculo Vectorial, resulto ser un recurso didactico valioso. El emplear estos como apoyo a las exposiciones de los docentes se convirtio en una herramienta poderosa cuando se pretend a mostrar conceptos que requieren de una excelente visualizacion.

Un claro ejemplo se observa en la Figura 3.1. La calidad grafica de este applet es notable. Los docentes, al apoyar sus exposiciones utilizando esta herramienta, lograron mostrar de manera interactiva el concepto, a su vez capturaron la atencion del alumnado, lo cual beneficio el entendimiento y posteriormente la comprension del mismo.

Applets para calcular, operar o comparar

En internet existen paginas que contienen applets con los cuales se pueden realizar calculos, y obtener resultados. Por ejemplo, areas, volumenes, derivadas, integrales, entre otras. Como tambien existen algunos que permiten ingresar funciones y obtener resultados graficos, por ejemplo: Planos tangentes, curvas y superficies parametricas, superficies cilindricas, esfericas, entre otros.

Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 3.2, este applet, permite ingresar directamente la funcion, mostrando la superficie y el plano tangente en el punto que se le indica, todo esto en tiempo real. Como se puede notar, para obtener la grafica basta con ingresar la ecuacion, lo que le permite al docente optimizar el tiempo y profundizar en el concepto clave.

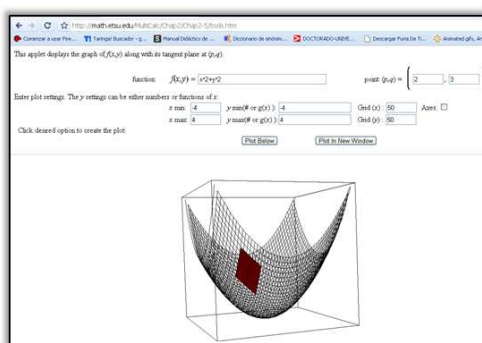


Figura 3.2: Applet - Plano tangente.

Applets programables y recon gurables

Como se menciona en la Seccion 3.2.1, pagina 92, un applet es un programa escrito en lenguaje java, por tal motivo, crear estos resulta una dif cil tarea para aquellos que no manejan este lenguaje de programacion. Por esto, resulta preciso contar con programas o herramientas que faciliten obtener los applets a partir de destrezas basicas en el manejo de software. Afortunadamente, existen programas como Cabri y Geogebra que permiten construir y recon gurar applets de una manera sencilla, tan solo basta con conocer unas simples palabras claves, complementadas con el conocimiento matematico de lo que se quiere presentar.

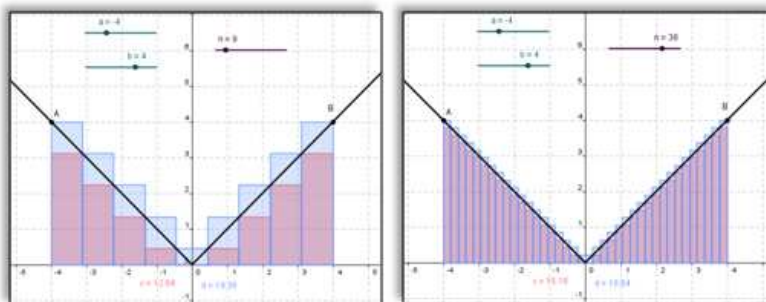


Figura 3.3: Applet - Suma de Riemann.

Un ejemplo de lo anteriormente mencionado, se observa en la Figura 3.2. Utilizando el Geogebra el docente construyo un applet que hace referencia al concepto de suma de Riemman, basado en sus conocimientos y las necesidades propias de los estudiantes para el entendimiento del mismo. Este tipo de applet permite analizar y veri car ciertas propiedades referentes al estudio de la integral como herramienta para conocer areas bajo una curva, aunque tambien es aplicable en muchas otras situaciones. Al ser modi cable este applet, permite a docente y estudiante estudiar y analizar diferentes

funciones de una forma rapida y visualmente interesante. A su vez, este applet puede ser colgado en la pagina web o blog personal del docente para que posteriormente, el estudiante tenga la oportunidad de explorarlo y estudiarlo independiente del sitio donde se encuentre.

Los docentes y estudiantes utilizaron applets como herramienta base para mostrar y estudiar los conceptos tratados durante el semestre academico. La Figura 3.4, muestra una sesion de clase en la que el docente utilizando applets y una pizarra interactiva, de la cual se hablara mas adelante en la Seccion 3.2.2, presenta el concepto de campo vectorial. Este applet muestra la importancia de visualizar los conceptos de una forma clara, en particular, este applet permite mostrar el concepto en 3 dimensiones, cosa que resultar a extremadamente dif cil de plasmar en un tablero utilizando un marcador como unica herramienta, esto sin considerar el tiempo que puede tomar el intentar dibujar esta clase de imagenes.

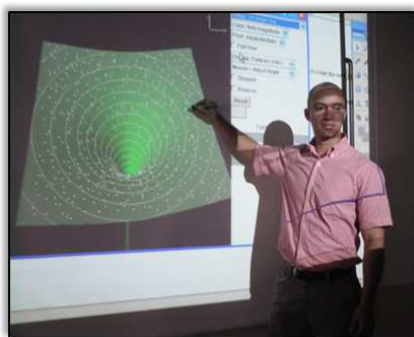


Figura 3.4: Applets en una sesion de clase.

Ahora bien, el uso de Applets en el aula de clase para la ensenanza y aprendizaje del Calculo Vectorial permitio explorar conceptos que hasta hace poco tiempo eran de dif cil comprension. El potencial, que ofrecio como herramienta educativa, se caracterizo por tener una interfaz interactiva que brindo al docente la posibilidad de mostrar tematicas de forma clara y atractiva. De otro lado, se creo un ambiente propicio de interaccion entre el alumno, el conocimiento y el proceso de aprendizaje. A continuacion se muestran algunas direcciones webs que contienen applets del Calculo Vectorial trabajados en el aula de clase, como tambien una breve descripcion de estos:

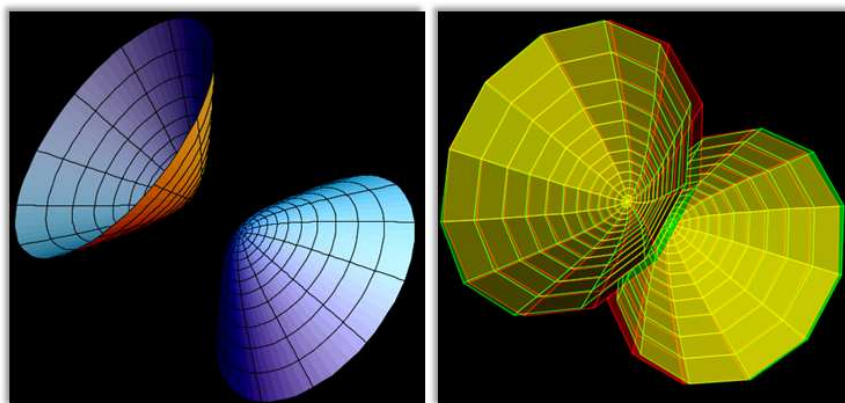


Figura 3.5: Superficie con efecto solido y anaglífico.

<http://3d-xplormath.org/j/applets/es/>

Esta web de contenido interactivo, muestra gran cantidad de superficies, curvas planas y en el espacio. A través de un menú de navegación se puede acceder a los applets, estos pueden ser manipulados por el usuario, cambiar la configuración de los parámetros y opciones que definen la apariencia de la imagen. Un ejemplo de esto se observa en la Figura 3.5, a la izquierda se muestra una superficie en forma sólida y a la derecha la misma en forma anaglífica, esta última es muy interesante pues utilizando unos lentes adecuados (anaglíficos) provoca un efecto tridimensional de la imagen.

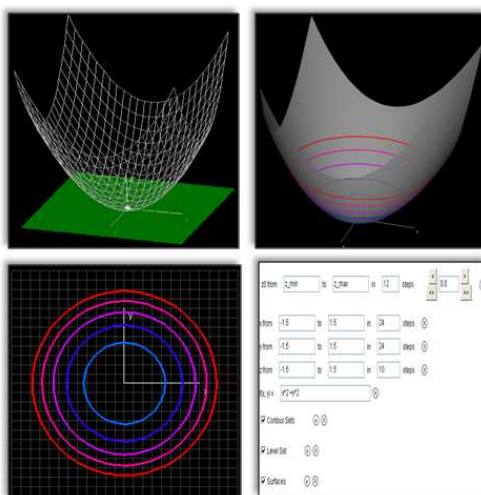


Figura 3.6: Applet - Curvas de nivel.

<http://www.slu.edu/classes/maymk/bancho/LevelCurve.html>

Esta web interactiva hace referencia al concepto de curva de nivel. El usuario tiene a su disposición tres ventanas de gráficos y una ventana de control. En esta última, se

puede cambiar desde la superficie mostrada, su visualización y hasta los intervalos que se desea muestre la imagen, entre otras.

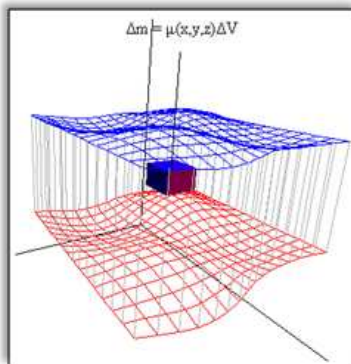


Figura 3.7: Superficie relacionada con el concepto de integral triple.

<http://math.etsu.edu/multicalc/Chap4/Chap4-6/index.htm>

Esta web contiene distintos applets que hacen referencia al concepto de la integral triple. Muestra ejemplos de aplicación, utilizando para cada uno de ellos un respectivo applet, los cuales pueden ser manipulados por el usuario, para apreciar desde diferentes perspectivas las superficies relacionadas.

3.2.2. Pizarra interactiva

Las Pizarras interactivas [43, p. 34], permiten la interacción del usuario con cualquier aplicación que se quiera ejecutar. Se pueden manejar con lapiceros especiales, según las marcas, o con el dedo. Estas pizarras son el reflejo de la pantalla del ordenador desde el que se ejecuta la aplicación. Normalmente van acompañadas de diferentes paquetes de software con distintas funciones: dibujar, reconocimiento de caracteres, realizar presentaciones personalizadas, grabación tipo video de lo que se presenta en pantalla. Durante el transcurso del semestre académico se utilizó la pizarra interactiva Mimio, como herramienta pedagógica. A continuación se realizará una reseña del uso y las ventajas que ofrece en comparación con las pizarras convencionales, entre otras aplicaciones.

Mimio

El Mimio es una combinación de hardware y software que permite a los usuarios capturar el texto y todo lo que se escriba o dibuje en una superficie o tablero en

tiempo real. Así como, reproducir y revisar instantáneamente las anotaciones hechas sobre el mismo por el profesor, expositor o público.

Con una barra Mimio, un ordenador y un proyector, un tablero convencional puede convertirse en uno interactivo. A diferencia de las pizarras interactivas usuales, la tecnología de Mimio se incorpora en una barra compacta que se fija fácilmente en cualquier superficie (ver Figura 3.8). El lápiz Mimio funciona como un ratón, de forma que se puede controlar la pantalla del ordenador directamente desde el tablero. Por lo que se puede navegar por internet, mostrar imágenes, presentaciones, entre otras, directamente desde la pizarra.



Figura 3.8: Mimio - Pizarra interactiva convencional.

Colocando la barra Mimio en una superficie o tablero como se muestra en la Figura 3.9, cualquier información que se escriba o dibuje con los marcadores y el borrador, es capturada por el PC. Estas ilustraciones o textos pueden ser convertidas a diferentes formatos como lo son JPG, BMP, que son formatos de imagen o a formato PDF que es un formato de almacenamiento de documentos, entre otros. Posteriormente pueden ser impresas, enviadas por correo electrónico o compartidas de diferentes maneras. En el link [Simulador Mimio](http://appletsok.blogspot.com/) de la página web¹ se encuentra un simulador de esta herramienta tecnológica.

¹<http://appletsok.blogspot.com/>



Figura 3.9: Mimio - Modo captura electronica.

Con la inclusion del Mimio en el aula de clase, se pretend a capturar la atencion del estudiante, aprovechar mas el tiempo en clase, aumentar de manera considerable el interes y la motivacion del alumnado, as como la participacion de ellos en las diferentes actividades propuestas. De manera tal, que tuvieran la opcion de copiar los apuntes necesarios o el no copiar los mismos, ya que el uso de esta herramienta permite guardar todo el contenido que se esta trabajando en el tablero en un archivo con formato PDF, el mismo que una vez nalizada la clase era enviado a todo el alumnado v a correo electronico.

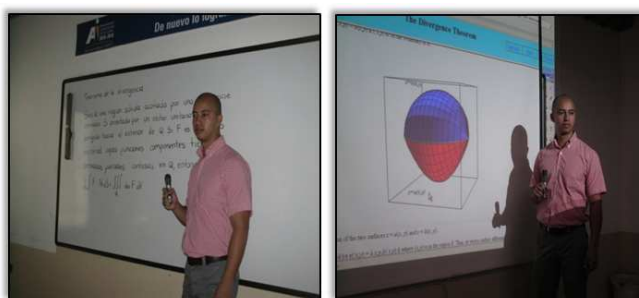


Figura 3.10: Uso del Mimio en el aula.

La Figura 3.10 presenta el uso de esta herramienta en el aula. La imagen izquierda muestra al docente dictando su clase magistral utilizando el Mimio, como se puede observar el profesor escribe su clase de forma tradicional, la unica diferencia es que la barra Mimio que se encuentra ubicada en la parte izquierda del tablero captura todo lo que se consigne en el. La imagen derecha muestra al docente complementando la explicacion de lo escrito en la Figura izquierda con un Applet adecuado, que facilita la comprension del tema tratado. Gra cas seleccionadas de estos Applets se insertaron en el documento que se les envio a los estudiantes al nalizar la clase.

Una vez expuesto el tema en cuestion, apoyado en el uso del Mimio y Applets, utilizando la barra de herramientas Mimio (dirigirse al link [Barra de herramienta Mimio](#)

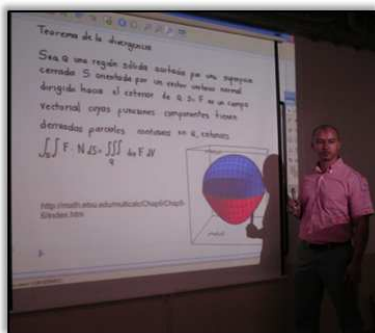


Figura 3.11: Resultado del uso del Mimio.

en la pagina web²), puede agregar la imagen del Applet al documento en tiempo real, como tambien la direccion electronica donde se encuentra el mismo (ver Figura 3.11). Una vez finalizada la clase, el documento en formato PDF puede ser enviado v a e-mail a cada uno de los estudiantes. El documento de la clase que se muestra en la Figura 3.11 Puede ser descargado del link [Ejemplo del uso del Mimio](http://math.atau.edu.ar/usuarios/Chap4/Chap4_11.html) que se encuentra en la pagina web³.

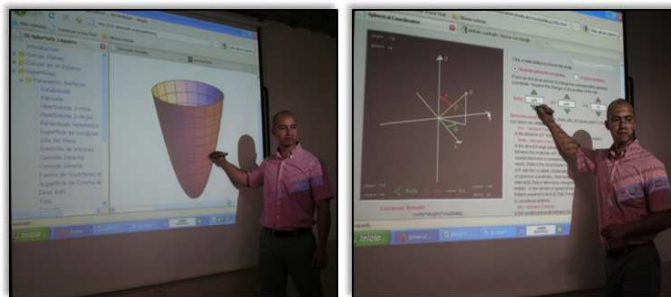


Figura 3.12: Mimio - Modo interactivo.

Una de las principales ventajas que ofrece esta herramienta es la posibilidad de manipular el PC directamente desde el tablero, en otras palabras, convierte la zona de proyeccion en un escritorio gigante en donde el lapiz Mimio hace de cursor o raton interactivo, lo cual lo convierte en una forma sencilla y potente de compartir recursos digitales en el aula de clase. Un ejemplo de esto se puede observar en la Figura 3.12.

²<http://appletsok.blogspot.com/>

³<http://appletsok.blogspot.com/>

3.2.3. Pocket PC (PDA)

Asistente Digital Personal, PDA, (del ingles *Personal Digital Assistant*) es un computador de mano originalmente diseñado como agenda electronica (calendario, lista de contactos, bloc de notas y recordatorios), con un sistema de reconocimiento de escritura. Hoy día se puede usar como una computadora domestica en la que se pueden ver películas, crear documentos, reproducir archivos de audio, entre otros [30, p. 5]. Actualmente estos dispositivos cuentan con numerosas ventajas en comparacion con sus antecesores, entre estas se encuentra: la posibilidad de incluir diferentes aplicaciones, navegar por internet y compartir informacion gracias a la tecnologia Wi-Fi, que se encuentra incorporada en esta herramienta, entre muchas otras cosas más.

Advirtiendo las ventajas que trae la inclusion de este dispositivo en el aula y buscando optimizar significativamente la visualizacion de las superficies estudiadas en la clase, como también contribuir al buen desempeño de los estudiantes y en la interaccion estudiante-profesor-estudiante, se opto por incluir en este dispositivo el software 3D Universal el cual fue desarrollado en la universidad EAFIT a través del Proyecto Mobile-Learning.



Figura 3.13: PDA - Software 3D universal.

3D universal es un potente software cuyo principal fin es representar gráficamente funciones matemáticas. El uso de este programa permite visualizar gráficas en dos y tres dimensiones, lo cual convierte esta herramienta en un instrumento imprescindible de enseñanza del Cálculo vectorial. Estas gráficas en 3D pueden ser representadas en diferentes coordenadas como lo son cartesianas, esféricas, cilíndricas y en 2D polares y cartesianas.

Una de las principales ventajas que ofrece este software, en comparación con otros de su mismo estilo, es la posibilidad de sacar provecho a la tecnología Wi-Fi que incorporan las PDAs. Por medio de este, y permite al docente controlar desde su dispositivo o desde su PC, lo que el estudiante está observando, puede manipular y

explicar conceptos en tiempo real sin ninguna interrupcion por parte del alumnado lo cual ayuda a capturar la atencion de los mismos. Pero tambien, el profesor puede dar el control a uno de sus estudiantes a fin de que pueda aclarar dudas sobre el tema tratado o simplemente corroborar por medio de un ejemplo desarrollado por el para compartilos con sus companeros en sus propias PDA s.



Figura 3.14: PDA s en el aula.

El integrar esta herramienta tecnologica al aula, facilito notablemente la comprension de distintos temas tratados en clase, los que muchas veces se hacen largos, tediosos y terminan por confundir a los alumnos, si no se cuenta con estrategias adecuadas para la ensenanza de los mismos. Contribuyo al mejoramiento de la participacion de los estudiantes durante la clase, se mostraron activos en el desarrollo y estudio de los temas, creo debates en torno a los conceptos estudiados logrando as fortalecer el proceso de aprendizaje.

3.2.4. Software

Las ventajas que ofrece el uso del software en el aula son inobjctables, constituye una efectiva herramienta de apoyo para el docente durante las sesiones de clase y un excelente instrumento que permite al alumnado reforzar sus conocimientos de forma independiente. As mismo, facilita y complementa la puesta en practica de las metodolog as de ensenanza.

Actualmente quedan (aunque cada vez menos) docentes que rechazan el uso de software, y mas aun, cuando se hace referencia a los programas graficadores aduciendo que los alumnos no aprenden a graficar ya que todo lo hace la computadora. La misma discusion existio en su momento con la calculadora y hoy en da ya no quedan instituciones educativas (salvo lamentables excepciones) que pidan una tabla de logaritmos para trabajar cuando los alumnos pueden acceder a una calculadora cientifica. Esperemos que lo mismo ocurra en poco tiempo con las computadoras y que

los docentes permitamos que las maquinas y los software educativos invadan nuestras aulas ocupando los lugares que nosotros destinemos a ese fin [29, p. 15].

Incluir software en el aula permite integrar varias metodologías y temas, que todos dispongan de mucha información de manera inmediata, que el trabajo realizado en clase quede registrado en distintos soportes, que lo desarrollado pueda ser reproducido fácilmente, que los alumnos se familiaricen con el empleo de distintos recursos informáticos desarrollando capacidades específicas, capacidades de área y capacidades fundamentales, participando activamente en la construcción de su propio aprendizaje. Lo cual refleja que el software educativo, usado de manera eficiente, puede constituirse en un medio para favorecer la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje [33, p.35].

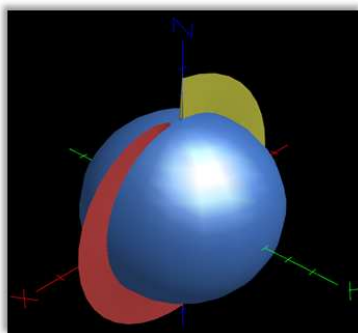


Figura 3.15: 3D Universal.

3D Universal⁴ fue el software utilizado por docentes y estudiantes en el aula y fuera de ella durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo vectorial, durante el presente trabajo de investigación. Como se menciona en la anterior sección, este mismo programa fue integrado en las Pocket PC a fin de permitir la manipulación de las superficies por parte del alumnado, favorecer la participación activa en la clase, crear discusiones, entre muchas otras cosas más. A diferencia del uso que se le dio a este software con la herramienta antes mencionada, el docente utilizando una computadora y un proyector, mostraba y exponía los conceptos de forma independiente cuando pretendía enfatizar en algún concepto o tema en cuestión, con lo cual lograba captar la atención de todo el alumnado, favoreciendo así el entendimiento y comprensión del tópico estudiado. La Figura 3.16. muestra una sesión de clase utilizando esta herramienta.

Como se ha hecho mostrar a lo largo de este proyecto, la visualización de los conceptos tratados en este curso va de la mano con la comprensión de los mismos. Es de notar que el uso de este software le permite al docente mostrar las superficies en 3 dimensiones con una calidad de imagen inmejorable y con la posibilidad de mostrar

⁴Este software puede ser descargado de la web: <http://sites.google.com/site/alejmontoya/>.

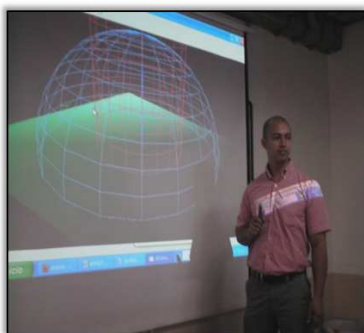


Figura 3.16: 3D Universal en el aula de clase.

y manipular diferentes superficies tan solo cambiando una ecuación, por lo que si se compara con una clase tradicional, el tiempo que destina el docente tratando de plasmar una sola de estas imágenes (superficies) en un tablero resulta un obstáculo en el entendimiento y comprensión del tema estudiado, ya que el tiempo destinado al estudio del concepto se ve notoriamente disminuido y como consecuencia el entendimiento del tópico puede verse distorsionado.

3.2.5. Presentaciones Digitales

Otra de las tantas alternativas que ofrecen las nuevas tecnologías al proceso de enseñanza son las llamadas presentaciones digitales más conocidas como diapositivas digitales. Esta herramienta es una excelente opción con la que cuenta el docente para representar, mostrar y transmitir sus conocimientos de una forma clara e ilustrada, además de ser una herramienta relativamente sencilla de manejar, permite incluir texto, imágenes, videos, animaciones entre otras.

Al estar en medios digitales, se facilita la distribución del material, por tal motivo se pueden compartir de diferentes formas ya sea enviadas a un correo electrónico, copiadas en un medio magnético, colgadas en un sitio web personal o simplemente impresas. Entre muchas de las tantas ventajas que ofrece esta herramienta se destacan⁵:

- Facilitan la exposición de un tema ante un auditorio.
- Proveen una estructura fácil de seguir.
- Constituye un mecanismo que facilita recordar.

⁵Tomado de: <http://www.webquest.es/wq/presentaciones-digitales-0>. [citado en Julio 25 de 2010.]

- Permiten la actualizacion y ampliacion del contenido.
- Limitan el uso de apuntes.
- Los efectos visuales motivan tanto al exponente como al auditorio.

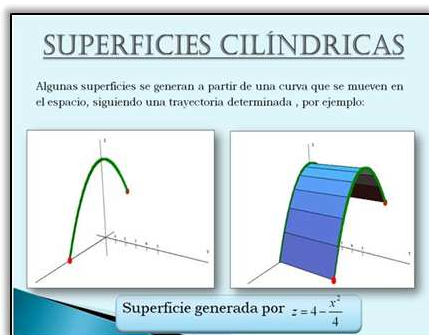


Figura 3.17: Diapositiva utilizada en el aula.

Freelance Lotus, Presenter Corel, Keynote Apple, Power Point son algunos de los programas mas utilizados para elaborar presentaciones digitales, siendo este ultimo el mas conocido y utilizado por la mayor a de personas. En internet existen webs que permiten alojar presentaciones de forma gratuita, entre estas se destaca [Slideshare.net](http://www.slideshare.net), en esta web se pueden almacenar hasta 20MB de espacio con presentaciones digitales ademas de esto admite alojar documentos en formato PDF. Una vez almacenada la presentacion se asigna una direccion URL, no hay opciones de privacidad, existe la posibilidad de realizar busquedas de presentaciones, dejar comentarios a las mismas directamente en la web asignada o en la cuenta Twitter del usuario, compartirlas a traves del correo electronico, a traves de Facebook o incrustarlas en nuestra propia pagina web o blog, entre muchas otras opciones que ofrece este sitio.

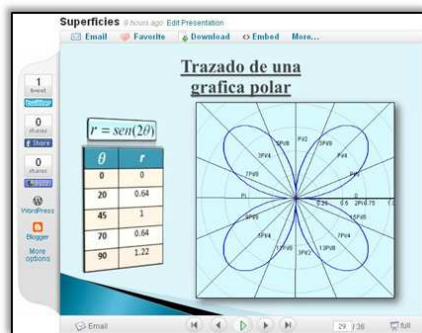


Figura 3.18: Presentacion digital en Slideshare.

Ahora bien, esta herramienta web permite al docente subir las presentaciones realizadas en el aula de clase a lin , que posteriormente, el estudiante pueda acceder a esta independientemente del sitio donde se encuentre solo basta con digitar la direccion URL que el docente le suministre. La Figura 3.18 muestra una de las presentaciones digitales expuestas en el aula, la cual fue cargada en la herramienta web antes mencionada, esta presentacion se encuentra disponible en la pagina web⁶.

Gracias a los resultados obtenidos en lo referente a la aplicacion de las herramientas tecnologicas descritas, y del uso de estas, tanto dentro como fuera del aula podemos concluir que el proceso de ensenanza y de aprendizaje se vio enriquecido en muchos aspectos, como por ejemplo: facilito el desarrollo, aplicacion y comprension de los temas estudiados, genero una atmosfera de constante comunicacion y participacion, estimulo y cautivo al alumnado, beneficio el proceso de interaprendizaje, genero interes en el estudiante por explorar nuevas herramientas tecnologicas que le ayudaran a consolidar su conocimiento, en pocas palabras, creo nuevas experiencias individuales y grupales de aprendizaje alrededor de estas.

Ahora bien, tomando como base y punto de partida las metas de comprension que se describen en la Seccion 2.5.7, pagina 50, y basados en actividades propuestas por el docente y complementadas por los mismos estudiantes, estos ultimos en grupos de tres consignaron en un portafolio los avances logrados durante el transcurso de cada fase de investigacion (ver Seccion 2.7.4, pagina 72). A continuacion se muestran las actividades realizadas por los estudiantes en las diferentes fases.

3.3. Aplicacion del diseno metodologico

Como se mostro en el Capitulo anterior la metodolog a pedagogica, base del desarrollo de este proyecto, es la Ensenanza para la Comprension apoyado en herramientas tecnologicas provistas por la Universidad EAFIT. Esta pedagog a trae consigo una serie de actividades, las mismas que se desarrollan en tres grandes etapas que las hemos llamado: Fase de Exploracion, Fase de Investigacion y Proyecto nal de sntesis. Los estudiantes deb an consignar en un portafolio los avances logrados en cada una de estas etapas, con el in de llevar un seguimiento de la evolucion del proceso formativo por parte del docente y del estudiante.

El portafolio como instrumento de valoracion continua del aprendizaje en el desarrollo del curso, fue de vital importancia. Su construccion permitio a los estudiantes plasmar y dar a conocer sus esfuerzos, estrategias y progresos de los objetivos que persegu an en el transcurso del semestre academico. De igual forma, posibilito observar

⁶ <http://www.slideshare.net/luisrcf/super-cies>

la evolucion del conocimiento, habilidades y destrezas del alumno, por lo que su uso se convirtio en el principal medio de autoevaluacion y de retroalimentacion en el proceso de aprendizaje. De otro lado, el portafolio brindo al docente la oportunidad de realizar una evaluacion mas autentica, es decir, mas acorde a los resultados obtenidos por el alumnado en el proceso. A continuacion se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes part cipes de la investigacion en cada una de estas etapas formativas.

3.3.1. Fase de exploracion

El Calculo vectorial es un curso que gira entorno al estudio de las super cies (Imagenes o guras en 3-Dimensiones), fue de suma importancia lograr que los estudiantes empezaran a considerar el Calculo como algo que en realidad esta presente en el diario vivir de todos y cada uno de los ellos. Por tal motivo se propuso como actividad inicial reconocer objetos (super cies) de la vida diaria que se relacionaran con el Calculo.

Para lograr lo anteriormente mencionado, los estudiantes tuvieron que valerse de diferentes fuentes como: textos, internet, videos, entrevistas a profesionales, entre otras, a n de ampliar el panorama que ten an con respecto a la importancia del Calculo en su carrera y por ende en su entorno. A continuacion se mostrara el desarrollo de algunos portafolios y las respectivas conclusiones a las que llegaron los estudiantes una vez nalizaron la etapa de exploracion.

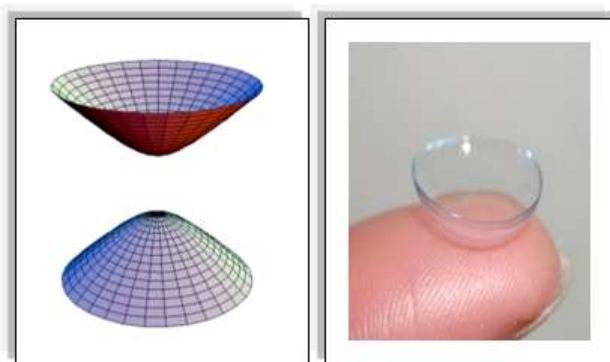


Figura 3.19: Hiperboloide de dos hojas - Lente optico.

Como se puede apreciar en la Figura 3.19, los estudiantes relacionaron parte de la ecuacion $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ que representa un hiperboloide de dos hojas, con un lente optico, apreciaron la importancia de conocer la ecuacion que modela este objeto y el significado que tiene en el desarrollo y diseno de muchos productos.

La Figura 3.20 muestra como un grupo de estudiantes de Ingenier a Civil, relacionaron la ecuacion $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ que representa un hiperboloide de una hoja con una

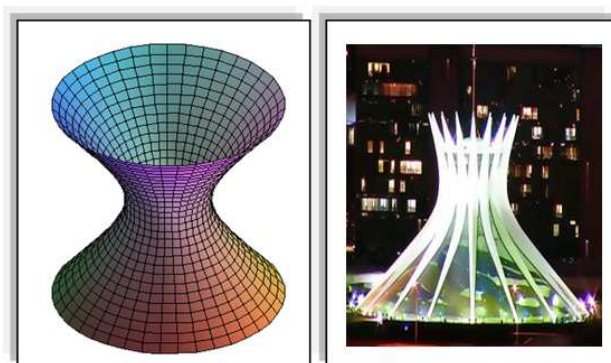


Figura 3.20: Hiperboloide - Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida.

estructura que es s mbolo de la ciudad de Brasilia, lograron observar como esta ecuacion puede modelar edi caciones tan importes como la anteriormente mencionada.

As mismo lograron reconocer edi caciones de la ciudad relacionadas con el Calculo, investigaron sobre la construccion, las posibles ecuaciones que modelaban estructuralmente cada una de estas, situaciones que ocurren diariamente en su entorno, entre otras. Seguidamente se muestran algunos ejemplos de lo anteriormente mencionado.

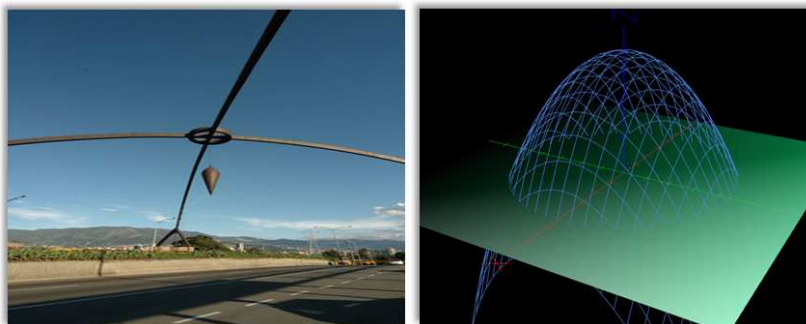


Figura 3.21: Pendulo de la ciudad de Medell n.

En la Figura 3.21, se muestra una edi cacion localizada en la ciudad de Medell n, los estudiantes consignaron lo siguiente respecto de esta: En este puente podemos observar el Calculo, especialmente en la estructura que sostiene el pendulo, podremos representar esta estructura con la ecuacion $z = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + 6$. Siendo el punto $(0, 0, 6)$ el centro donde cuelga el pendulo.

La necesidad de asimilar y extrapolar lo visto en clase para estos estudiantes se torno en un desafio, que inicio en el aula y nalizo cuando lograron ligar los conceptos adquiridos con muchas edi caciones propias de la ciudad, un ejemplo se muestra

claramente en la anterior figura. Y lo mas importante, consiguieron desarrollar nuevas destrezas y competencias valiendose esencialmente de su propia motivacion.

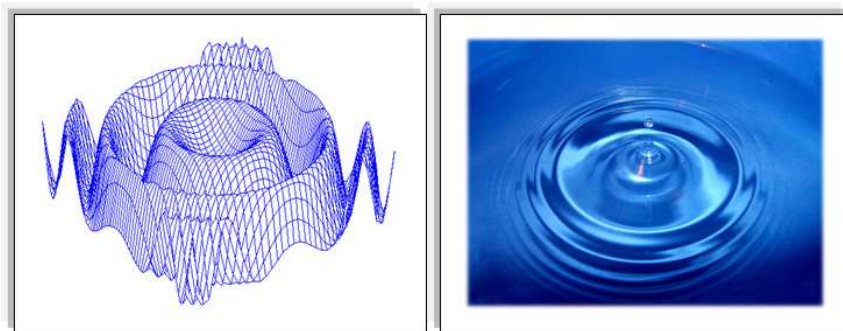


Figura 3.22: Gota de agua.

Los estudiantes relacionaron situaciones que ocurren diariamente como se muestra en la Figura 3.22. Al respecto, encontraron lo siguiente: cuando una gota de agua toca el suelo se genera una serie de ondas debido al choque, su representacion puede modelarse por medio de la ecuacion $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Utilizando el software 3D Universal logramos modelar una concha marina (Figura 3.23). Esta superficie la generamos utilizando coordenadas esfericas: $r = f(t, p)$ donde t se define como el angulo que forma con el eje X la proyeccion del radiovector sobre el plano XY y p es el angulo entre el eje Z positivo y el segmento de recta OP , donde O es el origen y P es un punto en el espacio. La ecuacion con la que conseguimos esta superficie fue $R = F(t, p) = t \cdot 5$, esta superficie con forma de concha de mar, resalta la resonancia del sonido, ademas, su forma amplia, se reduce a medida que nos acercamos a el punto $(0, 0, 0)$, brindando una proteccion a elementos invasivos. Esta forma permite la expansion del sonido, por eso es muy utilizada en el diseno de teatros de operas.

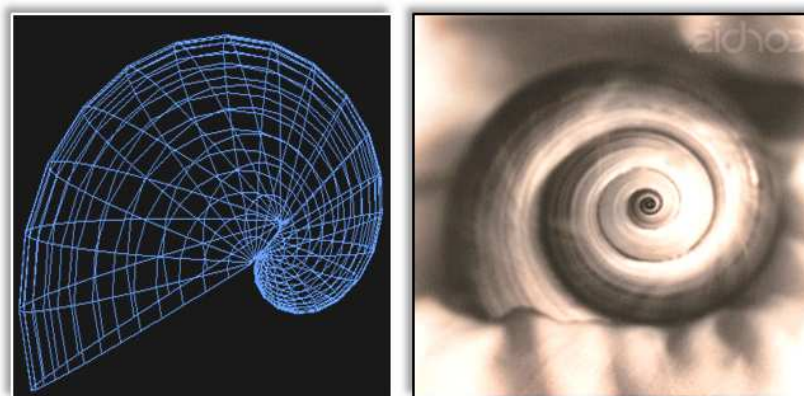


Figura 3.23: Concha marina.

La capacidad de modelacion matematica que alcanzo este grupo de estudiantes vale la pena resaltarlo. Apreciaron la matematica como un fenomeno presente en la naturaleza; ademas de esto, notaron que el Calculo se puede relacionar con casi cualquier situacion del entorno, lo que les permitio entender, explicar, comprender y abordar el mismo desde una nueva perspectiva, donde predominaba el deseo de adquirir y desarrollar nuevas habilidades que se crearon gracias al propio interes de construir, relacionar y aplicar estos nuevos conocimientos.

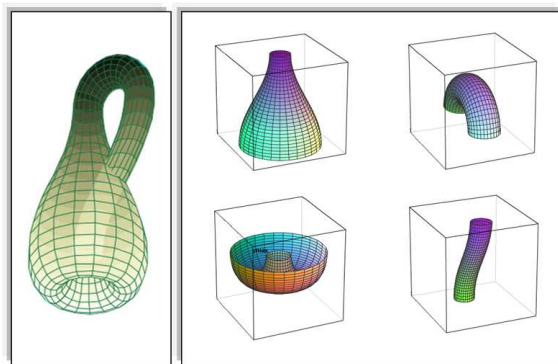


Figura 3.24: Botella Klein.

La Figura 3.24, muestra claramente la capacidad de asociacion y de abstraccion que lograron los estudiantes al representar un objeto conocido como lo es la botella o jarron de Klein, utilizando ecuaciones estudiadas en clase y otras consultadas y analizadas por ellos mismos, consiguieron dividir, representar y relacionar este objeto por medio de otras super cies, utilizando ecuaciones y conceptos estudiados en la clase y fuera de ella. Estas super cies fueron creadas con el applet que se encuentra en la direccion web <http://webspace.ship.edu/deensley/stealthisapplet/ParamSurfaces/index.html>.

Entre muchos de los aspectos a resaltar en esta fase de investigacion, sobresale el desarrollo de un grupo de estudiantes de Ingenier a de Diseno, que clasi caron y relacionaron diferentes super cies y ecuaciones con objetos encontrados diariamente en el entorno, como tambien la aplicacion y asociacion que tiene el Calculo en su ciudad.

En esta fase de exploracion los alumnos consignaron: Dentro de los conceptos mas importantes del Calculo de Varias Variables se encuentra el de super cie, el cual es la base para la realizacion de este proyecto y nos permitira ver dentro de nuestra propia experiencia de diseno, como podemos aplicar multiples apartes de la materia a nuestra carrera y a la vida real .

As mismo estos estudiantes, describieron y notaron lo siguiente: En el mundo existen innumerables super cies que son comunes a nuestro entendimiento, pero realmente no nos imaginamos que cada una de ellas pueda ser representada matematica y algebraicamente por una ecuacion . La Figura 3.25 muestra algunas super cies

escogidas por los estudiantes, su aplicacion, ecuacion general y una breve descripcion de cada una de ellas. Los parametros reales de las superficies utilizados por este grupo de estudiantes se describen en la siguiente fase.

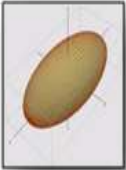

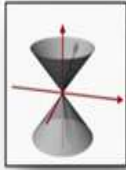

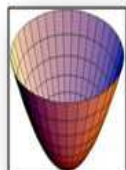

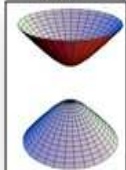

SUPERFICIE	APLICACIÓN	ECUACIÓN	DESCRIPCIÓN
<p>Elipsoide</p> 	<p>Balón de Fútbol</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	<p>Donde a, b y c son números reales positivos que determinan la forma del elipsoide. Si dos de estos números son iguales, el elipsoide es un esferoide; si los tres son iguales, se trata de una esfera¹.</p>
<p>Cono Elíptico</p> 	<p>Megáfono</p> 	$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$	<p>En Geometría analítica y Geometría diferencial, el cono es el conjunto de puntos del espacio que verifican, respecto un sistema de coordenadas cartesianas².</p>
<p>Paraboloide Elíptico</p> 	<p>Antena</p> 	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2zc = 0$	<p>Cuando $a = b$, el paraboloide elíptico es un paraboloide de revolución: una superficie obtenida al girar una parábola respecto de su eje. Es la forma que tienen las llamadas <i>antenas parabólicas</i>, entre otros objetos de uso cotidiano³.</p>
<p>Hiperboloide de dos Hojas</p> 	<p>Copa</p> 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	<p>El hiperboloide es la superficie de revolución generada por la rotación de una hipérbola alrededor de uno de sus dos ejes de simetría. Estas superficies son de dos clases: de una y de dos hojas⁴.</p>

Figura 3.25: Superficies cuadradas.

Edificaciones donde esta presente el Calculo

Con respecto a la aplicacion del Calculo en su ciudad los estudiantes describen: En esta etapa de investigacion y observacion de la aplicacion del Calculo de varias variables en diferentes disciplinas y en la vida misma, hemos encontrado muchas superficies que han sido plasmadas en construcciones y en productos de uso comun. Encontramos un articulo muy interesante en la Web⁷, que habla especficamente de la obra de un reconocido arquitecto a nivel mundial Anton Gaud (1852-1926), este arquitecto atribuye mucha importancia a la forma y al fondo de sus creaciones. Asimismo, nos llamo mucho la atencion la siguiente frase.

Para que un objeto sea altamente bello es preciso que su forma no tenga nada de superfluo, sino las condiciones que lo hacen util, teniendo en cuenta el material y los usos a prestar. Cuando las formas son mas perfectas exigen menos ornamentacion

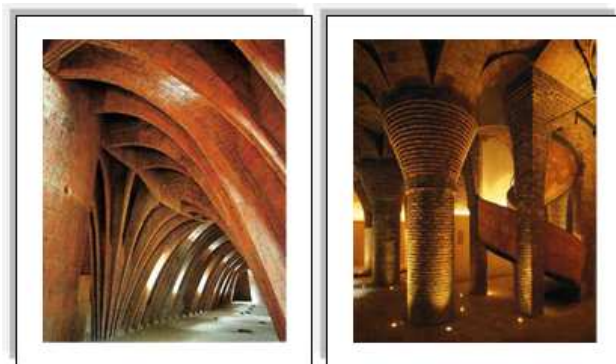


Figura 3.26: Catenaria - Columnas del Parc Guell.

De igual forma, hemos encontrado localmente muchas superficies que han sido utilizadas en la construccion de nuestra ciudad, estuvimos recorriendo diversos sitios y encontramos muchos lugares en los que se encuentran objetos que se pueden modelar con el Calculo.

Jardín botánico Joaquín Antonio Uribe

Dentro del recorrido que realizamos observamos esta forma en la arquitectura que nos pareció curiosa, ya que puede asemejarse a un paraboloide hiperbolico achatado,

⁷El Vientre de un Arquitecto. Disponible en: <http://www.matesco.unican.es/talleres/matematicas/transparencias/transparencias-raul.pdf>

tambien podemos identificar una forma de elipsoide (Macizo) con un corte y un hueco en la mitad de la superficie



Figura 3.27: Jardin Botanico Joaquin Antonio Uribe.

Planetario de Medellin Jesus Emilio Ramirez Gonzalez

El planetario de Medellin, su cupula tiene forma de media esfera. Este diseno no fue hecho al azar, el fin que buscaba el arquitecto era simular mediante proyecciones espectaculos astronomicos que se vieran reales; por que se necesitaba una superficie que tuviese la forma del planeta Tierra. Igualmente, reconocemos que muchas de las superficies de la naturaleza han sido copiadas por los seres humanos a escalas menores o mayores y han sido muy utiles y admiradas.



Figura 3.28: Planetario Jesus Emilio Ramirez Gonzalez.

Parque de los deseos

Dentro de este parque encontramos muchas formas y superficies que relacionamos con el Calculo, un ejemplo de esto se muestra en la Figura 3.29. Esta superficie esferica

tiene como finalidad mostrar un efecto luminoso que cuando rota emula el firmamento y a las constelaciones en la noche; esta ilusion optica solo es posible conseguir si el objeto tiene forma esferica.



Figura 3.29: Parque de los deseos.

Rodrigo Arenas Betancur escultor y maestro fredonita, en su obra arquitectonica El hombre creador de energia, la cual tiene una altura de $18m$, se encuentra ubicada en la Universidad de Antioquia. En esta escultura se pueden observar diferentes superficies y formas que la componen, como por ejemplo un paraboloide hiperbolico en la parte de la base y otras como hiperboloides y paraboloides que forman el cuerpo de la escultura.



Figura 3.30: El hombre creador de energia.

Iglesia de la Consolata (Consoladora)

La forma del techo de esta iglesia es bastante extrana, se asemeja a un paraboloide hiperbolico, la parte superior tiene forma de hiperboloide de una hoja. Esta estructura arquitectonica es una de las mas atractivas y que despierta mayor interes en la ciudad de Medellin. Por lo que se ha convertido en sitio obligado de visita para los turistas.



Figura 3.31: Iglesia de la Consolata.

Parque explora

Uno de los últimos parques que se han construido en la ciudad con fines educativos y de entretenimiento. Las superficies que lo componen son muy llamativas por la diversidad de formas. Indudablemente esta estructura es hoy en día una de las más modernas expresiones de la arquitectura realizadas en la ciudad de Medellín.



Figura 3.32: Parque tematico Explora.

Una vez finalizada la fase de exploración y basados en las experiencias derivadas del desarrollo del portafolio, los estudiantes obtuvieron sus respectivas conclusiones. A continuación se muestran algunas de estas.

3.3.2. Conclusiones

Entre muchas de las conclusiones expresadas por los estudiantes en esta fase de investigación se destacan:

- La aplicación de este trabajo fue trascendental para avanzar y adquirir conceptos

que nos permitieran utilizarlos en el campo laboral de nuestras carreras.

- Este trabajo nos dio a entender muchas cosas de las cuales no nos habamos dado cuenta, ya que no las habamos analizado muy bien, pudimos observar que el Calculo esta en todas partes y as es mas facil para nosotros entender esta materia ya que podemos relacionar las gra cas con objetos y cosas de nuestro entorno. De ahora en adelante se nos facilitara el entendimiento de estas gra cas puesto que las podemos relacionar con objetos de nuestra vida cotidiana.
- El uso del Calculo en la vida cotidiana tiene una gran importancia, ya que podemos analizar todo lo que ocurre en ella mediante los conocimientos que nos brinda la materia.
- Concluimos que el Calculo es indispensable en la vida diaria, puesto que sin el muchos eventos f sicos podr an ser una catastrofe (estructuras o construcciones) o no ser an bien aprovechados algunos recursos (el volumen de agua necesario en una represa, las nanza, la economia, entre otros.)
- Podemos notar que en el ejercicio de conceptualizar los objetos de la vida cotidiana nos permite desarrollar habilidades con el n de usarlas en el d a a d a.
- Reconocimos las diferentes ecuaciones y sus aplicaciones y signi cados en cada una de las guras que representan.
- Entendimos el signi cado de las diferentes variables de cada una de las ecuaciones y las transformaciones de las formas de acuerdo a la modi cacion de dichas variables.

En esta fase de investigacion el uso de tecnolog as se hizo evidente. En su gran mayor a, los estudiantes utilizaron gra cadores para representar cada una de las super cies. Al utilizar ecuaciones para representar estas, consiguieron asociarlas y extrapolarlas con multiples objetos y situaciones de repetida ocurrencia en su entorno. Crearon ambientes de trabajo que estimularon la re exion, se aventuraron a explorar sus ideas, y a buscar argumentos que las validaran, mostrandose activos durante todo el proceso.

3.4. Fase de investigacion

Como se mostro en el Cap tulo 2, Seccion 2.5.9, pagina 53, el principal objetivo que se pretend a alcanzar en esta fase era estimular en los estudiantes un pensamiento activo

y creativo; efectuando una actividad de manera re exiva, con una retroalimentacion activa, lo que permitir a obtener mejores desempenos.

Ahora bien, basados en la fase de exploracion, que permitio a los estudiantes abordar el Calculo desde una perspectiva diferente a la tradicional, estos empezaron a comprenderlo no solo de una forma puramente mecanica, sino que lograron llevarlo a un contexto aplicativo y entender que este se hace inherente y esencial en sus carreras. Fue as como en la presente fase, se busco que los estudiantes se involucraran en la elaboracion de los desempenos de comprension por medio de una actividad propuesta por el docente y ellos mismos, actividad que los atrajera para dedicarle buena parte de su tiempo, con la nalidad de propiciar el estudio, la generalizacion y aplicacion de los multiples conceptos tratados en clase, que desembocar a en ellos el lograr otros desempenos de comprension y el descubrimiento de nuevas habilidades.

Por lo anteriormente expuesto, el docente propuso a los estudiantes escoger un objeto de los mostrados en la fase de exploracion, el cual deb an analizarlo y estudiarlo utilizando los conceptos vistos en el aula. As mismo, valerse de herramientas tecnologicas apropiadas para potenciar y obtener mejores resultados. A continuacion se muestran apartes de esta fase de investigacion incluyendo algunos de los objetos seleccionados.

3.4.1. Elipsofa

El Calculo de varias variables, es una rama de la matematica muy importante y aplicable a nuestra vida diaria, ya que por medio de integrales, derivadas, gra cas y funciones de varias variables, podemos darle explicacion a lo que observamos y a la forma de las cosas que estan en nuestro entorno (como un tablero, una papelera, las espirales de un cuaderno, etc.) y al comportamiento de los sistemas que rigen al mundo (velocidad, aceleracion, posicion y razones de cambio).

A ra z de todo esto, es que vemos la importancia del Calculo y de todos los conceptos aprendidos en clase, porque nos permiten ver mas alla de una simple ecuacion o un teorema. Durante todo el semestre nos enfocamos en pensar y utilizar la imaginacion para traspasar los conceptos matematicos a la realidad, buscar formas de relacionar las super cies vistas en la clase a contextos reales, calcular su area y su volumen por medio de integrales dobles y triples y por ultimo, crear un proyecto en forma fisica y a escala, buscando dinamismo en el aprendizaje.

En conclusion, con nuestro trabajo, buscamos dar a conocer que el calculo va mucho mas alla de ejercicios teoricos, sino que busca mostrar de una manera creativa el signi cado de una ecuacion, de un concepto o un ejercicio.

Diseno del producto

Con base en los conocimientos adquiridos en clase, la investigacion hecha para realizar el trabajo anterior y nuestra imaginacion para detectar superficies cuadraticas en la vida diaria, nos han llevado a plantear el proyecto final para el curso de Calculo III, el cual hemos estado realizando desde el principio del semestre y que culminara con la entrega del proyecto en forma fisica.

Escogimos llamarlo Elipsofa, ya que la parte principal del sofa que es el asiento tiene forma de elipsoide y nos parecio que es un nombre muy original y que llama la atencion comercialmente. Para la construccion de nuestro sofa utilizaremos las superficies que se muestran en la Figura 3.33, estas, son solo una aproximacion a las reales, en la fase final describiremos estas superficies con los parametros que se ajustan a nuestro modelo:

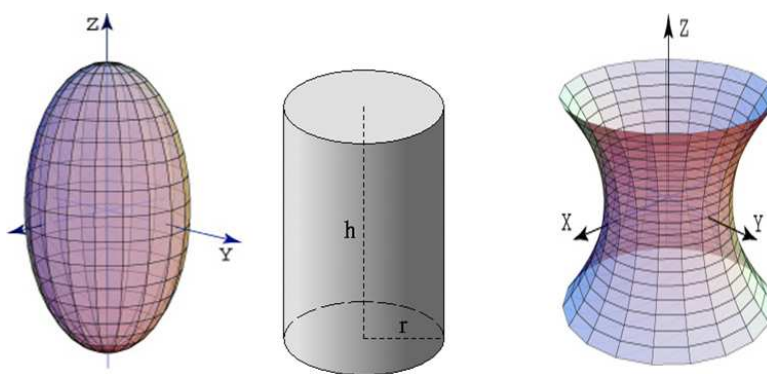


Figura 3.33: Elipsoide, Cilindro, Hiperboloide de una hoja.

Una vez seleccionado el diseno, procedimos a modelarlo en 3 dimensiones, para esto utilizamos el software PRO-E, en la Figura 3.34 se muestra el diseno terminado de nuestro elipsofa.

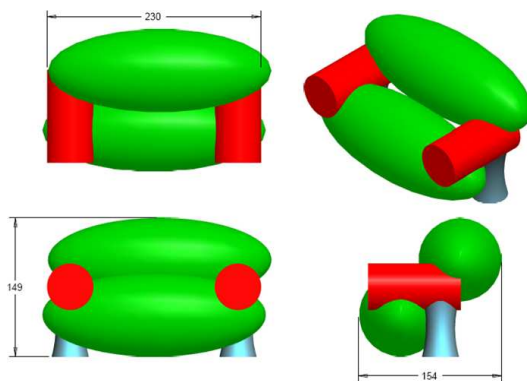


Figura 3.34: Elipsofa modelado en 3D.

Luego del trabajo realizado hasta ahora podemos concluir que ademas de que las graficas cuadraticas estan en todo lo que vemos día a día, tambien nosotros, como disenadores, nos podemos basar en ellas para disenar todo tipo de productos innovadores y atractivos.

3.4.2. Lampara para nochero

Queriendo ir mas alla y tratando de sobrepasar las paredes del aula de clase o las hojas de un solo parcial, donde el Calculo simplemente es visto como una herramienta para dar soluciones a problemas o ecuaciones, o algo mas plano y sin sentido como una cantidad de leyes, numeros u operaciones que finalmente seran olvidadas luego de ser utilizadas para lograr el objetivo mas cercano ya sea obtener una buena calificacion, o simplemente sacar la materia adelante. Para obtener lo que se quiere, se realizo un proyecto, el cual contiene muchos elementos en los cuales se aprecia el Calculo, dichos elementos involucran graficas descritas por medio de ecuaciones matematicas, para demostrar que verdaderamente el Calculo cuenta con una cantidad de aplicaciones inimaginables. Pero hay que tener presente que este tema aparte de verlo plasmado en piezas, dependiendo del rol que se desempeñe y/u objetivo que se haga, servira de gran ayuda para cosas como por ejemplo, el diseno estructural con cargas estaticas, de herramientas y mecanismos complejos, en el calculo de esfuerzos y deformaciones maximas, esto en el caso de un ingeniero mecanico.

En miras a la correcta realizacion de este proyecto se investiga, indaga y busca apoyo de expertos, con el fin de llegar a obtener materializado el proyecto, ademas del enrutamiento brindado por parte del profesor. Se pretende que este trabajo sirva de ejemplo o pilar para quienes en un futuro busquen aplicaciones del Calculo brindandole a este la verdadera importancia que se merece.

Para el desarrollo de esta fase de investigacion, discutimos, analizamos y delineamos grupalmente los objetivos que mostramos a continuacion:

- Representar por medio de un objeto con aplicaciones en nuestra cotidianidad, diferentes ecuaciones propias del curso, que nos facilitan el diseno, la manipulacion y uso del mismo.
- Determinar, segun la forma por medio de la cual esta hecha un objeto, partiendo del Calculo, diferentes ecuaciones propias de dicha grafica, para as tener una vision mas analitica y poder comprender de donde parte tal diseno.
- Mostrar una de las tantas aplicaciones que puede tener el Calculo en nuestra vida diaria, as enseñar a la gente que este no son solo ecuaciones escritas en un papel.

Profundizando as la vision que se tiene del mismo, ampliando conocimientos y expandiendo la capacidad anal tica de las personas frente a objetos que nos rodean.

- Idealizar estructuras, objetos, herramientas utiles en el d a a d a, mostrando su forma con base al Calculo, diferenciando ecuaciones propias de determinadas gra cas, poniendo en practica la teor a, en base a la realidad.

Descripcion del objeto

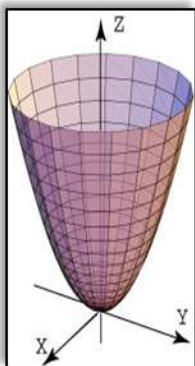
Para este proyecto, se busco un objeto que estuviera compuesto por diferentes super cies cuadraticas, por tal motivo se desarrollo una lampara la cual su diseno cumple con caracter sticas propias de estas. Esta lampara esta compuesta por:

1. Un elipsoide el cual corresponde al suiche.
2. Un paraboloides el ptico el cual corresponde a la pantalla.
3. Un hiperboloides de una hoja el cual corresponde al cuerpo.
4. Un cilindro el cual corresponde a la base.

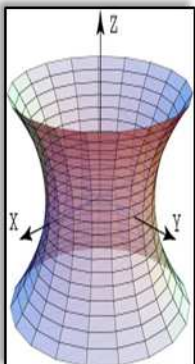
Super cies involucradas en el objeto

A continuacion realizaremos una breve explicacion de las super cies comprendidas en nuestra lampara de nochero, incluyendo sus gra cas y las ecuaciones que las modelan.

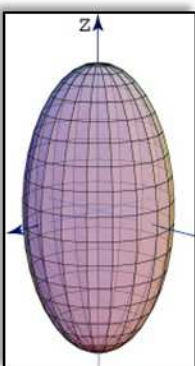
Superficies involucradas



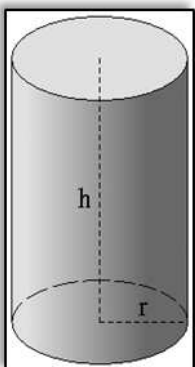
Paraboloide elptico: La ecuación que modela esta superficie está representada por, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ la variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide, sus trazas con los planos horizontales son elipses y con los verticales son parábolas. Esta es aquella superficie que engendra una elipse variable al moverse de forma perpendicular sobre el eje de una parábola, de forma que mantiene constantemente los vértices de uno de sus ejes sobre dicha curva.



Hiperboloide de una hoja: La ecuación que modela esta superficie está representada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ el eje de simetría de esta superficie corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo, en este caso vendrá siendo el eje Z. Sus trazas sobre planos horizontales $z = k$ son elipses y sobre planos verticales son hipérbolas o un par de rectas que se intersecan.



Elipsoide: Por elipsoide se puede entender a una superficie semejante a una elipse pero con una dimensión más. La intersección de un elipsoide con un plano puede ser vacía, un punto o bien una elipse. La ecuación general de un elipsoide con centro en el origen de coordenadas es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ siendo a , b y c números reales positivos que determinan la forma del elipsoide. Si dos de estos números son iguales, el elipsoide es un esferoide; si los tres son iguales, se trata de una esfera.



Cilindro elptico: Un cilindro es una figura geométrica limitada por una superficie cilíndrica cerrada lateral y dos planos que la cortan en sus bases. Como cuerpo de revolución, se obtiene mediante el giro de una superficie rectangular alrededor de uno de sus lados. La ecuación de un cilindro elptico es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Por que este objeto?

Con la primera entrega del portafolio se pudo analizar varias imagenes, que corresponden a figuras con ciertas características, que determinan formas particulares del Calculo, este sirvió de base para saber que tipo de objeto se debía escoger. Observando detalladamente las fotos tomadas y la forma en la cual estaban diseñadas, optamos por buscar un objeto práctico, que tuviera un uso funcional. Una lámpara es un objeto utilizado frecuentemente, la cual miramos de forma tan sencilla y común, que ignoramos muchas veces que el Calculo se ve reflejado en ella. Se pretende mostrar como en artículos con los cuales se interactúa en el diario vivir, esta presente esta rama que se minimiza tanto, la cual se ve como un mundo de números y listo. Ahora bien, buscando mostrar el objeto escogido por nosotros, optamos por utilizar el software Pro/ENGINEER para modelar nuestra lámpara en tres dimensiones como se puede apreciar en la Figura 3.35.

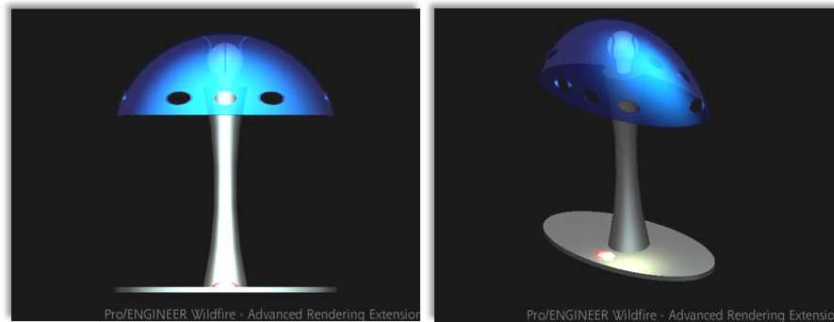


Figura 3.35: Lámpara nocturna modelada en 3D.

Gracias a este trabajo hemos visto claramente que el Calculo tiene numerosas aplicaciones en el diseño de un objeto, transformando ecuaciones plasmadas en un papel en algo tangible que posteriormente puede ser utilizado por cualquier persona, y que gracias a estas, podemos desarrollar productos, ya sea optimizando materias primas o calculando las dimensiones correctas de este.

3.4.3. Contenedor de basura

A continuación se describe el objeto que se desea analizar, el cual está compuesto por imágenes en 3 Dimensiones. Posteriormente utilizando un software, se modelará la imagen de nuestro objeto en 3D. Esta imagen podrá ser observada desde diferentes ángulos a fin de visualizar las superficies que lo componen.



Figura 3.36: Contenedor de basura.

Superficies que componen el objeto

A continuacion se muestran las superficies utilizadas para la construccion del objeto seleccionado con sus respectivas ecuaciones.

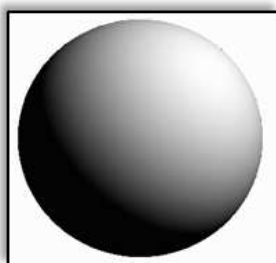


Figura 3.37: Esfera.

En la Figura 3.37 se muestra una esfera la cual se utilizara como cabeza del contenedor de basura. Esta se puede representar mediante la ecuacion $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

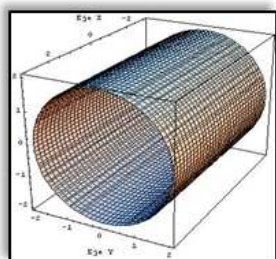


Figura 3.38: Cilindro.

La Figura 3.38, muestra un cilindro el ptico el cual sera el cuerpo del colector de

basura. Esta superficie puede modelarse por medio de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

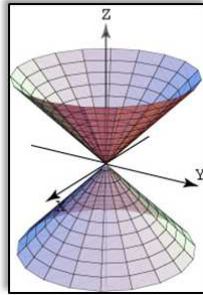


Figura 3.39: Cono el ptico.

El cono el ptico Figura 3.39 se utilizara como sombrero del payaso, esta superficie se puede representar mediante la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, as mismo se utilizaran muchas otras superficies para complementar la totalidad del objeto seleccionado (Contenedor de basura).

Se puede notar que el objeto esta compuesto de varias funciones que se representan en 3D, como lo son las esferas, conos, cilindros, elipses, etc. al hacer la implementacion en la herramienta conocido como OpenGL, se entendera que este tipo de metodos, para hacer objetos en 3D en el computador y de manera digital, ayuda a crear video juegos, pel culas, simuladores, etc. cosas que son comunes en el entorno y todo esto es posible ya que bajo estas implementaciones se encuentran fundamentos matematicos basados en el Calculo, que son capaces de crear cosas muy potentes que corren en tiempo real.



Figura 3.40: Contenedor de basura modelado en 3D.

La Figura 3.40, muestra el modelo del contenedor de basura en 3D, como se menciono anteriormente para lograr esta aplicacion se utilizo la herramienta OpenGL. Esta aplicacion es tan solo una aproximacion de la estructura original del contenedor. Para ver con mayor detalle la aplicacion desarrollada por los estudiantes, puede ser

descargada del link [Aplicacion - Payaso](#) de la pagina web⁸. A continuacion se muestra el manual de usuario de dicha aplicacion.

Manual de usuario

Para esta aplicacion se determinaron cuatro tipos de comandos: uno para alejar la gura, otro para acercarla y dos para rotarla.

Comandos.

W: Acerca la gura.

S: Aleja la gura.

A: Rota la gura a la izquierda.

D: Rota la gura a la derecha.

Con la combinacion entre ellos se puede observar con mas detalle el comportamiento de las funciones.

Basados en los conocimientos adquiridos durante el transcurso del semestre academico y apoyados en las experiencias adquiridas a traves del desarrollo de la fase de investigacion, los estudiantes obtuvieron sus respectivas conclusiones. A continuacion se muestran algunas de estas.

3.4.4. Conclusiones

Entre muchas de las conclusiones expresadas por los estudiantes en esta fase de investigacion sobresalen:

- Concluimos que este proyecto ayuda a darnos cuenta de la relacion de esta materia con la vida cotidiana, pues muchas veces pensamos que las Matematicas estan completamente aisladas a nuestra vida y a los objetos que manipulamos en el diario vivir, pero esto es muy diferente a como pensamos. El Calculo esta en todo los lugares y podemos decir que convivimos con el.
- Resulta necesario entender matematicamente el comportamiento de fenomenos cotidianos, para facilitar la explicacion y la logica de lo que sucede a nuestro alrededor. A su vez, tambien es valido como forma de aprendizajeF tomar ejemplos de la vida diaria, para entender los conceptos que se presentan en la clase que suelen ser complicados y de dif cil comprension.

⁸<http://appletsok.blogspot.com/>

- El Calculo es muy importante para nosotras como futuras ingenieras, ya que nos brinda herramientas de analisis y facilidad para solucionar problemas avanzados, que puedan presentarse tanto en la vida cotidiana como en la vida laboral, al frente de una empresa en la que hay que optimizar procesos.
- Además de ver plasmado el Calculo en cantidad de ingenieras, se logra ver como este ayuda a tener un pensamiento logico y estructurado a la hora de tomar decisiones, desarrollar proyectos e intervenir en asuntos personales y profesionales, a mandarse esto gracias a experiencias diarias que obtenemos en el día a día.
- Es de gran importancia las herramientas computacionales a la hora de modelar los proyectos, pues así observamos con facilidad como va avanzando el proceso y como se puede mejorar. Aplicando metodos logicos tanto de revoluciones de cuerpos y areas de estas secciones, podemos dar origen a este producto.

Contextualizar y problematizar un concepto en la fase de investigacion, fue un proceso que estuvo enmarcado en la necesidad de descubrir nuevas situaciones de aplicacion al Calculo. Este proceso en sí mismo, impulso un constante enriquecimiento y desarrollo de habilidades y destrezas, lo que condujo a contribuir al crecimiento del pensamiento racional y creativo del estudiante.

3.5. Proyecto final de síntesis

Se dice que un producto es de calidad cuando reúne un conjunto de propiedades que lo hacen mejor que otros, como ser competitivo, novedoso, satisfacer las necesidades del cliente y este se siente feliz con el mismo y, lo más importante, consigue los resultados para los que ha sido fabricado. Entonces, podemos hablar de calidad en términos de la enseñanza y aprendizaje si los objetivos relacionados a la actividad propia educativa se consiguen con total éxito, es decir, se logra que docente y estudiante utilicen con propiedad la herramienta pedagógica, consolidando así las metas trazadas.

Ahora bien, como se mostro en la Capitulo 2, Seccion 2.5.9, pagina 53, el proyecto final de síntesis es la fase donde todos y cada uno de los estudiantes por medio de una exposicion demuestran el dominio que alcanzaron de las metas de comprension trazadas al iniciar el semestre academico. Es aquí donde cada uno de ellos expone los resultados obtenidos, muestran las aplicaciones del Calculo a través del objeto seleccionado y del desarrollo de las etapas o fases investigativas previas.

Los mapas conceptuales como estrategia de aprendizaje en cada una de las etapas formativas, origino un impacto positivo entre los estudiantes. Gracias a esta

herramienta heurística, lograron organizar, desarrollar, crear, integrar, estudiar y expresar los conceptos e ideas. Por lo que esta herramienta se convirtió en un instrumento perfecto para estimular el aprendizaje activo.

A continuación se muestran los resultados logrados por dos grupos de estudiantes en esta fase de investigación. De igual forma, algunos de los mapas conceptuales desarrollados durante el curso por ellos mismos. Como se verá, estos resultados reflejan la habilidad de aplicar la metodología propuesta, se exponen dos aplicaciones totalmente distintas, pero de igual forma se aprecia el alto nivel de comprensión alcanzado por los estudiantes en esta última fase.

3.5.1. Una visión Matemática de los tumores

En diversas ocasiones, cuando estamos adquiriendo algún conocimiento relacionado con los números, nos preguntamos acerca de su utilidad en la vida cotidiana y en su aplicación; en nuestro caso a nivel profesional, la mayoría de las veces parece ser muy abstracto como para traerlo al mundo real.

Al iniciar el curso de Cálculo en varias variables nos involucramos en un proyecto donde debíamos encontrar su aplicación directa. Es así, como iniciamos buscando la similitud entre gráficos de superficies con formas que encontramos fácilmente en nuestras casas o lugares que frecuentamos, luego nos centramos en un objeto específico para realizar varios avances matemáticos concluimos con una búsqueda más profunda de información acerca de ese objeto y la proposición de algo nuevo como resultado de todo el proceso mencionado.

En nuestro caso específico, el objeto que elegimos para concentrar toda nuestra búsqueda de información fue un tumor. La medicina es un campo de interés para nosotros y es por ello que lo seleccionamos. De esta manera iniciamos una búsqueda de información acerca de su relación con el Cálculo y nos sorprendimos al ser esta tan estrecha.

A continuación damos a conocer los resultados obtenidos a través del proceso en el que nuestro aprendizaje se vio altamente enriquecido y se puso a prueba nuestra habilidad como ingenieros, que ha tenido como último la comprensión del saber, de manera que no se convierta en información que luego será olvidada, sino que se asimile a través de la práctica para ser aplicada correctamente de manera posterior en el mundo profesional.

seguidamente se muestran algunos conceptos importantes a tener en cuenta en esta investigación.

Tumor. Es un aumento localizado, de tamaño de carácter patológico, de un tejido u órgano. Sin embargo, la investigación médica a nivel microscópico ha demostrado que este aumento puede relacionarse con la infiltración de células procedentes de otra parte del organismo (inflamación) o con la proliferación de las propias células de la zona afectada; sólo en este último caso recibe el nombre de tumor. Los tumores se clasifican en benignos o malignos, aunque esta distinción no tiene utilidad universal.

La propiedad más importante de un tumor maligno es su capacidad de invadir tejidos vecinos o distantes. La diseminación a tejidos lejanos, que suele tener lugar a través de la sangre o de los vasos linfáticos, se denomina metástasis y es característica del cáncer.

Algunos tumores benignos pueden ser mortales sin producir metástasis. Entre ellos los más importantes son los tumores cerebrales llamados gliomas, que llegan a crecer lo suficiente como para ejercer gran presión sobre las estructuras cerebrales vecinas y destruir la función respiratoria.

Radioterapia. Es una forma de tratamiento basado en el empleo de radiaciones ionizantes (rayos X o radiactividad, la que incluye los rayos gamma y las partículas alfa). Entre algunos de los efectos secundarios que puede traer este tipo de tratamientos están: cansancio y fatiga, inflamación y pesadez en la mama, enrojecimiento y sequedad en la piel (como después de una quemadura solar), que suele desaparecer tras seis o doce meses. La acción de estos aparatos suele estar muy focalizada de manera que sus efectos suelen ser breves y generalmente bien tolerados. Una buena combinación de descanso, actividad física y prendas delicadas pueden atenuar estas molestias.

Radiosensibilidad. Es la sensibilidad que tienen los diferentes tejidos y células a las radiaciones ionizantes. El material biológico tiene una sensibilidad diferente a estas radiaciones.

Diseño seleccionado

El diseño seleccionado para ser construido corresponde a un tumor dado por la ecuación en coordenadas esféricas como sigue:

$$\rho = 1 + 0.2 \sin(8\theta) \sin(4\phi)$$

Es claro que el proyecto fue enfocado a los tumores en general y no se centra únicamente en una clase en específica, la idea de realizar este objeto físico se centra en ilustrar la forma de un cuerpo de este tipo construida a través de ecuaciones en coordenadas esféricas.

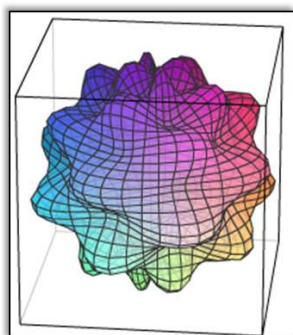


Figura 3.41: Superficie modelada de un tumor en 3D.

Relacion del diseno con el contexto

El diseno tiene una amplia relacion con el entorno, pues si bien no es una figura con la que estemos muy familiarizados o interactuamos a diario, es un cumulo de celulas que puede hacer parte de nuestro organismo.

De esta manera, podemos afirmar que el trabajo realizado tiene una gran aplicacion, pues si bien las metodologías que emplean en los hospitales para el tratamiento de los tumores son más sofisticadas y calculan un número significativo de datos referentes a esta proliferación celular, este es un avance para nosotros, algo que construimos para tener una idea del proceso que sigue un fenómeno físico como este al momento de tomarse determinaciones que conlleven a la reducción del riesgo del paciente.

Estructuración del diseno

A la hora de construir este modelo tuvimos en cuenta la simetría, al ubicar las esferas de distintos diámetros a lo largo de la superficie de la esfera de mayor tamaño. El modelo consta de una esfera 15cm de diámetro, la que constituye el cuerpo del tumor y las esferas que sobresalen tienen 4 y 6cm de diámetro respectivamente. La maqueta de nuestro diseno se puede observar en la Figura 3.42.

En el desarrollo de la investigación visitamos el hospital Pablo Tobon Uribe a fin de buscar asesoría profesional en torno al tema en cuestión. Estas fueron fundamentales en la toma de decisiones y posteriormente en los logros alcanzados.

Radiobiología Clínica

Con el fin de encontrar una aplicación directa, acudimos al Hospital Pablo Tobon Uribe Figura 3.43, donde encontramos dos físicos con especialización en física médica que



Figura 3.42: Maqueta - Tumor.

respondieron muchos de nuestros interrogantes y nos recomendaron algunos artículos que ayudarían a enriquecer nuestro proceso investigativo.



Figura 3.43: Visita a la unidad de Cancerología Hospital Pablo Tobon Uribe (Medellín).

Estos artículos fueron de gran utilidad en la construcción de nuestro proyecto, ya que a través de este tuvimos acceso a diferentes ecuaciones matemáticas que determinaban ciertas características del crecimiento de los tumores, los efectos de las dosis de radioterapia, el número de sesiones, entre otras. A continuación se muestran algunos datos y modelos recopilados de dicho artículo que fueron de suma importancia a lo largo de nuestra investigación.

Modelos de isoeffecto empíricos

Se ha intentado realizar modelos para la determinación de la equivalencia de dos dosis diferentes en un tratamiento. Es así como inicialmente Strandqvist (durante los años 40) correlacionó la dosis total suministrada con el tiempo total de tratamiento, a través de la ecuación de Schwarzschild aplicada a la fotoquímica que establece que la constante de proporcionalidad, para el efecto de la exposición a la luz, está dado por:

$$IT^p = \text{constante} \quad \text{con}$$

$I = \text{Intensidad}$

$T = \text{T tiempo} \quad \text{donde } p < 1$

$D = \text{Dosis}$

$D = I \times T \quad \text{por tanto}$

$DT^{p-1} = \text{constante} \quad \text{de donde}$

$$D = \text{constante} T^{1-p}$$

Strandqvist determino que el isoeffecto segu a la ley de Schwarzschild y encontro que el valor de $p - 1$ para la piel era aproximadamente de 0.22, pero posteriormente Cohen a rmo que este pod a variar entre 0.22 y 0.35. Es as como entonces dos tratamientos son iguales si el valor de la constante es el mismo.

Modelo NSD. Ellis publico en 1967 una nueva formula que se basaba en los trabajos de Strandqvist y relacionaba la dosis total, el tiempo de duracion del tratamiento y el numero de dosis en las que se administraba este, la cual fue corregida posteriormente por Oliver:

$$D = NSDT^{0.11} n^{0.24}$$

$$D = NSDT^{0.11} n^{0.24} \quad \text{Donde}$$

$NDS = \text{Dosis estandard nominal}$

$T = \text{T tiempo de tratamiento en dias}$

$n = \text{Numero de fracciones total}$

Este modelo solo es valido para tejido conjuntivo, predice unicamente efectos agudos (tard os), no pueden sumarse los datos obtenidos para tratamientos consecutivos (no es aditivo), no distingue diferentes tipos de tejidos ni las diferentes respuestas de estos a la radiacion. Agregando a lo anterior, puede decirse que un tratamiento es igual a otro si el valor del NDS es el mismo.

Modelo CRE. Kirk desarrollo una variacion de la formula de Ellis como sigue:

$$TDF = nd^{1.538} X^{-0.169} 10^{-3}$$

Donde n = número de sesiones recibidas, no necesariamente las totales CRE = *cumulative radiation effect*, que determina los niveles de daño en la piel. Por lo tanto nuevamente es posible afirmar que dos tratamientos son iguales si el valor de CRE es el mismo para ambos.

Modelo TDF (tiem, dose and fractionary). Orton y Ellis finalmente realizaron una mejora a los modelos en 1973.

$$TDF = nd^{1.538} X^{-0.169} 10^{-3}, \text{ Donde}$$

n = número total de fracciones

d = dosis por fracción

X = factor de proporcionalidad que relaciona los días de la semana con el número de sesiones por semana.

Las restricciones de esta fórmula son diversas, sólo es útil para predecir los efectos de tratamiento sobre algunos tejidos, los exponentes empleados pueden corresponder mas a los efectos agudos que a los crónicos, sólo arroja resultados validos para cierto rango de valores de las variables del tratamiento.

Si dos pautas terapéuticas son iguales, es decir, producen el mismo efecto si el valor del parámetro TDF es el mismo. Es de notar que los anteriores modelos no se emplean en la actualidad y han sido reemplazados por ecuaciones de supervivencia celular.

Supervivencia celular e isoeffecto

Para un tratamiento administrado en n fracciones de dosis d , suponiendo la recuperación celular total entre sesiones, la ecuación del el efecto biológico E , estará dada por:

$$E = \alpha nd + \beta nd^2, \text{ Con}$$

n = fracciones de dosis

d = dosis

Al ser la DBE (dosis biológica equivalente) igual a E/α , entonces

$$DBE = nd \left(1 + \frac{\beta}{\alpha d} \right), \text{ O también}$$

$$DBE = nd \left(1 + \frac{d}{\alpha/\beta} \right)$$

Donde el cociente α/β es característico para un tipo de tejido y reacción en particular. Debe tenerse en cuenta que las unidades de DBE son Gy, corresponde entonces a la dosis que se debería suministrar a un tejido o tumor, para conseguir el isoeffecto deseado en fracciones infinitamente pequeñas (n infinitamente grande). Igualmente el efecto global de varias radiaciones consecutivas puede calcularse a través de la suma de la DBE correspondiente a cada una de ellas (es aditiva).

La expresión puede predecir fácilmente los efectos tardíos y agudos de diversos tejidos. Además, se ha demostrado que los valores pequeños del coeficiente α/β corresponden a tejidos con respuesta tardía, mientras que los valores grandes corresponden a los de respuesta aguda.

Se establece entonces que dos tratamientos de radioterapia con distinto fraccionamiento son equivalentes si sus valores de DBE son iguales como sigue:

$$n_1 d_1 \left(1 + \frac{d_2}{\alpha/\beta} \right) = n_2 d_2 \left(1 + \frac{d_1}{\alpha/\beta} \right)$$

Actualmente es una de las más utilizadas al momento de realizar el cálculo de dosis equivalentes para pacientes que por algún motivo tuvieron que interrumpir su tratamiento.

A continuación mostraremos la aplicación de algunos conceptos tratados en la clase a nuestro diseño, como también a la propuesta matemática derivada del proceso de investigación.

Aplicación del Cálculo en el diseño

De acuerdo a las ecuaciones e información recolectada, se realizó el cálculo del volumen de un tumor que tienen ciertas variables que mostramos a continuación:

Teniendo en cuenta que:

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$0 < \varphi < \pi$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
Vt &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1+0.2\sin(8\theta)+\sin(4\varphi)} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \Big|_0^{1+0.2\sin(8\theta)+\sin(4\varphi)} \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [1 + 3 * 0.2\sin(8\theta) * \sin(4\varphi) + 3 * (0.04) \sin^2(8\theta) * \sin^2(4\varphi)] d\varphi d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} [1 + 0.6\sin(8\theta) * \sin(4\varphi) + 0.12 \sin^2(8\theta) * \sin^2(4\varphi)] d\varphi d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[\varphi - \frac{0.6\sin(8\theta) * \cos(4\varphi)}{4} + 0.12\sin^2(8\theta) * \left(\frac{8\varphi - \sin(8\varphi)}{8} \right) \right] \frac{\pi}{0} d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left[\pi - \frac{0.6\sin(8\theta)}{4} + 0.12\pi\sin^2(8\theta) + \frac{0.6\sin(8\theta)}{4} \right] d\theta \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [\pi + 0.12\pi\sin^2(8\theta)] d\theta \\
&= \frac{1}{3} (\pi\theta + 0.12\pi(2\theta - \text{sen}16\theta)/32) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{3} \left[\left(19.73 + \frac{0.12\pi(4\pi)}{32} \right) \right] \\
&= 0.11u^3
\end{aligned}$$

Propuesta Matemática

A través de Matlab⁹, elaboramos métodos que calculan el valor correspondiente a la dosis necesaria, dependiendo de los parámetros que se le ingresen de acuerdo al modelo matemático empleado. Estos métodos pueden ser descargados del link [Métodos-Dosis tumores](#) de la página web¹⁰.

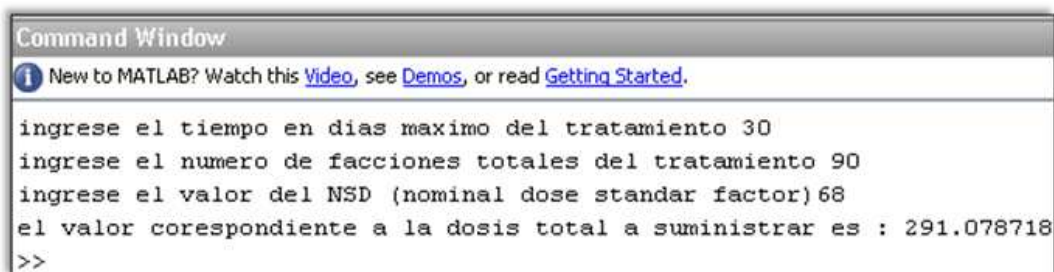
Modelo NSD (Nominal dose estándar factor)

La Figura 3.44, muestra el método NSD corriendo en el software, los parámetros a ingresar son:

⁹Matlab (abreviatura de MATrix LABoratory, “laboratorio de matrices”) es un software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M).

¹⁰<http://appletsok.blogspot.com/>

- Valor de *NSD*.
- Tiempo en días máximo del tratamiento.
- Número de dosis totales del tratamiento.



```
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

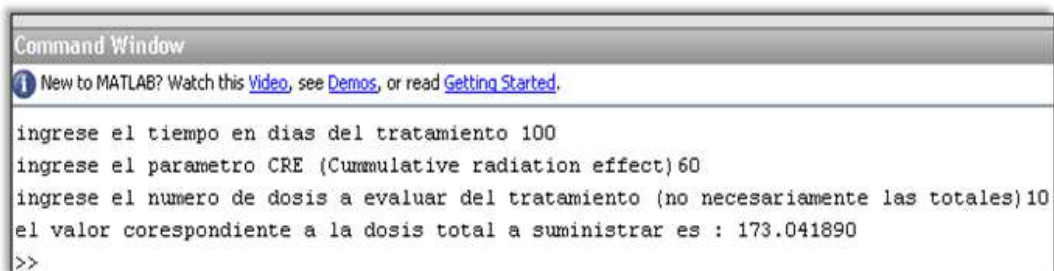
ingrese el tiempo en dias maximo del tratamiento 30
ingrese el numero de fracciones totales del tratamiento 90
ingrese el valor del NSD (nominal dose standar factor) 68
el valor corespondiente a la dosis total a suministrar es : 291.078718
>>
```

Figura 3.44: Calculo de dosis total metodo NSD.

Modelo CRE (Cummulate radiation effect)

La Figura 3.45, muestra el metodo CRE corriendo en el software, los parametros a ingresar son:

- Valor de CRE.
- Tiempo en días máximo del tratamiento.
- Número de dosis totales del tratamiento.



```
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

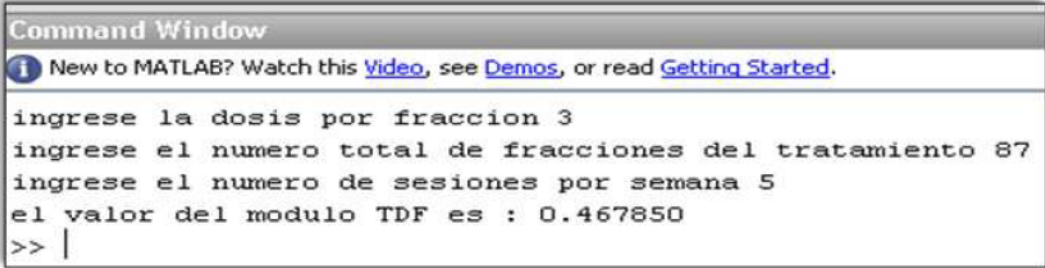
ingrese el tiempo en dias del tratamiento 100
ingrese el parametro CRE (Cummulative radiation effect) 60
ingrese el numero de dosis a evaluar del tratamiento (no necesariamente las totales) 10
el valor corespondiente a la dosis total a suministrar es : 173.041890
>>
```

Figura 3.45: Calculo de dosis total metodo CRE.

Modelo TDF (time, dose and fractionary)

La Figura 3.46, muestra el método TDF corriendo en el software, los parámetros a ingresar son:

- Dosis por fracción.
- Número total de fracciones del tratamiento.
- Número de sesiones por semana.



```
Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

ingrese la dosis por fraccion 3
ingrese el numero total de fracciones del tratamiento 87
ingrese el numero de sesiones por semana 5
el valor del modulo TDF es : 0.467850
>> |
```

Figura 3.46: Cálculo de dosis total método TDF.

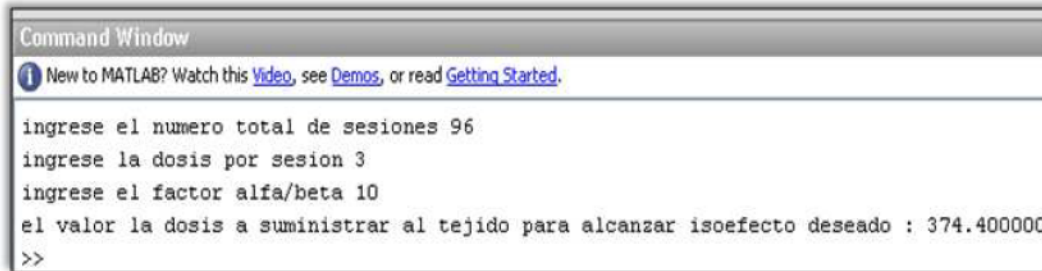
Método actual de supervivencia celular (DBE)

La Figura 3.47, muestra el método actual de supervivencia celular corriendo en matlab, los parámetros a ingresar son:

- Número total de sesiones.
- Dosis por sesión.
- Factor $\frac{\alpha}{\beta}$.

Modelo de Gompertz

Según este modelo el cual fue construido empíricamente, el volumen de un tumor puede estar dado por la siguiente expresión:



```

Command Window
New to MATLAB? Watch this Video, see Demos, or read Getting Started.

ingrese el numero total de sesiones 96
ingrese la dosis por sesion 3
ingrese el factor alfa/beta 10
el valor la dosis a suministrar al tejido para alcanzar isoeffecto deseado : 374.400000
>>

```

Figura 3.47: Cálculo de dosis total DBE.

$$V(t) = V(0)e^{\left\{A\left[1-e^{-a(t-t_0)}\right]\right\}}$$

En la que $V(0)$ representa el volumen inicial y el volumen máximo asintótico que alcanza el tumor se define por medio de:

$$V_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V(0)\exp(A)$$

y su Tiempo de duplicación se mide en base a la ecuación:

$$Td = -\frac{1}{a} \ln \left\{ 1 + \frac{\ln 2}{\ln[V(t)/V_{max}]} \right\}$$

De igual forma, con esta información, a través de Matlab y empelando la ecuación para el volumen de Gompertz, se realizó un método para graficar la línea de tendencia correspondiente al crecimiento del tumor y además de eso proporcionar el volumen máximo y el tiempo de duplicación. Los parámetros a ingresar en este método son:

- Volumen inicial del tumor.
- Tiempo inicial a evaluar.
- Tiempo final a evaluar.
- Valor de A.
- Valor de a.

Como hemos mostrado a lo largo de este proyecto de investigación, las herramientas que nos brinda el Cálculo junto con los conocimientos que hemos adquirido en el transcurso

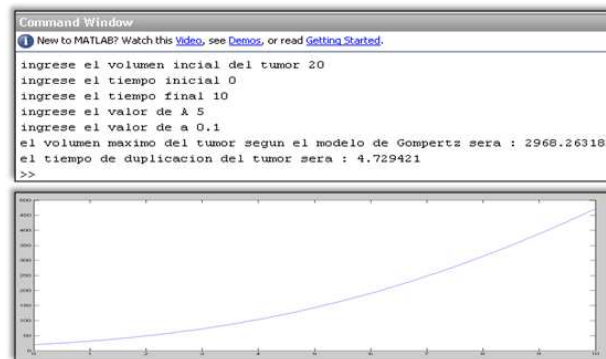


Figura 3.48: Metodo Gompertz - Linea de tendencia del crecimiento.

de nuestra carrera, nos permitio abrir nuestras mentes y descubrir multiples aplicaciones de esta materia en el entorno y principalmente en nuestra carrera.

Como se mostro en el Capitulo 2, Seccion 2.4, pagina 44, el mapa conceptual fue el instrumento seleccionado para fortalecer el proceso de ensenanza y aprendizaje de manera organizada y jerarquizada. A continuacion se muestra uno de los mapas expuesto por este grupo de estudiantes.

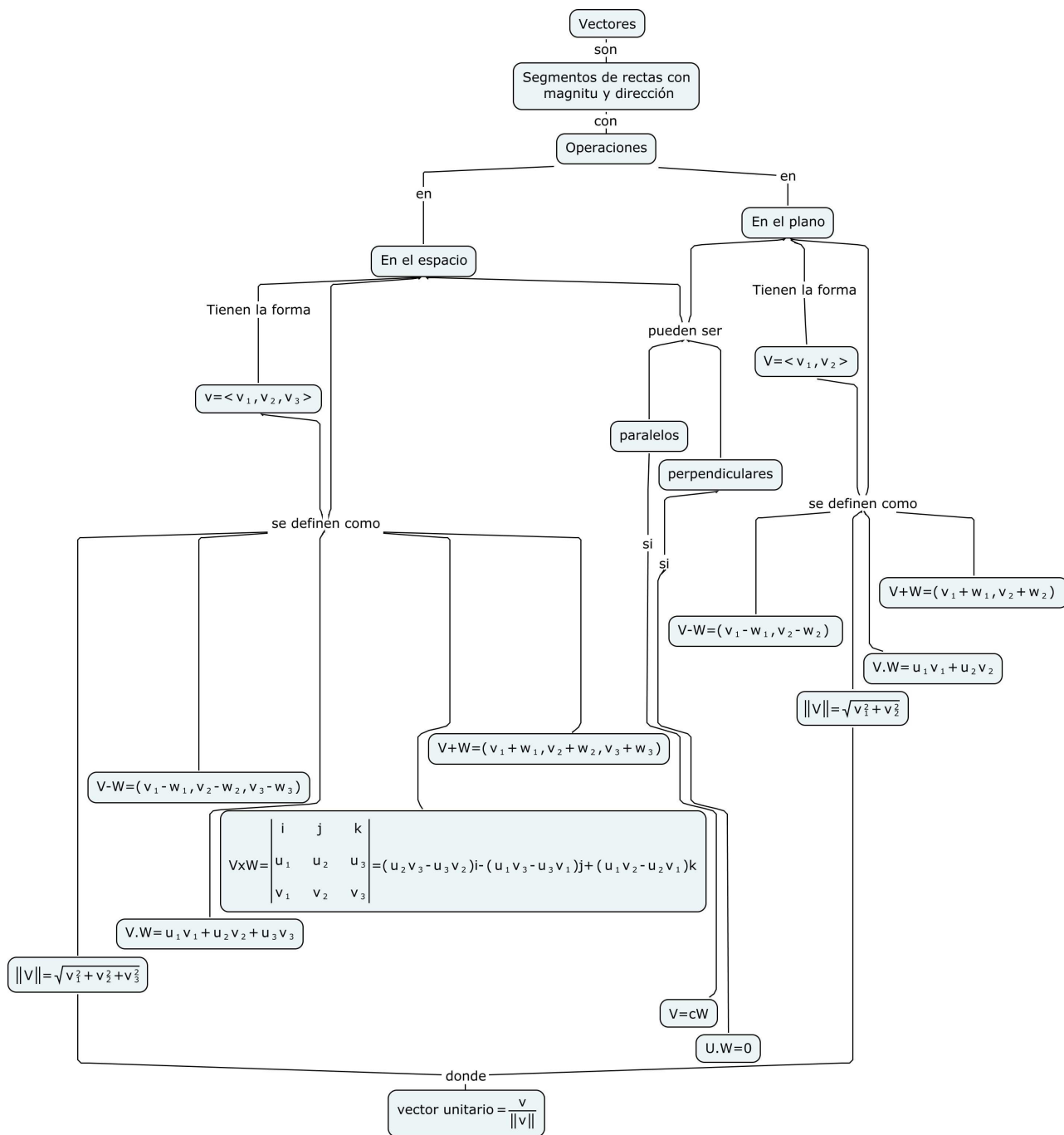


Figura 3.49: Mapa conceptual - Vectores.

Como gran conclusión a nuestro trabajo, remarcamos como las Matemáticas y más específicamente el Cálculo, como rama de esta ciencia pura, tiene una amplia relación con lo que a la medicina se refiere, por ende, puede encontrarse una gran variedad de

aplicaciones en este campo, que pueden contribuir en la exactitud de tratamientos en un paciente con un caso específico de enfermedad.

3.5.2. Control de Mando XBOX

Escogimos un control de Xbox pues en el se puede observar que hay estrecha relación entre su diseño y forma y el Cálculo de tres variables. El material seleccionado para realizar el control fue icopor por su buena maquinabilidad.



Figura 3.50: Control de mando XBOX.

Superficies relacionadas

A continuación se muestran las diferentes superficies asociadas al objeto seleccionado por nosotros (Control de mando XBOX). Posteriormente se realizará el análisis y los cálculos pertinentes basados en las herramientas teóricas vistas en el aula de clase.

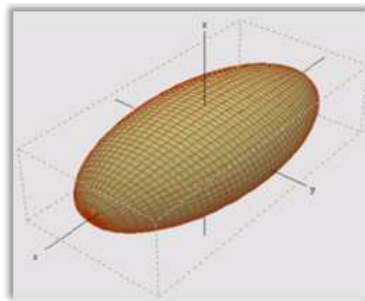


Figura 3.51: Elipsoide.

Elipsoide. La ecuación que modela esta superficie se encuentra dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

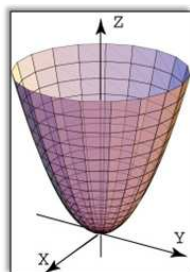


Figura 3.52: Paraboloide.

Paraboloide. Superficie cuadrada que se describe mediante la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

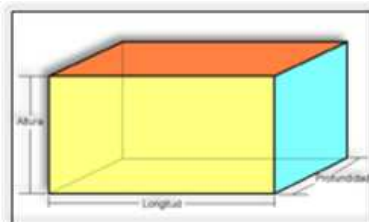


Figura 3.53: Prisma rectangular.

Prisma rectangular. Es un paralelepípedo ortogonal, cuyas caras forman entre sí ángulos diedros rectos. Los ortoedros son prismas rectangulares rectos, y también son llamados paralelepípedos rectangulares. Vulgarmente se los denomina cajas de zapato, cajas o simplemente se les suele llamar cubo. Las caras opuestas de un ortoedro son iguales entre sí.

La forma como relacionamos estas funciones con el control son las siguientes:

- Las maniguetas se dividieron en varias superficies, la principal fue el elipsoide, a partir de esta se derivaron otras superficies a las cuales se le encontraron las respectivas ecuaciones, la denominación de las tres superficies derivadas del elipsoide fueron E(1), E(2), E(3).
- La parte central se relaciona con un prisma rectangular.

Escogimos el mando de control XBOX por su forma aerodinámica y por su estrecha relación con el Cálculo, representa un excelente ejemplo de la aplicación del Cálculo a la vida cotidiana pues este control proporciona comodidad y diversión. Además, es una pieza clave en la industria de los videojuegos.

Calculos de areas y volúmenes

Como se menciona anteriormente la superficie total del mando de XBOX, se subdividio en otras superficies las cuales llamamos $E(1)$ $E(2)$ $E(3)$. En la Figura 3.54 se muestran dichas superficies.

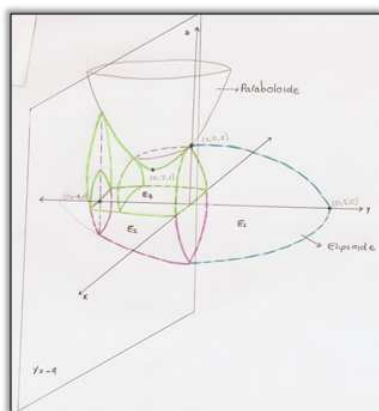


Figura 3.54: Subdivisiones del control de mando XBOX.

Las ecuaciones reales utilizadas para el estudio del objeto seleccionado son:

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

Paraboloide

$$\frac{z-l}{c} = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

En el punto $(0 \ 0 \ 2)$

$$\frac{z - 0.5}{c} = \frac{(x - 0)^2}{a^2} + \frac{(y - (-2))^2}{b^2}$$

$$\frac{2 - 0.5}{c} = \frac{(0)^2}{a^2} + \frac{(0+2)^2}{b^2}$$

$$\frac{1.5}{c} = \frac{4}{b^2}$$

$$b = 1.63 \bar{c}$$

Con $c = 1.5$ $a = b = 2$

$$\frac{z - 0.5}{1.5} = \frac{x^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{2^2}$$

Ahora bien, calculando el volumen y area superficial para nuestra superficie $E(1)$.

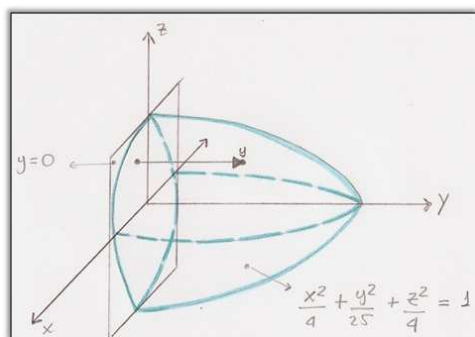


Figura 3.55: Superficie $(E1)$.

$$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{4}$$

$$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{x^2 + z^2}{4}$$

$$\frac{y^2}{25} = 1 - \frac{r^2}{4}$$

$$y^2 = 25 \left(1 - \frac{r^2}{4} \right)$$

$$y = 5 \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}$$

$$y = \frac{5}{2} \sqrt{4 - r^2}$$

$$y = \begin{cases} y = 0 & a & y = \frac{5}{2} \sqrt{4 - r^2} \end{cases}$$

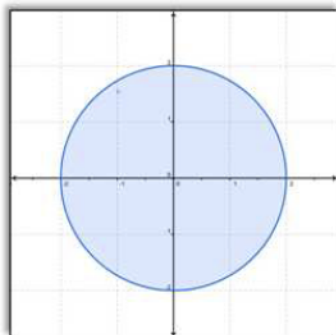


Figura 3.56: Región de integración plano (r, θ) .

En base a la región de integración del plano (r, θ) se obtiene:

$$0 = \frac{5}{2} \sqrt{4 - r^2}$$

$$0 = \sqrt{4 - r^2}$$

$$0 = 4 - r^2$$

$$r = 2$$

Volumen superficie $E(1)$

El volumen de nuestra superficie $E(1)$ está representado por la ecuación:

$$V(1) = \iiint_E dv$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V(1) &= \iiint_E dv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\frac{5}{2}\sqrt{4-r^2}} dy r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{5}{2} \sqrt{4-r^2} r dr d\theta = -\frac{5}{6} \int_0^{2\pi} \left[(0)^{3/2} - (4)^{3/2} \right] d\theta \\ &= \frac{40}{6} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{40}{6} (2\pi - 0) \\ &= \frac{40}{3} \pi \end{aligned}$$

Área superficie $E(1)$

Procedemos a calcular el área de la superficie $E(1)$:

$$A(1) = \iint_D \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} dA$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{4} &= 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} \\ z^2 &= 4 \left[1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} \right] \\ z &= 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}} = \frac{2}{5} \sqrt{25 - (5x^2 + y^2)} \end{aligned}$$

Ahora como,

$$z = \frac{2}{5} \sqrt{25 - (5x^2 + y^2)} \quad \text{entonces}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2x}{5} \sqrt{25 - (5x^2 + y^2)}$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{2y}{5} \sqrt{25 - (5x^2 + y^2)}$$

Por lo tanto el area de la super ficie $E(1)$ esta representada por:

$$A(1) = \int_0^2 \int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}} \sqrt{25 - (5x^2 + y^2)} + \frac{2y}{5} \sqrt{25 - (5x^2 + y^2)} dy dx$$

Esta Integral se calculara posteriormente utilizando el software matlab. De igual forma procederemos con el calculo del volumen y area super ficial de las super ficies restantes de nuestro mando de XBOX.

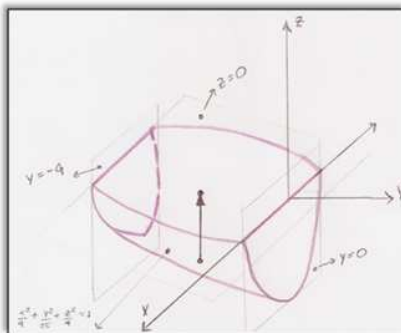


Figura 3.57: Super ficie $E(2)$.

El calculo del volumen de la super ficie $E(2)$, que se muestra en la Figura 3.57 se describe a continuacion.

Volumen Superficie $E(2)$

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4}$$

$$\frac{z^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$$

$$z^2 = 4 - x^2 - \frac{4}{25}y^2$$

$$z = \pm \sqrt{4 - x^2 - \frac{4}{25}y^2}$$

$$z = z = 0 \quad a \quad z = \pm \sqrt{4 - x^2 - \frac{4}{25}y^2}$$

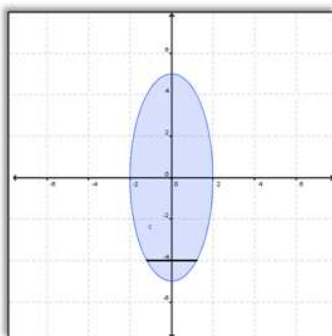


Figura 3.58: Region de integracion plano (x, y) .

De acuerdo a nuestra region integracion Figura 3.58, tenemos:

$$y = -4 \quad y = 0$$

Ademas,

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$$

$$x^2 = 4 \left(1 - \frac{y^2}{25} \right)$$

$$x = \frac{2}{5} \sqrt{25 - y^2}$$

Por tanto el volumen de la superficie $E(2)$, viene dado por la ecuacion:

$$V(2) = \int_E dv$$

por lo tanto:

$$V(2) = \int_0^{\frac{2}{5} \sqrt{25 - y^2}} \int_{-\frac{2}{5} \sqrt{25 - y^2}}^{\frac{2}{5} \sqrt{25 - y^2}} \int_0^{\frac{2}{5} \sqrt{25 - y^2}} dz dx dy$$

Esta integral se dejara indicada, posteriormente utilizaremos el software Matlab para encontrar la solucion de la misma.

As mismo, basados en nuestra region de integracion, proseguiremos a calcular el area de la superficie $E2$, utilizando el concepto de integral doble.

Area Superficial (E2)

El area de nuestra superficie $E(2)$, se representa mediante la ecuacion:

$$A(2) = \int_D \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} dA$$

Por lo tanto,

$$z = \sqrt{4 - x^2 - \frac{4}{25}y^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2 - \frac{4}{25}y^2}^{-1/2} (-2x)$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2 - \frac{4}{25}y^2}^{-1/2} \left(-\frac{8}{25}y\right)$$

Por tanto, el área de la superficie $E(2)$ está representada por:

$$A(2) = \int_0^{\frac{2}{5}} \int_{-\sqrt{4 - \frac{25}{4}y^2}}^{\sqrt{4 - \frac{25}{4}y^2}} \sqrt{4 - x^2 - \frac{4}{25}y^2} + \frac{8y}{50} \sqrt{4 - x^2 - \frac{4}{25}y^2} + 1 \, dx dy$$

La anterior integral doble se dejará indicada. Posteriormente encontraremos la solución a esta utilizando el software Matlab.

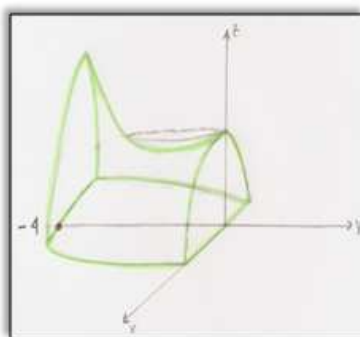


Figura 3.59: Superficie $E(3)$.

Respecto a la superficie $E3$ Figura 3.59, necesitamos las siguientes ecuaciones para representar el volumen de esta superficie:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{1}$$

$$\frac{z - 0.5}{1.5} = \frac{x^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{4}$$

$$z = 1.5 \frac{x^2}{4} + 1.5 \frac{(y+2)^2}{4} + 0.5$$

$$z = z = 0 \quad a \quad z = 0.375x^2 + 0.375(y+2)^2 + 0.5$$

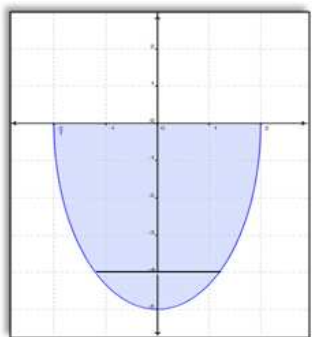


Figura 3.60: Region de integracion plano (x, y).

Ahora bien, apoyados en la region de integracion (Figura 3.60) tenemos:

$$1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25}$$

$$x = \pm \sqrt{4 \left(1 - \frac{y^2}{25} \right)}$$

$$x = \pm \frac{2}{5} \sqrt{25 - y^2}$$

As mismo, el volumen de la superficie $E(3)$ esta representado por la ecuacion:

$$V(3) = \int_E dv$$

Por lo tanto,

$$V(3) = \int_0^4 \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}} \int_{\frac{25}{y^2}}^{0.375x^2 + 0.375(y+2)^2 + 0.5} dz dx dy$$

La anterior integral se dejara indica, la solución a esta se encontrara utilizando el software Matlab.

Area superficial E(3)

De igual forma se proseguira a encontrar el area de la superficie $E(3)$ la cual representaremos por medio de la ecuacion:

$$A(3) = \int_D \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1} dA$$

Como

$$z = 0.375x^2 + 0.375(y+2)^2 + 0.5 \text{ entonces}$$

$$\frac{dz}{dx} = 0.75x$$

$$\frac{dz}{dy} = 0.75(y+2)$$

Por lo tanto,

$$A(3) = \int_0^4 \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{2}{5}} \sqrt{[0.75x]^2 + [0.75(y+2)]^2 + 1} dx dy$$

La anterior integral se dejara indica; posteriormente utilizaremos el software Matlab para encontrar la solución a la misma.

Por ultimo, representaremos el volumen y area superficial del primer rectangular que se muestra en la Figura 3.61 .

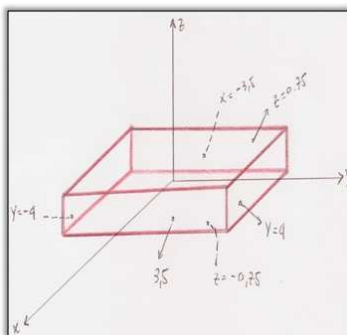


Figura 3.61: Prisma rectangular.

Volumen del solido

Utilizando el concepto de integral triple calcularemos el volumen de este solido mediante la ecuacion:

$$V(r) = \int_E dv$$

Basados en las medidas exactas de nuestro control de mando, proceguiremos a encontrar el volumen de esta super cie:

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_0^4 \int_0^{3.5} \int_0^{0.75} dz dx dy = \int_0^4 \int_0^{3.5} 1 \, dx dy \\ &= \int_0^4 10.5 \, dy = 84 \end{aligned}$$

As mismo, a continuacion se calcula el area superficial de nuestro prisma rectangular, basados en la definicion del area de una super cie.

Area superficial del prisma rectangular

El area de nuestro prisma rectangular viene dada por:

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_0^4 \int_0^{3.5} dx dy = \int_0^4 7 \, dy \\ &= 28 \end{aligned}$$

Basados en los resultados obtenidos en cada una de nuestras superficies, calcularemos el volumen y área total del control de mando de XBOX.

Volumen y área total

El volumen total de nuestro control de mando XBOX esta representado por la ecuación:

$$V_t = V(1) + V(2) + V(3) + V(r)$$

Remplazando los resultados obtenidos se tiene que el volumen viene dado por:

$$V(t) = 2 \left[\frac{40}{3}\pi + \int_{-4}^0 \int_{-\frac{2}{5}\sqrt{25-y^2}}^{\frac{2}{5}\sqrt{25-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-\frac{4}{25}y^2}}^0 \mathbf{d}z dx dy \right. \\ \left. + \int_{-4}^0 \int_{-\frac{2}{5}\sqrt{25-y^2}}^{\frac{2}{5}\sqrt{25-y^2}} \int_0^{0.375x^2+0.375(y+2)^2+0.5} \mathbf{d}z dx dy \right] + 84$$

A sí mismo, el área total vendría dada por:

$$A_t = A(1) + A(2) + A(3) + A(r)$$

$$A(t) = \int_0^2 \int_{-\frac{5}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{5}{2}\sqrt{4-x^2}} \sqrt{\left[-2x \left[25-(5x^2+y^2)\right]^{-1/2}\right]^2 + \left[\frac{-2y}{5} \left[25-(5x^2+y^2)\right]^{-1/2}\right]^2} \mathbf{d}y dx \\ + \int_{-4}^0 \int_{-\frac{2}{5}\sqrt{25-y^2}}^{\frac{2}{5}\sqrt{25-y^2}} \sqrt{\left[x \left(4-x^2-\frac{4}{25}y^2\right)^{-1/2}\right]^2 + \left[\frac{8y}{50} \left(4-x^2-\frac{4}{25}y^2\right)^{-1/2}\right]^2} + 1 \mathbf{d}x dy \\ + \int_{-4}^0 \int_{-\frac{2}{5}\sqrt{25-y^2}}^{\frac{2}{5}\sqrt{25-y^2}} \sqrt{[0.75x]^2 + [0.75(y+2)]^2 + 1} \mathbf{d}x dy + 28$$

El volumen y el área vienen multiplicados por dos, puesto que el control consta de dos maniguetas (donde se toma el control) y los cálculos se hicieron sólo para una, luego se le suma el área y el volumen del rectángulo que queda en la mitad. Con esto, damos por concluido nuestro trabajo de investigación, el cual nos brinda la oportunidad de aplicar y sacar el mayor provecho de los conceptos del Cálculo a nuestra vida cotidiana.

De igual forma que el anterior grupo, estos estudiantes utilizaron el mapa conceptual como herramienta de asociacion, interrelacion, discriminacion, descripcion y ejemplificacion de los diferentes topicos estudiados en el transcurso del semestre academico. Seguidamente se muestra uno de los mapas conceptuales expuesto por este grupo de estudiantes.

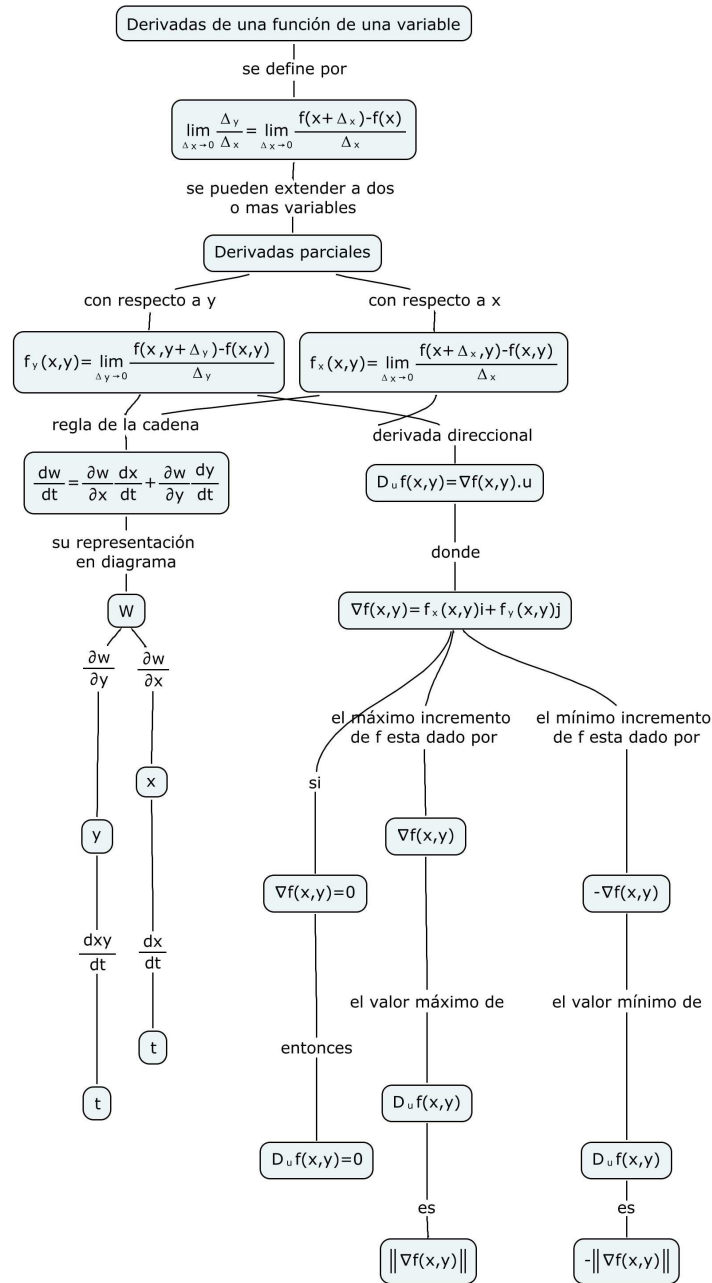


Figura 3.62: Mapa conceptual - Derivadas parciales.

El desarrollo de este proyecto nos llevo a concluir lo siguiente: nos ayudo a darnos cuenta de la relacion de esta materia con la vida cotidiana, pues muchas veces pensamos que las Matematicas estan completamente aisladas de nuestra vida y a los objetos que manipulamos en el diario vivir, pero esto es muy diferente a como pensamos. El Calculo esta en todo los lugares y podemos decir que convivimos con el. Ademas de esto, podemos afirmar que los conocimientos adquiridos pueden ser asimilados para toda la vida si se encuentra una aplicacion directa de ellos que nos cause interes.

Complementando lo anteriormente expuesto, a continuacion se muestran apartes de algunos trabajos desarrollados por los estudiantes en la fase final del proyecto, lo cual permitira ampliar la vision, entorno al trabajo aplicativo que realizaron durante el transcurso del semestre academico.

3.5.3. Lampara nochero

Somos creadores por necesidad, nacimos necesitando de las matematicas y la creatividad, por lo que desde los inicios de la humanidad el ser humano ha empleado la creacion con el apoyo de la razon para sobrevivir.

Todo lo que nos rodea tiene un componente matematico que hace que convivan los objetos entre si de forma coherente. Los planos, lineas, curvas y puntos, conforman la base de las figuras en 2D y 3D, relacionandose entre si para formar inde nidas combinaciones. Todo lo que vemos incluyendonos, hace parte del gran mundo de los numeros, medidas y proporciones.

Diseno seleccionado

Luego de analizar los objetos preseleccionados, se opto por construir una lampara de nochero por el potencial aplicativo que tiene con las tematicas vistas en el curso, ademas por su diversidad de usos, materiales y formas de construccion.



Figura 3.63: Lampara de nochero modelada en 3D.

Basados en las superficies estudiadas en clase, modelamos nuestra lámpara en 3 dimensiones, el resultado de ésta se muestra en la Figura 3.63.

Aplicación Matemática

A continuación aplicaremos el concepto de integral doble para encontrar el volumen de nuestra lámpara de nochedero.

La función que modela nuestra lámpara viene dada por:

$$f(x,y) = 10.4 - 0.1358x^2 - 0.1358y^2$$

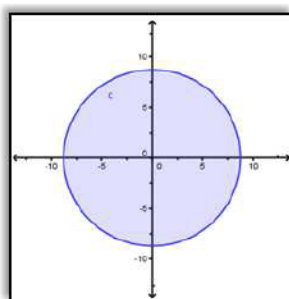


Figura 3.64: Región de integración.

Basados en la región de integración Figura 3.64. El volumen de nuestra lámpara de nochedero está dado por:

$$v = \iint_R f(x,y) dA$$

Utilizando las medidas reales, el volumen de esta superficie se describe mediante la ecuación:

$$v = \int_0^{2\pi} \int_0^{8.75} (10.4 - 0.1358)r^2 r dr d\theta = 1251 \text{ cm}^3$$

Apoyados en el software Pro/ENGINEER, estos estudiantes que hacen parte de la carrera ingeniería de diseño, modelaron la lámpara en 3 dimensiones, posteriormente



Figura 3.65: Lámpara - Exposición del producto.

construyeron el producto utilizando los conocimientos matemáticos estudiados y otros correspondientes a su carrera.

Para finalizar queremos concluir lo siguiente: Las aplicaciones que realizamos en este proyecto, nos ha enseñado que muchas veces pasamos por alto muchas cosas que nos pueden ser útiles, un ejemplo de esto es el Cálculo. La aplicación y creación de objetos basados en los conceptos estudiados en el curso nos pareció muy creativo. De esta manera, encontramos el Cálculo mucho más atractivo e interesante para nosotros como estudiantes.

Una vez finalizado el semestre académico los estudiantes presentaron el producto terminado. Mediante una exposición, mostraron la aplicación del Cálculo en el objeto seleccionado y en su entorno. La Figura 3.65 muestra el producto final y la sustentación en el aula de clase.

3.5.4. Dirigible

En el mundo actual, la necesidad de utilizar nuevas herramientas que ayuden al ser humano a desenvolverse mejor en las actividades diarias, ha llevado a las personas a buscar nuevas formas de utilizar las cosas que se tienen a la mano. En el caso de ingenieros, a veces se pasa por alto muchas herramientas y no se tiene en cuenta que estas podrían tener un gran potencial.

En el siguiente trabajo, mostraremos cómo el Cálculo III se puede aplicar en el desarrollo de nuevos objetos con fines comerciales, permitiendo hallar datos valiosos, que son de suprema importancia a la hora de tomar decisiones.

Diseno seleccionado

Para nuestro proyecto seleccionamos el dirigible ver Figura 3.66 debido a que es un objeto poco cotidiano que presenta unas condiciones de ingenieria de magnitudes muy grandes dentro de unas formas que se pueden representar por condiciones muy sencillas.



Figura 3.66: Dirigible.

Ademas, dentro del mismo dirigible se pueden notar otras formas del Calculo como las que presentan los motores que lo impulsan (paraboloides) y las aletas de direccion que se pueden tomar como planos.

Se realizo este diseno teniendo en cuenta las formas del Calculo que se podran encontrar en el. Un dirigible es un elemento de gran utilizacion en el mundo aeroespacial y su diseno es realmente sencillo. La razon por la cual se selecciono este objeto es porque un dirigible comunmente tiene la forma de un globo redondo estirado logrando la forma de un huevo, que consta de un marco rigido el cual lo hace un diseno semirrigo.

Con este proyecto se pueden ver las diferentes aplicaciones del Calculo en objetos. En nuestro caso como futuros ingenieros podemos utilizar los conceptos matematicos a fin de matematizar el diseno y garantizar la produccion de un cierto producto por medio de sistemas computarizados.

Matematizacion del diseno

A continuacion realizaremos la parametrizacion de nuestro dirigible el que tiene forma de elipsoide Figura 3.67 y encontraremos su respectivo volumen utilizando una integral triple.

La ecuacion que representa nuestro dirigible es:

$$\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{12^2} + \frac{z^2}{45^2} = 1$$

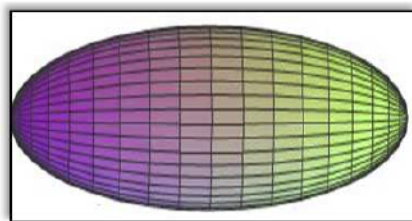


Figura 3.67: Forma del Dirigible.

Al despejar z obtenemos:

$$z = \sqrt{45^2 \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{12^2}\right)}$$

Ahora bien, la parametrización de nuestro dirigible utilizando coordenadas esféricas vendría dada por:

$$\begin{aligned} x &= 12 \cos(\theta) \cos(\varphi) & \text{con, } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ y &= 12 \cos(\theta) \sin(\varphi) & Y \\ z &= 45 \sin(\theta) & 0 < \varphi < \pi \end{aligned}$$

Y teniendo en cuenta que el volumen de un elipsoide esta representado por la ecuación:

$$V = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{ab}{\sqrt{b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}}} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi = \frac{4\pi}{3} a^2 b$$

Entonces, al resolver con los valores reales de nuestro dirigible, el resultado sería:

$$V = 8640\pi$$

Terminado nuestro trabajo, llegamos a la siguiente conclusión: con la aplicación del Cálculo a nuestro proyecto, nos dimos cuenta que esta materia no es una herramienta

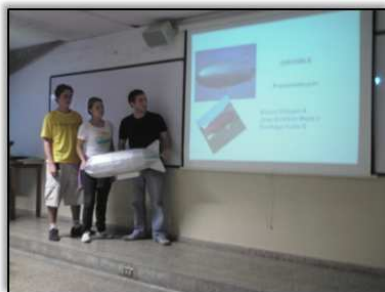


Figura 3.68: Exposición final - Proyecto Dirigible.

solo numerica, con ella podemos hacer mas que calculos y graficas, podemos disenar, utilizarlo en nuestra vida diaria, crear cosas, solucionar problemas facilitando as muchos obstaculos que se nos presentan diariamente.

De igual forma, al concluir el semestre academico los estudiantes presentaron el producto terminado. Mediante una exposicion, mostraron la aplicacion del Calculo en el objeto seleccionado y en su entorno. La Figura 3.68 muestra el producto final y la sustentacion en el aula de clase.

Una vez finalizado el curso el cual tuvo como fundamento pedagogico el metodo de la Ensenanza para la Comprension apoyado en herramientas tecnologicas provistas por la universidad EAFIT; y culminado el proyecto de investigacion llevado a cabo por los estudiantes, estos ultimos expresaron las conclusiones a las cuales llegaron una vez aplicado el metodo anteriormente descrito. A continuacion se exponen algunas de estas conclusiones.

3.5.5. Conclusiones

Entre las conclusiones descritas por los estudiantes sobresalen las siguientes:

- Para el campo de las ciencias computacionales es de vital importancia el Calculo, ya que tanto el software como el hardware tiene fundamentos matematicos sin los cuales no funcionar an.
- Muchos conceptos del Calculo y de la Fisica son aplicados por programas computacionales que no solo apoyan areas relacionadas con estos campos, sino que tambien ofrecen funcionalidades importantes para otro tipo de estudios como la economia, la publicidad, el diseno, entre otros.
- Es importante para cualquier ingeniero conocer los fundamentos del Calculo,

pues ellos proporcionan herramientas para resolver problemas y una estructura de pensamiento basado en la lógica, dos aspectos que los ingenieros deben desarrollar.

- El cálculo tiene muchas aplicaciones en la vida cotidiana, muchas de las cosas que nos rodean se basan en los conceptos del cálculo, a partir de la ecuación de una curva podemos desarrollar productos para el servicio del hombre. Asimismo Comprendimos que el cálculo es una herramienta muy importante y útil para nosotros como futuros ingenieros, ya que permite prever los resultados de cualquier idea o proyecto que queramos llevar a cabo.
- Además de ver plasmado el Cálculo en cantidad de curvas, logramos ver como este ayuda a tener un pensamiento lógico y estructurado a la hora de tomar decisiones, desarrollar proyectos e intervenir en asuntos personales y profesionales, a mandarse esto gracias a experiencias diarias de profesionales de hoy.

A lo largo del presente Capítulo se ha expuesto la aplicación metodológica desarrollado por los estudiantes, con lo que se pretende destacar la relevancia de aplicar el tipo de metodología pedagógica y tecnológica en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial que se propone en este trabajo, su papel como instrumento en el fortalecimiento de las competencias y destrezas de los estudiantes como también la importancia de brindar variadas opciones de aprendizaje buscando siempre obtener mejores resultados y mejores desempeños de comprensión.

3.6. Valoración continua

Como se describe en el Capítulo 2, Sección 2.7.4, página 74, se utilizaron dos instrumentos de evaluación para calificar a los estudiantes: uno de ellos fue la evaluación formal y el otro las matrices de evaluación que se exponen en el Capítulo 2, Sección 2.5.12, páginas 60, 61, 62. Este último instrumento se utilizó para evaluar al alumnado de forma cualitativa a través de las siguientes actividades.

- Al analizar cada fase, los estudiantes exponían los avances conseguidos de los desempeños de comprensión y la relación que tienen directamente con las metas. Con esto se buscaba generar discusiones de carácter constructivas, a fin de mejorar el rendimiento individual y grupal.
- Cada grupo de trabajo consignaba en un portafolio (referirse al Capítulo 2, Sección 2.8.3, página 80), los resultados obtenidos en cada una de las fases anteriormente descritas. En este, evidenciaban el desarrollo y el proceso llevado

a cabo en cada una de estas etapas, exponían las soluciones a los problemas surgidos y concluían sobre los mismos.

- El docente analizando cada una de las fases elaboradas por los estudiantes, evaluaba el progreso en forma individual y grupal de los desempeños y las metas de comprensión. Y con base a esto, corregía y proporcionaba sugerencias para mejorar y fortalecer el proceso de aprendizaje.

Con base a los datos obtenidos al aplicar este instrumento de evaluación, en el Capítulo 4, se muestra un análisis univariado de cada una de estas matrices, las cuales se utilizaron como complemento en el proceso evaluativo llevado a cabo por el docente durante el periodo académico.

3.6.1. Aplicación de la encuesta final

Como se mostro en el Capítulo 2, Sección 2.9, página 81, se utilizó la encuesta como medio de recolección de datos. Para esto, se aplicaron 2 encuestas, una al iniciar el curso y otra al finalizar el mismo. En este apartado se muestra la encuesta final aplicada a los estudiantes, la cual tuvo como propósito fundamental detectar el impacto del método de enseñanza y aprendizaje propuesto en este proyecto. Una vez recolectada la información se utilizó el método Estadístico de análisis factorial de correspondencias AFC descrito en el Capítulo 2, Sección 2.9.2, página 82, para analizar e interpretar dicha información. Estos resultados se exponen en el Capítulo 4.

A continuación se muestra la encuesta aplicada a los estudiantes. Se seleccionaron al azar 5 de ellas a fin mostrar las respuestas escogidas a cada una de las preguntas formuladas. El número de estudiantes que seleccionaron dicha respuesta se muestra en frente de cada una de estas.

Encuesta Final

La siguiente encuesta que a continuación usted va a contestar, tiene como propósito fundamental, detectar el impacto del método de enseñanza y aprendizaje que tiene como nombre Enseñanza para la Comprensión (EpC), con el soporte tecnológico (applets, software, mimio, entre otras) utilizada en el aula de clase, en el curso de Cálculo III.

Senale con una X su respuesta.

1. Como considera usted las herramientas tecnologicas (applets, software, mimio, PDA) utilizadas en el desarrollo del curso Calculo III?
 - a) Malas (0)
 - b) Regulares (0)
 - c) Buenas (4)
 - d) Muy buenas (1)

2. Cree usted que el uso de los Applets ayuda a visualizar de una mejor manera, los conceptos teoricos (derivadas, integrales, campos vectoriales, etc.) del Calculo III?
 - a) Si (5)
 - b) No (0)

3. Considera usted que el uso de PDA S en el aula de clase resulta una herramienta util para visualizar y manipular super cies?
 - a) Si (4)
 - b) No (1)

4. Considera usted que el uso de PDA S en el aula de clase resulta una herramienta util para el estudio de las super cies?
 - a) Si (4)
 - b) No (1)

5. Para usted la utilizacion de software en el aula de clase es una herramienta:
 - a) Mala (0)
 - b) Regular (1)
 - c) Buena (1)
 - d) Muy buena (3)

6. Considera usted que la utilizacion de software en el aula de clase resulta una herramienta util para el estudio de las super cies?

- a) Si (5)
 - b) No (0)
7. Para usted, el mimio como herramienta tecnologica es:
- a) Mala (0)
 - b) Regular (1)
 - c) Buena (1)
 - d) Muy buena (3)
8. El mimio le permite a usted prestar mayor atencion en el desarrollo de la clase?
- a) Si. (4)
 - b) No (1)
9. Toma usted apuntes adicionales cuando el profesor esta utilizando el mimio?
- a) Nunca (0)
 - b) Algunas veces (3)
 - c) Siempre (2)
10. Es ventajoso para usted contar con las memorias de clase obtenidas con el mimio?
- a) Nunca (0)
 - b) Algunas veces (1)
 - c) Siempre (4)
11. Como considera usted el portafolio como instrumento de aprendizaje y comprension del Calculo III?
- a) Mala (0)
 - b) Regular (1)
 - c) Buena (2)
 - d) Muy buena (2)
12. Utilizo usted alguna herramienta tecnologica para el desarrollo de su portafolio?
- a) Nunca (1)

- b) Algunas veces (3)
 - c) Siempre (1)
13. Al desarrollar el portafolio logrado por usted durante el curso, pudo hallar aplicaciones prácticas del Cálculo III al mundo real?
- a) Nunca(0)
 - b) Algunas veces (1)
 - c) Siempre (4)
14. Durante el desarrollo del curso de Cálculo III, cree usted, que el portafolio le aportó como herramienta para comprender y relacionar el Cálculo en su vida cotidiana?
- a) Nunca (0)
 - b) Algunas veces (2)
 - c) Siempre (3)
15. El curso de Cálculo III desarrollado por el método de enseñanza-aprendizaje y comprensión le aportó aplicaciones prácticas en su área de estudio?
- a) Nunca (0)
 - b) Algunas veces (2)
 - c) Siempre (3)

Con base en el conocimiento adquirido durante el desarrollo del curso de Cálculo III, y apoyado en el método pedagógico de la enseñanza para la comprensión (EpC), cree usted que este es:

16. Innovador?
- a) Si (5)
 - b) No (0)
17. Creativo?
- a) Si (5)
 - b) No (0)

18. Que otras experiencias le trajo a usted el curso de Calculo III, desarrollado por el metodo de la ensenanza para la comprension (EpC) apoyado con nuevas tecnolog as?

Lo expuesto en este Capitulo, demuestra el impacto positivo que tuvo la aplicacion del diseno metodologico propuesto en la ensenanza, aprendizaje y comprension del Calculo Vectorial. Por un lado, el uso de las herramientas tecnologicas brindo a los docentes la oportunidad de transmitir sus conocimientos de una manera mas efectiva, atractiva e innovadora; por otro, el desarrollo de las distintas fases de investigacion, provoco en los estudiantes un cambio frente a la vision tradicional que tra an del Calculo, aumento en ellos el interes por explorar, aplicar y desarrollar habilidades y desempenos; en consecuencia, los estudiantes se involucraron mucho mas en el proceso de ensenanza y de aprendizaje.

Lo anterior nos permite rea rmar que el principal objetivo trazado al implementar esta metodolog a se ha cumplido. Mas aun, en el siguiente Capitulo se realizara un analisis mas exhaustivo que corroborara estos resultados.

Cap tulo 4

Tratamiento estad stico

Muchos de los problemas de la investigacion exploratoria se pueden evitar si el investigador da inicio o comienza con un modelo desarrollado en estudios anteriores usandolos como hipotesis de trabajo. A traves de una informacion preliminar y mediante encuestas por muestreo, como en nuestro caso, el investigador intenta ver mediante un analisis inductivo si el material recogido es conforme al modelo, si lo debe corregir o buscar uno mas apropiado.

Para lograr los objetivos trazados en este trabajo de investigacion hemos comenzado de lo que ya es conocido, es decir, la ensenanza del Calculo por el metodo tradicional. Por ello, para analizar el impacto que produjo la metodolog a propuesta se realizaron dos encuestas (ver Apendices B y C, paginas 219 y 223), a los estudiantes participantes de la investigacion, de las que una se realizo al momento de iniciar el curso y otra al analizar el mismo. Una vez recolectada la informacion se construyeron tres matrices de datos (ver Apendices D y E, paginas 227 y 229) una de estas hace referencia a la encuesta inicial, mientras que las otras dos a la encuesta final. Seguidamente se realizo un analisis univariado y multivariado, este ultimo basado en el metodo de Analisis Factorial de Correspondencias multiples AFC descrito en el Cap tulo 2, Seccion 2.9.2, pagina 82. Estos analisis se exponen a continuacion.

Vale la pena aclarar que las encuestas fueron aplicadas en 2 cursos de los cuales uno de ellos utilizo todas las herramientas tecnologicas mencionadas en el presente Cap tulo, excepto la pizarra interactiva Mimio y las Pocket PC (PDA s), por lo que se opto por construir dos matrices de datos para la ultima encuesta.

4.1. Encuesta inicial

El propósito de aplicar esta encuesta al alumnado radicaba en la necesidad de recolectar información respecto al grado de comprensión y aplicación de herramientas tecnológicas en cursos de Cálculo anteriormente vistos. Una vez recolectada esta información se realizaron los análisis pertinentes.

4.1.1. Análisis Univariado

Como su nombre lo indica este análisis se centra en estudiar las características o propiedades de las respuestas suministradas por los encuestados una a una. Los resultados de esta primera encuesta se enuncian a continuación.

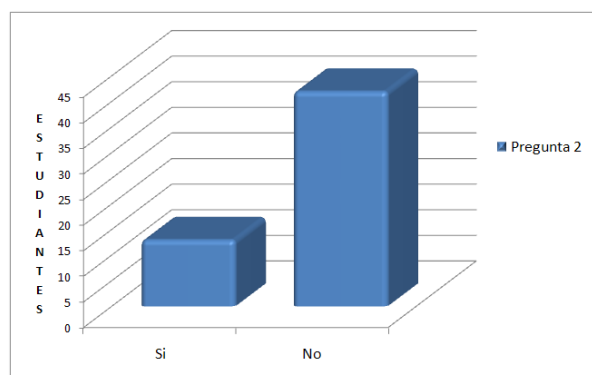


Figura 4.1: Gráfico - Encuesta inicial pregunta 2.

La Figura 4.1 muestra el gráfico representativo a las respuestas de la pregunta 2, formulada a los estudiantes en la encuesta que se realizó al momento de iniciar el curso de Cálculo III (ver Apéndice B, página 219). En cuanto a esta pregunta: Aparte de los exámenes presentados en los diferentes cursos de su carrera, ¿ha aplicado el Cálculo en alguna situación de su entorno? Se encontró que aproximadamente el 24% del alumnado que está representado en 13 estudiantes manifestaron haber aplicado el Cálculo en otra situación diferente a los exámenes, y 42 de los alumnos encuestados que corresponden aproximadamente al 76% declararon No haber aplicado el Cálculo en otra situación diferente a los exámenes propuestos en clase.

La Figura 4.2 muestra el gráfico representativo a las respuestas de las preguntas (1, 5, 6, 7). Respecto a la pregunta 1 ¿Considera que el cálculo se refleja en la vida diaria? 3 Del total de estudiantes encuestados dicen que el *Cálculo Nunca se refleja* en la vida diaria lo que corresponde al 6% de ellos, 42 estudiantes opinan que se refleja

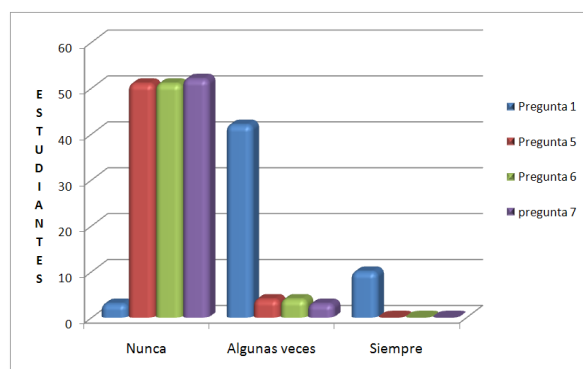


Figura 4.2: Gráfico - Encuesta inicial preguntas (1, 5, 6, 7).

solo algunas veces lo que representa el 76% del alumnado y el 18% restante que estan representados en 10 estudiantes consideran que el Calculo se refleja todas las veces en la vida diaria.

En cuanto a la pregunta 5: en el desarrollo de los cursos de Calculo estudiados anteriormente ha empleado Applets? El 93% del alumnado que esta representado por 51 estudiantes expreso no haber utilizado Applets como herramienta tecnologica en el estudio de cursos anteriores, 4 de ellos que constituyen el 7% respondieron haber utilizado algunas veces applets y ninguno manifesto haber empleado siempre Applets.

En relacion a la pregunta 6: En el desarrollo de los cursos de Calculo estudiados anteriormente ha empleado PDA s (Pocket PC)? El 93% del alumnado que esta representado por 51 estudiantes expreso no haber utilizado PDA s como herramienta tecnologica en el estudio de cursos anteriores, 4 de ellos que constituyen el 7% respondieron haber utilizado algunas veces PDA s y ninguno manifesto haber empleado siempre Applets.

En cuanto a la pregunta 7: En el desarrollo de los cursos de Calculo estudiados anteriormente ha empleado el Mimio? Aproximadamente el 95% del alumnado que esta representado por 52 estudiantes expreso no haber utilizado la pizarra interactiva Mimio como herramienta tecnologica en el estudio de cursos anteriores, 3 de ellos que constituyen aproximadamente el 5% respondieron haber utilizado algunas veces el Mimio y ninguno manifesto haber empleado siempre la pizarra interactiva.

En relacion a la pregunta 8: Piensa usted que con el uso de herramientas tecnologicas dentro del aula de clase, se logra descubrir, comprender y visualizar los conceptos relacionados con el Calculo? Se encontro que el 86% del alumnado encuestado que esta representado por 47 estudiantes piensan que el uso de herramientas tecnologicas en el aula de clase Si ayudar a descubrir, comprender y visualizar los conceptos relacionados con el Calculo, 5% de ellos que corresponde a 3 estudiantes

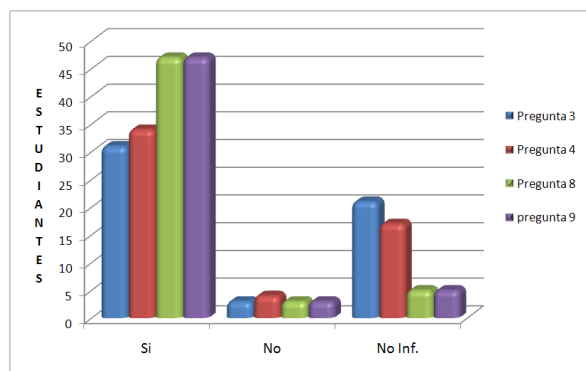


Figura 4.3: Gráfico - Encuesta inicial preguntas (3, 4, 8, 9).

piensan que No y el restante 9% que esta representado por 5 alumnos manifestaron No tener informacion al respecto.

La Figura 4.3 presenta el gráfico de las respuestas dadas por los alumnos a las preguntas (3, 4, 8, 9). Respecto a la pregunta 3: ¿Son necesarias funciones de varias variables para modelar fenómenos que ocurren en la naturaleza? Se encontró que 55% del total de encuestados que están representados por 31 estudiantes respondieron que Si son necesarias estas funciones para modelar fenómenos naturales, 3 de ellos que concierne al 5% respondieron que No son necesarias estas funciones y el restante 38% que esta constituido por 21 alumnos mostraron No tener informacion al respecto.

En cuanto a la pregunta 4: ¿Las propiedades de continuidad, derivabilidad e integrabilidad para funciones de una variable, se podrán extender a funciones de varias variables? El 62% que representa la mayor proporción se localiza en los estudiantes que piensan que las propiedades nombradas en la pregunta pueden extenderse a funciones de varias variables, 31% contestaron No tener informacion al respecto y el 7% restante manifestó que No se pueden extender estas propiedades.

Respecto a la pregunta 9: ¿El Cálculo se aplica a todos los fenómenos de la vida diaria? (físico, químicos, biológicos, económicos, sociales, ambientales, etc.) 86% del alumnado que está representado por 47 estudiantes considero que el Cálculo Si se aplica a todos los fenómenos de la vida diaria, 32 estudiantes que representan el 5% respondieron que No y 5 de ellos que constituyen el restante 9% manifestaron No tener informacion al respecto.

La Figura 4.4 muestra el gráfico representativo a las respuestas de las preguntas (10, 12, 15). En cuanto a la pregunta 10: ¿El cálculo estudia entre otros temas funciones, límites, derivadas, integrales simples y múltiples? Se encontró que la mayor proporción de estudiantes que representa aproximadamente el 94% de ellos considera que el Cálculo Si estudia los temas antes mencionados, 4% consideran que No y el restante 4%

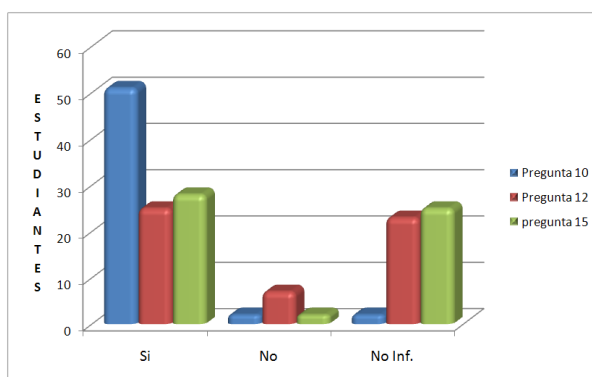


Figura 4.4: Gra co - Encuesta inicial preguntas (10, 12, 15).

manifestaron No tener informacion al respecto.

En relacion a la pregunta 12: Todo proceso socio-economico, administrativo, financiero, industrial, biologico, ambiental, etc., involucran funciones de varias variables? Se observo que el 45% del alumnado que re ere 25 estudiantes expresaron que todo proceso Si involucra funciones de varias variables, 13% declararon que No y el restante 42% manifestaron No tener informacion al respecto.

En cuanto a la pregunta 15: Con funciones de varias variables se podr a modelar el ingreso de una familia, la cuenta de los servicios publicos de un hogar, sus ingresos personales, entre otros? Se encontro que el 51% de estudiantes respondieron que con funciones de varias variables Si se podr a modelar situaciones de diaria ocurrencia en el hogar, 4% respondieron que NO y el restante 45% manifestaron No tener informacion al respecto.

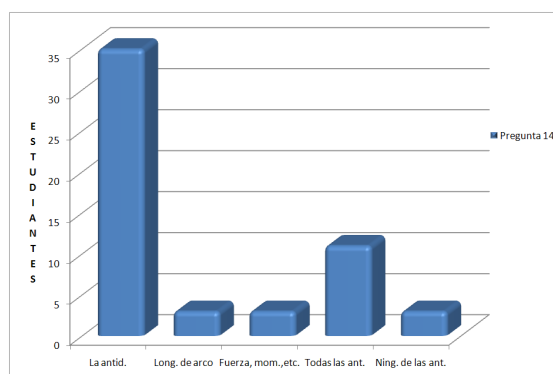


Figura 4.5: Gra co - Encuesta inicial pregunta 14.

La Figura 4.5 muestra el gra co representativo a las respuestas de la pregunta 14. En relacion a esta pregunta: Que signi ca la integral de una funcion? Se encontro que

35 estudiantes que representan el 65% respondieron la antiderivada, 3 de ellos Longitud de arco lo que constituyen el 5%, 3 que corresponden al 5% indicaron que el significado era Fuerza, promedios, varianzas, momentos, etc., 11 que concierne al 20% manifestaron Todas las anteriores y el restante 5% respondieron Ninguna de las anteriores.

Conclusiones

A continuación se muestran las conclusiones resultantes del análisis univariado, referente a las respuestas obtenidas de la aplicación de la encuesta inicial.

- Respecto a la pregunta 1, los estudiantes perciben la necesidad del Cálculo como parte de la vida diaria, pero no logran cristalizar los diferentes conceptos por falta de herramientas necesarias que induzcan a una aplicación directa.
- En cuanto a la pregunta 2, se evidencia que las matemáticas dirigidas a los estudiantes de ingeniería no son compatibles con las diferentes teorías empíricas con las cuales se enfrenta el ingeniero en la vida real.
- Con base en las preguntas 5, 6 y 7 se puede percibir que la enseñanza de la matemática necesita herramientas tecnológicas que contribuyan a complementar los fundamentos teóricos expuestos por el docente en una clase magistral.
- Ahora bien, a las preguntas 3, 4, 10, 12 y 15 se puede decir: la complejidad de los fenómenos naturales siempre involucran múltiples variables determinísticas y aleatorias que interactúan en forma simultánea, de allí la necesidad de la matemática multivariada para modelarlos. Lo anterior es compatible con lo manifestado por los estudiantes en el sentido de la necesidad de esta área de las ciencias.

4.1.2. Análisis Multivariado

El propósito del análisis multivariado es medir, explicar y predecir el grado de relación o asociación de las variables que integran el estudio, basados en una tabla de contribuciones y un mapa perceptual derivado de la misma. Por esta razón se optó por utilizar este método para el análisis de nuestras encuestas. Seguidamente se muestran los resultados obtenidos.

MODALITES			COORDONNEES		CONTRIBUTIONS	
IDEN - LIBELLE	P.REL	DISTO	1	2	1	2
1 . El cálculo se refleja en la vida diaria						
RA_1 - Nunca(vida diaria)	0.36	17.33	1.14	0.97	2.4	2.0
RA_2 - Algunas veces (v. d)	5.09	0.31	0.15	-0.11	0.6	0.4
RA_3 - Todas las veces v.d.	1.21	4.50	-0.97	0.17	5.9	0.2
CONTRIBUTION CUMULEE =					8.9	2.5
2 . Aplicación del cálculo en su entorno						
RB_1 - Si (En el entorno)	0.48	12.75	1.55	0.86	6.0	2.1
RB_2 - No (En el entorno)	6.18	0.08	-0.12	-0.07	0.5	0.2
CONTRIBUTION CUMULEE =					6.4	2.2
3 . Funciones de varias variables para modelar fenómenos na						
RC_1 - Si (Model fenómenos)	3.76	0.77	-0.36	0.38	2.5	3.2
RC_2 - No (Model fenómenos)	0.36	17.33	-1.06	-2.42	2.1	12.2
RC_3 - No tengo inf. (Model)	2.55	1.62	0.69	-0.22	6.2	0.7
CONTRIBUTION CUMULEE =					10.8	16.0
4 . Propiedades del cálculo a funciones de varias variables						
RD_1 - Si Propie.varias va	4.12	0.62	-0.18	0.39	0.7	3.5
RD_2 - NoProie varias va	0.48	12.75	-0.47	0.49	0.6	0.7
RD_3 - No infor.Varia va	2.06	2.24	0.46	-0.89	2.3	9.3
CONTRIBUTION CUMULEE =					3.5	13.6
5 . Uso de Applets						
RE_1 - Nunca(Applet's)	6.18	0.08	0.05	0.04	0.1	0.1
RE_2 - Algu veces(Applet's)	0.48	12.75	-0.69	-0.56	1.2	0.9
CONTRIBUTION CUMULEE =					1.3	0.9
6 . Uso de PDR's (Poket PC)						
RF_1 - Nunca(PDR's)	6.18	0.08	0.05	-0.06	0.1	0.1
RF_2 - Algu veces(PDR's)	0.48	12.75	-0.70	0.83	1.2	1.9
CONTRIBUTION CUMULEE =					1.3	2.0
7 . Uso del MIMIO						
RG_1 - Nunca(Mimio)	6.30	0.06	0.01	-0.04	0.0	0.1
RG_2 - Algu veces(Mimio)	0.36	17.33	-0.10	0.76	0.0	1.2
CONTRIBUTION CUMULEE =					0.0	1.3
8 . Uso de herramientas para comprender el cálculo						
RH_1 - Si (Uso H. Tecn)	5.70	0.17	-0.06	-0.05	0.1	0.1
RH_2 - No (Uso H. Tecn)	0.36	17.33	-0.02	-1.09	0.0	2.4
RH_3 - No INF. (Uso H. Tecn)	0.61	10.00	0.56	1.09	1.0	4.1
CONTRIBUTION CUMULEE =					1.1	6.6
9 . El cálculo aplicado a la vida diaria						
RI_1 - Si (Vida diaria)	5.70	0.17	-0.09	0.06	0.3	0.1
RI_2 - No (vida diaria)	0.36	17.33	-0.76	-2.11	1.1	9.2
RI_3 - No inf (Vida diaria)	0.61	10.00	1.33	0.70	5.5	1.7
CONTRIBUTION CUMULEE =					6.8	11.0
10 . El cálculo estudia: funciones, límites, etc.						
AJ_1 - Si (Integ., deri., etc)	6.18	0.08	-0.10	-0.04	0.3	0.1
AJ_2 - NO (Integ., deri., etc)	0.24	26.50	1.42	-0.12	2.5	0.0
AJ_3 - No inf (Inte., deri.)	0.24	26.50	1.10	1.24	1.5	2.1
CONTRIBUTION CUMULEE =					4.4	2.2
11 . Función con derivada negativa						
AK_1 - Decrec. (Der neg)	4.97	0.34	-0.29	0.09	2.2	0.2
AK_2 - Crecien (Der neg)	0.73	8.17	0.35	0.59	0.5	1.5
AK_3 - No recuer (Der neg)	0.97	5.88	1.25	-0.89	7.8	4.4
CONTRIBUTION CUMULEE =					10.4	6.0
12 . Todo proceso involucra funciones de varias variables						
AL_1 - SI (Proc varias var)	3.03	1.20	-0.46	0.31	3.3	1.7
AL_2 - No (Proc varias var)	0.85	6.86	-0.47	-1.62	1.0	12.7
AL_3 - No inf (Proc. Va var)	2.79	1.39	0.64	0.16	5.9	0.4
CONTRIBUTION CUMULEE =					10.1	14.8
13 . El significado de la derivada de una función						
AM_1 - Si (Sign vida diaria)	5.82	0.15	-0.08	0.10	0.2	0.3
AM_2 - No (Sig vida diaria)	0.36	17.33	2.28	-1.27	9.7	3.4
AM_3 - No se (Sig vida dia)	0.48	12.75	-0.73	-0.22	1.3	0.1
CONTRIBUTION CUMULEE =					11.2	3.8
14 . El significado de la integral de una función						
AN_1 - Antiderivada (Integr)	4.24	0.57	0.25	-0.19	1.3	0.9
AN_2 - Long. arco (Integr)	0.36	17.33	-0.80	1.14	1.2	2.7
AN_3 - Fuerza, prom. etc (Int)	0.36	17.33	0.10	0.06	0.0	0.0
AN_4 - T. anteriores (Int)	1.33	4.00	-0.21	0.78	0.3	4.7

Figura 4.6: Tabla de contribuciones - Encuesta inicial.

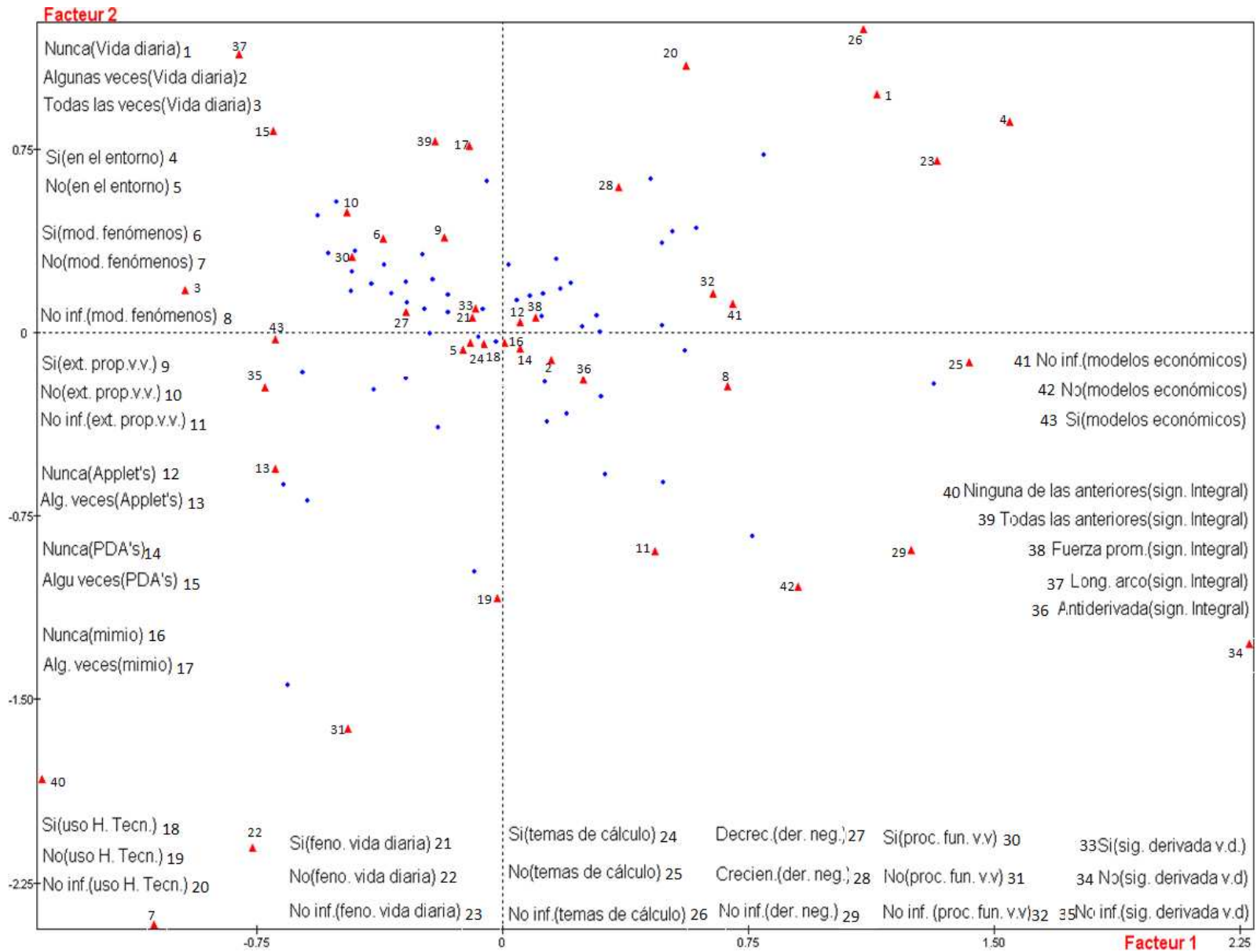


Figura 4.7: Mapa perceptual multivariado - Encuesta inicial.

La Figura 4.7 muestra el mapa perceptual multivariado derivado del procesamiento de la información recolectada en la encuesta realizada a los estudiantes una vez iniciado el semestre académico. Para una mejor lectura del mapa perceptual las modalidades se segmentaron de acuerdo a su ubicación. A continuación se muestran cada una de ellas y los resultados encontrados.

1. Es marcada la asociación entre el uso de tecnologías, el estudio y comprensión del Cálculo, el pensamiento de aplicación de sus conceptos y el significado de estos en el entorno y vida diaria. Lo anterior nos alienta a indagar en la importancia que esta asociación podrá tener en los alcances perseguidos en este proyecto de investigación que podremos describirlo en pocas palabras y como lo hemos mencionado en capítulos anteriores el alcanzar un verdadero aprendizaje significativo.
2. Se puede apreciar una asociación directa en los segmentos que están ubicados alrededor del origen: (5, 24, 18, 21, 33 y 27) y el segmento (16, 14, 12, 38, 2 y 36); además, una asociación contraria entre los mismos. Es decir, primero que todo, ambos segmentos se encuentran muy cerca al punto de origen (promedio) y por tanto los hace muy relevantes y de mayor incidencia en el estudio. Además de esto, vale la pena notar que estas modalidades se localizan con una mayor densidad de puntos (estudiantes). De todo lo anterior se puede percibir: los estudiantes manifiestan que el Cálculo se refleja en su vida diaria, se aplica a fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos, sociales, ambientales y además las herramientas tecnológicas se podrán aplicar para descubrir, visualizar y comprender los conceptos relacionados con el cálculo, etc. Pero sin embargo consideran también, con suma importancia, la carencia de estas herramientas tecnológicas tales como applets, Mimio, PDA's, etc. que les servirán para desarrollar integralmente un curso sobre la asignatura. Se puede percibir esto, puesto que ambos segmentos de categorías o modalidades se localizan en cuadrantes opuestos y además están ejerciendo muy buena fuerza de asociación al primer factor.
3. Si se observa el segmento (26, 1, 23, 4) ubicado en el primer cuadrante fuera de que estas modalidades están dispersas, también lo están muy distantes con respecto al punto de inercia. Lo que se traduce en muy poca significancia sobre los factores; con respecto a lo mencionado en el párrafo anterior, puesto que estas modalidades hacen referencia a la carencia de información acerca de los conceptos tratados en el Cálculo y sus aplicaciones en el entorno y a fenómenos de la vida diaria.
4. Si se observan los segmentos (11, 42, 29, 25) y (40, 22, 31, 19, 7) que se encuentran ubicados en el cuarto y tercer cuadrante respectivamente, se puede apreciar primero que todo: están distantes del punto de inercia y además están siguiendo

un mismo patrón de tendencia que se traduce en aquellos individuos que siempre están manifestando una misma opinión, No, como respuesta a sus preguntas: no aplicación del Cálculo a su entorno, no a funciones de varias variables a fenómenos de la naturaleza, no uso de tecnologías, etc. Y segundo estas modalidades están muy dispersas las unas con las otras lo que conlleva a unas pocas opiniones aisladas; si se observa el mapa perceptual no se ve mucha densidad de individuos (estudiantes) involucrados con estas manifestaciones.

5. Con respecto al segmento de modalidades, (6, 9, 10, 30) que se encuentra en el segundo cuadrante, vemos que están asociadas manifestando un buen número de estudiantes que piensan que las funciones del Cálculo en una variable se pueden extender a varias variables, para poder modelar y entender fenómenos de la naturaleza. Seguidamente, si se analiza el segmento de modalidades (15, 17, 37 y 39) parece ser que algunos estudiantes aseveran que el uso frecuente de algunas herramientas tecnológicas sirven para entender conceptos del Cálculo, como la longitud del arco, derivadas, entre otros.

Del anterior análisis, resulta claro que los estudiantes consideran el Cálculo como un curso con gran potencial aplicativo, pero en contraste a esto, se reeja poca o ninguna aplicación del mismo; insisten en la inclusión de tecnologías como herramienta que ayudaría a fortalecer la enseñanza y el estudio de esta ciencia en su entorno y más específicamente en su carrera.

4.2. Encuesta final

El propósito de aplicar esta encuesta al alumnado radicaba en la necesidad de recolectar información respecto a la aplicación de la propuesta metodológica de enseñanza y aprendizaje planteada en este proyecto. Asimismo, comparar los resultados obtenidos en esta encuesta con los logrados en la inicial.

4.2.1. Análisis Univariado

Como se menciona anteriormente, este método consiste en el análisis de cada una de las variables estudiadas por separado, es decir, el análisis está basado en una sola variable. Para esta encuesta se tuvieron en cuenta todas las preguntas, excepto las que hacen referencia a las herramientas Mimio y PDA's, las cuales se estudiarán en la sección 4.2.3 página 186. Seguidamente se muestran los resultados obtenidos.

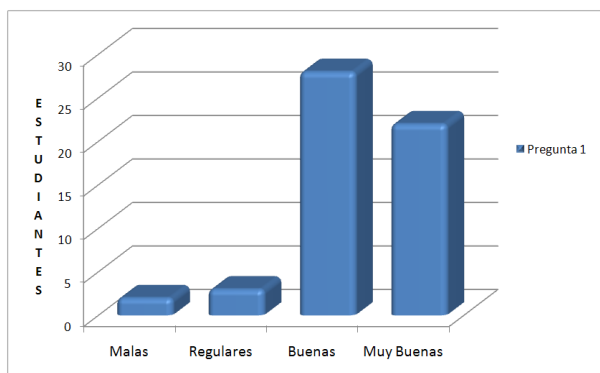


Figura 4.8: Gráfico - Encuesta Final pregunta 1.

La Figura 4.8, muestra el gráfico representativo a las respuestas de la pregunta 1, formulada a los estudiantes en la encuesta que se realizó una vez finalizó el curso de Cálculo III (ver Apéndice C, página 223) el cual tuvo como soporte pedagógico el método de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) apoyado con nuevas tecnologías. En cuanto a la pregunta 1: ¿Cómo considera usted las herramientas tecnológicas (applets, software, mimio, PDA's) utilizadas en el desarrollo del curso Cálculo III? 2 de los estudiantes que corresponde aproximadamente al 4% respondieron Malas, 3 más consideraron que las herramientas tecnológicas utilizadas eran regulares lo cual concierne al 5% de ellos, aproximadamente el 51% que está representado en 28 estudiantes consideraron que estas herramientas eran buenas y 22 de ellos que concierne aproximadamente al 40% manifestaron que las herramientas tecnológicas empleadas en el desarrollo del curso fueron muy buenas.

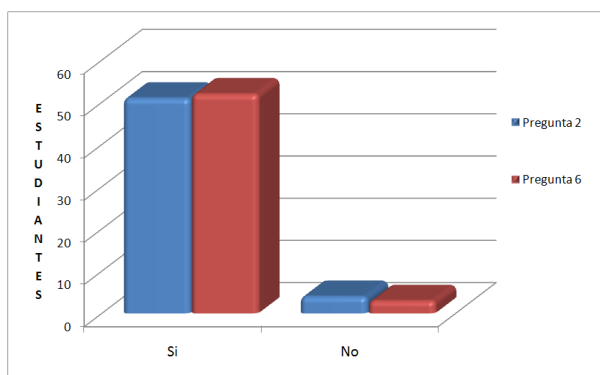


Figura 4.9: Gráfico - Encuesta Final preguntas (2, 6).

La Figura 4.8 muestra el gráfico representativo a las respuestas de las preguntas 2 y 6. En relación a la pregunta 2: ¿Cree usted que el uso de los Applets ayuda a visualizar de una mejor manera, los conceptos teóricos (derivadas, integrales, campos

vectoriales, etc.) del Calculo III? 51 estudiantes que representan aproximadamente el 93% consideran que el uso de Applets SI ayuda a visualizar de una mejor manera los conceptos propios de Calculo vectorial. El 7% restante, que concierne a 4 estudiantes, respondieron No a la pregunta.

En cuanto a la pregunta 6: Considera usted que la utilizacion de software en el aula de clase resulta una herramienta util para el estudio de las super cies? La mayor proporcion que comprende aproximadamente al 95% se encuentra en los estudiantes que consideraron que el uso de software Si resulta una herramienta util para el estudio de las super cies mientras que 5% restante expresaron de estas no resulta una herramienta util.

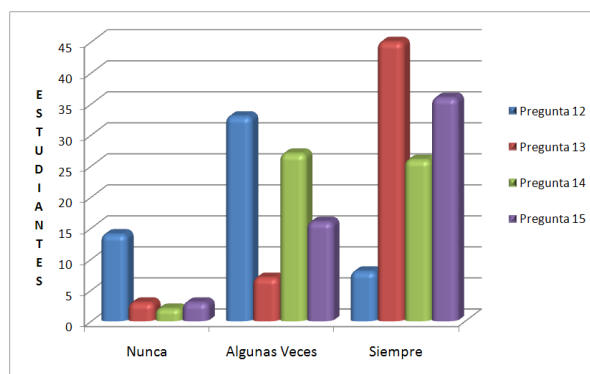


Figura 4.10: Gra co - Encuesta Final preguntas (12, 13, 14, 15).

La Figura 4.10 muestra el gra co representativo a las respuestas de las preguntas (12, 13, 14, 15). En cuanto a la pregunta 12: Utilizo usted alguna herramienta tecnologica para el desarrollo de su portafolio? 14 estudiantes, que representan aproximadamente el 25%, expresaron Nunca, 33 de ellos que constituyen el 60% manifestaron que usaron Algunas veces herramientas tecnologicas para el desarrollo de su portafolio y aproximadamente el 15% considero Siempre usar estas herramientas.

Con respecto a la pregunta 13: Al desarrollar el portafolio logrado por usted durante el curso, pudo hallar aplicaciones practicas del Calculo III al mundo real? La menor proporcion que corresponde aproximadamente al 5% respondieron Nunca, seguido del 13% los cuales opinaron Algunas veces, mientras que el restante 82% manifestaron haber hallado Siempre aplicaciones practicas del Calculo al mundo real al desarrollar su portafolio.

En relacion a la pregunta 14: Durante el desarrollo del curso de Calculo III, cree usted, que el portafolio le apor to como herramienta para comprender y relacionar el Calculo en su vida cotidiana? Aproximadamente el 4% del alumnado que esta representado por 2 estudiantes, manifesto Nunca, 27 de ellos que constituyen el 49%

consideran que el portafolio le aporta Algunas veces como herramienta para comprender el Calculo, mientras que el 47% que esta representado en 26 estudiantes opinaron que el portafolio Siempre le aporta.

En cuanto a la pregunta 15: El curso de Calculo III desarrollado por el metodo de enseñanza-aprendizaje y comprension le aporta aplicaciones practicas en su area de estudio? con el 6% se encontro en menor proporcion los estudiantes que opinaron Nunca, seguido del 29% de ellos que consideraron Algunas veces, mientras que el 65% de los estudiantes manifestaron haber encontrado Siempre aplicaciones practicas en su area de estudio.

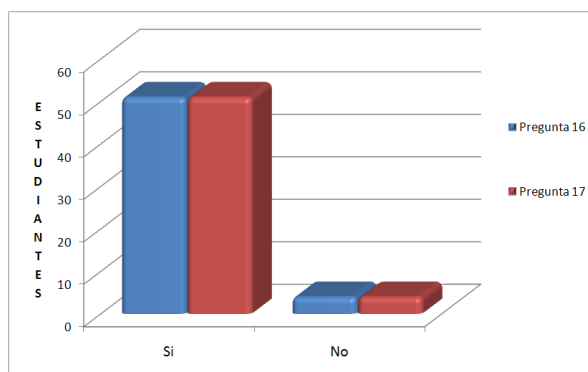


Figura 4.11: Gráfico - Encuesta Final preguntas (16, 17).

La Figura 4.11 muestra el gráfico representativo a las respuestas de las preguntas 16 y 17. Respecto a la pregunta 16: Con base en el conocimiento adquirido durante el desarrollo del curso de Calculo III, y apoyado en el metodo pedagogico de la enseñanza para la comprension (EpC), cree usted que este es Innovador? En mayor proporcion con el 93% del alumnado se encontro que Si consideraban Innovador el metodo pedagogico de la Enseñanza para la Comprension, mientras que el restante 7% respondieron No a la pregunta.

En cuanto a la pregunta 17: Con base en el conocimiento adquirido durante el desarrollo del curso de Calculo III, y apoyado en el metodo pedagogico de la enseñanza para la comprension (EpC), cree usted que este es Creativo? 93% de los estudiantes consideraron el metodo pedagogico de la Enseñanza para la comprension Creativo, entretanto el restante 7% manifestaron No creativo el metodo aplicado.

La Figura 4.12 muestra el gráfico representativo a la respuesta de la pregunta 11. A la pregunta 11: Como considera usted el portafolio como instrumento de aprendizaje y comprension del Calculo III? 2 Estudiantes que representa aproximadamente el 4% del alumnado consideraron Mala la herramienta, seguido con el 14% que concierne a 8 estudiantes manifestaron regular, entre tanto 28 de ellos que constituyen

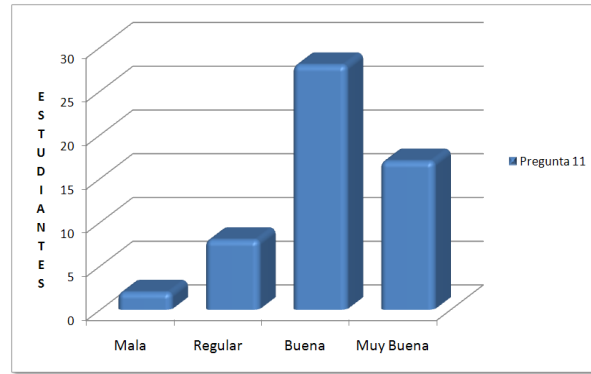


Figura 4.12: Gráfico - Encuesta Final pregunta 11.

aproximadamente el 51% respondieron Buena a la pregunta y el restante 31% que esta representado por 17 estudiantes consideraron muy Buena la herramienta (Portafolio) de aprendizaje y comprensión del Cálculo III.

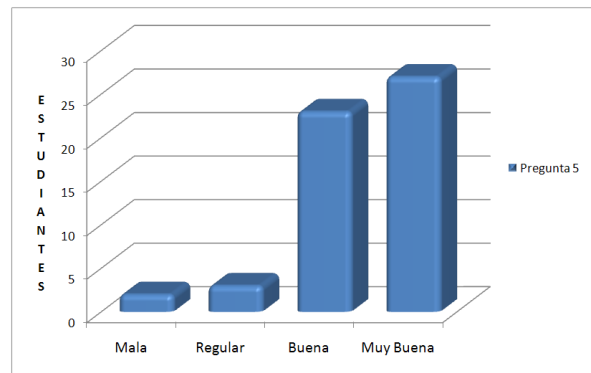


Figura 4.13: Gráfico - Encuesta Final pregunta 5.

La Figura 4.13 muestra el gráfico representativo a la respuesta de la pregunta 5. En relación a la pregunta 5: Para usted la utilización de software en el aula de clase es una herramienta: 2 estudiantes que constituyen el 4% del alumnado respondieron Mala a la pregunta, 3 de ellos que representan aproximadamente el 5% manifestaron que el uso de software en el aula es una herramienta Regular, entre tanto 42%, que concierne a 23 estudiantes, declararon Buena el uso de esta herramienta y en mayor proporción se encontró con el 49% del alumnado que esta representado por 27 de ellos Muy Buena el uso de software en el aula.

Conclusiones

A continuacion se muestran las conclusiones resultantes del analisis univariado, referente a las respuestas obtenidas de la aplicacion de la encuesta final.

- De las preguntas 1, 2, 5, 6 se hace evidente el impacto positivo que tuvo la implementacion de la tecnologia, tanto dentro como fuera del aula, aportando en la interaccion entre ella, el profesor y el estudiante, como instrumento de apoyo en la ensenanza y el aprendizaje de los conceptos propios del curso. De igual forma, las herramientas tecnologicas favorecieron la comprension de los temas estudiados, ya que gracias a estos, el docente logro presentarlos de forma interactiva, atractiva e innovadora, donde predominaba una inmejorable visualizacion lo que resulta imprescindible en cualquier curso de Matematicas y mas aun en un curso de Calculo Vectorial, donde se hace enfasis en el estudio de objetos tridimensionales.
- En cuanto a las preguntas 11, 12, 13, 14 y 15, el portafolio como instrumento pedagogico para los estudiantes, fue una herramienta que apporto significativamente en la comprension del Calculo y sus aplicaciones a la vida cotidiana y en su carrera, permitiendoles mostrar y observar la evolucion de sus conocimientos, habilidades, actitudes y competencias; asimismo, las estrategias que siguieron para alcanzar los objetivos trazados y autoevaluarse en multiples aspectos. De igual forma, la inclusion de herramientas tecnologicas en el desarrollo de este, permitio profundizar las aplicaciones y plasmar los resultados de forma clara y llamativa.
- A las preguntas 16 y 17 se hace manifiesta la percepcion innovadora y creativa que tuvieron los estudiantes frente al portafolio como herramienta complemento en su proceso de aprendizaje; ya que les permitio expresar sus conocimientos de distintas maneras, desarrollar competencias y capacitarlos satisfactoriamente en su ambito profesional.

4.2.2. Analisis Multivariado

Como se menciono anteriormente este metodo tambien se utilizo para estudiar el comportamiento de las respuestas a las preguntas formuladas en la encuesta final. De igual forma, basados en una tabla de contribuciones y un mapa perceptual derivado de la misma, se realizo el analisis y se sacaron las respectivas conclusiones de esta ultima encuesta. A continuacion se exponen los resultados.

MODALITES		COORDONNEES		CONTRIBUTION	
IDEN	LIBELLE	P. REL	DISTO	1	2
1. Opinión herramientas tecnológicas					
AA_1	- Malas(uso tecn. En el curso)	0.50	17.33	0.29	-1.01
AA_2	- Regular(uso tecn. En el curso)	0.50	17.33	2.25	-0.60
AA_3	- Buenas(uso tecn. En el curso)	4.63	0.96	0.28	0.34
AA_4	- Muy B.(uso tecn. En el curso)	2.47	1.62	-0.73	-0.22
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 16.3 7.0
2. Uso de los Applets					
AB01	- Si (uso de applets-visualización)	8.43	0.08	-0.02	-0.09
AB02	- No (uso de applets-visualización)	0.66	12.75	0.20	1.11
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 0.1 4.4
3. El software como herramienta tecnológica					
AC_1	- Malas(Usó software)	0.33	26.50	2.28	-2.81
AC_2	- Regular(Usó software)	0.50	17.33	0.79	1.64
AC_3	- Buena(Usó software)	2.80	1.39	0.48	0.10
AC_4	- Muy B.(Usó software)	4.46	1.04	-0.67	-0.06
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 16.7 20.1
4. El software como herramienta para superficies					
AD01	- Si (Software superficies)	8.60	0.06	-0.09	0.14
AD02	- No (Software superficies)	0.50	17.33	1.51	-2.41
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 4.1 15.3
5. El portafolio como instrumento de aprendizaje y compren					
AE_1	- Mala(portafolio)	0.33	26.50	2.51	0.78
AE_2	- Regular(portafolio)	1.32	5.88	0.45	0.47
AE_3	- Buena(portafolio)	4.63	0.96	0.23	-0.17
AE_4	- Muy B.(portafolio)	2.81	2.24	-0.88	-0.04
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 16.3 3.2
6. Herramientas utilizadas en el portafolio					
AF_1	- Nunca(herr. Tec. y portaf.)	2.31	2.93	0.52	-0.63
AF_2	- A. V. (herr. Tec. y portaf.)	5.45	0.67	-0.04	0.20
AF_3	- Siempre(herr. Tec. y portaf.)	1.32	5.88	-0.75	0.26
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 4.7 6.1
7. Desarrollo portafolio aplicaciones al mundo real					
AG_1	- Ninguna(aplic. Mundo real)	0.50	17.33	-0.03	-1.15
AG_2	- Pocas(aplic. Mundo real)	1.16	6.86	1.26	1.54
AG_3	- Muchas(aplic. Mundo real)	7.44	0.22	-0.19	-0.16
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 7.2 18.1
8. Aporte portafolio en la vida cotidiana					
AH_1	- Nunca(port. Vida coti.)	0.33	26.50	3.24	-1.12
AH_2	- Pocas(port. Vida coti.)	4.46	1.04	0.22	-0.04
AH_3	- Siempre(port. Vida coti.)	4.30	1.12	-0.47	0.13
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 15.8 2.5
9. Aporte cálculo III(EPC) en el área de estudio					
AI_1	- Ninguna(Cál.IIIárea)	0.50	17.33	0.30	1.21
AI_2	- Poca (Cál. III área)	2.64	2.44	0.95	-0.21
AI_3	- Mucha(Cál III área)	5.95	0.52	-0.45	-0.01
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 12.4 4.2
10. El método EPC es innovador					
AJ_1	- Si (Epc innovador)	8.43	0.08	0.00	-0.10
AJ_2	- No (Epc innovador)	0.66	12.75	-0.03	1.23
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 0.0 5.4
11. El método EPC es creativo					
AK_1	- Si (Epc creativo)	8.43	0.08	-0.13	-0.15
AK_2	- No (Epc creativo)	0.66	12.75	1.61	1.95
				CONTRIBUTION CUMULEE	= 6.3 13.6

Figura 4.14: Tabla de contribuciones - Encuesta Final.

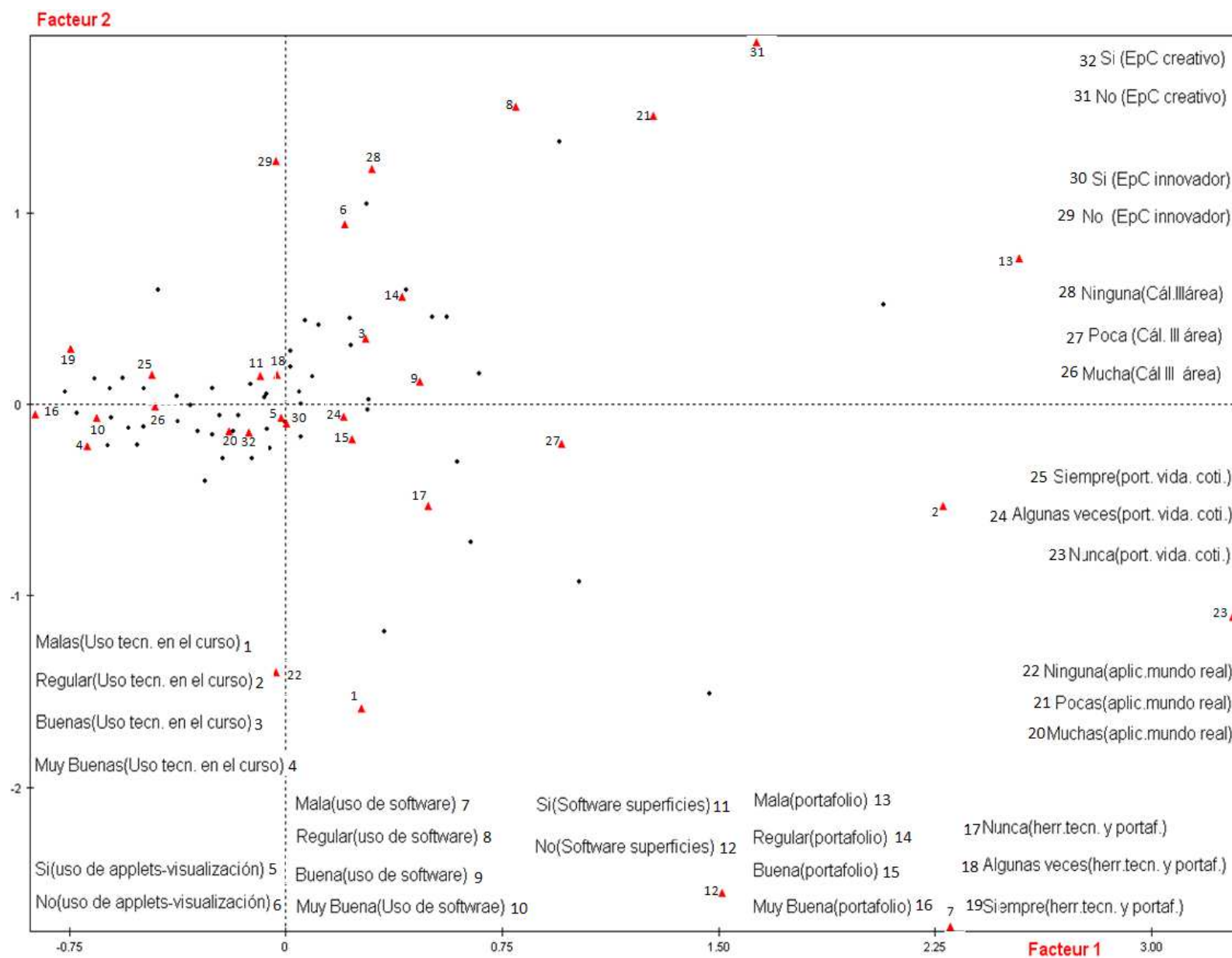


Figura 4.15: Mapa perceptual multivariado - Encuesta Final.

La Figura 4.15 muestra el mapa perceptual multivariado derivado del procesamiento de la información recolectada en la encuesta realizada a los estudiantes, una vez culminó el semestre académico. Para una mejor lectura del mapa perceptual, las modalidades se segmentaron de acuerdo a su ubicación. A continuación se muestran y los resultados encontrados.

1. Se puede apreciar una asociación entre las modalidades (20, 32, 5, 30, 11, 18, 24 y 15) que se encuentran ubicadas en torno al origen, lo cual indica que los estudiantes consideran que el método pedagógico de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) es creativo, les permite hallar muchas aplicaciones al mundo real, a su vez, el uso de Applets favorece la visualización de los conceptos teóricos expuestos por el docente; y que la aplicación de estos, en la metodología utilizada se considera innovadora. Asimismo, el uso de software en el aula de clase resulta una herramienta útil en el estudio del concepto central del Cálculo Vectorial Superficies lo que convierte esta herramienta en una opción importante para los estudiantes en el desarrollo de su portafolio y por ende en la aplicación del Cálculo. De igual manera el desarrollo del portafolio aporta significativamente a la aplicación del Cálculo en la vida cotidiana del alumnado.
2. Se puede percibir mediante el siguiente segmento de modalidades (4, 16, 10, 19, 25, 26) que se encuentra ubicado en el segundo y tercer cuadrante cercano al eje representativo al Factor 1, una clara asociación con el segmento del tema anterior, puesto que los alumnos manejan el buen uso de la tecnología en el aula de clase y su aplicación directa en el desarrollo del portafolio. Asimismo, la metodología aplicada en el curso les aporta muchas aplicaciones del Cálculo en la vida cotidiana y en su área de estudio. Dicho sea de paso, lo anterior es manifiesto, pues ambos segmentos de modalidades están aportando significativamente a este factor; mostrando un alto grado de similitud con respecto a las afirmaciones expresadas por los estudiantes.
3. Vale notar que las modalidades (16, 10, 26, 5) ubicadas en el cuarto cuadrante cercana al eje Factor 1, al estar en la misma dirección (ángulo 0) a lo largo del eje del factor, su correspondencia es máxima, lo cual refleja el buen uso del software y applets en el aula de clase que junto al desarrollo del instrumento pedagógico para la comprensión del Cálculo (portafolio), fueron fundamentales en cuanto al aporte aplicativo en el área de estudio del alumnado. Como también las modalidades (25, 11) ubicadas en el tercer cuadrante, lo que revela que el portafolio y el uso de software como instrumentos para el estudio de las superficies favorecieron en gran medida a la comprensión del Cálculo y su relación con la vida cotidiana de los estudiantes.
4. Otro segmento de modalidades que aporta significativamente al Factor 1, y

concuenda con las manifestaciones hechas por los estudiantes son: (3, 14, 9) ubicadas en el primer cuadrante, reiterando que en general el uso de las tecnolog as en el curso favorecen el buen desempeno de los estudiantes y el buen desarrollo del portafolio.

5. Si se compara el segmento (29, 6, 28) de las que (29) se encuentra en el segundo cuadrante cercano al eje Factor 2, y (6, 28) en el primer cuadrante, fuera de estar un poco lejos del punto de inercia y que mani estan ninguna aplicacion directa del uso de tecnolog as en su area de estudio y poco innovador el metodo de la EpC, con relacion a los segmentos que estan sobre el factor I, vemos que estos estan formando un angulo de 90° ; lo cual traduce que este tipo de manifestaciones hechas por los estudiantes son totalmente independientes; es decir, que las actitudes de unos no tienen que ver con las opiniones de otros en el interior de los estudiantes.
6. Si se observa el segmento (22, 1, 17, 27) ubicado en el cuarto cuadrante, fuera de que estas modalidades estan muy dispersas, lo que se traduce en muy poca asociacion entre ellas, se percibe mucha ambigüedad en sus apreciaciones, en el sentido de que estan ubicadas a lado y lado de un angulo de 45° , sobre el cuarto cuadrante; y ademas su distancia al promedio (punto de inercia) es distante. Lo que se traduce en muy poca incidencia.
7. En cuanto a las modalidades (5, 28) y (5, 21) de las cuales (5) se encuentra ubicada en el tercer cuadrante muy cercana al origen y (28, 21) en el primer cuadrante muy distantes del mismo, al tener una asociacion negativa se puede percibir que los estudiantes que consideraron el uso de applets como una ayuda para visualizar de una mejor manera los conceptos del Calculo, no estan asociados con algunos estudiantes en minor a que consideran no haber encontraron aplicacion alguna en su area de estudio y en el mundo real.
8. Se hallo una asociacion contraria entre las modalidades (20 y 13) en el sentido que un buen numero de estudiantes encontraron muchas aplicaciones al mundo real al construir el portafolio (modalidad 20 muy cercana al punto de inercia), con aquellos estudiantes, en una minor a (modalidad 13 muy distante del punto de inercia) que consideraron el instrumento pedagogico (portafolio) como de ciente.
9. En relacion a las modalidades (11, 18, 12 y 7) de las cuales (11, 18) se encuentran ubicadas en el segundo cuadrante con gran numero de individuos (estudiantes) cercana a estas, es decir, son las de mayor aporte, mientras que (12, 7) estan en el cuarto cuadrante muy distantes del origen, se puede percibir que los estudiantes que consideraron el software como una herramienta que favorece signi cativamente en el estudio de las super cies y que aplicaron herramientas tecnologicas incluyendo software, no estan asociados con los que opinaron que

el uso de esta herramienta es mala y que no contribuye en el estudio de las superficies. es de advertir que las modalidades (7 y 12) son las menos representativas en el mapa perceptual al encontrarse muy lejanas o distantes del origen o punto de inercia. Es de anotar que las modalidades 7 y 12 son poco significativas y de poco peso en la interpretación que se hace sobre el mapa perceptual.

10. Se observa que las modalidades (5, 30, 32, 20 y 21) de las cuales (5, 30, 32, 20) son las de mayor aporte y están fuertemente asociadas, tienen asociación negativa con la modalidad (21), por tanto se puede concluir que los estudiantes que manejan que el método pedagógico (EpC) utilizado en el curso es creativo y novedoso, que consideran que emplear applets favorece la comprensión de los conceptos del Cálculo y que el desarrollo del portafolio le permitió encontrar muchas aplicaciones al mundo real, no concuerdan con los que manejan que encontraron pocas aplicaciones. Recalcando de nuevo que esta última modalidad que se encuentra ubicada en el primer cuadrante está muy distante del promedio general (punto de inercia) y forma ángulo llano con respecto a las demás modalidades muy cercanas al promedio.
11. Se puede concluir que en los numerales 8, 9 y 10 que hacen referencia a aquellas modalidades, que fuera de estar muy dispersas y distantes del punto de inercia (promedio global), no inciden de ninguna manera en los objetivos que se persiguen con este estudio, a través de este método multivariado exploratorio.

El anterior análisis corrobora los resultados obtenidos en la encuesta inicial en cuanto al impacto positivo que tuvo la inclusión de la tecnología al aula de clase; del mismo modo, la tecnología como instrumento de apoyo a la pedagogía de la EpC, incrementa la capacidad cognoscitiva y aplicativa de los estudiantes en esta ciencia; asimismo, propicia en el docente una constante actualización, permitiéndoles indagar, analizar y construir conocimiento a través de un proceso evolutivo que pretende explotar las múltiples habilidades con las que contaba todos y cada uno de los participantes de esta investigación.

4.2.3. Análisis Univariado (Mimio y PDA)

Como se indicó en el inicio del presente Capítulo, las preguntas que hacen referencia al uso del Mimio y PDA's en el aula de clase se analizaron por separado; puesto que solo uno de los dos cursos experimentales aplicó estas herramientas en el proceso. A continuación se describe el análisis univariado de estas preguntas.

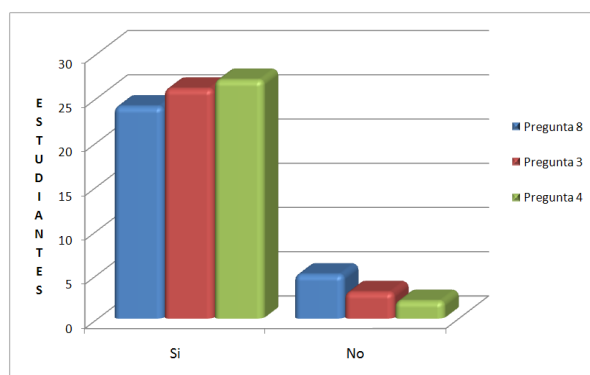


Figura 4.16: Gráfico - Encuesta Final preguntas (8, 3, 4).

La Figura 4.16 muestra el gráfico representativo a las respuestas de las preguntas (3, 4, 8) formulada a los estudiantes en la encuesta que se realizó una vez finalizó el curso de Cálculo III (ver Apéndice C, página 223) el cual tuvo como soporte pedagógico el método de la Enseñanza para la Comprensión (EpC) apoyado con nuevas tecnologías. Con respecto a la pregunta 8: El Mimio le permite a usted prestar mayor atención en el desarrollo de la clase? 24 estudiantes que constituye aproximadamente el 83% del alumnado consideraron que el uso del Mimio en aula Si le permitió prestar mayor atención en la clase, mientras que el restante 17% que está representado en 5 estudiantes manifestó No a la pregunta.

En relación a la pregunta 3: Considera usted que el uso de PDA S en el aula de clase resulta una herramienta útil para visualizar y manipular superficies? 26 estudiantes que concierne al 90% aproximadamente consideraron que el uso de PDA s en el aula SI es una herramienta útil para visualizar y manipular superficies, mientras que 3 de ellos que representan el 10% del alumnado respondieron No a la pregunta.

A la pregunta 4: Considera usted que el uso de PDA S en el aula de clase resulta una herramienta útil para el estudio de las superficies? Se encontró que la mayor proporción con el 93%, que concierne a 27 estudiantes, manifestaron que el uso de PDA S en el aula de clase es una herramienta útil para el estudio de las superficies, en tanto 2 de ellos que constituyen el restante 7% respondieron No a la pregunta propuesta.

La Figura 4.17 muestra el gráfico representativo a las respuestas de las preguntas 9 y 10. En relación a la pregunta 9: Toma usted apuntes adicionales cuando el profesor está utilizando el Mimio? 1 estudiante que concierne al 3% del alumnado, respondió No a la pregunta, en tanto 18 de ellos que corresponden al 62% manifestaron haber tomado apuntes Algunas Veces, mientras que el 35% que refiere 10 estudiantes declararon Siempre tomar apuntes.

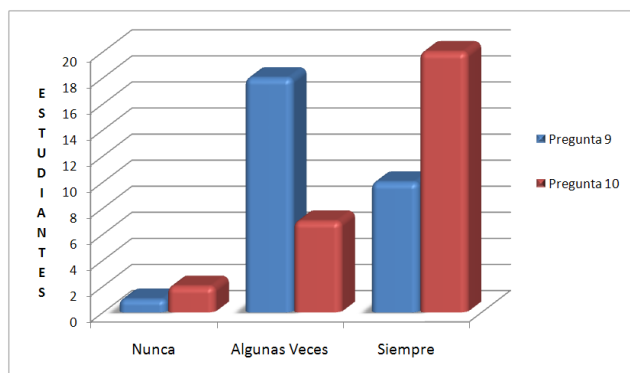


Figura 4.17: Gra co-Encuesta Final preguntas (8, 3, 4).

En cuanto a la pregunta 10: Es ventajoso para usted contar con las memorias de clase obtenidas con el Mimio? 2 Estudiantes que corresponde aproximadamente al 7% respondieron No a la pregunta, en tanto 7 de ellos que constituye el 24% manifestaron Algunas Veces ventajoso el contar con las memorias de la clase, y en mayor proporción se encontró con el 69% que refiere 20 estudiantes los cuales declararon Siempre ventajoso contar con las memorias de clase obtenidas con el Mimio.

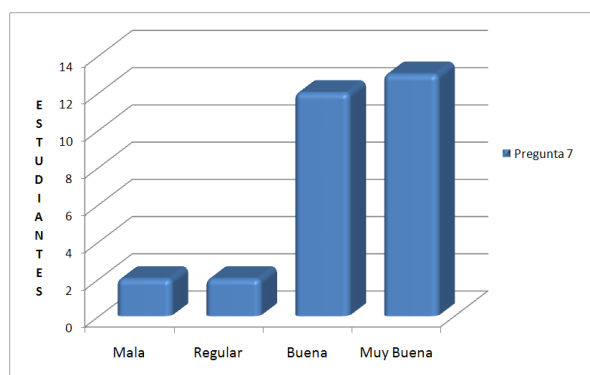


Figura 4.18: Gra co-Encuesta Final pregunta 7.

La Figura 4.18 muestra el gra co representativo a las respuestas de la pregunta 7: Como considera usted el Mimio como herramienta tecnologica? La mayor proporción con el 45% se encontró en los estudiantes que la consideraban Muy Buena, seguido con aproximadamente el 41% que manifestaron Buena la herramienta, y de igual proporción con el 7% los estudiantes que respondieron Mala y Regular a la pregunta propuesta.

Conclusiones

A continuación se muestran las conclusiones resultantes del análisis univariado, referente a las respuestas obtenidas de la aplicación de la encuesta final a las preguntas que hacían referencia al uso del mimio y la PDA.

- El mimio como herramienta en el aula de clase, permitió captar la atención del alumnado, favoreciendo el entendimiento y posterior comprensión de los temas estudiados; del mismo modo, contar con las memorias de la clase en formato pdf, resultó ventajoso para ellos, ya que independientemente del sitio donde se encontrasen, podían acceder a la información, retomando así los conceptos y ejemplos propuestos en la misma a fin de aclarar y/o profundizar en ellos.
- Gracias al software (3D-Universal) asociado a la PDA, el alumno logró manipular distintas superficies en tiempo real y sacar provecho a la excelente visualización de estas; por tal motivo, la inclusión de esta herramienta al aula de clase, brindó la oportunidad al estudiante de analizar, sacar conjeturas y comprobar los conceptos expuestos por el docente; del mismo modo, plantearse interrogantes y responderlos basados en el estudio teórico del concepto y en las superficies generadas por el mismo.

4.2.4. Análisis Multivariado (Mimio y PDA)

Del mismo modo que la encuesta anterior, se buscaba extraer relaciones entre las respuestas suministradas por el alumnado en cuanto al uso del Mimio y PDA en el aula. Igualmente basados en una tabla de contribuciones y un mapa perceptual derivado de la misma, se efectuó el análisis y se sacaron las respectivas conclusiones a estas preguntas. A continuación se muestran los resultados.

MODALITES			COORDONNEES		CONTRIBUTIONS		
IDEN	LIBELLE	P.REL	DISTO	1	2	1	2
1 . El mimio como herramienta tecnológica							
AA_1	- Mala (mimio herr.)	1.15	13.50	1.00	2.01	3.4	16.9
AA_2	- Regular(mimio herr.)	1.15	13.50	-2.02	1.02	21.0	4.4
AA_3	- Buena(mimio herr.)	6.90	1.42	0.17	-0.46	0.6	5.3
AA_4	- Muy B.(mimio herr.)	7.47	1.23	0.15	-0.04	0.5	0.0
CONTRIBUTION CUMULEE						=	25.5 26.6
2 . Mayor atención en la clase (mimio)							
AB_1	- Si (mayor atención)	13.79	0.21	0.35	-0.15	5.1	1.1
AB_2	- No(mayor atención)	2.87	4.80	-1.70	0.70	24.6	5.2
CONTRIBUTION CUMULEE						=	29.8 6.3
3 . Apuntes adicionales cuando se utiliza el mimio							
AC_1	- Nunca(apuntes)	0.57	28.00	0.94	-0.41	1.5	0.4
AC_2	- Alg. veces(apuntes)	10.34	0.61	-0.18	-0.59	1.0	13.0
AC_3	- Siempre(apuntes)	5.75	1.90	0.23	1.10	0.9	25.2
CONTRIBUTION CUMULEE						=	3.4 38.6
4 . Ventajas contar con las memorias							
AD_1	- Nunca(memorias)	1.15	13.50	0.31	-1.43	0.3	8.5
AD_2	- Alg. veces(memorias)	4.02	3.14	-1.40	-0.37	23.4	2.0
AD_3	- Siempre(memorias)	11.49	0.45	0.46	0.27	7.2	3.1
CONTRIBUTION CUMULEE						=	30.9 13.7
5 . PDA para visualizar superficies							
AE01	- Si(pda visualiza.)	14.94	0.12	-0.03	-0.06	0.0	0.2
AE02	- No(pda visualiza.)	1.72	8.67	0.25	0.51	0.3	1.7
CONTRIBUTION CUMULEE						=	0.4 1.8
6 . PDA para estudiar las superficies							
AF01	- Si(pda est. super.)	15.52	0.07	0.01	0.13	0.0	0.9
AF02	- No(pda est. super.)	1.15	13.50	-0.16	-1.70	0.1	12.1
CONTRIBUTION CUMULEE						=	0.1 13.0

Figura 4.19: Tabla de contribuciones Gráfico - Encuesta Final (Mimio y PDA s).

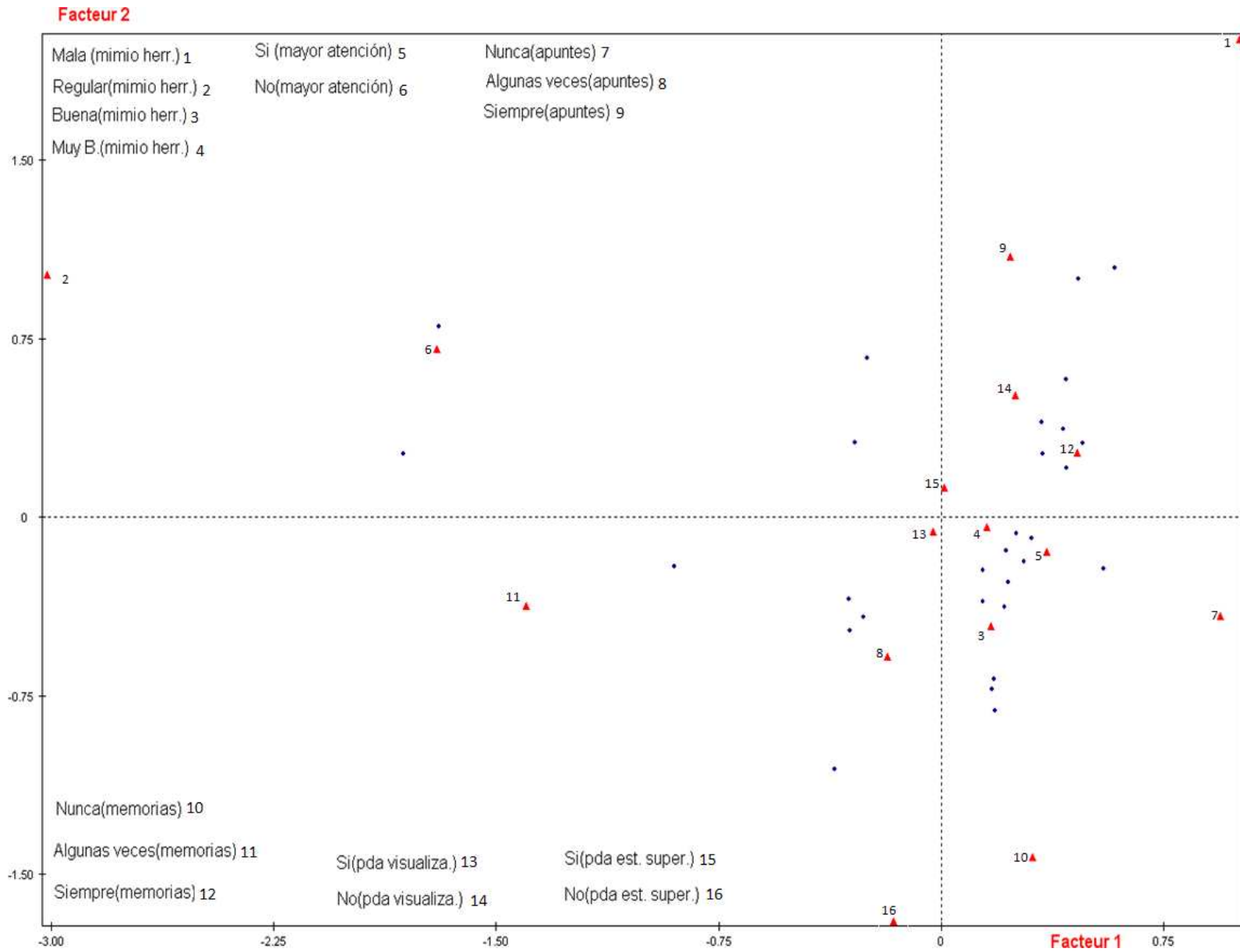


Figura 4.20: Mapa perceptual multivariado - Encuesta Final (Mimio y PDA s).

La Figura 4.20 muestra el mapa perceptual multivariado referente a las respuestas suministradas en la encuesta aplicada a los estudiantes del curso donde se empleó las herramientas tecnológicas Mimio y PDA s. A continuación se describe el análisis multivariado derivado de este mapa.

Los resultados fueron los siguientes:

1. Como se puede observar las modalidades (3, 4, 5, 8, 13 y 15) están muy próximas al punto de inercia y además se percibe un buen grado de asociación entre ellas, lo que significa una mayor importancia con respecto al uso de tecnologías en la asignatura. Significa esto por un lado, que los estudiantes consideran que el uso de PDA s en el aula de clase resulta una herramienta muy útil en la visualización y manipulación de las superficies como concepto central del Cálculo vectorial. Por otro, manifiestan que la herramienta Mimio (Pizarra interactiva) es muy Buena, en el sentido de que pueden prestar mayor atención al desarrollo de la clase y a hacer más preguntas con base al tema en discusión.
2. Con base en lo anterior, se puede percibir que el uso adecuado de PDA s y combinado con la pizarra interactiva Mimio, trae muy buenos resultados en el sentido de que el estudiante puede prestar mayor atención a las explicaciones expresadas por el docente, aun más, el uso continuado de estas herramientas, le permite al estudiante indagar a fondo sobre las aplicaciones e implicaciones de los conceptos del Cálculo en el estudio de las superficies.
3. Las modalidades (12, 4, 5) están altamente asociadas, por lo que se refiere a las implicaciones que trae el mimio, pues se percibe que los estudiantes consideran Muy Buena la pizarra interactiva, como herramienta tecnológica. Además, el uso de esta en el aula de clase le trae como beneficio el contar con las memorias de clase obtenidas durante el desarrollo de la asignatura.
4. Como se puede observar en el mapa perceptual, la mayor densidad poblacional de los estudiantes, se encuentran alrededor de todas aquellas modalidades que benefician el uso de las herramientas tecnológicas en el transcurso de la asignatura del Cálculo; en lo que se traduce en una buena aceptación por parte de los estudiantes hacia estas nuevas innovaciones de enseñanza. En contraste a lo que manifiestan una minoría de individuos sobre el uso e implicaciones de estas herramientas tecnológicas; pues como se puede percibir es muy poca la densidad poblacional que dicen lo contrario.
5. Finalmente, si apreciamos el mapa perceptual y nos concentramos en las modalidades, (1, 11, 16, 10, 7 y 1), arrastran poca densidad poblacional y además por estar muy distantes del punto de inercia, no son significativas en el estudio;

aun mas, si se observa estas modalidades estan formando un patron muy definido (en forma de U), lo que parece que sus opiniones son muy SIMILARES, y que se puede corroborar con sus respuesta: NO (mayor atencion, PDA s), NUNCA (memorias, apuntes), ALGUNAS VECES (memorias). Lo que se traduce en observaciones muy aisladas o atipicas poco inuyentes en el contexto.

En consecuencia, a los resultados obtenidos en las encuestas inicial y final, disenadas en nuestra investigacion y analizadas mediante el metodo de analisis Factorial de Correspondencias Multiples, se detecto la necesidad de implementar una pedagogia constructivista asistida con herramientas tecnologicas y pedagogicas previamente seleccionadas al curso Calculo vectorial, a fin de propiciar una participacion activa de los estudiantes en el proceso educativo; asimismo, favorecer la aplicacion de los conceptos del curso en su area de estudio, lo cual resulta fundamental en carreras de ingenieria, donde se espera que el futuro profesional sea competente frente a los multiples problemas aplicativos, con los cuales se enfrentara a traves de su vida; por tal motivo, la propuesta metodologica que se propone no conlleva a otra cosa mas que mejorar en los aspectos antes mencionados, es decir, busca mejorar la calidad de ensenanza y el aprendizaje del Calculo Vectorial.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo de investigación se ha propuesto un modelo pedagógico de orden constructivista apoyado en nuevas tecnologías para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial. Demostrar la validez de integrar este modelo para potenciar la enseñanza y aprendizaje del Cálculo, fue nuestro principal objetivo mostrado a lo largo de los anteriores capítulos. Ahora bien, en este Capítulo se exponen las conclusiones, aportes y recomendaciones derivadas del proceso investigativo. Para obtener estas conclusiones es necesario mostrar una apreciación general de los resultados logrados, exponer las implicaciones pedagógicas y sociales que tuvo la implementación de esta metodología tanto para docentes, alumnos y claustros educativos.

Partiendo de las principales evidencias encontradas en esta investigación se proponen algunas recomendaciones para la implementación del tipo de metodología referida en este trabajo, como también los procedimientos y métodos para la ejecución de la misma. Con esto no se pretende implantar ninguna universalización ni generalización (ya que hay muchas herramientas tecnológicas y enfoques constructivistas que pueden ser llevados a la práctica dependiendo, de las necesidades propias del docente y alumnado), nuestro propósito es mostrar un camino diferente que estimule un cambio en el estilo de enseñanza tradicional.

Para mayor claridad dividiremos las conclusiones en tres apartados. El primero corresponde a la aplicación del método pedagógico de la Enseñanza para la Comprensión (EpC). El segundo concierne a la aplicación tecnológica en la que recogeremos las principales implicaciones del uso de estas en la enseñanza del Cálculo y cualquier otra rama de las ciencias. Por último, compilaremos las principales conclusiones de la implementación pedagógica y tecnológica descrita en esta investigación.

5.1. Aplicacion Metodologica

En este apartado se exponen los alcances logrados por los estudiantes y las recomendaciones de la perspectiva constructivista desarrollada en esta investigacion, la cual tuvo como principal actor al estudiante como ser individual capaz de construir conocimiento basado en sus propios intereses, motivaciones y necesidades. Vale la pena resaltar que el metodo pedagogico aplicado a este proyecto (EpC) buscaba favorecer un verdadero aprendizaje significativo, donde todos y cada uno de los estudiantes fueran generadores de su propio aprendizaje y por ende de su propio conocimiento.

En el Capitulo 2, Seccion 2.5.12, pagina 58, se muestra un instrumento de evaluacion (Matrices de evaluacion) que permitio valorar los niveles de comprension logrados por los estudiantes a medida que se desarrollaban las distintas fases de investigacion de forma cualitativa. Una vez recolectada la informacion se realizo un analisis univariado que arrojó los siguientes resultados.

Matrices de evaluacion

Como se mostro en el Capitulo 2, Seccion 2.5.12, pagina 58, la matriz de evaluacion es un instrumento que establece niveles de la calidad de los diferentes criterios con los que se puede alcanzar un objetivo, una competencia, un contenido o cualquier otro tipo de tarea que se lleve a cabo en el proceso o producto educativo; permitiendo al docente realizar una valoracion integral de los desempenos de comprension alcanzados por los estudiantes de una forma justa, imparcial, objetiva y coherente. Asimismo, permite al maestro mostrar a los estudiantes los niveles de logros o comprension que han alcanzado y aconsejarles acerca de lo que deben hacer para lograr niveles superiores.

El objetivo perseguido al implementar matrices de evaluacion en el marco de la EpC, como instrumento para cualificar los desempenos de comprension logrados por los estudiantes, se fundamentaron principalmente en dos cuestiones, por un lado, buscar una retroalimentacion constante del estudiante en areas o temas en las que deba mejorar, y por otro, promover la autoevaluacion, coevaluacion y heteroevaluacion de una forma flexible. Para esto se utilizaron las matrices de valoracion mostradas en el 2, Seccion 2.5.12, paginas 60, 61, 62, las cuales estan divididas en tres grandes temas (conceptualizacion, expresion oral y solucion del problema). Con estas, el docente cualificaba durante las diferentes fases de investigacion y en especial en la fase final de sintesis a cada uno de los 59 estudiantes que hicieron parte de esta investigacion. A continuacion se muestra los resultados obtenidos.

5.1.1. Conceptualizacion

Elaborar y desarrollar detallada y organizadamente un concepto va de la mano con un conjunto de conocimientos previos que ha construido el alumno en sus experiencias educativas anteriores. Desde esta perspectiva, las diferentes fases de investigacion tratadas en este proyecto promueven la adquisicion de conocimientos de forma gradual, lo que hace que los conceptos, destrezas, valores entre otros, sean funcionales, es decir, que puedan ser utilizados natural y efectivamente cuando las circunstancias lo exijan.

Para cualificar la conceptualizacion alcanzada por el alumnado, se tomaron como aspectos evaluativos: Dominio y preparacion del tema, Integracion tematica y ayudas metodologicas. Cada uno de los estudiantes participantes del proceso fue ubicado en un criterio de nivel (ingenuo, novato, aprendiz y experto) segun su desempeno. A continuacion se muestra el grafico con los resultados obtenidos.

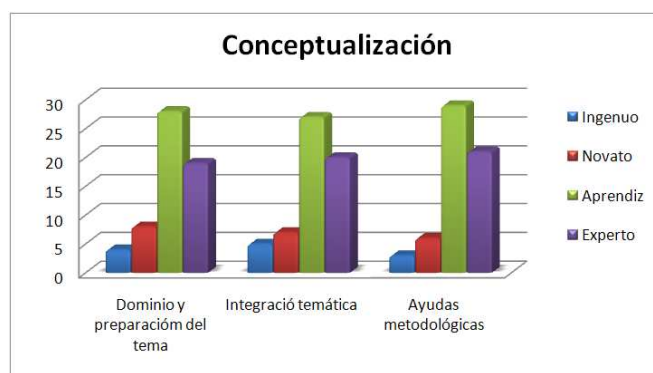


Figura 5.1: Niveles de comprensión - Criterio Conceptualización.

La Figura 5.1 muestra el grafico del criterio de conceptualizacion alcanzado por los estudiantes en las diferentes fases de investigacion. Como presenta la grafica, en el criterio dominio y preparacion del tema 28 de los estudiantes se encuentran ubicados en el nivel de aprendiz, lo que corresponde al 47% de ellos, 19 en el nivel de experto, lo cual concierne al 32% del total de estudiantes y tan solo 8 y 4 en los niveles novato e ingenuo respectivamente lo que representa el 21% del alumnado. Lo que conduce a concluir que el 79% del alumnado que representa la mayor parte de estos aplicaron los conceptos de manera organizada, mostraron dominio y apropiacion de los topicos estudiados como tambien una buena preparacion de los temas expuestos.

Respecto al criterio Integracion tematica, 27 de los estudiantes se ubicaron en el nivel de aprendiz, lo que constituye el 46% de ellos, 20 en el nivel de experto lo que representa el 34% de estudiantes, 7 en el nivel de novato lo que representa el 12% y tan solo 5 en el nivel de ingenuo lo que concierne aproximadamente al 8% del alumnado. Por lo cual se puede concluir que el 80% de los estudiantes que estan representados en

los niveles aprendiz y experto, lograron integrar conceptos con situaciones de diaria ocurrencia relacionandolos y aplicandolos en diferentes situaciones es decir fueron capaces de extrapolar los topicos estudiados a diferentes escenarios de su entorno. Y tan solo el 20% tuvieron dificultades para explorar mas a fondo los conceptos estudiados.

En relacion con el criterio ayudas metodologicas, 29 de los estudiantes se situaron en el nivel de aprendiz, lo que representa aproximadamente el 49% de ellos, 21 en el nivel de experto que constituyen cerca del 36% del alumnado y unicamente 6 y 3 en los niveles novato e ingenuo respectivamente que corresponden en conjunto aproximadamente al 15% de estudiantes. De lo anterior podemos concluir que el 85% del alumnado utilizaron herramientas que les permitieron exponer los conceptos de manera eficiente, lo que les permitio mostrar los conceptos aplicados de manera clara y precisa. Y solamente el 15% de ellos utilizaron herramientas poco adecuadas para presentar los topicos de forma mas elaborada.

5.1.2. Expresion Oral

La estrecha relacion entre lenguaje, pensamiento y desarrollo de habilidades cognitivas no puede aislarse solamente en los alcances mecanicos y memoristicos logrados por los estudiantes, puesto que si asumimos esto, estaríamos reconociendo tacitamente que el lenguaje es solo una herramienta que permite mostrar el conocimiento de manera superficial, de modo tal, que el estudiante cuando no se expresa de una manera adecuada se interpreta que no cumple con los objetivos de aprendizajes trazados, lo que acarrea muchas veces a construir una imagen falsa del conocimiento alcanzado por el, dejando a un lado lo que verdaderamente ocurre en su interior y su mente.

Ahora bien, en la metodología aplicada en este proyecto la expresion oral permitio mostrar la verdadera cara de los logros alcanzados por el alumnado, constituyo una herramienta eficaz que permitio a todos y a cada uno de ellos interiorizar lo externo y exteriorizar lo interno, lo que favorecio la objetividad y estructuracion del conocimiento mas acorde con las practicas realizadas. Para cualificar la expresion oral lograda por los estudiantes se tomaron como aspectos evaluativos: Manejo del lenguaje, debate, socializacion y logros-desempenos de comprension. De igual forma, cada uno de los estudiantes fue ubicado en un criterio o nivel de comprension (ingenuo, novato, aprendiz y experto). A continuacion se muestra el grafico con los resultados obtenidos.

La Figura 5.2 presenta la evaluacion del criterio expresion oral en los diferentes niveles de comprension alcanzados por los estudiantes. Como presenta el grafico respecto al manejo del lenguaje utilizado por los estudiantes en la socializacion del proyecto, 26 de ellos alcanzaron el nivel de aprendiz, 18 lograron el nivel de experto lo cual corresponde al 44% y 31% respectivamente, lo que nos indica que el 75% de los

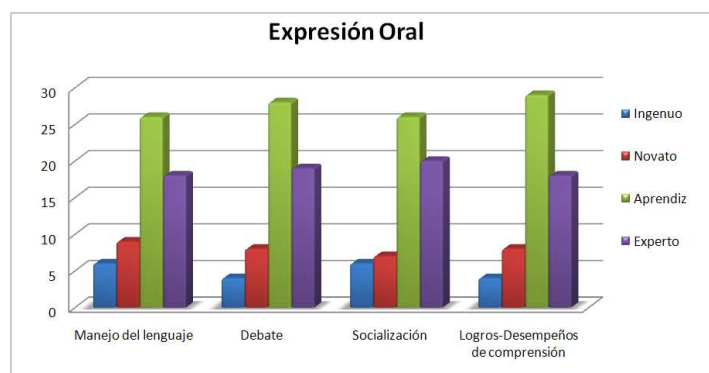


Figura 5.2: Niveles de comprension - Expresion oral.

estudiantes se expresaron con su ciencia uidez verbal y dominio del tema expuesto, logrando profundizar y mostrar de manera coherente los contenidos valiendose de un buen uso del lenguaje apoyados, claro esta, en argumentos teoricos solidos. Y solamente 9 estudiantes se ubicaron en el nivel novato lo que concierne al 15% y 6 de ellos en el nivel de ingenuo lo que representa aproximadamente el 10% del total del alumnado, lo cual muestra que el 25% de los estudiantes tuvieron di cultad en el buen uso de un lenguaje contextualizado que les permitiera mostrar de manera mas profunda los topicos expuestos.

Respecto al debate generado por cada uno de los estudiantes en relacion con la aplicacion de los temas tratados en la socializacion de su proyecto, 28 de ellos alcanzaron el nivel de aprendiz lo que representa aproximadamente el 48% del total del alumnado, 19 se ubicaron en el nivel de experto, lo cual constituye el 32% del total de estudiantes, lo cual muestra que aproximadamente el 80% de estudiantes mostraron habilidad para generar espacios que propiciaron debates sobre el tema abordado generando dinamicas participativas que motivaron la participacion del publico presente. Y aproximadamente el 20% de estudiantes manifestaron di cultad para propiciar espacios que generaran debate acerca del tema expuesto lo que constituye 8 y 4 estudiantes en los niveles novato e ingenuo respectivamente.

Haciendo referencia a la socializacion del proyecto desarrollado por los estudiantes, encontramos que el 78% del alumnado, el cual constituye 26 y 20 estudiantes, en los niveles aprendiz y experto respectivamente expusieron la tematica de manera adecuada, sus aportes referentes a los conceptos utilizados fueron signi cativos, defendieron su propuesta bajo un marco teorico solido logrando transmitir claramente los conceptos aplicados objeto de estudio. Y tan solo 7 y 6 estudiantes que corresponden al 22% del total del alumnado se localizaron en los niveles novato e ingenuo respectivamente, lo cual nos indica que 17 de ellos encontraron algun tipo de obstaculo que no les permitio transmitir de manera signi cativa y clara los conceptos expuestos.

En relacion a los logros-desempenos de comprension mostrados por los estudiantes, 29 y 18 de ellos, que corresponden aproximadamente al 80% del alumnado, que estan representados en los niveles aprendiz y experto respectivamente, lograron explicar, profundizar, conectar, dinamizar el o los temas expuestos de forma clara, contundente y ordenada, siempre desde una perspectiva totalmente objetiva. Y aproximadamente el 20% restante del alumnado que hace referencia a 8 estudiantes en el nivel de novato y 4 en el nivel de ingenuo evidenciaron bajos niveles conceptuales que les posibilitara mostrar y explicar de diferentes maneras el o los problemas tratados.

5.1.3. Solucion del problema

Cuando nos referimos a la solucion de un problema, estamos hablando del mayor nivel que se puede alcanzar en un proceso de aprendizaje, es decir, es hablar de habilidades cognitivas, metacognitivas y del pensamiento que puede lograr una persona. En ese largo camino existen multiples procesos unos mas sencillos que otros como por ejemplo, la actitud, la memoria, el entendimiento, la representacion, la aplicacion, la comprension, etc. Explorar, investigar, plantearse y solucionar un problema en el aprendizaje de cualquier rama de las ciencias deber a ser parte fundamental del proceso educativo, de forma tal que el educando al analizar sus estudios cuente con su cientes elementos y habilidades que le permitan desempeñarse adecuadamente en el ejercicio de su profesion.

Una de las principales metas, si no la mas importante en la metodologia constructivista planteada en este proyecto (EpC), radicaba en la busqueda de un problema, el cual deb a ser solucionado aplicando los conocimientos estudiados en clase. Esto a n de propiciar un verdadero aprendizaje significativo en donde el desarrollo de habilidades fundado en un pensamiento critico, reflexivo y convergente llevara a convertir al alumnado en el principal actor del proceso de aprendizaje. Ahora bien, para evaluar este criterio de comprension se tomaron en cuenta tres items: comprension y contextualizacion, estrategias utilizadas y manejo de la discusion. De igual forma cada uno de los estudiantes fue ubicado en un criterio o nivel de comprension (ingenuo, novato, aprendiz y experto). A continuacion se muestra el gra co con los resultados obtenidos.

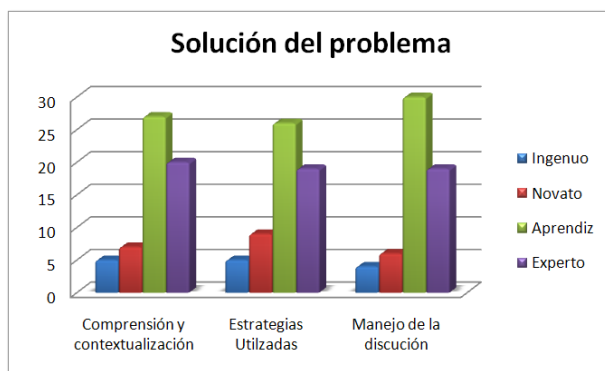


Figura 5.3: Niveles de comprension - Solucion del problema.

La Figura 5.3 muestra el resultado obtenido por los estudiantes en el criterio solución del problema y el nivel de comprensión alcanzado por el alumnado en el desarrollo de su proyecto de investigación. Como muestra el gráfico respecto al criterio Comprensión y Contextualización 47 estudiantes, que corresponden aproximadamente al 80% del total de ellos, se ubicaron en los niveles de aprendiz y experto, lo cual nos indica que este porcentaje de alumnos logro explicar y contextualizar de manera ordenada y argumentada el problema, aplicando y extrapolandolo a diferentes situaciones. El restante 20% que corresponde a 12 estudiantes, se ubicaron en los niveles ingenuo y novato, lo cual muestra que este porcentaje de alumnos tuvieron dificultad para argumentar de manera solida el problema planteado.

En relacion con el criterio Estrategias utilizadas, 26 de los estudiantes se ubicaron en el nivel de aprendiz, 19 en experto, 9 y 5 en los niveles de novato e ingenuo respectivamente lo que senala que el 76% del alumnado del cual hace parte los estudiantes que se ubicaron en los niveles aprendiz y experto, utilizaron estrategias adecuadas tanto individual como colectivamente para dar soluciones a los problemas que se les fueron presentando a medida que avanzaban en su investigación. El restante 24%, del cual hacen parte los estudiantes que se situaron en los niveles de ingenuo y novato, plantearon estrategias individuales y grupales poco adecuadas para la solución del problema.

Respecto al manejo de la discusión generada en la presentación del proyecto de investigación, 30 estudiantes que representa aproximadamente el 51% del alumnado se ubicaron en el nivel de aprendiz, 19 en el nivel de experto que constituyen el 32% de ellos, 6 y 4 en los niveles novato e ingenuo que corresponden al 10% y 7% respectivamente. Lo que evidencia que el 83% de los estudiantes que están representados en los niveles aprendiz y experto generaron ambientes propicios de discusión, controversia y participación activa de los asistentes. El restante 17% del alumnado que fueron valorados en los niveles ingenuo y novato encontraron dificultad

para resaltar aspectos importantes de la solución del problema lo cual les impidió hacer un mejor manejo de la discusión.

5.1.4. Recomendaciones

La primera recomendación de la metodología aplicada en este proyecto, radica en la necesidad de promover aprendizajes significativos en cualquier proceso educativo. Sin importar la metodología utilizada, es de vital importancia implementar un enfoque constructivista que ayude a docentes y alumnos a elaborar nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje que susciten la interacción social entre ellos y su entorno, donde predomine la praxis, la reflexión y la comunicación de los actores del proceso. De esta manera se está dando un paso muy importante hacia el mejoramiento de la calidad y equidad de la educación en nuestros claustros educativos.

La segunda recomendación hace referencia a la formación docente. Los procedimientos, mecanismos o estrategias pedagógicas deben ser cuidadosamente seleccionados, según el contenido de la temática a estudiar; esta selección requiere de tiempo y reuniones entre colegas a fin de escoger la estrategia que favorezca los objetivos y necesidades requeridas. Los docentes encargados de esta selección deben ser competentes en el tipo de metodología a utilizar, pues son los estudiantes los principales beneficiados con el buen uso de estas. Ahora bien, lograr este cometido requiere de una previa capacitación sobre la metodología y el planteamiento de estrategias pedagógicas adecuadas, las cuales deben amoldarse a las necesidades propias del alumnado; y lo más importante requiere de una excelente disposición de los encargados del proceso. Del mismo modo, el perfeccionamiento de estas estrategias va de la mano con la aplicación durante el tiempo, es así, como los docentes encuentran factores que podrán contribuir mucho más en el proceso de enseñanza y aprendizaje que practican, más aun, si agregamos a esto las experiencias adquiridas por cada uno de los docentes que aplicaron la misma metodología, se reunirá gran cantidad de experiencias que favorecerán el perfeccionamiento de la misma.

La tercera recomendación radica en la necesidad de incentivar al alumnado en el estudio las temáticas tratadas durante un curso. La motivación en un ambiente educativo es uno de los principales factores que contribuyen a alcanzar el principal objetivo que se traza un docente al iniciar un periodo académico, el cual radica en favorecer significativamente al mejoramiento del proceso de aprendizaje de sus alumnos. En este sentido hay que tener en cuenta que cada estudiante es diferente y tiene diversos intereses; en el caso de este proyecto la muestra experimental estaba constituida por estudiantes de diferentes carreras de la universidad EAFIT, por tanto el interés que podía tener un estudiante de ingeniería no era el mismo que uno de Administración, en el sentido aplicativo de su área de estudio. Es por esto, que el docente debe diseñar

estrategias que potencialice la autoconfeianza y autoestima y motive la aplicacion de los conceptos estudiados en el aula de clase, de forma tal que el alumno se involucre en el desarrollo de la actividad y sea el encargado de construir su propio conocimiento con base a sus propias necesidades.

5.2. Aplicacion Tecnologica

En esta seccion se exponen las implicaciones de aplicar herramientas tecnologicas en el proceso de ensenanza y aprendizaje del Calculo vectorial. A si mismo algunas recomendaciones respecto a la aplicacion de estas en el estudio del curso antes mencionado, las cuales pueden extenderse a cualquier otro curso donde se aplique la tecnologia como instrumento de apoyo en el proceso educativo.

Es importante partir de la premisa que la tecnologia como tal no es herramienta que garantice formar mejores estudiantes, es decir, esta no es un fin, sino un medio que ayuda a optimizar el proceso de ensenanza y aprendizaje. El uso de forma concienzuda de la tecnologia en cualquier proceso educativo no puede conducir a otra cosa mas que enriquecimiento y construccion del conocimiento, siempre y cuando este proceso este acompaado por el docente y subordinada a una concepcion pedagogica.

Docente, Estudiante y Tecnologia

En el proceso de ensenanza y aprendizaje del Calculo vectorial propuesto en este proyecto, las herramientas tecnologicas utilizadas tuvieron gran importancia en los objetivos trazados. Todas y cada una ellas fueron seleccionadas y aplicadas de acuerdo a los intereses de docente y estudiante, considerando siempre el buen uso y aplicabilidad de los topicos tratados durante todo el periodo academico. En el Capitulo 3, Seccion 3.2, pagina 91, se mostraron las herramientas tecnologicas utilizadas (Applets, Software, PDA s, Mimio, presentaciones digitales). A continuacion se exponen las conclusiones de utilizar estas en el curso de Calculo.

Emplear tecnologias en el aula de clase y fuera de ella se convirtio en un escenario facilitador del conocimiento. Por medio de estas herramientas, los alumnos tuvieron la oportunidad de visualizar, organizar, relacionar, argumentar y descubrir conexiones entre los conceptos y eventos del entorno, refejando as un alto grado de comprension.

La tecnologia desarrollada alrededor de Internet ofrece numerosos recursos educativos, entre estos se destacan las web con contenido interactivo, como lo son los Applets, por un lado la inclusion de esta herramienta en el aula permitio al docente desarrollar y complementar sus clases magistrales de forma interactiva y creativa, en

donde predominaba una excelente visualización. Por otro lado, la explicación de los conceptos se hacía de forma ágil y concluyente favoreciendo así el explorar más a fondo los tópicos, permitió la representación visual de temáticas de difícil comprensión y permitió simular muchas aplicaciones de diaria ocurrencia. El uso de esta herramienta resultó ventajosa para los estudiantes ya que, al estar ubicada en una dirección electrónica, podía ser consultada por el estudiante independientemente del lugar donde se encontrara y así reforzar sus conocimientos.

En cuanto a la inclusión de software en el aula permitió al docente mostrar numerosas superficies (imágenes en 3-Dimensiones) de una forma interactiva, rápida y en tiempo real, lo que ayudó a explorar muchos ejemplos y aplicaciones de los conceptos del Cálculo a las mismas. Además de esto, permitió la manipulación de las superficies, con lo cual el docente tuvo la oportunidad de mostrarlas en diferentes perspectivas, lo que propició un mejor entendimiento de los conceptos estudiados. Asimismo, los estudiantes tuvieron la posibilidad de utilizar el mismo software en sus computadores personal lo cual propició el estudio de los conceptos tratados en el aula.

Basados en lo expuesto en el Capítulo 3, Sección 3.2.3, página 101, y en experiencias recogidas a través del proceso de investigación, la inclusión de las PDA's al aula, apoyó las exposiciones magistrales del profesor en el aula, le permitió llevar un seguimiento acerca del entendimiento de los conceptos en el transcurso de la clase. Asimismo, favoreció el aporte individual y colectivo resultante de las discusiones propuestas de las temáticas estudiadas, proporcionando así de manera inmediata una retroalimentación. Además de esto, favoreció la participación activa de los estudiantes, la interacción entre los actores del proceso, beneficiando el ambiente de enseñanza y aprendizaje.

En cuanto a la pizarra interactiva Mimio. El uso de esta herramienta en el aula de clase permitió capturar la atención del alumnado. De igual forma, y junto a otras herramientas como Applets, Software y presentaciones digitales, ofreció al docente la oportunidad de complementar gráficamente lo explicado en clase y adjuntar las imágenes provistas por estas últimas herramientas en un documento en formato PDF, que posteriormente era enviado a cada uno de los estudiantes, lo cual provocó un cambio positivo en el estilo de estudio del alumnado.

5.2.1. Recomendaciones

La primera recomendación recae sobre los encargados de promover el uso de las NTICs¹ en los claustros educativos, son estas personas las que deben provocar un cambio de mentalidad en aquellos docentes que aún piensan que la inclusión de la tecnología en

¹Nuevas Tecnologías de Información y Comunicación.

el aula de clase no es una opcion para ellos, pues consideran dif icil su uso, muestran pena de recibir capacitacion, se avergüenzan frente a sus estudiantes o profesores mas jovenes si no muestran su ciencia en el manejo de estas. Es por esto que deber a ser un objetivo primordial de estos claustros promover constantemente la capacitacion y actualizacion a los docentes en el manejo de las nuevas tecnolog as, puesto que debemos adaptarnos a un mundo que esta en constante cambio e in uenciado por la tecnolog a que cada d a mas copa nuestras vidas.

La segunda recomendacion hace referencia a una adecuada plani cacion, participacion activa y capacitacion del profesorado. Sin importar cual sea la especialidad del docente, este deber a estar preparado o prepararse en competencias referentes al uso de tecnolog as, entre estas destacan: mostrar solvencia en el uso de las herramientas, delinear estrategias en funcion de actividades y contenidos educativos que favorezcan la inclusion de la tecnolog a en los diferentes niveles de conocimiento del alumnado, seleccionar adecuada y cuidadosamente las herramientas tecnologicas con base a las necesidades de los alumnos buscando siempre desarrollar nuevas habilidades en ellos, utilizar la tecnolog a en el proceso de valoracion del aprendizaje, optimizar los recursos que tiene a su disposicion, usar la tecnolog a en bene cio propio buscando aumentar y mejorar su rendimiento profesional y lo mas importante incentivarse en su propia capacitacion.

La tercera recomendacion radica en la necesidad de mantener motivado al alumnado. Para nadie es un secreto que los estudiantes de hoy en d a son usuarios permanentes de distintas tecnolog as, por tanto el uso de estas les resulta interesante, fascinante, facil y comodo. Por ende la inclusion de este tipo de herramientas en el aula de clase y fuera de ella debe ser un objetivo primordial que se debe trazar cualquier docente en busca de mantener la motivacion del estudiante. Entre muchas de las ventajas que trae el uso de la tecnolog a al alumnado sobresalen: Desarrollar aptitudes e incrementar la actitud frente al proceso de ensenanza y aprendizaje, interactuar con sus companeros y docente independientemente del sitio donde se encuentren, brindar diferentes opciones de informacion, manipulacion de datos e imagenes, como tambien de evaluacion, lo cual resulta mas motivante que trabajar con lapiz y papel, seleccionar diferentes herramientas y fuentes de informacion basados en la necesidad para desarrollar tareas especi cas, usar multiples recursos tecnologicos para resolver problemas del mundo real y tomar decisiones fundamentadas en los resultados obtenidos, entre otras. Por lo anterior, el papel del maestro debe estar orientado a la creacion de experiencias de aprendizajes motivadoras, estimulantes y desa antes, asentadas en el uso de tecnolog as que lleve al alumnado a participar y responsabilizarse de su propio aprendizaje.

5.3. Aplicacion Pedagogica y Tecnologica

En este apartado se exponen las conclusiones de la aplicacion de la metodolog a pedagogica y tecnologica propuesta en el presente proyecto, as mismo algunas recomendaciones respecto a la aplicacion de esta metodolog a en el curso de Calculo, las cuales pueden extenderse tambien a cualquier otro curso donde se aplique la metodolog a antes mencionada.

Este proceso de formacion del alumnado basado en una metodolog a constructivista apoyado en la tecnolog a, se enmarco por factores como la comunicacion mediada, el rol estratega del docente y el papel creativo e innovador del estudiante. Este apoyo tecnologico y pedagogico fue el arte de los alcances logrados en el proceso de ensenanza y aprendizaje, permitio desarrollar en los estudiantes nuevas capacidades cognitivas y metacognitivas que favorecieron signi cativamente los procesos intelectuales y colectivos en ellos.

Resultado claro que el uso de la tecnolog a en el proceso educativo, evidencia su efectividad cuando viene acompanada por una metodolog a constructivista basada en la indagacion e investigacion de problemas o situaciones reales en nuestro caso, el metodo de la Ensenanza para la Comprension (EpC). Por medio de esta metodolog a, los estudiantes alcanzaron niveles importantes de aplicacion y contextualizacion de los topicos del Calculo vectorial, abrieron nuevas ventanas y nuevos pensamientos en relacion al uso y aplicabilidad del Calculo en el entorno y su area de estudio.

La integracion de la tecnolog a y el metodo de la EpC al marco curricular permitio al docente potenciar la comprension en los alumnos, abordar y profundizar las tematicas desde diferentes perspectivas, crear discusiones en torno a los temas estudiados, lo que condujo al alumno a pensar, indagar y profundizar mas a fondo los contenidos y sus aplicaciones. En consideracion a esto, quisiera mostrar los resultados y conclusiones de una investigacion llevada a cabo durante diez anos llamada El aula del manana por Sandholtz, Ringsta , y Dwyer (1997) en colaboracion con universidades, escuelas publicas y la compan a Apple Computer, Inc. Esta investigacion se focalizo en experiencias adquiridas por docentes y estudiantes en situaciones de integracion de la tecnolog a a la ensenanza. Encontraron que: cuando la tecnolog a era integrada utilizando metodos tradicionales, la comprension de los alumnos en temas puntuales del curr culum no superaba los niveles obtenidos en experiencias donde la tecnolog a estaba ausente. En cambio, cuando se trabajaba con un enfoque constructivista, y cuando la tecnolog a era empleada para trabajar un aspecto determinado del curr culum, all los niveles de los alumnos superaban los estandares. Concluyeron que la tecnolog a es mas efectiva en la educacion cuando esta combinada con metodos de ensenanza que enfatizan la resolucion de problemas, el desarrollo de conceptos y el pensamiento cr tico

por sobre la simple adquisicion de conocimiento factico [55, p. 5].

Esta metodolog a potencio la forma de presentar los conceptos haciendolos mas asequibles, intuitivos e interesantes para los alumnos, tuvo gran impacto en la comprension alcanzada por los estudiantes, creo nuevos escenario de ensenanza y aprendizaje que comprometio a los actores del proceso el abordarlo desde diferentes perspectivas donde prevalecio la indagacion centrada en los intereses del alumno bajo una atmosfera donde predominaba el ser activo, re exivo, teorico y pragmatico.

5.3.1. Recomendaciones

La primera recomendacion hace referencia a la plani cacion de estrategias. El objetivo de esta metodolog a no pretende presentar el Calculo a los estudiantes como un todo en el mundo real. Seguramente, existen muchas situaciones en las que el profesional no estara interesado, por lo cual, lo mejor y mas conveniente es plani car estrategias que incentiven al estudiante a interesarse en el desarrollo de actividades aplicativas que tengan relacion con su carrera y/o area de estudio, lo que llevara a incrementar en ellos el interes y rendimiento hacia el curr culo.

La segunda recomendacion radica en la necesidad de integrar al profesorado entorno a la aplicacion de tecnolog as y metodos pedagogicos diferentes al tradicional. El uso adecuado de la tecnolog a conlleva en s muchas ventajas para los docentes, en el aula facilita y reduce el trabajo en lo referente al tiempo y recursos (papel, marcadores, textos, entre otros), ofrece la oportunidad de plantear experiencias orientadas al desarrollo profesional e intelectual de sus estudiantes, proporciona una constante comunicacion con ellos y brinda la oportunidad de explorar los conceptos en distintas formas haciendolos mas asequibles entre otras. Esto junto a una pedagog a constructivista y a las experiencias de todos y cada uno de los docentes, no llevar a a otra cosa que mejorar la calidad educativa y profesional del alumnado en los claustros educativos.

La tercera recomendacion hace enfasis en el mejoramiento de los sistemas de formacion en los claustros educativos. El perfeccionamiento de los procesos educativos se hace mas e ciente en aquellas instituciones donde prepondera la cultura del uso de la tecnolog a, apoyada en estrategias que estan encaminadas al fortalecimiento de la calidad docente. As mismo, se hace necesario implantar criterios de calidad que establezcan metas y objetivos a corto, mediano y largo plazo, enfocados al mejoramiento y a anzamiento de estos procesos en el tiempo.

5.4. Divulgacion del trabajo de investigacion

En esta seccion se muestra los art culos generados durante el proceso de elaboracion de esta investigacion. Asimismo, se presentan los eventos que permitieron socializar los avances de este proyecto.

5.4.1. Art culos

Durante el proceso investigativo se realizaron dos art culos, de los cuales uno de ellos fue publicado (ver Apendice A, pagina 211), y el otro esta en proceso de revision. A continuacion se muestra el resumen del art culo publicado.

APPLETS COMO HERRAMIENTA PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CALCULO VECTORIAL

Resumen: El Calculo vectorial es un curso que gira entorno al estudio de superficies en \mathbb{R}^3 , resulta de suma importancia la visualizacion de estas. En la actualidad el profesor puede utilizar diversas herramientas computacionales que le permiten mostrar una variada gama de superficies de la forma $z = f(x, y)$. En internet se encuentran diversas paginas que ofrecen Applets², que ilustran diferentes conceptos de este curso. En el aula de clase se pueden utilizar para ayudarles a los alumnos a interpretar, comprender y buscar nuevas aplicaciones de los temas estudiados o para ampliar los conocimientos en forma independiente.

Para el desarrollo del estudio, se escogieron dos grupos de estudiantes. Los docentes, expusieron los topicos tanto teorica como analiticamente apoyandose en los Applets como herramienta de ensenanza y aprendizaje. A cada grupo se le realizo una encuesta en el momento de iniciar el curso y otra al finalizar el mismo, para el analisis de estas, se utilizo el metodo estadistico multivariado de Analisis de Correspondencias Múltiples.

Estado: Publicado.

Revista: Memorias del Septimo Simposium Iberoamericano en Educacion, Cibernetica e Informatica: SIECI 2010. Orlando, Florida EE.UU. 2010.

²Aplicacion que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo un navegador web. Ofrece informacion grafica y a veces interactua con el usuario. (tomado de: <http://es.wikipedia.org/wiki/Applet>).

5.4.2. Ponencias

A continuacion se hara una relacion de las ponencias, que nos permitieron socializar los avances de este trabajo de grado, estas se realizaron en congresos y seminarios a nivel local y una a nivel internacional, la cual se realizara el proximo ano.

- Applets como herramienta de visualizacion y conceptualizacion en el calculo vectorial . II congreso internacional de formacion y modelacion en ciencias basicas. Universidad de Medell n. Mayo 2010.
- Internet como un espacio de aprendizaje en matematicas . D as de la ciencia aplicada. Universidad EAFIT. Medell n. Septiembre 2010.
- Octavo Symposium Iberoamericano en Educacion, Cibernetica e Informatica: SIECI 2011. Orlando, Florida EE.UU. 2011.

5.5. Trabajos a futuro

La presente investigacion se realizo con el principal objeto de analizar el impacto que produjo la aplicacion del metodo constructivista que lleva como nombre Ensenanza para la Comprension apoyado en nuevas tecnolog as en estudiantes del curso Calculo vectorial en la universidad EAFIT. Si bien, a lo largo de esta investigacion se han encontrado notables hallazgos, es necesario darle continuidad a este tipo de estudio para lo cual se proponen las siguientes acciones.

- Diseñar con base a los resultados obtenidos en esta investigacion estrategias que estimulen los procesos educativos en diversos cursos del area de las Matematicas, a n de a nazar y convertir esta metodolog a en una base del proceso de ensenanza y aprendizaje.
- Crear grupos docentes encargados de elaborar propuestas basadas en acciones que contribuyan la inclusion de la tecnolog a en el aula, que permitan llevar un seguimiento de las experiencias adquiridas y tomar decisiones sobre el uso de estas a n de alcanzar niveles superiores de ensenanza.
- Llevar y aplicar el modelo presentado a otras ramas de las ciencias, en especial en aquellas donde predomina la di cultad de comprension de las tematicas por parte del alumnado.

Para finalizar creemos que los resultados obtenidos sientan un precedente en el ámbito educativo de las Matemáticas, lo cual nos lleva a pensar que es fundamental concretar y consolidar nuevos desarrollos en busca de mejorar las estrategias que permitan comprender las maneras en que la pedagogía y tecnología beneficia el alcance de aprendizajes significativos.

Apendice A

Artículo

APPLETS COMO HERRAMIENTA PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO VECTORIAL

Luis C. Rojas*

Pedro V. Esteban**

Departamento de Ciencias Básicas, Universidad EAFIT
Medellín, Antioquia, Colombia

RESUMEN

El Cálculo vectorial es un curso que gira entorno al estudio de superficies en \mathbb{R}^3 . Como resultado de suma importancia la visualización de estas. En la actualidad el profesor puede utilizar diversas herramientas computacionales que le permiten mostrar una variada gama de superficies de la forma $z = f(x, y)$. En internet se encuentran diversas páginas que ofrecen Applets³, que ilustran diferentes conceptos de este curso. En el aula de clase se pueden utilizar para ayudarles a los alumnos a interpretar,

comprender y buscar nuevas aplicaciones de los temas estudiados o para ampliar los conocimientos en forma independiente.

Para el desarrollo del estudio, se escogieron dos grupos de estudiantes. Los docentes, expusieron los tópicos tanto teórica como analíticamente apoyándose en los Applets como herramienta de enseñanza y aprendizaje. A cada grupo se le realizó una encuesta en el momento de iniciar el curso y otra al finalizar el mismo, para el análisis de estas, se utilizó el método estadístico multivariado de Análisis de Corresponden-

*Estudiante de Maestría de Matemática Aplicada, Universidad EAFIT. e-mail: lrojas@eafit.edu.co

**Doctor en Ciencias Matemáticas. Docente Universidad EAFIT. e-mail: pesteban@eafit.edu.co

³Aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa, por ejemplo un navegador web. Ofrece información gráfica y a veces interactiva con el usuario. (tomado de: <http://es.wikipedia.org/wiki/Applet>).

cias Múltiples.

Palabras clave: Cálculo vectorial, Applets, superficies, visualización, comprensión.

INTRODUCCIÓN

La forma con la que se ha venido impartiendo la enseñanza de las matemáticas en gran parte de nuestros claustros, se ha caracterizado por su forma tradicional⁴, en la cual el docente transmite sus conocimientos de una forma plana, sin apoyo alguno de las nuevas tecnologías de la información y comunicación NTICs.

Hoy en día los estudiantes se sienten muy cómodos cuando se hace referencia al uso de la tecnología. El empleo de esta clase de herramientas dentro del aula de la clase, se convierte en una motivación extra que obtiene el alumno al momento de afrontar las temáticas de un curso, cosa que rara vez ocurre cuando solamente se utiliza el discurso usual del docente. Actualmente, en la enseñanza de cualquier rama de las ciencias, resulta una prioridad integrar en las aulas, herramientas que faciliten y propicien el aprendizaje y la comprensión de los temas a estudiar dentro de un curso. En contraste a esto Stone [6, p. 52] señala que la tecnología tiene un significado potencial para aumentar la comprensión del alumno y sin embargo aun no forma parte del repertorio de herramientas educativas de los docentes.

La innovación tecnológica ha permitido la creación de nuevos entornos comu-

nicativos y expresivos que abren la posibilidad de desarrollar nuevas experiencias formativas, expresivas y educativas [3]. Cuando de educación superior se habla, los retos son aun mayores, la mayoría de los profesores universitarios se resisten al uso de recursos tecnológicos por dos razones: por una parte consideran que al utilizar tecnología se disminuyen sus posiciones como expertos de su disciplina, y por otra, aprendieron en un sistema educativo tradicional [2]. A su vez Stone [6, p.73] afirma el uso de la tecnología a veces resulta hostil si no se sabe como sacar el mayor provecho de ella. Integrar con seriedad las nuevas tecnologías en el aula, promoviendo una comprensión flexible y creativa por parte del alumno, requiere una indagación constante y la colaboración entre colegas de toda la comunidad educativa. Pero resulta un desafío ineludible, si queremos una escuela capaz de formar jóvenes con aptitud crítica y conectados con su entorno.

Un estudio llevado a cabo en docentes universitarios señala: la mayoría de los docentes no cuentan con el perfil necesario para utilizar las TICs⁵ como herramientas cognitivas, ya que continua aun vigente la concepción tradicional de enseñanza centrada en un currículo, en priorizar la enseñanza de conceptos y hechos específicos y en utilizar un texto guía como único recurso [4]. A su vez Charo [1] afirma, el profesor ya no es la única fuente de conocimiento para el alumno, las TIC rompen la tradicional relación lineal entre profesor y alumno. Por tanto, el profesor debe asumir la responsabilidad de pro-

⁴Clase magistral en la cual el docente no utiliza NTICs.

⁵Tecnologías de la Información y la Comunicación.

porcionar a los alumnos los medios para dominar la proliferación de la información (ser capaz de seleccionar, organizar, priorizar...la información con sentido crítico), así como enseñarles a diferenciar la información efímera e instantánea (que dicho de paso invade espacios públicos y privados) del conocimiento que requiere esfuerzo, tiempo, voluntad de aprendizaje que es el que conduce a la adquisición del saber.

Buscando contribuir en la enseñanza aprendizaje y comprensión del Cálculo Vectorial, el cual gira entorno al estudio de superficies (gráficas en tres dimensiones), el objetivo principal que se planteó en el proyecto, fue implementar el uso de Applets tanto dentro como fuera de aula de clase en estudiantes de Ingeniería de la Universidad EAFIT, como una herramienta que facilite la asimilación y comprensión de los diferentes tópicos tratados en el curso.

APPLETS EN EL AULA DE CLASE

Hoy por hoy es claro que la tecnología se encuentra presente en gran parte de los lugares que habitualmente frecuentamos, desde nuestros hogares hasta nuestro sitio de trabajo. Actualmente el uso de esta, brinda la oportunidad de simplificar muchos de los procesos que hoy en día realizamos. Internet, ofrece herramientas como lo son el correo electrónico, que posibilita una rápida comunicación entre personas que se encuentran en lugares distantes, así como enviar textos, imágenes y documentos en diferentes formatos. Asimismo, existen webs que per-

miten crear foros en donde se pueden expresar ideas, conceptos u opiniones respecto a un tema específico y herramientas tipo skype que permiten una fácil y cómoda comunicación, del mismo modo acceso a ininidad de documentos de tipo investigativo entre otros.

En la internet existen numerosas webs de carácter didáctico-educativo, que permite al docente mostrar de una manera atractiva, innovadora y novedosa sus conocimientos, facilitando así la comprensión de los mismos por parte de sus estudiantes. Entre muchas de las webs de este tipo, sobresalen las que incluyen aplicaciones de tipo interactivo como lo son los Applets.

El uso de Applets en el aula de clase para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial permite explorar conceptos que hasta hace poco tiempo eran de difícil comprensión. El potencial que ofrecen como herramienta educativa se caracteriza por tener una interfaz interactiva que brinda al docente la posibilidad de mostrar temáticas de forma clara y atractiva. De otro lado, crean un ambiente propicio de interacción entre alumno, el conocimiento y el proceso de aprendizaje.

Cuando de conceptos del Cálculo vectorial se hace referencia, la interpretación, asimilación y comprensión de estos van de la mano con la visualización. Si el docente consigue exponer los conceptos de una forma clara y accesible, se garantiza en gran parte la comprensión de los mismos, es allí donde los Applets se convierten en una herramienta imprescindible, cuando se quiere alcanzar un verdadero apren-

dizaje signi cativo. Por el contrario si se tiene como unica herramienta una pizarra, la visualizacion de los topicos se vera limitada y en consecuencia la interpretacion de los conceptos se puede ver distorsionada.

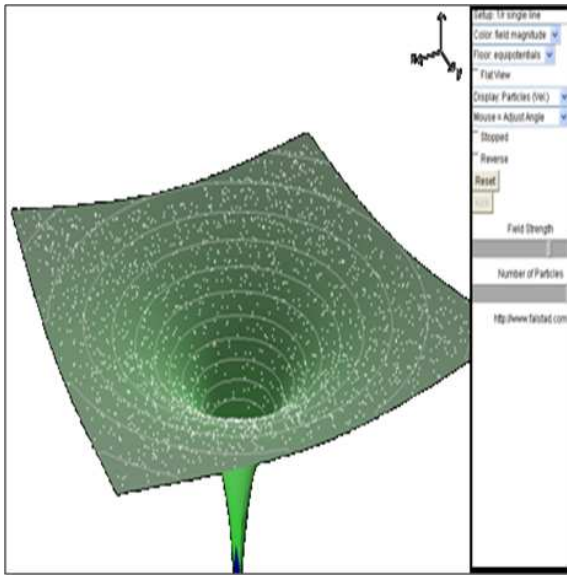


Figura A.1: Applet Campo vectorial.

La Figura A.1⁶ muestra un Applet, que hace referencia a un concepto propio del Calculo Vectorial (campos vectoriales), este evidencia lo anteriormente mencionado. Para el docente que utiliza el Applet le resulta mucho mas sencillo exponer el concepto, logra captar la atencion del alumnado propiciando la asimilacion y entendimiento del mismo, permite la discusion del concepto en forma interactiva, creando as un autentico ambiente de aprendizaje. Por el contrario el docente que tiene como unica herramienta una pizarra se le dificulta plasmar este tipo de conceptos, no hay interaccion alguna, la visualizacion se ve restringida y por tanto el entendimiento y comprension del

concepto.

La metodolog a desarrollada en esta investigacion tiene como soporte la implementacion de Applets en el curso de Calculo Vectorial en estudiantes de ingenier a de la Universidad EAFIT,

como herramienta para la ensenanza y comprension del mismo. Los docentes encargados de impartir los cursos, seleccionaron de internet Applets apropiados para desarrollar las tematicas a tratar. Al iniciar el semestre academico, las paginas web donde se encontraban los Applets fueron enviadas v a e-mail a los estudiantes con el rme proposito de incentivar y motivar el estudio fuera del aula. Los docentes encargados de cada curso, expusieron los topicos tanto teorica como anal ticamente apoyados siempre en los Applets como herramienta de ensenanza.

Durante el semestre academico se trabajo con dos grupos experimentales de 35 estudiantes cada uno a los cuales se les realizo una encuesta en el momento de iniciar el curso y otra al nalizar el mismo, con el principal objetivo de comprobar el impacto del uso de esta herramienta en el estudio de conceptos propios del Calculo vectorial. Una vez recopilada la informacion se aplico el metodo estad stico multivariado de Analisis Factorial de Correspondencias el cual es una tecnica estad stica que se aplica al analisis de tablas de contingencia de n individuos (estudiantes) y un conjunto de caracter sticas descriptivas, atributos o modalidades especificados por el investigador. Se construye un diagrama cartesiano (mapa perceptual)

⁶Tomada de: <http://www.falstad.com/vector/>

basado en la asociacion entre las variables analizadas, en dicho gra co se representan conjuntamente las distintas modalidades, de forma tal que la proximidad entre los puntos representados esta relacionada con el nivel de asociacion entre dichas modalidades [5].

RESULTADOS

Buscando conocer la opinion de los estudiantes con respecto a la utilizacion de Applets como herramienta de ensenanza y aprendizaje, y obtener informacion mas exacta y con ible se decidio escoger la encuesta como instrumento de recoleccion de informacion primaria. Se formularon preguntas concernientes al uso de esta herramienta tanto en el desarrollo de la clase como fuera de esta, como tambien de la utilizacion de este tipo de instrumentos en cursos anteriores. Se realizaron preguntas

cerradas de tipo cualitativo y una pregunta abierta con el ın de enriquecer los resultados obtenidos.

El mapa perceptual, Figura A.2, hace referencia al resultado obtenido en tres preguntas enfocadas a la utilizacion de herramientas tecnologicas en asignaturas de Calculo desarrolladas anteriormente y su aplicacion en la vida diaria; las cuales fueron realizadas a los estudiantes en el momento de iniciar el curso.

Como se puede observar en el mapa perceptual Figura A.2, un buen numero de estudiantes consideran que la utilizacion de herramientas tecnologicas en el aula de clase podra contribuir en la asimilacion de conceptos del Calculo aplicados a la vida diaria, ademas, creen que al incorporar este tipo de ayudas tecnologicas en la ensenanza, lograr ın visualizar de una mejor manera los conceptos a estudiar, a pesar de que la gran mayor a nunca ha utilizado

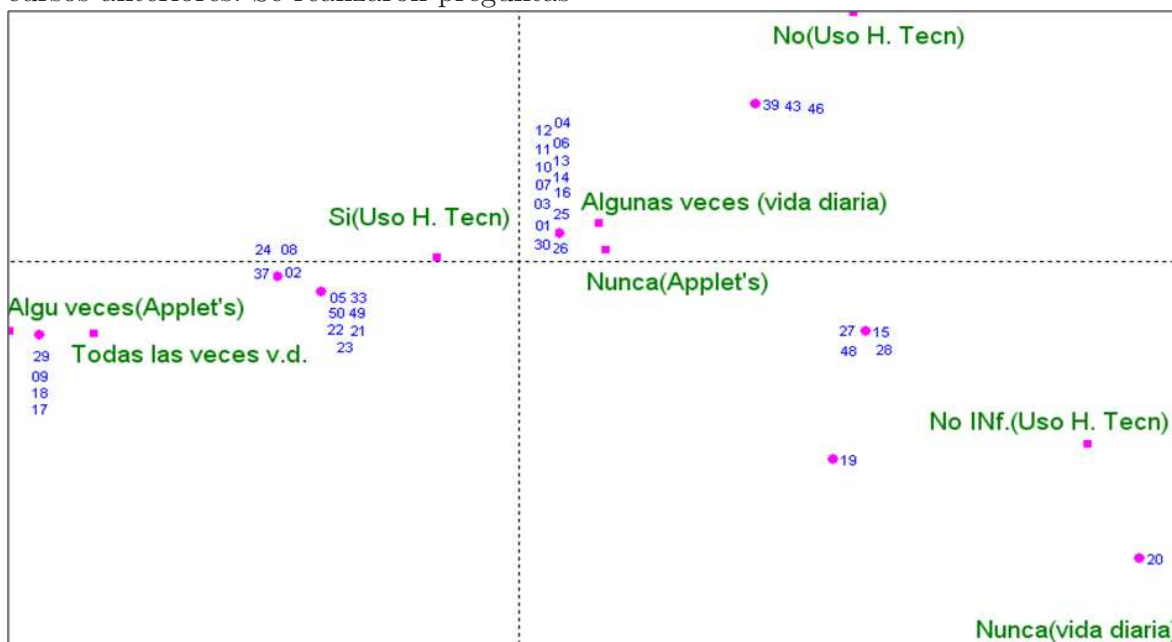


Figura A.2: Importancia de las herramientas tecnológicas.

estas herramientas como una opcion para generacion de conocimiento muy buena. potenciar su aprendizaje.

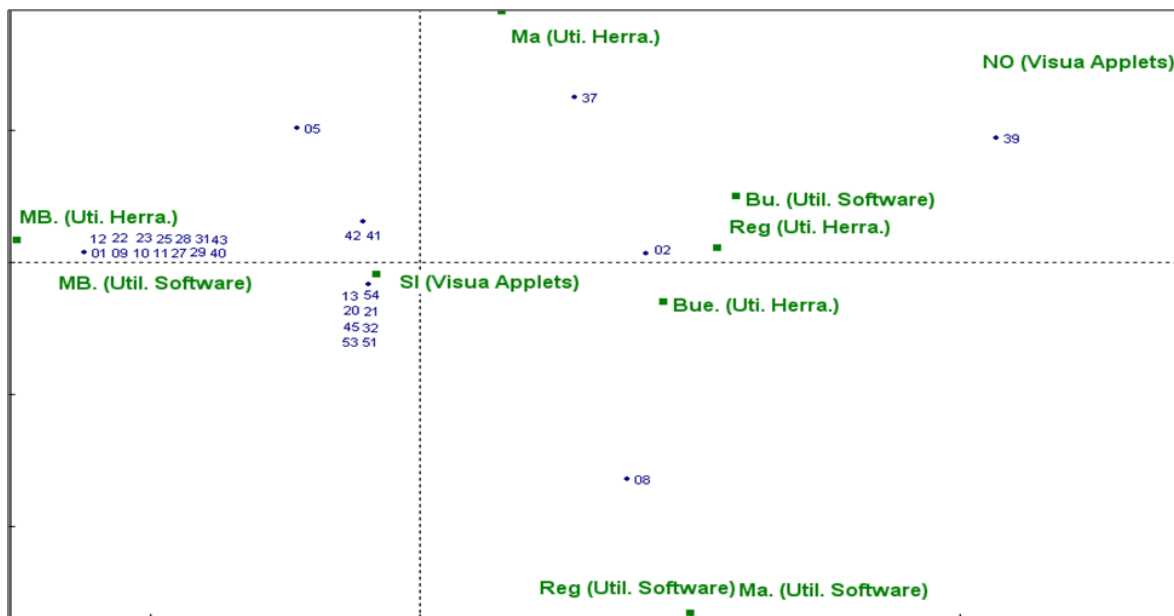


Figura A.3: Utilización herramientas tecnológicas.

Una vez desarrollado el curso de Calculo Vectorial, apoyado en Applets como herramienta tecnologica para la ensenanza y comprension, y con base en una segunda encuesta realizada al mismo grupo experimental al analizar el curso, se pudo percibir lo siguiente:

Como muestra el mapa perceptual Figura A.3, un gran numero de estudiantes manifiestan que la utilizacion de Applets como herramienta tecnologica en aula de clase permite visualizar y ayudan a asimilar de una mejor manera los conceptos propios del Calculo (superficies, derivadas, campos vectoriales, etc.).

Ademas consideran, que el manejo de software (Applets) dentro y fuera del aula de clase se convierte en una opcion de

CONCLUSIONES

Al utilizar adecuadamente y concienzudamente la tecnologia en el aula de clase se garantiza que el desarrollo de las clases se tornen atractivas, innovadoras e interesantes. El uso de estas, le permite al docente mostrar y transmitir sus conocimientos de diferentes y renovadas formas, ya que puede utilizarlas como apoyo a sus exposiciones magistrales brindandole al estudiante nuevas opciones para construir conocimiento.

El impacto social del uso de la tecnologia (Applets) en el aula de clase resulta ser sumamente relevante. Al incorporar de manera adecuada este tipo de tecnologias, permitio que los alumnos se volvieran participes del proceso de en-

senanza y se convirtieran en protagonistas del mismo, pasaron de ser sujetos pasivos en el aula a convertirse en sujetos activos, lo que favoreció una mayor y mejor comunicación entre docente-alumno, alumno-docente y alumno-alumno.

El uso de Applets como herramienta de enseñanza y aprendizaje del Cálculo vectorial resulta ser un instrumento eficaz en comparación con la metodología tradicional con la que se venía impartiendo el curso. En consecuencia a esto, y buscando siempre brindar educación de mayor calidad, el uso de este tipo de herramientas tecnológicas resulta ser un instrumento poderoso en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Vectorial.

El empleo de esta clase de herramientas tecnológicas en el aula de la clase, brinda al docente la posibilidad de transmitir sus conocimientos de una forma novedosa, clara y eficiente, lo cual favorece el entendimiento, asimilación y comprensión de las temáticas por parte del estudiante.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a la Universidad EAFIT, la Universidad del Quindío y a Colciencias por su apoyo al proyecto de investigación denominado

Evolución de la plataforma de Telepresencia y su aplicación en regiones del país usando RENATA (Código IF005-07), del que este artículo forma parte de los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Charo, R. et al. Globalización: nuevas prácticas educativas. España, 2001, p. 14.
- [2] Dirr, P. Desarrollo Social y Educativo con las Nuevas Tecnologías. 2004, pp. 69-84.
- [3] Ferro, C. et al. Ventajas del uso de las TICs en el proceso de enseñanza aprendizaje desde la óptica de los docentes universitarios Españoles. Revista electrónica de tecnología educativa. No. 29, 2009, p.3.
- [4] Guitert, M. La tecnología educativa y la educación a distancia en una buena práctica pedagógica. En: Fainhold, B. Formación del profesorado para el nuevo siglo: Aportes de la tecnología educativa apropiada. Buenos Aires, 1998.
- [5] Salvador, M. Análisis de Correspondencias. España, 2009, p.1.
- [6] Stone M. et al. Enseñar para la comprensión con nuevas tecnologías. Paidós. Argentina, 2006 p. 52.

Apendice B

Encuesta inicial

El proposito de aplicar esta encuesta a los estudiantes, radica en la necesidad de recoger informacion respecto al grado de comprension y el uso de herramientas tecnologicas en cursos de Calculo estudiados anteriormente.



Enseñanza para la comprensión y nuevas tecnologías
Encuesta inicial

La siguiente encuesta que a continuacion usted va a contestar, tiene como proposito fundamental, detectar el grado de comprension del Calculo al momento de empezar el curso de Calculo III, cuyo enfoque estara marcado por el metodo de ensenanza y de aprendizaje el cual tiene por nombre la Ensenanza para la Comprension (EpC), con el soporte tecnologico (applets, calculadoras, mimio, entre otras) que sera utilizado en el aula de clase durante el transcurso del semestre.

Senale con una X su respuesta.

1. Considera que el Calculo se refleja en la vida diaria?
 - a) Nunca.
 - b) Algunas veces.
 - c) Todas las veces.
2. Aparte de los exámenes presentados en los diferentes cursos de su carrera, ha aplicado el Calculo en alguna situacion de su entorno?

- a) Si.
 - b) No.
3. Son necesarias funciones de varias variables para modelar fenomenos que ocurren en la naturaleza?
- a) Si.
 - b) No.
 - c) No tengo informacion al respecto.
4. Las propiedades de continuidad, derivabilidad e integrabilidad para funciones de una variable, se podran extender a funciones de varias variables?
- a) Si.
 - b) No.
 - c) No tengo informacion al respecto.

En el desarrollo de los cursos de Calculo estudiados anteriormente, ha empleado herramientas tecnologicas como:

5. Applets?
- a) Nunca.
 - b) Algunas veces.
 - c) Siempre.
6. PDA s (Poket PC)?
- a) Nunca.
 - b) Algunas veces.
 - c) Siempre.
7. Mimio?
- a) Nunca.
 - b) Algunas veces.
 - c) Siempre.

8. Piensa usted que con el uso de herramientas tecnologicas dentro del aula de clase, se logra descubrir, comprender y visualizar los conceptos relacionados con el Calculo?
- a) Si.
 - b) No.
 - c) No tengo informacion al respecto.
9. El Calculo se aplica a todos los fenomenos de la vida diaria? (fisico, quimicos, biologicos, economicos, sociales, ambientales, etc.)
- a) Si.
 - b) No.
 - c) No tengo informacion al respecto.
10. El Calculo estudia entre otros temas funciones, lmites derivadas, integrales simples y multiples.
- a) Si.
 - b) No.
 - c) No tengo informacion al respecto.
11. Una funcion con derivada negativa es:
- a) Decreciente.
 - b) Creciente.
 - c) No recuerdo haberlo estudiado.
12. Todo proceso socio-economico, administrativo, financiero, industrial, biologico, ambiental, etc., involucran funciones de varias variables?
- a) Si.
 - b) No.
 - c) No tengo informacion al respecto.
13. La derivada de una funcion signi ca en la vida diaria: velocidad, razon de cambio instantanea, costos marginales, utilidades marginales, etc.?
- a) Si.

- b) No.
- c) No recuerdo haberlo estudiado.

14. Que significa la Integral de una función?

- a) La antiderivada.
- b) Longitudes de arcos.
- c) Fuerza, promedios, varianza, momentos, etc.
- d) Todas las anteriores.
- e) ninguna de las anteriores.

15. Con funciones de varias variables se podrá modelar el ingreso de una familia, la cuenta de los servicios públicos de un hogar, sus ingresos personales, entre otros?

- a) Si.
- b) No.
- c) No tengo información al respecto.

Apendice C

Encuesta final

El proposito de aplicar esta encuesta a los estudiantes radicaba en la necesidad de recoger informacion acerca de la aplicacion de la propuesta metodologica de ensenanza y aprendizaje planteada en este proyecto. As mismo, comparar los resultados obtenidos en esta encuesta con los logrados en la inicial.



Enseñanza para la comprensión y nuevas tecnologías
Encuesta final

La siguiente encuesta que a continuacion usted va a contestar, tiene como proposito fundamental, detectar el impacto del metodo de ensenanza y aprendizaje que tiene como nombre Ensenanza para la Comprension (EpC), con el soporte tecnologico (applets, software, mimio, entre otras) utilizada en el aula de clase, en el curso de Calculo III.

Senale con una X su respuesta.

1. Como considera usted las herramientas tecnologicas (applets, software, mimio, PDA) utilizadas en el desarrollo del curso Calculo III?
 - a) Malas
 - b) Regulares
 - c) Buenas
 - d) Muy buenas

2. Cree usted que el uso de los Applets ayuda a visualizar de una mejor manera, los conceptos teóricos (derivadas, integrales, campos vectoriales, etc.) del Cálculo III?
 - a) Sí
 - b) No

3. Considera usted que el uso de PDA S en el aula de clase resulta una herramienta útil para visualizar y manipular superficies?
 - a) Sí
 - b) No

4. Considera usted que el uso de PDA S en el aula de clase resulta una herramienta útil para el estudio de las superficies?
 - a) Sí
 - b) No

5. Para usted la utilización de software en el aula de clase es una herramienta:
 - a) Mala
 - b) Regular
 - c) Buena
 - d) Muy buena

6. Considera usted que la utilización de software en el aula de clase resulta una herramienta útil para el estudio de las superficies?
 - a) Sí
 - b) No

7. Para usted el mimio como herramienta tecnológica es:
 - a) Mala
 - b) Regular
 - c) Buena
 - d) Muy buena

8. El mimio le permite a usted prestar mayor atencion en el desarrollo de la clase?
- a) Si.
 - b) No
9. Toma usted apuntes adicionales cuando el profesor esta utilizando el mimio?
- a) Nunca
 - b) Algunas veces
 - c) Siempre
10. Es ventajoso para usted contar con las memorias de clase obtenidas con el mimio?
- a) Nunca
 - b) Algunas veces
 - c) Siempre
11. Como considera usted el portafolio como instrumento de aprendizaje y comprension del Calculo III?
- a) Mala
 - b) Regular
 - c) Buena
 - d) Muy buena
12. Utilizo usted alguna herramienta tecnologica para el desarrollo de su portafolio?
- a) Nunca
 - b) Algunas veces
 - c) Siempre
13. Al desarrollar el portafolio logrado por usted durante el curso, pudo hallar aplicaciones practicas del Calculo III al mundo real?
- a) Nunca
 - b) Algunas veces
 - c) Siempre

14. Durante el desarrollo del curso de Calculo III, cree usted, que el portafolio le apporto como herramienta para comprender y relacionar el Calculo en su vida cotidiana?
- a) Nunca
 - b) Algunas veces
 - c) Siempre

15. El curso de Calculo III desarrollado por el metodo de ensenanza-aprendizaje y comprension le apporto aplicaciones practicas en su area de estudio?
- a) Nunca
 - b) Algunas veces
 - c) Siempre

Con base en el conocimiento adquirido durante el desarrollo del curso de Calculo III, y apoyado en el metodo pedagogico de la ensenanza para la comprension (EpC), cree usted que este es:

16. Innovador?

- a) Si
- b) No

17. Creativo?

- a) Si
- b) No

18. Que otras experiencias le trajo a usted el curso de Calculo III, desarrollado por el metodo de la ensenanza para la comprension (EpC) apoyado con nuevas tecnolog as?

Apendice D

Base de datos - Encuesta inicial

Una vez aplicada la encuesta Inicial, el siguiente paso fue codificar la información. Posteriormente se construyó la matriz de datos la cual fue procesada y analizada utilizando el software SPAD.

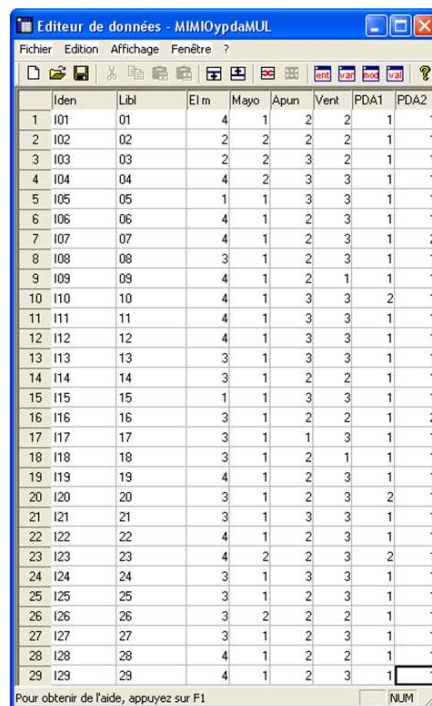
Iden	Libl	Etc	Apl	Func	Prop	Uso	Uso	Uso	Etc	Etc	Func	Todo	Ets	Ets	Apl		
1	101	01	2	2	1	1	1	1	1	1	1	3	1	4	3		
2	102	02	2	2	1	1	2	2	1	1	2	1	1	4	1		
3	103	03	2	2	3	1	1	1	1	1	1	3	1	4	3		
4	104	04	2	2	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	4	3	
5	105	05	3	2	3	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	
6	106	06	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	
7	107	07	2	2	3	3	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	
8	108	08	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	
9	109	09	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
10	110	10	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
11	111	11	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
12	112	12	2	2	1	1	1	1	1	1	1	3	3	1	3	3	
13	113	13	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
14	114	14	2	2	3	1	1	2	1	1	1	1	3	1	1	3	
15	115	15	2	2	1	2	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	
16	116	16	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
17	117	17	3	2	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	5	3	
18	118	18	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1	
19	119	19	1	2	3	1	1	1	2	1	3	1	1	3	1	3	
20	120	20	1	1	1	1	1	1	1	3	3	1	1	3	1	3	
21	121	21	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1	
22	122	22	3	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	
23	123	23	1	2	1	3	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	
24	124	24	2	2	3	1	2	1	1	1	1	1	2	3	5	1	
25	125	25	2	2	1	3	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	
26	126	26	2	2	1	3	1	1	1	2	1	3	3	1	1	3	
27	127	27	2	2	3	1	1	1	1	3	1	3	1	3	1	3	
28	128	28	2	2	1	1	1	1	1	3	1	1	2	1	1	2	3
29	129	29	3	2	3	3	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1
30	130	30	2	2	3	3	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1
31	131	31	2	2	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3
32	132	32	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1
33	133	33	3	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1
34	134	34	2	1	3	1	1	1	1	1	1	2	3	3	2	1	3
35	135	35	2	2	3	3	1	1	1	1	1	1	3	3	2	1	3
36	136	36	2	2	3	3	1	1	1	1	1	1	3	2	2	1	3
37	137	37	2	2	3	3	2	1	1	1	1	1	3	3	1	1	2
38	138	38	2	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	4	3
39	139	39	2	2	2	3	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	3
40	140	40	2	2	2	3	1	1	1	2	1	1	2	1	5	1	1
41	141	41	2	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	3	1	4	3
42	142	42	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	1
43	143	43	2	2	3	3	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1
44	144	44	2	2	3	1	1	1	1	3	1	2	3	1	4	3	3
45	145	45	2	2	3	3	1	1	1	3	1	2	1	1	1	1	3
46	146	46	2	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	3
47	147	47	2	2	3	3	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2
48	148	48	2	2	1	3	1	1	1	3	1	1	2	1	1	1	3
49	149	49	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	4	1	1
50	150	50	3	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	3	1
51	151	51	2	2	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1

Figura D.1: Datos de la encuesta inicial - Imagen capturada del software SPAD.

Apendice E

Base de datos - Encuesta nacional

Una vez aplicada la encuesta nacional, el siguiente paso fue codificar la información. Posteriormente se construyeron dos matrices de datos, una de ellas incluye las preguntas que hacen referencia al uso de todas las herramientas tecnológicas excepto las que hacen alusión al empleo del Mímio y PDA's y la otra solo con estas dos últimas herramientas. Posteriormente, estas bases de datos fueron procesadas y analizadas utilizando el software SPAD.



The screenshot shows a window titled "Editeur de données - MIMIOyPDAUI". The window contains a table with the following columns: Iden, Libl, El m, Mayo, Apun, Vent, PDA1, and PDA2. The table lists 29 rows of data, each representing a survey item. The data is as follows:

	Iden	Libl	El m	Mayo	Apun	Vent	PDA1	PDA2
1	I01	01	4	1	2	2	1	1
2	I02	02	2	2	2	2	1	1
3	I03	03	2	2	3	2	1	1
4	I04	04	4	2	3	3	1	1
5	I05	05	1	1	3	3	1	1
6	I06	06	4	1	2	3	1	1
7	I07	07	4	1	2	3	1	2
8	I08	08	3	1	2	3	1	1
9	I09	09	4	1	2	1	1	1
10	I10	10	4	1	3	3	2	1
11	I11	11	4	1	3	3	1	1
12	I12	12	4	1	3	3	1	1
13	I13	13	3	1	3	3	1	1
14	I14	14	3	1	2	2	1	1
15	I15	15	1	1	3	3	1	1
16	I16	16	3	1	2	2	1	2
17	I17	17	3	1	1	3	1	1
18	I18	18	3	1	2	1	1	1
19	I19	19	4	1	2	3	1	1
20	I20	20	3	1	2	3	2	1
21	I21	21	3	1	3	3	1	1
22	I22	22	4	1	2	3	1	1
23	I23	23	4	2	2	3	2	1
24	I24	24	3	1	3	3	1	1
25	I25	25	3	1	2	3	1	1
26	I26	26	3	2	2	2	1	1
27	I27	27	3	1	2	3	1	1
28	I28	28	4	1	2	2	1	1
29	I29	29	4	1	2	3	1	1

Figura E.1: Datos de la encuesta Final (Mímio y PDA's) - Imagen capturada del software SPAD.

The image shows a screenshot of the SPAD software interface. The window title is 'Editeur de données - Encuesta final mul'. The menu bar includes 'Fichier', 'Edition', 'Affichage', and 'Fenêtre'. Below the menu bar is a toolbar with various icons. The main area displays a data table with the following columns: 'Iden', 'Lib', 'Opé', 'AB_1', 'El s', 'AD_1', 'El p', 'Herr', 'Desa', 'Apor', 'Apor', 'El m', and 'El m'. The table contains 55 rows of data, numbered 1 to 55. The data is organized into groups based on the 'Opé' column, with values 4, 3, and 1. The 'El s' and 'El p' columns also show values 4, 3, and 1. The 'Herr' column shows values 1, 2, and 3. The 'Desa' column shows values 3, 2, and 1. The 'Apor' columns show values 3, 2, and 1. The 'El m' columns show values 3, 2, and 1. The table is displayed in a grid format with a blue header and a white background. The status bar at the bottom left says 'Pour obtenir de l'aide, appuyez sur F1' and the status bar at the bottom right says 'NUM'.

	Iden	Lib	Opé	AB_1	El s	AD_1	El p	Herr	Desa	Apor	Apor	El m	El m
1	I01	01	4	1	4	1	4	1	3	3	3	1	1
2	I02	02	3	1	3	1	2	2	2	2	2	1	1
3	I03	03	3	1	3	1	1	2	3	2	2	1	1
4	I04	04	4	1	3	1	2	1	3	2	3	1	1
5	I05	05	3	1	4	1	3	2	1	2	3	1	1
6	I06	06	2	1	3	1	3	1	3	3	2	1	1
7	I07	07	3	1	3	2	3	1	3	2	2	1	1
8	I08	08	2	1	1	1	3	1	3	2	2	1	1
9	I09	09	4	1	4	1	2	1	3	3	2	1	1
10	I10	10	4	1	4	1	2	1	3	2	2	1	1
11	I11	11	4	1	4	1	4	3	3	3	3	1	1
12	I12	12	4	1	4	1	4	2	3	3	3	1	1
13	I13	13	3	1	4	1	4	2	3	2	3	1	1
14	I14	14	3	1	3	1	4	1	3	3	3	1	1
15	I15	15	3	2	2	1	3	1	3	3	3	1	1
16	I16	16	4	1	3	1	3	2	2	3	3	1	1
17	I17	17	3	1	3	1	3	2	3	2	3	1	1
18	I18	18	3	1	3	1	3	2	3	3	3	1	1
19	I19	19	3	1	3	1	3	1	3	3	3	2	1
20	I20	20	3	1	4	1	2	2	3	2	3	1	1
21	I21	21	3	1	4	1	3	3	3	3	3	1	1
22	I22	22	4	1	4	1	4	2	3	3	3	1	1
23	I23	23	4	1	4	1	4	2	3	3	3	1	1
24	I24	24	3	1	3	1	3	2	3	2	3	1	1
25	I25	25	4	1	4	1	3	1	3	2	3	1	1
26	I26	26	3	1	1	2	3	1	3	1	2	1	1
27	I27	27	4	1	4	1	3	2	3	2	3	1	1
28	I28	28	4	1	4	1	3	2	1	2	3	1	1
29	I29	29	4	2	4	1	4	2	3	3	3	1	1
30	I30	30	1	1	3	2	3	2	1	2	3	1	1
31	I31	31	4	1	4	1	4	2	3	2	2	1	1
32	I32	32	3	1	4	1	3	2	2	3	3	2	2
33	I33	33	3	1	3	1	3	3	3	2	3	1	2
34	I34	34	3	1	2	1	3	2	3	3	2	1	1
35	I35	35	3	1	3	1	3	2	2	2	1	1	1
36	I36	36	3	2	2	1	2	2	2	2	2	1	2
37	I37	37	2	1	3	1	1	2	2	1	2	1	2
38	I38	38	3	1	3	1	3	2	3	2	2	1	1
39	I39	39	3	1	3	1	4	2	3	3	3	1	1
40	I40	40	4	1	4	1	4	2	3	2	3	1	1
41	I41	41	4	1	3	1	3	2	3	3	3	1	1
42	I42	42	4	1	3	1	3	2	3	3	3	1	1
43	I43	43	4	1	4	1	3	2	3	3	2	1	1
44	I44	44	3	1	3	1	2	2	3	2	3	2	1
45	I45	45	1	2	4	1	4	2	3	2	2	1	1
46	I46	46	4	1	4	1	3	2	3	2	3	1	1
47	I47	47	4	1	4	1	4	2	3	3	3	1	1
48	I48	48	3	1	3	1	3	1	2	2	1	1	1
49	I49	49	4	1	4	1	4	3	3	3	3	1	1
50	I50	50	4	1	4	1	4	3	3	3	3	1	1
51	I51	51	3	1	4	1	3	3	3	3	3	1	1
52	I52	52	3	1	3	1	3	3	3	2	3	1	1
53	I53	53	3	1	4	1	4	3	3	3	1	2	1
54	I54	54	3	1	4	1	4	2	3	2	3	1	1
55	I55	55	3	1	3	1	2	1	3	3	2	1	1

Figura E.2: Datos de la encuesta Final - Imagen capturada del software SPAD.

Bibliografía

- [1] Artigue, Robert, e. a. (2001). *Research on the teaching and learning of Calculus/Elementary analysis*. The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study. Holanda.
- [2] Artigue, R. (1995). *La enseñanza de los principios del Calculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Ingeniería didáctica en educación matemática. Mexico.
- [3] Ausubel, D. (1976). *psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. Mexico.
- [4] Ayala, F. (2008). *El Portafolio: Herramienta de apoyo para desarrollar competencias*. Dirección de Desarrollo Académico de la División Ciencias de la Salud. Mexico.
- [5] Barbera, B. (2006). Portafolio electrónico: desarrollo de competencias profesionales.
- [6] Blythe, D. (1998). *What is understanding?. Teaching for understanding: Linking Research with Practice*. Estados Unidos. Paidós.
- [7] Blythe, T. (1999). *La Enseñanza para la comprensión. Guía para el docente*. Argentina. Paidós.
- [8] Boyer, C. B. (1986). *Historia de las matemáticas*. España: Alianza Editorial.
- [9] Cantoral, R, e. a. (1990). *Calculo-Análisis. Una revisión de la investigación educativa reciente en México (pp. 55 - 69)*. En: Salinas, Patricia. *Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Calculo dentro de una institución educativa*. España.
- [10] Carneiro, A. m. (2007). *El papel de la interacción en el aprendizaje de las matemáticas*. Brasil.
- [11] Crilly, T. (2009). *50 Cosas que hay que Saber Sobre Matemáticas*. España.
- [12] Cuban, L. (2001). *versold Under Used: Computers in the Classroom*. Estados Unidos. Harvard University.

-
- [13] D, J. (1981). *Teoría de la educación*. Estados Unidos.
- [14] Díaz, J. M. (2001). *La educación en la antigua Grecia*.
- [15] Domenech, F. (2003). *Proceso de enseñanza-aprendizaje universitario: aspectos teóricos y prácticos*.
- [16] Facultad de Humanidades, U. M. (2009). *La Educación en el Antiguo Egipto*.
- [17] Fernández, L. A. (2008). *La Integral: Un Enfoque Computacional*. Mexico.
- [18] Ferrer, J. (2008). *El proceso de infusión de la tecnología a la sala de clases*. Puerto Rico.
- [19] G, A. (2004a). *Desarrollo del pensamiento de Jhon Dewey*. Estados Unidos.
- [20] G, N. (2004b). *Historia del Antiguo Egipto*. Akal, España.
- [21] García, A. (1996). *Perspectivas de las nuevas tecnologías en la educación*. España.
- [22] Gillings, R. J. (1964). *Vsn der Waerden, Science Awakening, the volume of a Truncated Pyramid in Ancient Egypt*. Mathematics Teachers, 57 edition.
- [23] Gómez, C. (1994). *De que hablamos cuando hablamos de constructivismo*.
- [24] González, R. (2003). *El Emilio y la educación física escolar*. España.
- [25] Hair, Joseph, e. a. (2000). *Análisis Multivariante*. Estados Unidos.
- [26] Izquierdo, J. (2008). *Seminario sobre Soluciones Interactivas en Educación. Una jornada para el descubrimiento de la participación y la innovación en el aula*. España.
- [27] J, O. and E, R. (2000). Indian numerals.
- [28] J, O. and E, R. (2003). Overview of chinese mathematics.
- [29] Leston, P. (2009). *El gráfico como herramienta para la clase de Matemáticas*. Argentina.
- [30] López, L. (2009). *El uso del tablet Pc y la PDA en la práctica docente*. Argentina.
- [31] Luque, G. (2006). El naturalismo pedagógico y su influencia en el movimiento de la escuela nueva venezolana.
- [32] Maza, G. C. (2007). *Matemáticas en Mesopotamia*.
- [33] Mendoza, M. (2006). *Impacto del software educativo en la escuela*. Perú.

- [34] Molineros, Y. (2008). *Las civilizaciones China, India e Islamica*.
- [35] Morales, F. (2002). Sobre el emilio de rousseau.
- [36] Noel, . (2007). *Historia y constructivismo*. Puerto Rico.
- [37] Novak, J. D. (1988). *Teor a y practica de la educacion*.
- [38] Obregon, N. (2006). Quien fue mar a montessori. Red de revistas cient íficas de America Latina y el Caribe, Espana y Portugal.
- [39] Paez, T. (2006). *Las Matematicas a Lo Largo de la Historia: de la Europa Medieval al Siglo XIX*. Espana.
- [40] Pineiro Gomez, C. (2009). *Las matematicas en Grecia durante los anos 800 a.C - 600 d.C*.
- [41] Pinzon, E. (2005). *El Calculo diferencial*. Argentina.
- [42] Pinzon, l. (2008). *El Calculo diferencial*. Argentina.
- [43] Ponce, F. (2007). *Accesibilidad, educacion y tecnolog as de la informacion y la comunicacion*. Espana.
- [44] Pozo, J. (1999). *Un Curr culo para aprender: Profesores, Alumnos y Contenidos ante el aprendizaje Estrategico*. Madrid. Santillana.
- [45] Ragni Vargas, M. (2008). *El enfoque constructivista de los procesos de ensenanza y aprendizaje*. Argentina.
- [46] Ramon, F. (2004). *Mas alla de la teor a: El Aprendizaje Cooperativo: El constructivismo solcial*.
- [47] R bnikov, K. (1987). *Historia de las Matematicas*.
- [48] Rendon, P. (2009). *Conceptualizacion de la razon de cambio en el marco de la Ensenanza para la Comprension*. Colombia.
- [49] Rodr guez, L. (2004). *La teor a del aprendizaje signi cativo*. Espana.
- [50] Romo, A. (2000). *El enfoque sociocultural del aprendizaje de Vygotsky*. Mexico.
- [51] Rosseau, J. J. (2006). La educacion y la naturaleza humana. Aportado por Gloria Calvo.
- [52] Rovira, C. (2002). *Instituto Universitario de Lingu stica Aplicada, Seccion Cient ífica de Ciencias de la Documentacion del Departamento de Ciencias Pol ticas y Sociales*.

- [53] Ruiz, A. (2006). *Historia Y Filosof a de Las Matematicas*. Espana.
- [54] Salinas, P. (2008). *Hacia un nuevo paradigma en la ensenanza del Calculo dentro de una institucion educativa*. Espana.
- [55] Sandholtz, J., R. C. . D. D. (2002). *Teaching with Technology*. Teachers College Press: New York, NY.En: Wirsig, S. *Cual es el lugar de la tecnologia en la educacion?*. Estados Unidos.
- [56] Santamaria, Sandy, y. o. (2008). *Historia de la educacion y de la pedagog a*.
- [57] Secretaria de educacion, D. t. d. e. s. (2009). *Departamento tecnico de educacion secundaria,Matecalendario 2010*. Nuevo leon. Mexico.
- [58] Servil, K., C. K. e. a. (2005). *The Role of Visualization Approach on Student s Conceptual Learning*. Turqu a.
- [59] Silva, C. (2003). *Metodo Mar a Montessori*. Santiago de Chile.
- [60] Sanchez, I. (2008). *La Matematica Babilonica*.
- [61] Stone, M. (1999). *La Ensenanza para la Comprension*. Argentina. Paidos.
- [62] Stone, M. (2005). *Ensenar para la comprension con nuevas tecnolog as*. Argentina. Paidos.
- [63] Tobon, R. (2003). *Estrategias comunicativas en la educacion: hacia un modelo semiotico-pedagogico*.
- [64] Torres, C. (2007). *La Matematica en la Grecia antigua*.
- [65] UNESCO, O. I. d. E. (1993). Jhon dewey. *Par s,Revista trimestral de educacion comparada*, XXIII.
- [66] Valeiras, N. (2006). *Las tecnolog as de la informacion y la comunicacion integradas en un modelo constructivista para la ensenamza de las ciencias*. Espana.
- [67] Vega Meza, M. A. (2003). *Matematica Hindu*.
- [68] Von, G. (1996). *Aspectos del Constructivismo Radical*. En Peckman, M. (Comp.) *Construcciones de la Experiencia Humana*. Espana.
- [69] Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matematicas*. Siglo 21 de Espana editores.