



Dissertação

Mestrado em Engenharia Mecânica Produção Industrial

# **Otimização Simultânea de Forma e Topologia de Estruturas Casca**

**Rafael Eugénio Martins Sanches**

*Leiria, Dezembro de 2017*





Dissertação

Mestrado em Engenharia Mecânica Produção Industrial

# **Otimização Simultânea de Forma e Topologia de Estruturas Casca**

**Rafael Eugénio Martins Sanches**

Dissertação de Mestrado realizada sob a orientação do Doutor Rui Miguel Barreiros. Rúben, Professor da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria e coorientação do Doutor João Manuel Matias, Professor da Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Leiria.

Leiria, *Dezembro* de 2017

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*

# Agradecimentos

---

Gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos:

Ao meu orientador, professor Rui B. Ruben e ao meu coorientador professor João M. Matias, pela orientação, paciência, apoio e conhecimentos proporcionados que foram fundamentais para a execução desta dissertação.

Aos meus pais, Ismélia Martins e Manuel Sanches, e ao meu irmão, Ricardo Sanches, pelo incentivo, apoio e por me terem proporcionado a oportunidade de aprofundar os meus conhecimentos.

A toda minha família, em especial aos meus tios Guilherme Lopes e Fernanda Sanches por me terem acompanhado durante todas as fases do meu percurso académico.

Aos meus amigos e colegas pela amizade e pelos momentos de descontração e conversa, em especial a Djeniffa Semedo pela atenção, companheirismo, incentivo e suporte durante os momentos mais difíceis.

À instituição escolar Escola Superior de Tecnologia e Gestão pelos equipamentos, materiais científicos e instalações disponibilizadas.

A todos que de forma direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta dissertação

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*

# Resumo

---

Neste trabalho aplica-se o modelo desenvolvido por Hassani *et al.* (2013) para a otimização simultânea de forma e topologia de estruturas casca, fazendo uso do Método das Assíptotas Móveis (MMA).

Grande parte dos estudos e projetos de otimização estrutural realizados consideram a otimização de forma e topologia como dois processos separados. Ou seja, numa primeira etapa é definido o *layout* de material e de seguida a geometria ótima. Mas, esta dissertação tem por objetivo explorar a otimização simultânea de forma e topologia, onde o *layout* de material e a geometria são otimizados em simultâneo, aplicando conceitos abordados por Hassani *et al.* (2013).

Para os problemas abordados aqui, o objetivo foi a maximização da rigidez de uma estrutura casca com uma restrição sobre o volume total da estrutura. Para tal:

- Foram utilizadas superfícies *B-Splines* para modelar e controlar a geometria das estruturas casca;
- O software *Abaqus* foi utilizado para a implementação do método dos elementos finitos;
- Foi considerado o modelo de material *Solid Isotropic Material with Penalty* (SIMP) para a otimização de topologia;
- O MMA foi aplicado para os processos de otimização e sendo este um método baseado nos gradientes, foi realizada uma análise de sensibilidades para obter as derivadas da função objetivo e das restrições de projeto;
- De forma a evitar/aliviar o efeito das instabilidades associadas à otimização de topologia (dependência de malha, *checkerboard* e mínimos locais) foi aplicado o método da convolução.

Alguns exemplos (retirados da literatura) são aplicados ao longo da dissertação (topologia, forma e por fim forma & topologia) para verificar o desempenho do método aplicado.

Palavras Chave: Otimização Estrutural, Forma, Topologia, Estruturas Casca, Método das Assíptotas Móveis (MMA)

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*



# Abstract

---

In this work, the model developed by Hassani *et al.* (2013) was applied for a simultaneous optimization of shape and topology of shell structures using the Method of Moving Asymptotes (MMA)

Most of the studies and projects of structural optimization carried out consider the shape and topology optimization as two separate processes. The first step is to find the material layout and then the optimum geometry. This dissertation aims to explore the simultaneous optimization of shape and topology, where the material layout and geometry are optimized simultaneously, applying concepts addressed by Hassani *et al.* (2013).

For the problems addressed here, the aim was to maximize the stiffness of a shell structure with a constraint over the total volume. For such:

- To model and control the shape of shell structures B-Splines technique was employed;
- The Abaqus software was used for an implementation of the finite element method;
- Solid Isotropic Material with Penalty (SIMP) was considered as the material model for topology optimization;
- The MMA optimization method was employed for the optimization processes and since it is a gradient based method, sensitivity analysis was performed to obtain the derivatives of the objective function and the design constrains;
- To avoid/alleviate the effect of instabilities associated with topology optimization (mesh dependence, checkerboard and local minima), the convolution method was employed.

Some examples (taken from the literature) were applied throughout the dissertation (topology, shape and finally form & topology) to verify the performance of the applied method.

Key Words: Structural Optimization, Shape, Topology, Shell Structures, Method of Moving Asymptotes (MMA)

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*

# Lista de Figuras

---

Figura 1 – Tipos de otimização: a) Otimização paramétrica; b) otimização de forma; c) otimização de topologia (Bendsøe e Sigmund, 2003) .....	5
Figura 2 – Exemplo microestrutura rank com camadas ortogonais (Ansola et al., 2002).....	9
Figura 3 - Célula com vazios internos (Hassani e Hinton, 1998d) .....	10
Figura 4 – Gráfico de desempenho para diferentes máximos locais (Lanes e Greco, 2013) .....	13
Figura 5 – Padrão checkerboard num problema de otimização (Sigmund, 1994).....	13
Figura 6 – Exemplo de uma estrutura com dependência de malha. Resultados de uma malha com a) 2700, b) 4800 e c) 12700 elementos (Bendsøe e Sigmund, 2003) .....	14
Figura 7 – Problema elasticidade geral (Bendsøe e Sigmund, 2003) .....	15
Figura 8 Geometria inicial problema de otimização de topologia para o problema 1 (Hassani et al., 2013) .....	18
Figura 9 – Resultado otimização de topologia com a geometria plana (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	19
Figura 10 – Resultado otimização de topologia com a geometria aproximada 1 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	19
Figura 11 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 1 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza).....	20
Figura 12 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 2 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza).....	20
Figura 13 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 3 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza).....	21
Figura 14 – Resultados otimização de topologia (Problema 1): a) Exemplo 1; b) Exemplo 2; c) Exemplo 3; d) Exemplo 4; e) Exemplo 5 .....	22
Figura 15 - Geometria inicial problema de otimização de topologia para o problema 2 (Hassani et al., 2013) .....	23

Figura 16 – Resultado otimização de topologia com a geometria inicial plana (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	24
Figura 17 – Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aproximada 2 (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	24
Figura 18 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 5 (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza).....	25
Figura 19 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 6 (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza).....	25
Figura 20 – Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 7 (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza).....	26
Figura 21 – Resultados otimização de topologia (Problema 2): a) Exemplo 1; b) Exemplo 2; c) Exemplo 3; d) Exemplo 4; e) Exemplo 5 .....	27
Figura 22 – Exemplo de uma curva B-Spline (Piegl e Tiller, 1997) .....	29
Figura 23 –Superfície gerada pela técnica B-Spline (Piegl e Tiller, 1997) .....	30
Figura 24 – À esquerda geometria inicial plana, à direita resultado otimização de forma (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	32
Figura 25 – À esquerda geometria inicial aproximada 1, à direita resultado otimização de forma (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza).....	33
Figura 26 – À esquerda geometria inicial aleatória 1, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	33
Figura 27 – À esquerda geometria inicial aleatória 2, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	34
Figura 28 – À esquerda geometria inicial aleatória 3, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	34
Figura 29 – À esquerda geometria inicial plana, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	35
Figura 30 – À esquerda geometria inicial aproximada 2, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza).....	36

Figura 31 – À esquerda geometria inicial aleatória 1, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	36
Figura 32 – À esquerda geometria inicial aleatória 2, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	37
Figura 33 – À esquerda geometria inicial aleatória 3, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	37
Figura 34 - Algoritmo otimização sequencial (Ansola et al., 2002) .....	40
Figura 35 - Algoritmo otimização simultânea (Hassani et al., 2013) .....	41
Figura 36 - À esquerda geometria inicial plana, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	42
Figura 37 – À esquerda geometria inicial aproximada 1, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma com a geometria (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	43
Figura 38 – À esquerda geometria inicial aleatória 1, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	43
Figura 39 - À esquerda geometria inicial aleatória 2, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma com a geometria inicial aleatória 2 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	44
Figura 40 - À esquerda geometria inicial aleatória 3, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma com a geometria inicial aleatória 2 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	44
Figura 41 – Resultados otimização simultânea de forme e topologia (Problema 1): a) Exemplo 1; b) Exemplo 2; c) Exemplo 3; d) Exemplo 4; e) Exemplo 5 .....	45
Figura 42 - À esquerda geometria inicial plana, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	46

Figura 43 - À esquerda geometria inicial aproximada à geometria ótima de Hassani et al. (2013), e à direita resultado otimização de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	46
Figura 44 - À esquerda geometria inicial aleatória 1, e à direita o resultado da otimização de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	47
Figura 45 - À esquerda geometria inicial aleatória 2, e à direita o resultado da otimização de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	47
Figura 46 – À esquerda geometria inicial aleatória 3, e à direita o resultado da otimização de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza) .....	48
Figura 47 – Resultados otimização simultânea de forme e topologia (Problema 2): a) Exemplo 1; b) Exemplo 2; c) Exemplo 3; d) Exemplo 4; e) Exemplo 5 .....	49
Figura 48 – Resultados ótimos de (Hassani, et al. 2013) para a) Problema 1 e b) Problema 2.....	52

# Lista de tabelas

---

Tabela 1 – Variáveis utilizados no problema 1.....	18
Tabela 2 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de topologia (Problema 1) .....	21
Tabela 3 – Variáveis aleatórios utilizados no problema 2 .....	23
Tabela 4 - Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de topologia (Problema 2) .....	26
Tabela 5 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de forma (Problema 1).....	35
Tabela 6 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de forma (Problema 2).....	38
Tabela 7 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de forma e topologia (Problema 1).....	45
Tabela 8 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de forma e topologia (Problema 2).....	48

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*



# Lista de Acrónimos e Siglas

---

<i>B-Spline</i>	Bézier Spline
CAD	Computer Aided Design
CAE	Computer Aided Engineering
CAM	Computer Aided Manufacturing
MMA	Method of Moving Asymptotes
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalty

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*

# Índice

---

1.	Introdução .....	1
1.1.	Motivação e Objetivos .....	1
1.2.	Estrutura da dissertação .....	3
2.	Métodos de Otimização .....	5
3.	Otimização de topologia .....	9
3.1.	SIMP .....	10
3.2.	Instabilidades .....	12
3.2.1.	Mínimos locais.....	12
3.2.2.	<i>Checkerboard</i> .....	13
3.2.3.	Dependência de malha .....	13
3.3.	Formulação do problema de otimização de topologia .....	15
3.4.	Casos de estudo.....	17
3.4.1.	Problema 1 .....	17
3.4.2.	Resultados da otimização Problema 1 .....	18
3.4.3.	Problema 2 .....	22
3.4.4.	Resultados da otimização de Topologia para o Problema 2 .....	24
4.	Otimização de Forma.....	29
4.1.	Modelação da geometria da estrutura .....	29
4.2.	Formulação do problema de otimização de forma.....	30
4.3.	Casos de estudo.....	31
4.3.1.	Resultados Otimização de forma para o Problema 1 .....	32
4.3.2.	Resultados Otimização de forma para o Problema 2 .....	35
5.	Otimização Simultânea .....	39
5.1.	Formulação do problema de otimização simultânea.....	41

5.2.	Casos de estudo.....	42
5.2.1.	Resultados Otimização Simultânea de forma Problema 1 .....	42
5.1.	Resultados Otimização Simultânea de forma Problema 2.....	46
6.	Conclusões.....	51
7.	Referências.....	53
	Anexo I – Resultados da variação dos pontos de controlo durante a otimização de forma.....	57
	Anexo II - Resultados da variação dos pontos de controlo durante a otimização Simultânea de forma e topologia .....	59

# 1. Introdução

---

## 1.1. Motivação e Objetivos

---

A otimização estrutural é uma ferramenta muito importante no desenvolvimento de projetos de engenharia, visto que, com a sua correta aplicação é possível projetar e prever o comportamento das estruturas, permitindo deste modo maximizar o desempenho de uma estrutura sujeita a determinadas condições e restrições (volume, peso, dimensão, etc.). Por exemplo, maximizar a rigidez de uma viga sujeita a uma carga constante ao longo do seu comprimento, aumentar a aerodinâmica de perfis para reduzir a resistência do ar, minimizar de peso de componentes, etc.

Quando se aplica a otimização é necessário ter em conta dois aspetos:

1. Identificar o objetivo e as variáveis de projeto. O objetivo varia de problema para problema podendo ser o tempo, custo, material, peso, energia cinética, condutividade, rigidez, etc., ou qualquer combinação de quantidades que possam ser incorporadas numa única ou várias funções objetivo. As variáveis de projeto são os parâmetros que caracterizam as funções objetivo, sendo assim a otimização baseia-se na procura da combinação de valores das variáveis que otimizam a função ou as funções objetivo.
2. Com um modelo matemático de otimização definido é necessário escolher um algoritmo de otimização para o problema. Existem vários tipos de algoritmos baseados em diferentes conceitos matemáticos e que apresentam diferentes resultados (velocidade de convergência, ponto ou zona de convergência, etc.), não existindo um algoritmo apropriado para uma aplicação específica.

Em tempos passados, projetos estruturais eram baseados em cálculos estruturais simples, de fácil implementação e dependentes da experiência e habilidade dos engenheiros. Isto devido a vários fatores, desde a necessidade de rapidez na apresentação de resultados (em muitos casos prejudicando a qualidade final), falta de conhecimento de técnicas mais sofisticadas, falta de recursos para investimentos em equipamentos ou materiais de alto desempenho, desinteresse na procura de novas técnicas e tecnologias de fabrico causados pela pouca concorrência.

Hoje em dia, devido à limitação de recursos, aumento de competitividade, produção orientada para o cliente e principalmente com evolução da tecnologia nas últimas décadas o desenvolvimento de projetos estruturais é abordado de forma diferente. A existência de softwares CAD (*Computer Aided Design*), CAE (*Computer Aided Engineering*) e CAM (*Computer Aided Manufacturing*) facilitam e agilizam o processo de simulação e prototipagem, tornando o processo de desenvolvimento mais rápido e barato enquanto que aumenta a qualidade do produto final e diminui o risco de associado.

Este trabalho aborda a aplicação do Método das Assíntotas Móveis (MMA – sigla inglesa de *Method of Moving Asymptotes*) para a otimização simultânea da topologia e da forma de estruturas casca tridimensionais.

Estruturas casca são estruturas de superfície curva e com uma espessura relativamente pequena quando comparada com as outras dimensões. São estruturas caracterizadas pela elevada rigidez, leveza, capacidade de manipulação geométrica e elevada performance estrutural, mas por outro lado apresentam dificuldades na construção (em muitos casos têm geometrias muito complexas) e com elevado custo. Devido às suas características as estruturas casca têm uma ampla gama de aplicações em várias áreas da engenharia, desde a engenharia civil, engenharia de energia e química, engenharia estrutural, engenharia naval, engenharia aeronáutica, etc. Exemplos de aplicações são: túneis, fuselagem de aviões e submarinos, silos metálicos e reservatórios, barragens de arco, coberturas, etc. A geometria destas estruturas influencia diretamente na eficácia global da estrutura, tornando-se assim uma mais valia a otimização de forma e topologia para maximização da performance estrutural.

Esta dissertação tem como principal objetivo aplicar um modelo de otimização simultânea, de forma e topologia, de estruturas casca. A metodologia comumente utilizada consiste na procura da topologia ótima e de seguida a geometria é otimizada, no modelo proposto os parâmetros de topologia e forma são otimizados em simultâneo.

Nos exemplos apresentados são explorados dois problemas retirados da literatura. Com o intuito de comparação de resultados ambos os problemas são sujeitos à otimização integrada e a otimização simultânea.

## 1.2. Estrutura da dissertação

---

Os objetivos descritos anteriormente são desenvolvidos ao longo da dissertação de acordo com a seguinte estrutura.

O presente capítulo contém uma introdução ao tema que será desenvolvido ao longo da tese.

No segundo capítulo são abordados conceitos teóricos e estudos já efetuados sobre os métodos de otimização utilizados.

No terceiro capítulo introduz-se a otimização de topologia e é desenvolvido o modelo de otimização de topologia. Abordam-se os problemas de instabilidade recorrentes da otimização topológica, nomeadamente *checkerboard*, mínimos locais e dependência de malha. É aplicado o modelo de otimização de topologia aos casos de estudo, são apresentados e discutidos os resultados. Apresentam-se casos de estudo que serão abordados durante esta dissertação e é aplicado o modelo de otimização.

O quarto capítulo aborda a otimização de forma e é desenvolvido o modelo de otimização de forma. Faz-se uma introdução à técnica *B-Splines* utilizada para modelar e controlar as geometrias dos casos de estudo. É aplicado o modelo de otimização de forma aos casos de estudo.

No quinto capítulo apresenta-se a fundamentação teórica da otimização simultânea de forma e topologia, desenvolve-se o modelo de otimização e aplica-se o modelo aos casos de estudo. Os resultados são comparados com os resultados obtidos pelos métodos de otimização de forma e otimização de topologia.

No sexto capítulo são apresentadas as conclusões e são feitas considerações sobre possíveis trabalhos futuros.

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*



## 2. Métodos de Otimização

---

A otimização estrutural tem um grande impacto no desempenho de estruturas. Aliado à evolução das tecnologias computacionais nas últimas décadas a otimização estrutural tornou-se objeto de estudo de muitos investigadores, resultando em vários métodos computacionais e modelos de otimização presentemente em utilização para este propósito. A otimização estrutural pode ser dividida em três categorias: Otimização paramétrica ou dimensional (Figura 1 a), otimização de forma (Figura 1 b), e otimização de topologia (Figura 1 c).

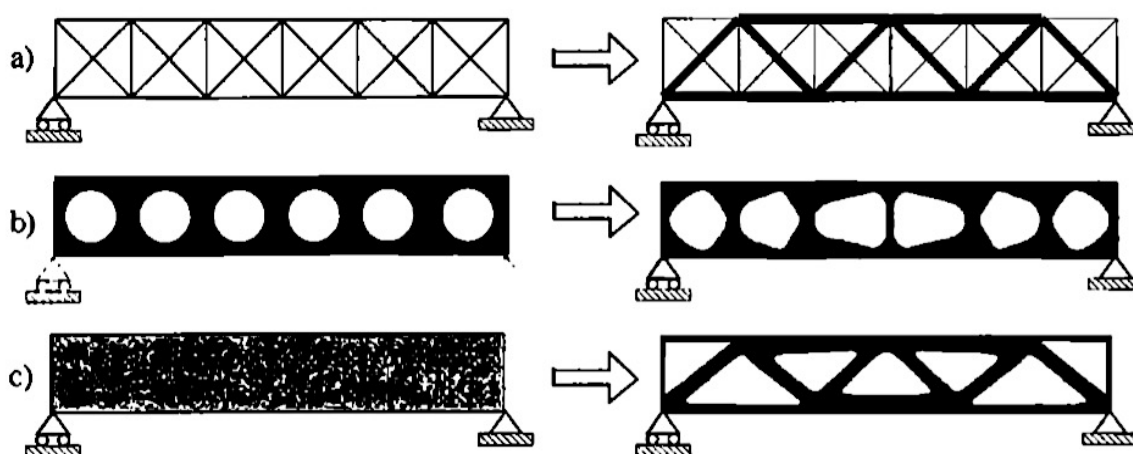


Figura 1 – Tipos de otimização: a) Otimização paramétrica; b) otimização de forma; c) otimização de topologia (Bendsøe e Sigmund, 2003)

Problemas de otimização dimensional, como se ilustra na Figura 1a, como o nome já indica aborda a otimização da dimensão de uma estrutura para uma dada topologia. As variáveis de projeto geralmente são parâmetros geométricos que constituem a estrutura, por exemplo: o comprimento, a largura, a espessura, a área de uma secção transversal, etc. A principal característica do problema de dimensionamento é que o domínio do modelo de projeto e as variáveis de estado são conhecidas *a priori* e são alteradas ao longo do processo de otimização (Bendsøe e Sigmund, 2003).

Em problemas de otimização de forma, como no exemplo da Figura 1b, o objetivo consiste em determinar a geometria ótima da estrutura, levando em consideração as cargas aplicadas e as condições de fronteira. A otimização de forma tem uma longa história e tem

sido estudada intensivamente, resultando numa vasta literatura neste campo. Ding (1986), Haftka e Grandhi (1986), Hsu (1994) são exemplos de estudos realizados onde são abordados todos os aspetos da otimização de forma, desde técnicas de otimização de forma de estruturas de duas e três dimensões, técnicas de geração de malha, análise de sensibilidades e algoritmos de otimização até à escolha das variáveis de projeto. O método “tradicional” de otimização de forma parte de uma geometria inicial (proposto) e a otimização de forma é dada variando os limites de geometria. Esta metodologia fornece do ponto de vista teórico e prático uma boa estrutura para o cálculo de variações da geometria, mas apresenta duas desvantagens a nível de design estrutural: requer uma parametrização suave do limite e não é possível adicionar ou remover limites à geometria (Allaire, 2002). Tendo isso em mente, e o facto de que estruturas porosas apresentam melhor performance do que estruturas maciças (comparando estruturas com a mesma massa), surgiu a necessidade de implementação de métodos de otimização capazes de modificar a topologia de estruturas.

Problemas de otimização de topologia, ver Figura 1c, têm por objetivo definir a melhor distribuição de material dentro do domínio de projeto, e distinguem-se dos demais métodos de otimização por não considerarem a topologia inicial fixa. Na literatura existem vários métodos de resolver os problemas de otimização de topologia. O método da homogeneização, introduzido por Bendsøe e Kikuchi (1988), é um dos principais métodos utilizados para resolução de problemas de otimização de topologia. Foi desenvolvido para remover as restrições de topologia e suavidade característicos do método “tradicional” de otimização de forma (Allaire, 2002). Este método sugere uma abordagem à microestrutura do material, considerando um material com “infinitos” furos de escala infinitamente pequena onde as suas propriedades mecânicas são caracterizadas pela teoria da homogeneização (Guedes e Kikuchi, 1990; Sanchez-Palencia, 1980). Neste caso um problema de otimização de topologia é definido pela busca da porosidade ideal do material usando critérios de otimização. Embora seja um método bastante utilizado apresenta desvantagem a nível de determinação e avaliação de microestruturas ótimas, resultando muitas vezes em estruturas difíceis ou impossíveis de construir. Para uma consulta mais detalhada sobre o método de homogeneização aconselha-se a consulta dos trabalhos realizados por Hassani e Hinton, 1998a, 1998b, 1998c, 1998d. Uma alternativa para o método da homogeneização é o método de parametrização de material designado por SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), introduzido por Bendsøe (1989). O método SIMP aborda a distribuição ideal

da densidade no domínio da estrutura, considerando que as propriedades de cada elemento do domínio são constantes e as variáveis de projeto são densidades relativas de cada elemento (Hassani *et al.*, 2013). Para uma consulta mais detalhada sobre a otimização de topologia e o método de SIMP aconselha-se a consulta do trabalho de Bendsøe e Sigmund (2003).

Esta dissertação apresenta uma abordagem à otimização simultânea, de forma e de topologia, de estruturas casca, sendo um procedimento diferente do normalmente utilizado. Hinton *et al.* (1992, 1993), Bletzinger e Ramm (1993), Maute e Ramm, (1997) e Krog e Olhoff (1999), realizaram os primeiros estudos otimização de estruturas casca abordando a otimização de geometria e espessura.

No procedimento normalmente adotado para a resolução de problemas otimização estrutural procede-se em duas fases:

- Numa primeira fase aplica-se a otimização de topologia para maximizar a rigidez da estrutura;
- O resultado obtido na primeira fase serve de base para a aplicação da otimização de forma para definir a geometria ótima da estrutura.

Bremicker *et al.* (1991) e Schwarz *et al.* (2001) são exemplos de trabalhos onde foi utilizado este procedimento de otimização. Embora este seja o procedimento mais utilizado nos últimos anos, não é o que gera melhores resultados, uma vez que a otimização de topologia é aplicada sobre uma geometria de plano médio fixo, não havendo garantias de que o resultado final é o melhor, visto que outras configurações geométricas podem apresentar melhor performance e melhores valores de função objetivo.

Ansola *et al.* (2002) e Hassani *et al.* (2013) introduziram a otimização simultânea de forma e topologia. Em ambos os casos o layout (distribuição) ótimo de material é definido enquanto que a geometria da casca varia durante o processo de otimização. No método proposto por Ansola *et al.* (2002) a geometria e o layout de material são otimizados sequencialmente. O algoritmo é uma combinação da otimização de forma e da otimização de topologia, durante o processo iterativo essas etapas são alternadas até que se atinja a convergência do problema. Já no método proposto por Hassani *et al.* (2013) as etapas de otimização de forma e otimização de topologia são consideradas como um todo durante o processo iterativo, geometria e topologia são otimizados em simultâneo até que se atinja a convergência do problema.

Como já foi referido anteriormente esta dissertação aborda a otimização simultânea de topologia e forma de estruturas casca, onde as variáveis topológicas e geometrias são otimizadas em simultâneo. Para resolver este tipo de problemas estruturais, recorre-se à programação matemática. Citam-se alguns exemplos de métodos utilizados para resolver problemas de otimização, o métodos dos algoritmos genéticos (Madeira *et al.*, 2005), o método da procura direta (*direct search*) (Custódio e Madeira, 2015), método dos gradientes (Ikeya *et al.*, 2016), etc. Nesta dissertação será utilizado o algoritmo MMA (Svanberg, 1987, 2002). O MMA é um algoritmo muito versátil baseado no método dos gradientes onde as derivadas da função objetivo e dos constrangimentos ao problema são calculadas em cada iteração. Este algoritmo já foi utilizado, com sucesso, em vários trabalhos para resolver problemas de otimização de forma e de topologia (Bendsøe e Sigmund, 2003; Hassani *et al.*, 2013; Ruben *et al.*, 2006).

Para a avaliação e análise dos elementos finitos foi utilizado o software *Abaqus*. Um software comercial com grande versatilidade na escolha dos elementos finitos e possui funções gráficas de pré e pós processamento possibilitando uma modelação eficaz e rápida visualização de resultados, sendo já utilizado com sucesso em inúmeros trabalhos estruturais.

### 3. Otimização de topologia

---

A otimização de topologia tem por objetivo definir a melhor distribuição de material dentro de um domínio de projeto especificado, tendo em conta as cargas aplicadas, as condições de fronteira e o volume da estrutura. Em outras palavras, trata-se de um problema de rearranjo de material dentro do domínio de projeto, de modo a minimizar a função objetivo respeitando as restrições do projeto, podendo ser considerado um problema de identificar os pontos no domínio onde existe ou não existe material. Neste caso pretende-se calcular:

$$x_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{se existir material no ponto } x \\ 0 & \text{se não existir material no ponto } x \end{cases}$$

Com a introdução de material compósitos (Hassani e Hinton, 1998a, 1998b, 1998c, 1998d) foi possível contornar as dificuldades aos problemas de otimização discreta, tornando-o num problema contínuo. Duas categorias de material compósito têm sido utilizadas desde então Hassani *et al.* (2013):

- **Modelos de compósitos laminados tipo *rank***, neste modelo a microestrutura é composta por camadas de material laminado, onde essas camadas de material são alternadas entre camadas material e vazio (ver Figura 2)

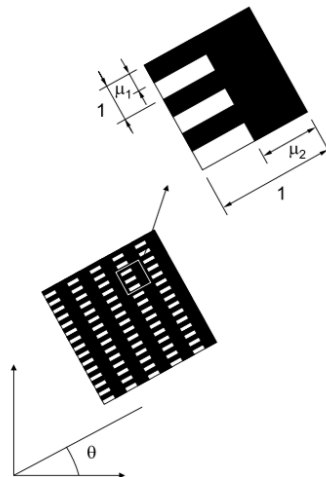


Figura 2 – Exemplo microestrutura rank com camadas ortogonais (Ansola *et al.*, 2002)

- **Modelos de micro células com vazios internos**, micro células com vazios internos são constituídos de células com furos retangulares, conforme Figura 3.

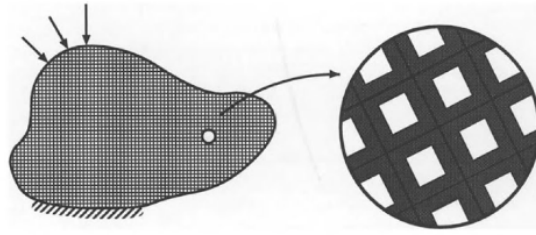


Figura 3 - Célula com vazios internos (Hassani e Hinton, 1998d)

Nestas duas categorias a teoria da homogeneização é utilizada para determinar as propriedades mecânicas macroscópicas do material. No caso de materiais do tipo *rank* a equação da homogeneização pode ser determinada analiticamente, mas já no caso de modelos com micro células com vazios as propriedades são determinadas por métodos numéricos (elementos finitos, etc.). O uso da teoria da homogeneização insere novas variáveis de projeto ao problema de otimização topológica, aumentando a complexidade numérica do problema e o custo computacional. Uma alternativa para o problema da otimização discreta é através do uso de modelos de material artificial, onde a variável de projeto é a densidade relativa do material.

### 3.1. SIMP

---

O modelo SIMP, *Solid Isotropic Material with Penalty*, é um modelo artificial desenvolvido por Bendsøe (1989) tem sido utilizado como alternativa aos materiais compósitos para otimização de topologia. Neste modelo as propriedades mecânicas do material são definidas por uma função paramétrica associada à densidade do material. A expressão para o cálculo do volume ocupado pela estrutura num domínio  $\Omega$  é dada por:

$$V = \int_{\Omega} \rho(x)d\Omega ; \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

onde:

$\Omega$  - Representa o domínio de projeto;

$\rho$  - Representa a densidade relativa de um dado material, sendo 0 quando representa

ausência de material e 1 quando se trata de material sem porosidade.

A relação entre o tensor de elasticidade e a densidade do material é dado por:

$$E_{ijkl(x)} = \rho(x)^p E_{ijkl}^0; \quad p > 1 \quad (2)$$

onde:

$E_{ijkl(x)}$  – Representa o tensor elasticidade;

$E_{ijkl(x)}^0$  – Representa o tensor elasticidade do material base;

$p$  – Representa o fator de penalização.

Para um dado material variando o valor da densidade entre vazio ( $\rho = 0$ ) e sólido ( $\rho = 1$ ) é possível variar as propriedades do material entre:

$$E_{ijkl}(\rho = 0) = 0, \quad E_{ijkl}(\rho = 1) = E_{ijkl}^0$$

Hassani *et al.* (2013) utilizaram a relação existente entre a densidade ( $\rho$ ) e a rigidez do material ( $E$ ) com a densidade ( $\rho_0$ ) e rigidez do material ( $E_0$ ) base para a abordagem ao SIMP, dada pelas seguintes expressões para materiais isotrópicos,

$$\rho = \mu \rho_0 \quad (3)$$

$$E = \mu^p E_0; \quad (4)$$

O fator de penalização,  $p > 1$ , é utilizado para evitar o aparecimento de densidades intermédias na solução ótima do projeto. Segundo (Bendsøe e Sigmund, 2003), para problemas em que se tem constrangimento sobre o volume ativo e se pretende obter resultados discretos (binários de 0 e 1) valores de  $p \geq 3$  são os que usualmente apresentam melhores resultados. Isto porque, para  $1 \leq p < 3$  normalmente geram resultados com várias regiões de densidade intermédia. Quanto maior for o valor de  $p$  mais resultados de sólido e vazio são obtidos.

Na prática, após a discretização do domínio de projeto numa malha de elementos finitos também é considerado que a densidade e a rigidez global são discretizadas ao longo

desses elementos. Hassani *et al.* (2013) utiliza as seguintes expressões para expressar a relação entre a densidade e a rigidez de cada elemento "i":

$$\rho_i = \mu_i \rho_0 \quad (5)$$

$$E_i = \mu_i E_0 \quad (6)$$

## 3.2. Instabilidades

---

Sigmund (1994) e Bendsøe e Sigmund (2003), dividem os problemas numéricos que normalmente aparecem nos problemas de otimização de topologia em três classes:

- Mínimos locais;
- *Checkerboard* (Tabuleiro Xadrez);
- *Mesh dependency* (Dependência de malha).

### 3.2.1. Mínimos locais

---

Devido a sensibilidade destes tipos de problemas, pequenas variações nos parâmetros iniciais (geometria, limites, número de elementos, etc.) podem resultar em diferentes soluções. Sendo a otimização de topologia um problema de natureza não convexa, grande parte dos problemas de mínimos locais são resultantes dos algoritmos de otimização utilizados. A maior parte dos algoritmos existentes foram desenvolvidos para resolverem problemas de natureza convexa, quando estes são aplicados a um problema não convexo, com vários mínimos locais, acabam por convergir para o mínimo local/global mais próximo (o que nem sempre é a solução ótima do problema). A Figura 4 mostra dois gráficos em que se calculou o desempenho de duas soluções obtidas para se definir a configuração topológica ótima.



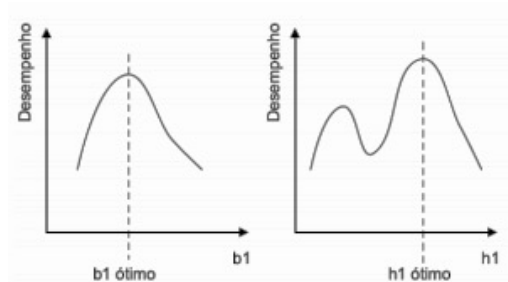


Figura 4 – Gráfico de desempenho para diferentes máximos locais (Lanes e Greco, 2013)

### 3.2.2. Checkerboard

O *checkerboard* é um problema muito comum na otimização de topologia, e é caracterizado por regiões onde os elementos seguem um padrão alternado entre sólido e vazio semelhante a um tabuleiro de xadrez (Sigmund, 1994). Segundo Bendsøe e Sigmund (2003), e Díaz e Sigmund (1995) é um problema cuja origem está relacionada com as características da aproximação de elementos finitos utilizada, mais precisamente resultante de uma deficiente modelação numérica da rigidez do *checkerboard*. A Figura 5 ilustra um exemplo de uma estrutura com regiões de *checkerboard*.

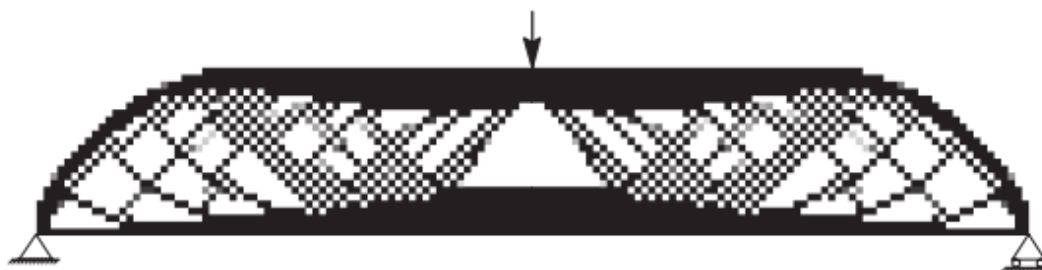


Figura 5 – Padrão checkerboard num problema de otimização (Sigmund, 1994)

### 3.2.3. Dependência de malha

A dependência da malha consiste na obtenção de diferentes resultados da solução otimizada para diferentes tamanhos de malha e discretização do problema. Idealmente, espera-se que com uma malha de elementos finitos mais refinada a topologia ótima seja mais nítida e descreva com maior fidelidade os contornos do problema, mas na prática não é o que sucede. Para alguns problemas, malhas mais refinadas geram estruturas mais complexas

e resultam em topologias ótimas mais detalhadas e qualitativamente diferentes de um modelo com uma malha mais grosseira, como se pode verificar na Figura 6.

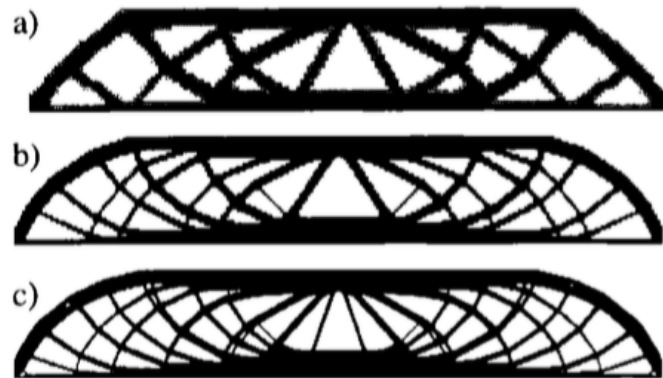


Figura 6 – Exemplo de uma estrutura com dependência de malha. Resultados de uma malha com a) 2700, b) 4800 e c) 12700 elementos (Bendsøe e Sigmund, 2003)

Existem na literatura diferentes formas de abordar as instabilidades numéricas, aconselha-se os trabalhos realizados por Díaz e Sigmund (1995), Sigmund (1994) Sigmund e Petersson (1998) e Bendsøe e Sigmund (2003) sobre a problemática da instabilidade numérica nos problemas de otimização de topologia.

O método da convolução, é um dos métodos utilizados para evitar o *checkerboard* e a dependência da malha. Neste método a densidade de cada elemento é diretamente influenciada pela sua vizinhança, podendo ser utilizados diferentes filtros de convolução. Filtros estes que são aplicados à derivada da função objetivo do problema em questão, sendo que o filtro utilizado nesta dissertação é o proposto por Sigmund (2001),

$$\frac{\partial \widehat{c}}{\partial x_e} = \frac{1}{x_e \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i} \sum_{i=1}^N \widehat{H}_i x_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad (7)$$

Em que o operador de convulsão,  $\widehat{H}_i$ , é dado por:

$$\widehat{H}_i = r_{min} - dist(e, i), \quad \{i \in N \mid dist(e, i) \leq r_{min}\}, \quad e = 1, \dots, N \quad (8)$$

onde, o operador  $dist(e, i)$  é a distância entre o centro do elemento  $e$  o centro do elemento  $i$ ,  $\widehat{H}_i$  é o operador de convolução e é igual a zero fora da área de filtro, e  $r_{min}$  é a distância que define a área onde o filtro vai ser aplicado.

### 3.3. Formulação do problema de otimização de topologia

Considera-se um problema geral de elasticidade linear, representado na Figura 7, em que uma estrutura de domínio  $\Omega$  é sujeita a cargas  $\mathbf{f}$ , cargas de tração  $\mathbf{t}$  na fronteira  $\Gamma_t$  e deslocamento imposto na fronteira  $\Gamma_u$ .

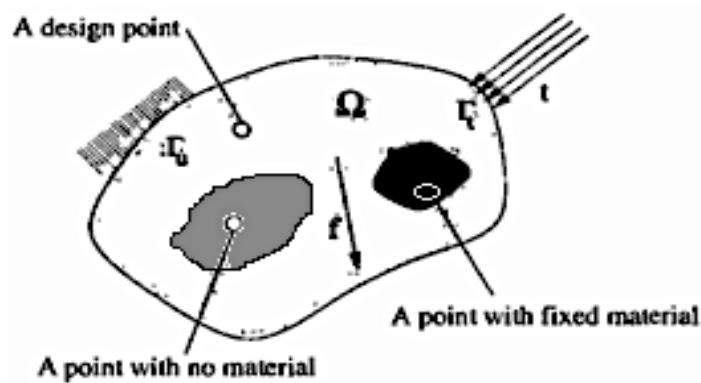


Figura 7 – Problema elasticidade geral (Bendsøe e Sigmund, 2003)

Relembrando que nesta dissertação o objetivo será a minimização do trabalho das forças aplicadas (maximização da rigidez) de uma estrutura casca sujeita a uma determinada força e condições de fronteira, tendo como constrangimento o volume de material. A função objetivo do problema é dado por:

$$c = \left( \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \right) \quad (9)$$

E o problema de otimização pode ser definido como:

$$\min \left( \int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \right)$$

$$\text{Sujeito a: } \mathbf{K}(E_e)\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (10)$$

$$\text{e } \int_{\Omega} \rho_i d\Omega \leq V_{max} \quad i = 1 \dots N$$

Onde:  $\mathbf{K}$  é a matriz rigidez da estrutura,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{f}$  representam os vetores de deslocamento e de forças respectivamente,  $V_{max}$  é o volume total da estrutura.

A matriz rigidez  $\mathbf{K}$  depende da rigidez do elemento  $e$ , e é expresso matematicamente por:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^N \mathbf{K}_e(E_e) \quad e = 1, \dots, N \quad (11)$$

Onde:  $\mathbf{K}_e$  corresponde a matriz de rigidez do elemento  $e$ .

Para os processos de otimização foi utilizado o algoritmo MMA devido à sua versatilidade e generalidade. Sendo este um método baseado em gradientes, em cada iteração é necessário calcular as derivadas da função objetivo e das restrições. Considerando que a estrutura é fixa em  $\Gamma_t$  e lembrando que a energia de deformação é dada por  $\frac{1}{2}c$ , observa-se que a minimização da conformidade estrutural é equivalente à minimização da energia de deformação. Deste modo a equação (9) pode ser reescrito da seguinte forma (Hassani *et. al*, 2013),

$$c = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (12)$$

Partindo da equação acima apresentada da energia de deformação e aproveitando a simetria da matriz rigidez  $\mathbf{K}$  a seguinte expressão da sensibilidade da energia de deformação é obtida:

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (13)$$

Por outro lado, considerando a equação de equilíbrio na forma matricial (equação (14)) e assumindo a independência do design e das cargas aplicadas, a sua derivada é dada pela equação (15):

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (14)$$

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u} \quad (15)$$

Substituindo a equação (15) na equação (13) tem-se a seguinte expressão para o cálculo das sensibilidades:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{u}, \quad i = 1, \dots, m \quad (16)$$

### 3.4. Casos de estudo

---

Nesta secção são apresentados alguns exemplos com a finalidade de testar o método de otimização de topologia, os exemplos foram retirados do artigo desenvolvido por Ansola *et al.* (2002). Em todos os exemplos de otimização foi utilizado o método de MMA e foram utilizados os seguintes dados de projeto:

- Módulo de elasticidade e coeficiente de *Poisson* do material base de  $2 \times 10^9 Pa$  e 0.3 respetivamente;
- Restrição sobre o volume total de 50%;
- Fator de penalidade de  $p = 5$ , no método SIMP;
- Raio de atuação do filtro de convolução ( $r_{min}$ ) 202,5mm

Os exemplos retirados da literatura representam dois problemas de otimização da mesma estrutura casca, mas sujeita a cargas e condições de fronteira diferentes. Em cada um dos problemas são exploradas 5 geometrias iniciais distintas:

1. Geometria inicial plana;
2. Geometria inicial aproximada à geometria ótima de Hassani *et al.* (2013). Foi utilizada a nomenclatura de geometria aproximada 1 e geometria aproximada 2 para diferenciar a geometria inicial do problema 1 e problema 2 respetivamente;
3. Nos outros 3 exemplos foram utilizadas geometrias iniciais aleatórias.

#### 3.4.1. Problema 1

---

Considera-se uma estrutura casca com:

- Dimensões  $6_m \times 6_m$  e  $1_{cm}$  de espessura;
- Quatro apoios simples nas extremidades (fixo nas direções  $y$  e  $z$ );
- Sujeito a uma carga concentrada de 100N ao meio da estrutura, como se verifica na Figura 8.

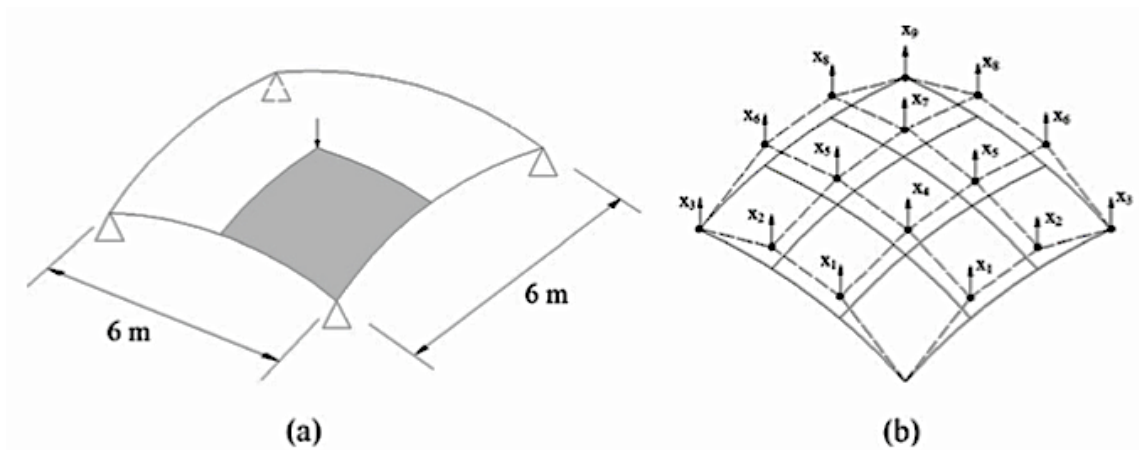


Figura 8 Geometria inicial problema de otimização de topologia para o problema 1 (Hassani et al., 2013)

Devido à simetria do problema apenas um quarto da estrutura (dimensões  $3_m \times 3_m \times 1_{cm}$ ) foi considerada para análise, sendo esta discretizada numa malha de  $20 \times 20$  elementos finitos casca isoparamétricos, com 4 nós cada elemento.

Para o primeiro problema foram utilizadas as seguintes variáveis para as geometrias iniciais:

Tabela 1 – Variáveis utilizados no problema 1

Ponto de controlo	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
Plana	0	0	0	0	0	0	0	0	0
lAproximada 1	50	100	150	100	150	200	200	250	300
Aleatório 1	190	206	42	146	462	269	480	425	156
Aleatório 2	277	49	95	370	359	73	139	2	474
Aleatório 3	65	459	30	206	108	94	496	384	188

### 3.4.2. Resultados da otimização Problema 1

Nas Figuras 9 a 13, é possível observar as topologias ótimas obtidas tendo em conta as diferentes geometrias. Relembre-se que neste exemplo apenas se otimizou a topologia, considerando as geometrias fixas. É de salientar que o método SIMP foi eficaz em evitar propriedades de material intermédias.

### Exemplo 1 – Geometria Inicial Plana

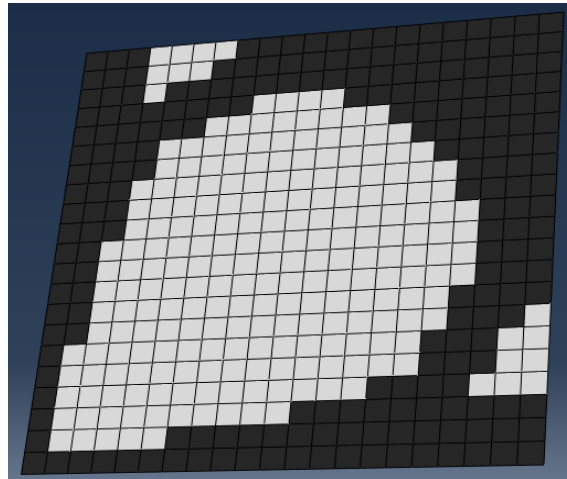


Figura 9 – Resultado otimização de topologia com a geometria plana (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 2 – Geometria Inicial aproximada 1

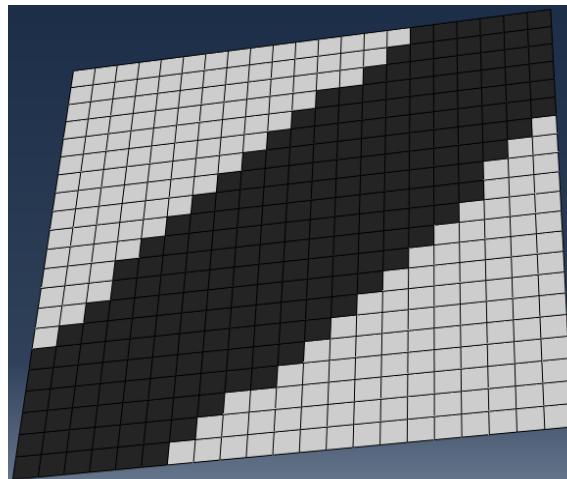


Figura 10 – Resultado otimização de topologia com a geometria aproximada 1 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 3 – Geometria inicial aleatória 1

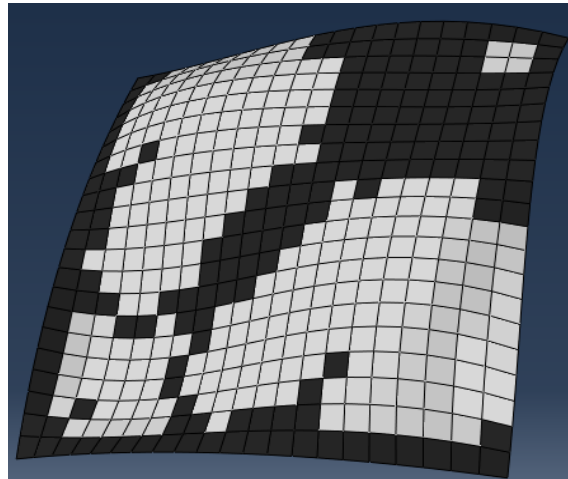


Figura 11 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 1 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 4 – Geometria inicial aleatória 2

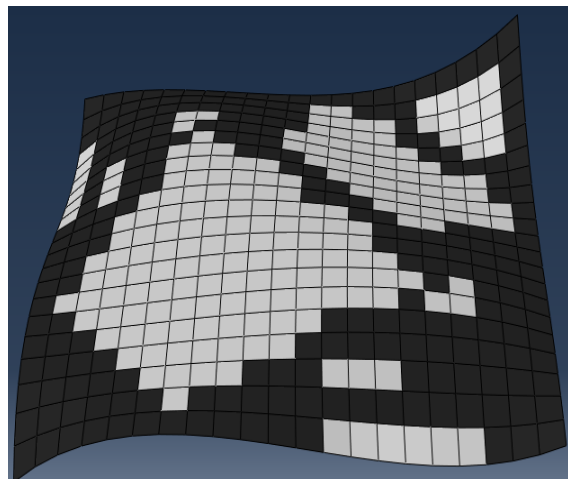


Figura 12 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 2 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)



### Exemplo 5 – Geometria inicial aleatória 3

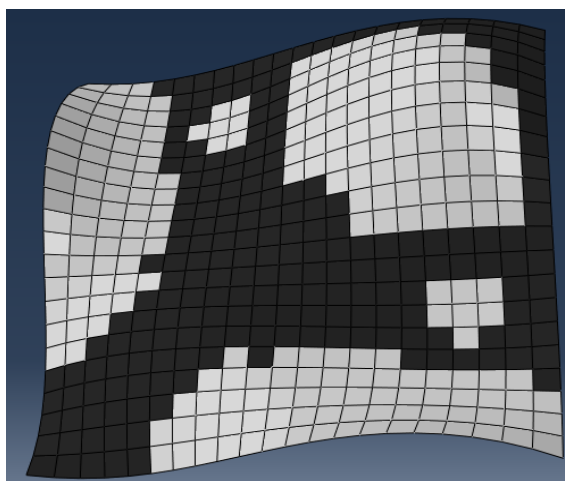


Figura 13 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 3 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

Com a exceção do primeiro exemplo que convergiu ao fim de 200 iterações os restantes exemplos convergiram ao fim de 300 iterações. Verifica-se a existência de continuidade de material em todos os exemplos e a existência de diferentes topologias para diferentes parâmetros geométricos iniciais.

A Tabela 2 contém os valores da função objetivo inicial e final de cada um dos exemplos apresentados.

Tabela 2 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de topologia (Problema 1)

Geometria Inicial	Função Objetivo Inicial	Função Objetivo Final
Plana	44794	4632
Aproximada 1	105	3
Aleatório 1	539	64
Aleatório 2	3218	146
Aleatório 3	1673	76

Pela Tabela 2 pode-se verificar que o exemplo 2 (Figura 10) é o que melhor satisfaz o objetivo maximizar a rigidez, apresentando o menor valor de função objetivo final. Com estes resultados verifica-se que os resultados da otimização de topologia estão fortemente relacionados com a geometria da estrutura.

Para todos os resultados de topologia apresentados apenas foi considerado um quarto da geometria pelo que não é muito intuitivo ver a topologia geral da estrutura casca. De

modo a simplificar essa visualização, com recurso ao Software Excel da Microsoft criou-se um conjunto de imagens apresentadas na Figura 14.

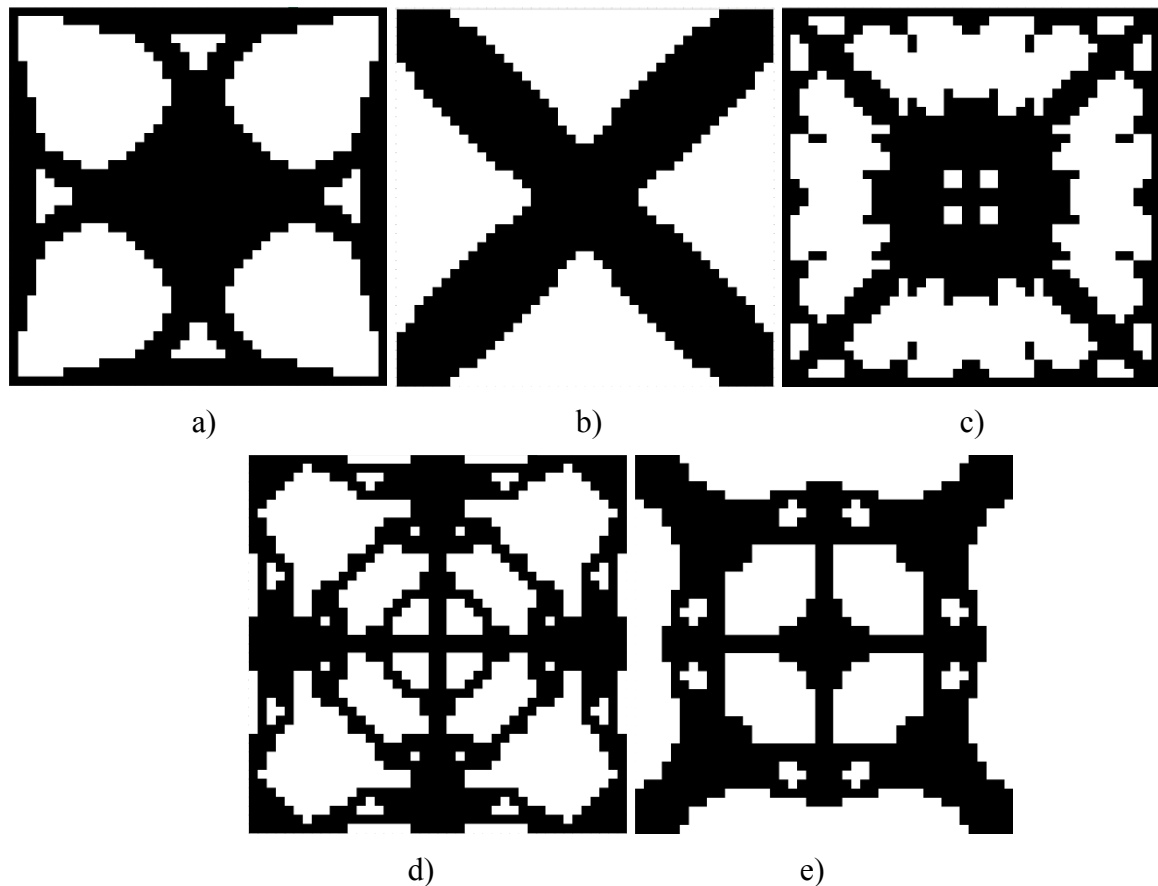


Figura 14 – Resultados otimização de topologia (Problema 1): a) Exemplo 1; b) Exemplo 2; c) Exemplo 3; d) Exemplo 4; e) Exemplo 5

### 3.4.3. Problema 2

---

Para o segundo problema a geometria da estrutura casca é idêntica ao primeiro, sendo que a diferença de um para o outro reside nos apoios e nas cargas aplicadas.

É considerado estrutura casca com:

- Dimensões  $6_m \times 6_m$  e  $1_{cm}$  de espessura;
- Quatro apoios simples situados ao meio de cada um dos lados da estrutura (fixo nas direções  $y$  e  $z$ );
- Sujeito a uma carga concentrada de 100N ao meio da estrutura e quatro cargas concentradas nas extremidades de 100N, conforme se pode verificar na Figura 15.

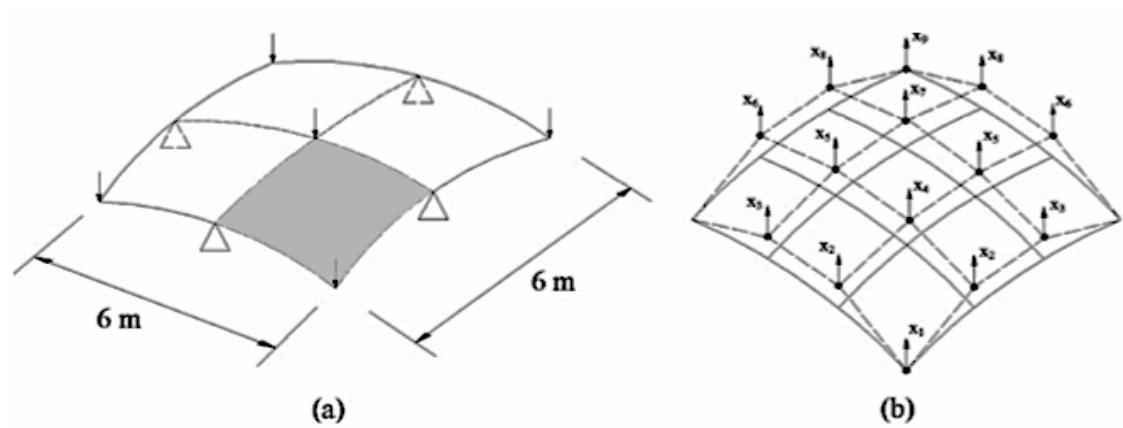


Figura 15 - Geometria inicial problema de otimização de topologia para o problema 2 (Hassani et al., 2013)

Tal como no problema 1, apenas um quarto da estrutura (dimensões  $3_m \times 3_m \times 1_{cm}$ ) foi considerado para análise devido à aplicação de condições de simetria, sendo discretizada numa malha de  $20 \times 20$  de elementos finitos casca isoparamétricos, com 4 nós cada elemento.

Para o problema 2 foram utilizados os seguintes variáveis para as geometrias aleatórias.

Tabela 3 – Variáveis aleatórios utilizados no problema 2

Ponto de controlo	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9
Plano	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Aproximada 2	0	100	50	150	175	150	200	250	300
Aleatório 5	57	26	40	212	143	151	177	119	176
Aleatório 6	16	153	417	331	413	379	208	444	383
Aleatório 7	83	231	444	304	352	165	352	75	54

### 3.4.4. Resultados da otimização de Topologia para o Problema 2

---

Nas Figuras 16 a 20 observam-se as topologias ótimas para o problema 2.

#### Exemplo 1 – Geometria Inicial Plana

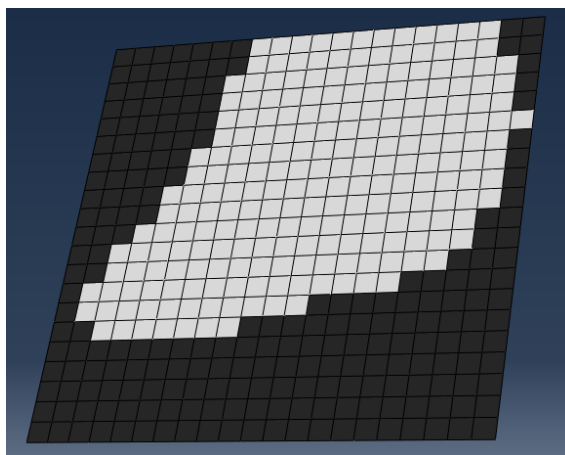


Figura 16 – Resultado otimização de topologia com a geometria inicial plana (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

#### Exemplo 2 – Geometria Inicial aproximada 2

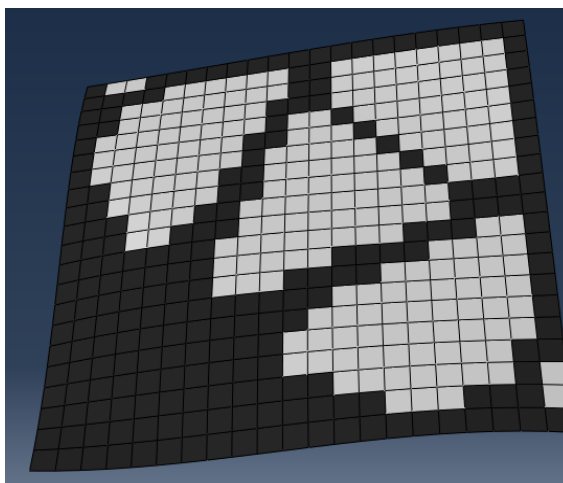


Figura 17 – Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aproximada 2 (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 3 – Geometria inicial aleatória 5

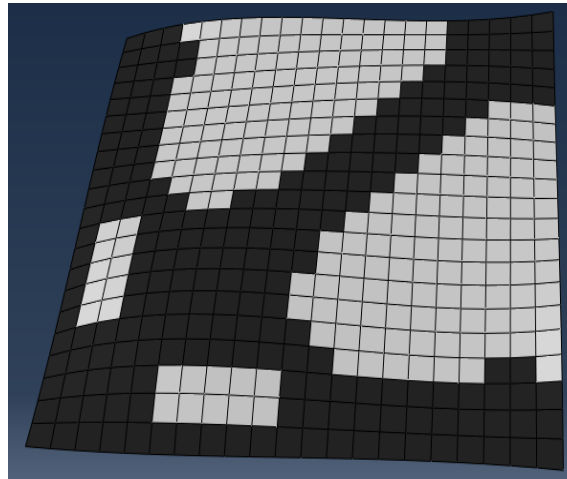


Figura 18 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 5 (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 4 – Geometria inicial aleatória 6

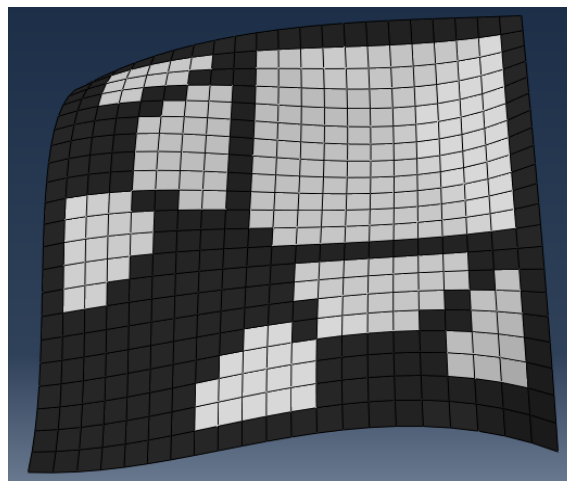


Figura 19 - Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 6 (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 5 – Geometria inicial aleatória 7

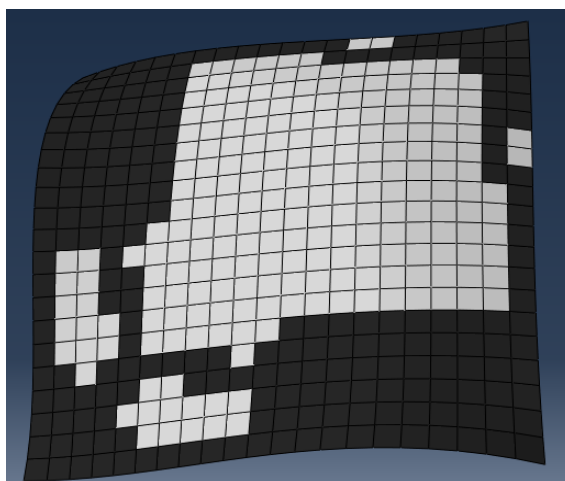


Figura 20 – Resultado otimização de topologia com a geometria inicial aleatória 7 (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

Todos os exemplos apresentados convergiram ao fim de 300 iterações, apresentando continuidade de material ao longo da estrutura. Assim como nos exemplos do Problema 1, observa-se que para diferentes geometrias iniciais obtém-se diferentes topologias. A nível de função objetivo o exemplo 3 (Figura 18) é o que matematicamente apresenta melhor resultado em termos de minimização da conformidade estrutural (ver Tabela 4).

Tabela 4 - Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de topologia (Problema 2)

Geometria Inicial	Função Objetivo Inicial	Função Objetivo Final
Plana	23809	1493
Aproximada 2	3303	124
Aleatório 5	337	17
Aleatório 6	3137	172
Aleatório 7	8662	454

A Figura 21 mostra os resultados obtidos para a topologia da estrutura casca de cada um dos exemplos apresentados anteriormente, mas agora para a totalidade da estrutura.

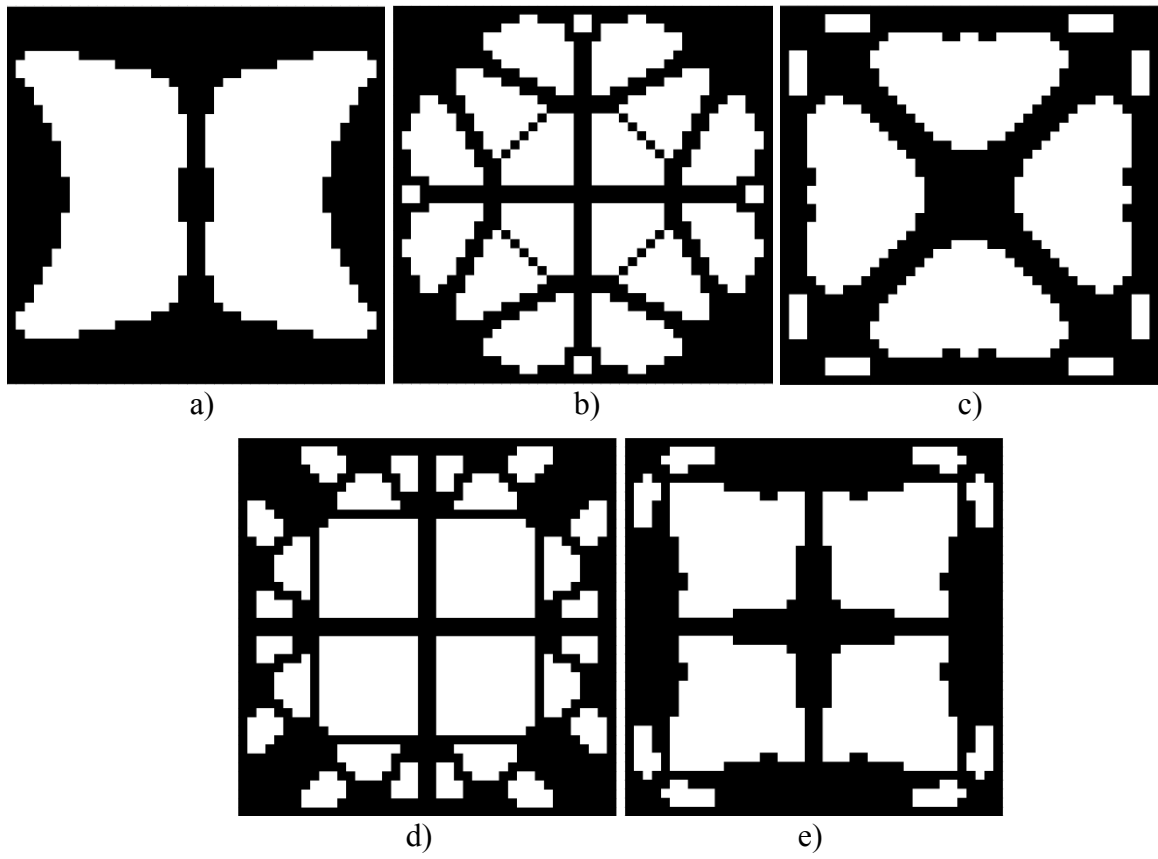


Figura 21 – Resultados otimização de topologia (Problema 2): a) Exemplo 1; b) Exemplo 2; c) Exemplo 3; d) Exemplo 4; e) Exemplo 5

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*



## 4. Otimização de Forma

---

Os métodos de otimização de forma são utilizados para a otimização da geometria das estruturas casca. O problema de otimização consiste na procura dos parâmetros geométricos ótimos de forma a que função objetivo seja minimizada. Para que tal seja possível é necessário definir uma representação geométrica suave e precisa da estrutura, mas ao mesmo tempo ser capaz de representar geometrias gerais e ser modificada localmente sem afetar a geometria geral do problema. Nesta dissertação, foram utilizadas as funções *B-Splines* (Piegl e Tiller, 1997) para a representação geral da geometria.

### 4.1. Modelação da geometria da estrutura

---

*Bézier Splines* ou simplesmente *B-Splines* é uma técnica utilizada para descrever e modelar curvas e superfícies. Neste método a geometria/superfície da estrutura é descrita através das coordenadas dos pontos designados de pontos de controlo, ou seja, os limites de cada elemento que compõe a superfície são determinados pelas coordenadas dos pontos de controlo que a compõe. A Figura 22 representa um exemplo de uma curva *B-Spline*, onde se podem verificar a existência dos referidos pontos de controlo.

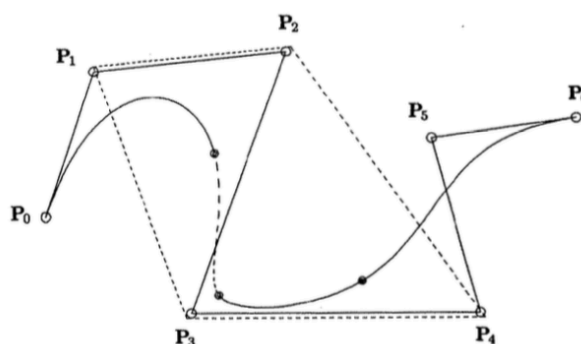


Figura 22 – Exemplo de uma curva *B-Spline* (Piegl e Tiller, 1997)

No contexto da otimização de forma, a utilização das *B-Splines* facilita a manipulação da forma e da geometria permitindo a representação de superfícies e formas complexas, isto graças aos pontos de controlo e às coordenadas homogéneas. Segundo Hassani *et al.* (2013) a utilização dos pontos de controlo diminui a quantidade de variáveis de projeto necessárias para descrever uma superfície. Para um problema em que há simetria, o número de variáveis

pode ser ainda mais reduzido. A Figura 23 ilustra um exemplo de uma superfície criada utilizando as *B-Splines*, em que na imagem superior temos os ditos pontos de controle e na imagem inferior a superfície gerada.

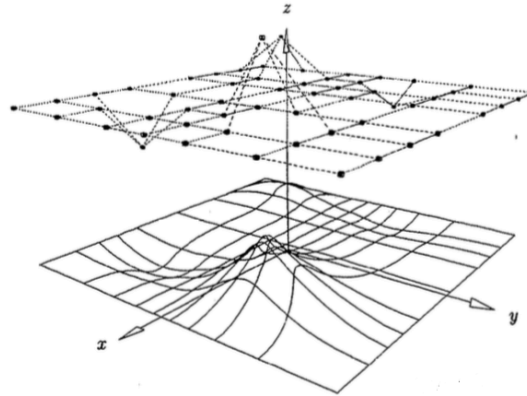


Figura 23 –Superfície gerada pela técnica *B-Spline* (Piegl e Tiller, 1997)

Devido à hierarquia dos pontos e superfícies, variando as coordenadas de um ponto de controle é possível variar automaticamente a geometria da superfície no ponto em questão e na sua vizinhança. A variação de vários pontos de controle faz com que seja possível obter diferentes geometrias com diferentes graus de complexidade e observar o histórico das variações dos parâmetros de otimização ao longo do processo de otimização. É de referir que os valores dos pontos de controle podem ser “controlados” através da implementação de limites superiores e inferiores durante a parametrização do modelo de otimização. Saliente-se ainda que os valores expressos nas tabelas referem-se aos pontos que definem as respectivas cascas, representadas nas Figuras Figura 8 e Figura 15. Note-se que estes pontos, que são as variáveis de projeto da otimização de forma, não representam os pontos de controle, mas sim pontos de passagem da superfície. Em função das variáveis de projeto são determinados os pontos de controle e geradas as superfícies através de *B-Splines*.

## 4.2. Formulação do problema de otimização de forma

---

Considera-se o problema apresentado no capítulo 3.3, lembrando que o objetivo do problema é a maximização da rigidez de uma estrutura sujeita a uma determinada força e condições de fronteira, tendo como principal restrição o volume de material. A função

objetivo será a representada pela equação (9), e sendo este um problema de otimização de forma, as variáveis de projeto consideradas são as posições de determinados pontos da superfície (restringidos entre uma gama de possíveis valores).

De forma a evitar problemas de instabilidade numérica, os limites das variáveis de projeto (topologia e forma) devem estar entre os mesmos limites. Já que os limites das variáveis de topologia estão limitados aos valores 0 e 1 para um problema discreto, utilizou-se a seguinte expressão para limitar as variáveis de forma entre 0 e 1:

$$0 \leq y_i = \frac{x_i - x_i^{min}}{x_i^{max} - x_i^{min}} \leq 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (17)$$

onde:  $x_i$  e  $y_i$  e são o valores do ponto de controlo, respetivamente, antes e após da conversão para o sistema binário 0 e 1.  $x_i^{min}$  e  $x_i^{max}$  são respetivamente os limites inferior e superior impostos à variável de projeto, e  $m$  é o número de pontos de controlo do projeto.

Assim sendo, o problema de otimização de forma pode ser expresso por:

$$\begin{aligned} & \min(\int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma) \\ & \text{Sujeito a: } K(E_e)u = f \\ & \text{e} \quad 0 \leq y_i \leq 1 \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (18)$$

É de salientar que foi utilizado o método das diferenças finitas para obter os gradientes necessários para a aplicação do método MMA.

### 4.3. Casos de estudo

---

Nesta secção vai ser aplicada a otimização de forma sobre os resultados obtidos na otimização de topologia (ver secção 3.4). Em todos os exemplos foi utilizado o método de MMA para a otimização e foram utilizados os seguintes dados de projeto:

- Módulo de *Young* e coeficiente de *Poisson* do material base de  $2 \times 10^9$  Pa e 0.3 respetivamente;

- Limite inferior de  $x_{min} = 0_{mm}$  e limite superior de  $x_{min} = 500_{mm}$ , estando estes restringidos entre 0 e 1 após a aplicação da equação (17);
- Topologia fixa e igual ao valor ótimo obtido nas respectivas otimizações de topologia.

### 4.3.1. Resultados Otimização de forma para o Problema 1

---

Nas figuras 24 a 28 estão representadas as geometrias iniciais e finais do processo de otimização de forma tendo em conta diferentes geometrias iniciais e topologias fixas. Relembre-se que as geometrias iniciais são as mesmas que foram utilizadas na otimização de topologia e apresentadas anteriormente na Tabela 1.

#### Exemplo 1 – Geometria Inicial Plana

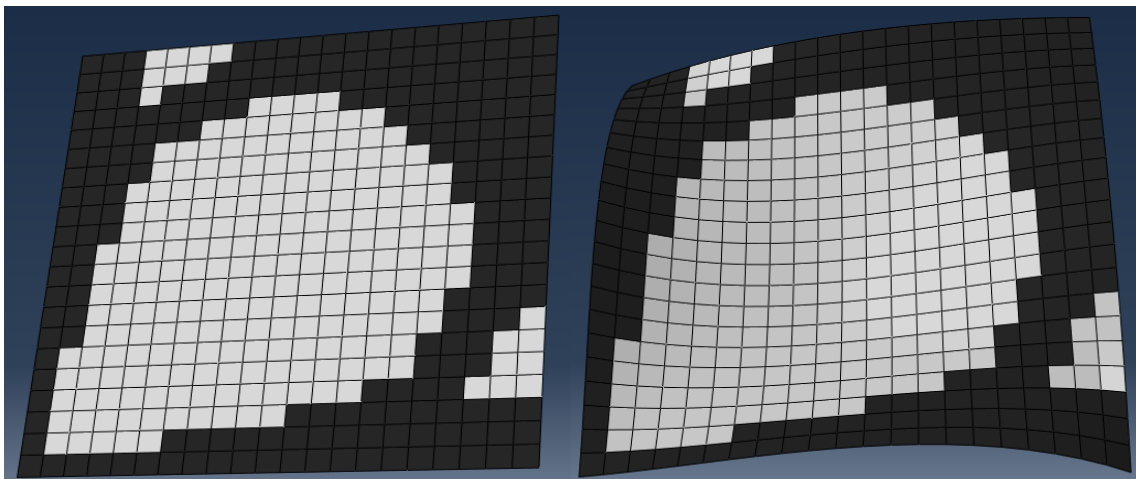


Figura 24 – À esquerda geometria inicial plana, à direita resultado otimização de forma (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 2 – Geometria Inicial aproximada 1

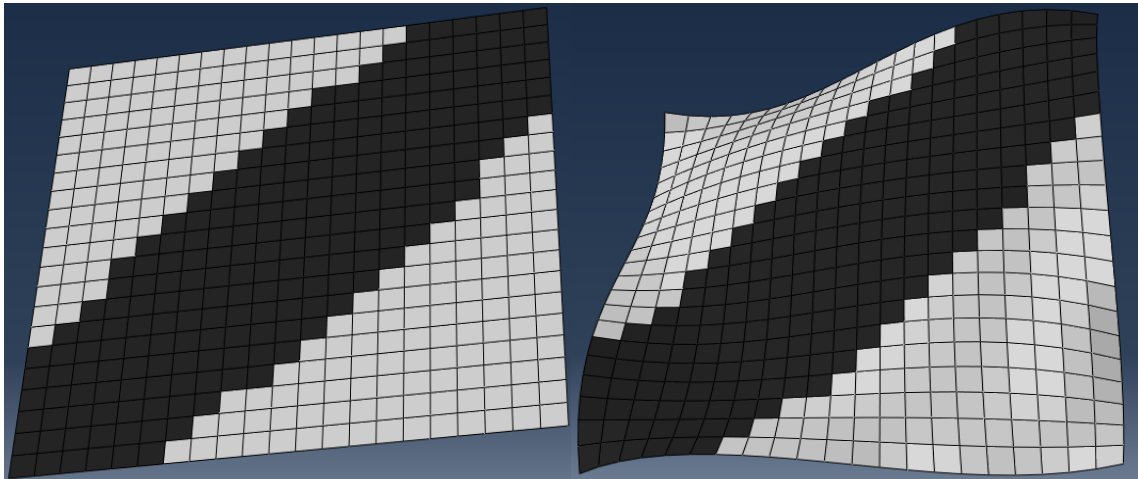


Figura 25 – À esquerda geometria inicial aproximada 1, à direita resultado otimização de forma (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 3 – Geometria inicial aleatória 1

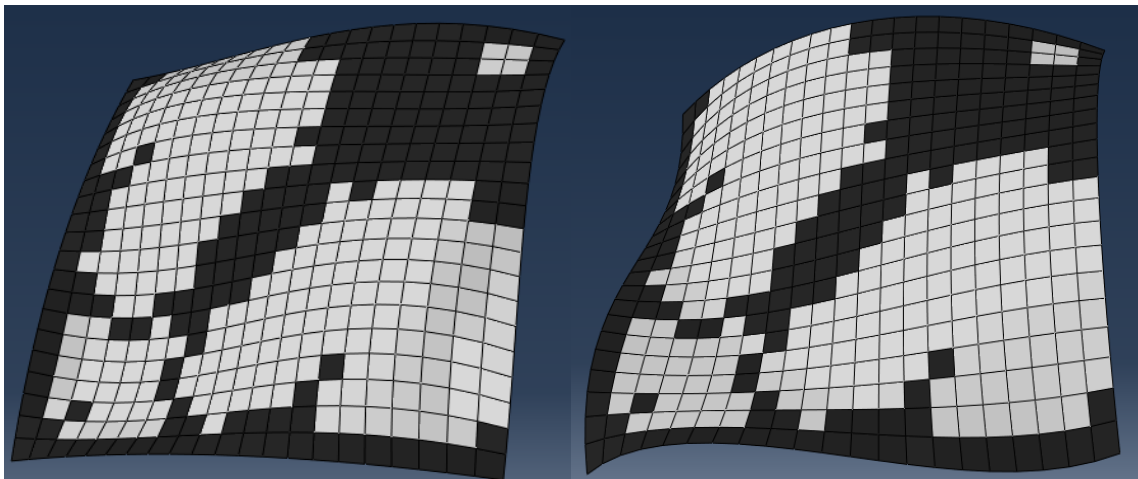


Figura 26 – À esquerda geometria inicial aleatória 1, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

#### Exemplo 4 – Geometria inicial aleatória 2

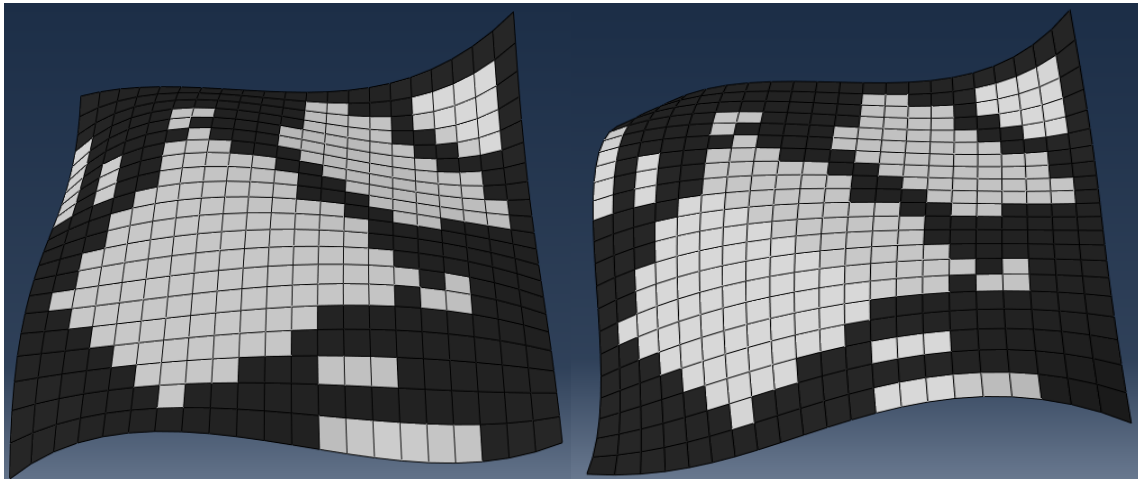


Figura 27 – À esquerda geometria inicial aleatória 2, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

#### Exemplo 5 – Geometria inicial aleatória 3

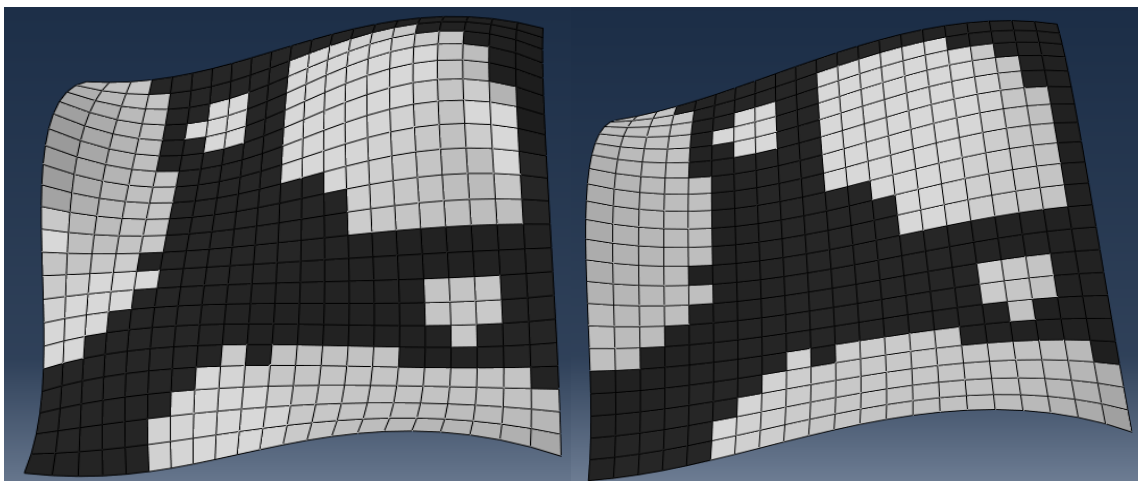


Figura 28 – À esquerda geometria inicial aleatória 3, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

Analisando as imagens acima apresentadas e as variações dos valores dos parâmetros geométricos (disponíveis em Anexo I), verifica-se que com exceção do exemplo 3 o valor do ponto central aumentou ou manteve-se em valores elevados. Situação esta que ocorre de forma natural para reduzir o momento causado pela carga aplicada.

Na Tabela 5 pode-se observar que a configuração geométrica do exemplo 2 (Figura 26) é a que melhor satisfaz a função objetivo de minimizar a conformidade estrutural, com o menor valor de função objetivo.

Tabela 5 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de forma (Problema 1)

Geometria Inicial	Função Objetivo Inicial	Função Objetivo Final
Plana	4632	17.99
Aproximada 1	3	2.32
Aleatório 1	64	13.01
Aleatório 2	146	12.60
Aleatório 3	76	9.12

### 4.3.2. Resultados Otimização de forma para o Problema 2

Nas figuras 29 a 33 estão representadas as geometrias iniciais e finais do processo de otimização de forma, agora do problema 2. Relembre-se que as geometrias iniciais são as mesmas que foram utilizadas na otimização de topologia e apresentadas na Tabela 3.

#### Exemplo 1 – Geometria Inicial Plana

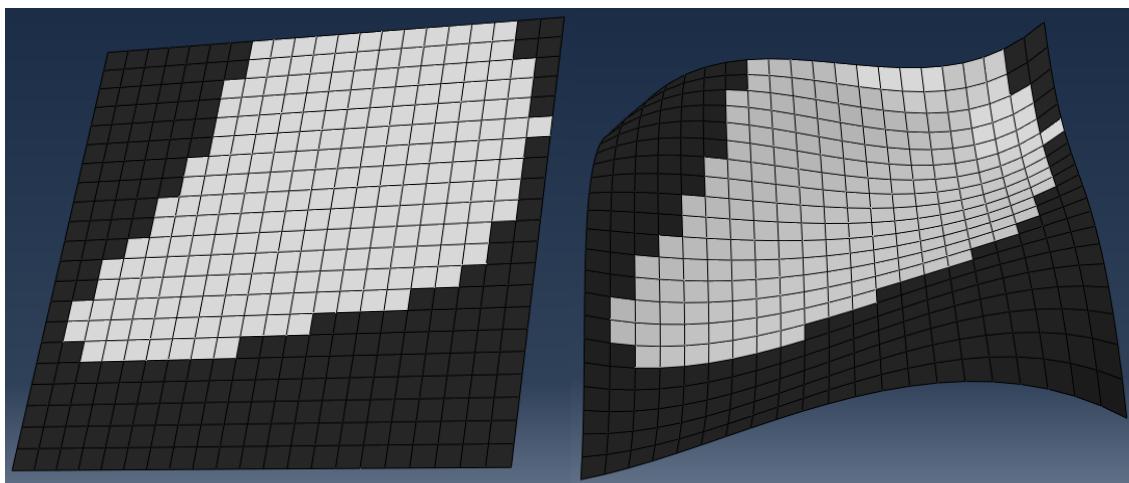


Figura 29 – À esquerda geometria inicial plana, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

## Exemplo 2 – Geometria Inicial aproximada 2

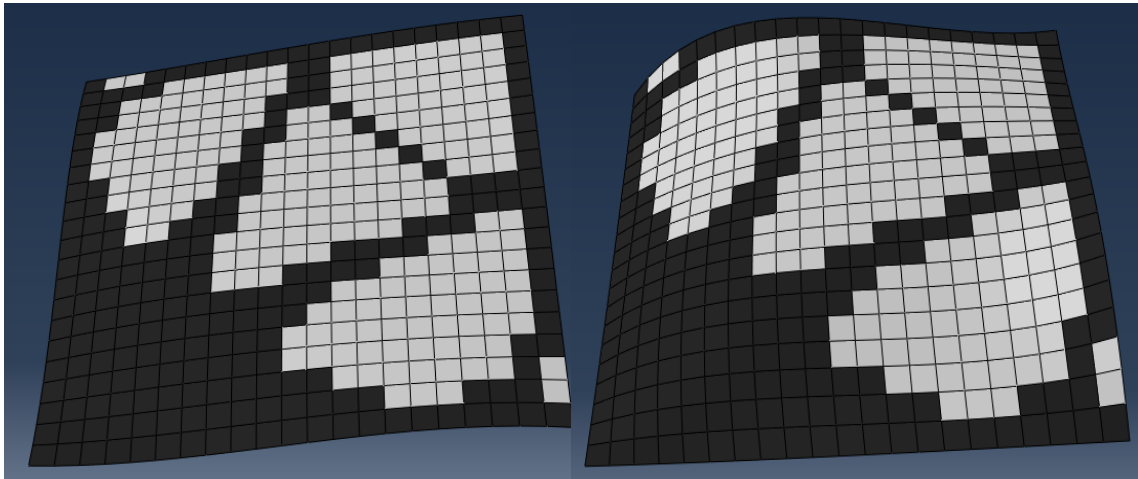


Figura 30 – À esquerda geometria inicial aproximada 2, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

## Exemplo 3 – Geometria inicial aleatória 4

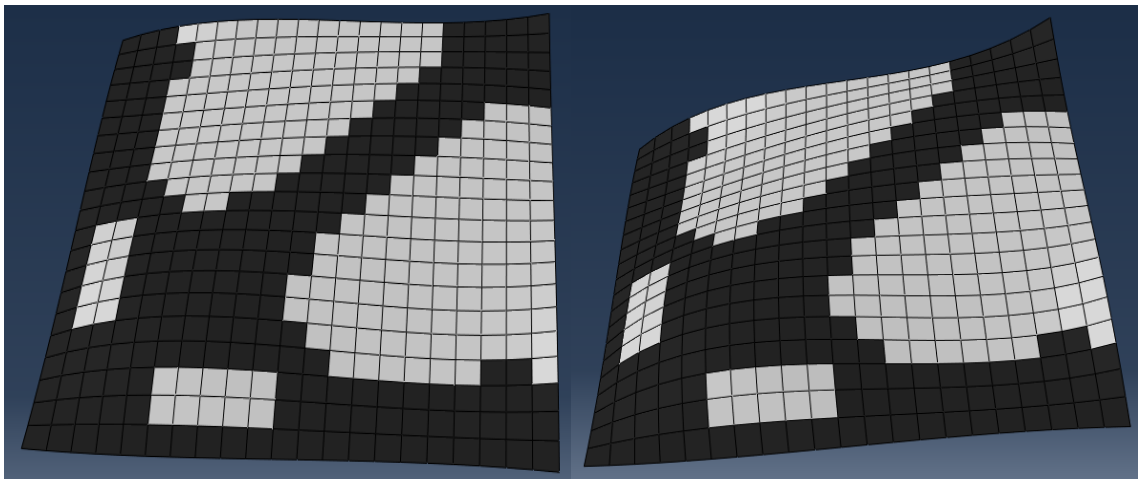


Figura 31 – À esquerda geometria inicial aleatória 1, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)



#### Exemplo 4 – Geometria inicial aleatória 5

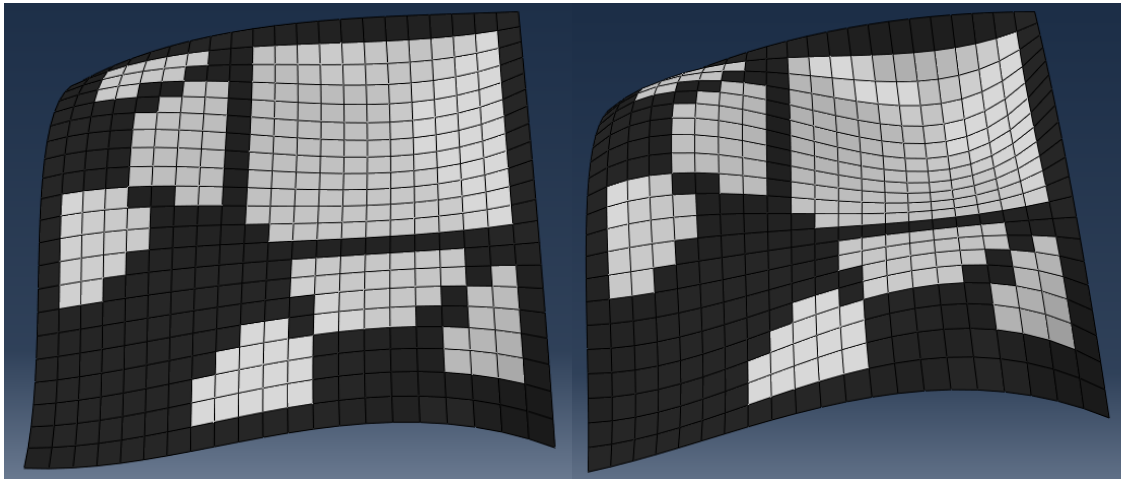


Figura 32 – À esquerda geometria inicial aleatória 2, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

#### Exemplo 5 – Geometria inicial aleatória 6

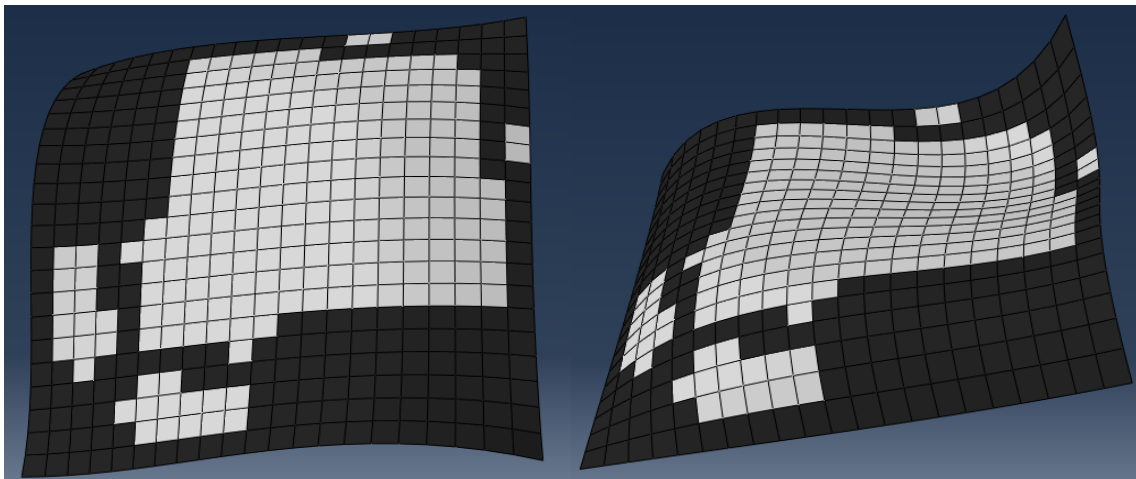


Figura 33 – À esquerda geometria inicial aleatória 3, à direita resultado otimização de forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

Pela análise visual das imagens e das variações dos valores dos parâmetros geométricos (disponíveis em Anexo I), verifica-se a mesma tendência que no problema 1. Nos pontos de aplicação de carga o valor do ponto de controlo aumenta para diminuir o momento causado pelas cargas aplicadas, com a exceção do exemplo 2 (em que o ponto central diminui em relação ao valor inicial) e o exemplo 4 (em ambos os pontos de controlo onde são aplicadas as cargas).

Na Tabela 6 pode-se observar que a configuração geométrica do exemplo 3 (Figura 33) é o que melhor satisfaz a função objetivo de minimizar a conformidade estrutural, com o menor valor de função objetivo.

*Tabela 6 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de forma (Problema 2)*

<b>Geometria Inicial</b>	<b>Função Objetivo Inicial</b>	<b>Função Objetivo Final</b>
Plana	1493	35.82
Aproximada 2	124	4.67
Aleatório 5	17	3.83
Aleatório 6	172	48.47
Aleatório 7	454	9.46

## 5. Otimização Simultânea

---

Tradicionalmente utiliza-se a metodologia da otimização estrutural integrada para otimização simultânea de forma e topologia. Numa primeira instância é definido o layout ótimo da estrutura e logo em seguida são aplicadas técnicas de otimização de forma e dimensionamento para encontrar a geometria ideal (Hassani *et al.*, 2013).

A prática comum na área da análise estrutural passa pela otimização do layout e de seguida definir a geometria ótima da estrutura, técnica esta que é designada de otimização estrutural integrada. No entanto esta metodologia não é o que gera melhores resultados, do ponto de vista matemático e devido à interação entre as variáveis de forma e topologia (Hassani *et al.*, 2013). Daí a importância de avaliar o efeito da aplicação da otimização simultânea nas estruturas casca.

Como já foi referido anteriormente, o objetivo desta dissertação é a otimização simultânea de forma e topologia de estruturas casca. Pretende-se que com esta abordagem os parâmetros de forma e topologia sejam otimizados em simultâneo. Ansola *et al.* (2002) e Hassani *et al.* (2013) nos seus trabalhos deram os primeiros passos no campo da otimização simultânea de forma e topologia.

Ansola *et al.* (2002) fizeram uma primeira aproximação à temática da simulação simultânea de topologia e forma. O método desenvolvido trata-se de um método combinado de otimização, cujo algoritmo de otimização pode ser analisado na Figura 34.

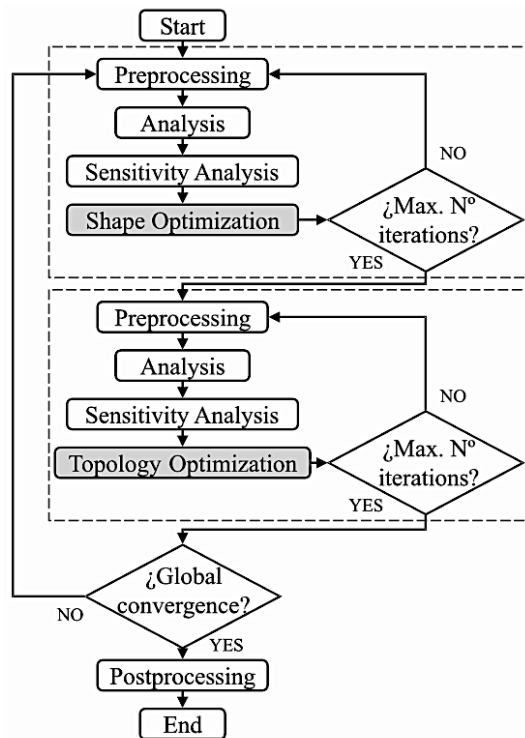


Figura 34 - Algoritmo otimização sequencial (Ansola *et al.*, 2002)

Analisando o algoritmo pode-se ver que a otimização global da estrutura é feita sequencialmente em duas fases; primeiro os parâmetros geométricos são otimizados e de seguida os parâmetros de topologia são também otimizados (densidades, etc.). Essas duas fases são alternadas durante o ciclo de otimização, sendo que este termina quando o número máximo de iterações é atingido (em cada uma das fases) ou quando a convergência global é atingida. Segundo Hassani *et al.* (2013) o número de análises necessárias neste método sequencial é superior ao necessário quando usado o método realmente simultâneo, uma vez que cada ciclo de iteração (forma e topologia) requer análise estrutural.

Tendo como base o estudo de Ansola *et al.* (2002), Hassani *et al.* (2013) faz uma abordagem diferente à otimização simultânea. O algoritmo (ver Figura 35), neste método, foi desenvolvido de maneira que os parâmetros de forma e topologia sejam otimizados em simultâneo em cada ciclo de iteração até que se atinja a convergência do problema, diferente da otimização sequencial proposto por Ansola *et al.* (2002).

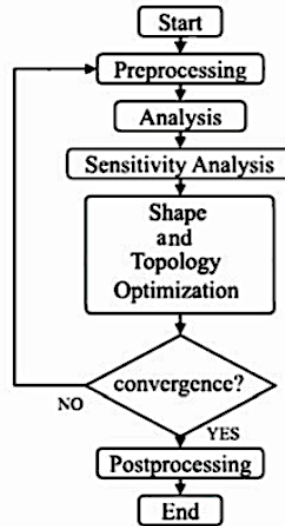


Figura 35 - Algoritmo otimização simultânea (Hassani et al., 2013)

## 5.1. Formulação do problema de otimização simultânea

Relembrando que  $m$  é o número de parâmetros geométricos (variáveis de forma) e  $n$  é o número de elementos finitos (variáveis de topologia), para um problema de otimização de topologia e forma o número total de variáveis de projeto é dado por:

$$k = m + n \quad (19)$$

Relembrando também que as variáveis topológicas são limitadas entre 0 e 1, logo as de forma foram normalizadas, ver secção 4.2 e a equação (17), para os mesmos limites.

Para o problema de maximização da rigidez com uma restrição sobre o volume total de material pode ser expresso matematicamente da seguinte forma:

$$\min\left(\int_{\Omega} f_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma\right)$$

$$\text{Sujeito a: } K(E_e)u = f \quad (20)$$

$$e \quad \int_{\Omega} \rho_i d\Omega \leq V_{max} \quad i = 1, \dots, n$$

$$e \quad 0 < y_{min} < y_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, k$$

onde:  $y_{min}$  é uma constante introduzida para evitar singularidades de cálculo.

## 5.2. Casos de estudo

---

Esta secção apresenta a aplicação da otimização simultânea de forma e topologia aos mesmos problemas apresentados na secção 3.4. Em todos os exemplos foi utilizado o método de MMA para a otimização. Para os exemplos em que a geometria inicial é aleatória foram utilizadas as variáveis apresentadas na secção 3.4.1 e na secção 3.4.3 para o problema 1 e problema 2 respetivamente. Foram utilizados os seguintes dados de projeto:

- Modulo de Young e coeficiente de *Poisson* do material base de  $2 \times 10^9 Pa$  e 0.3 respetivamente;
- Restrições sobre as variáveis de forma e topologia entre 0 e 1;
- Restrição sobre o volume total de 50%;
- Fator de penalidade de  $p = 5$ , no método SIMP;
- Raio de atuação do filtro de convolução ( $r_{min}$ ) 202,5mm.

### 5.2.1. Resultados Otimização Simultânea de forma Problema 1

---

As Figuras 36 a 40 apresentam as geometrias e topologias que otimizam o problema 1. Foram usadas 5 geometrias iniciais diferentes (ver anexo II).

#### Exemplo 1 – Geometria Inicial Plana

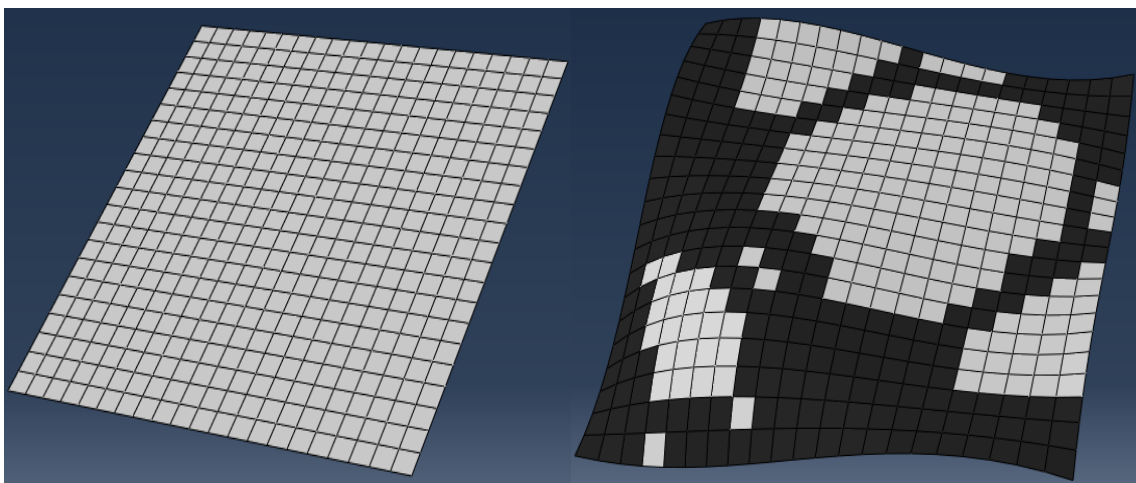


Figura 36 - À esquerda geometria inicial plana, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 2 – Geometria Inicial aproximada 1

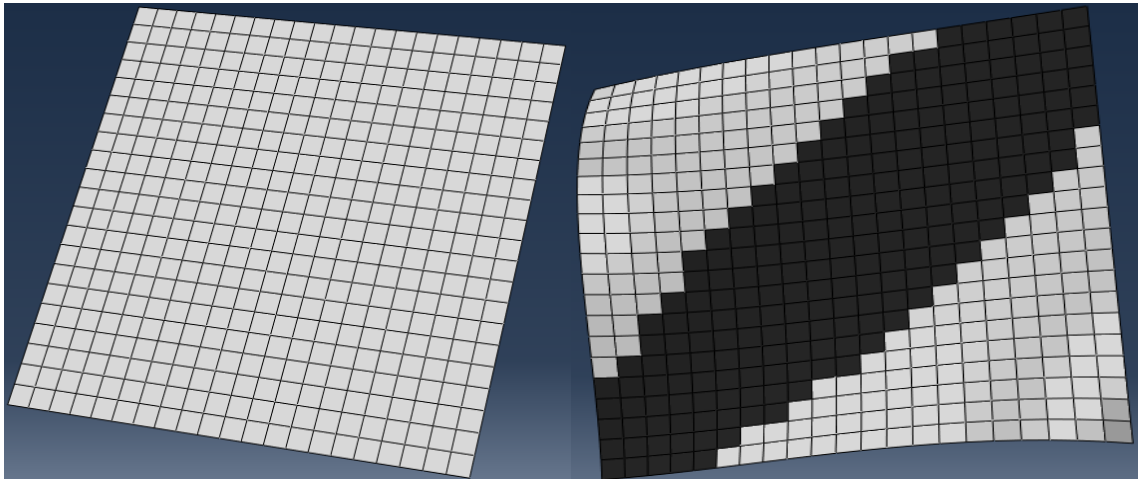


Figura 37 – À esquerda geometria inicial aproximada 1, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma com a geometria (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 3 – Geometria inicial aleatória 1

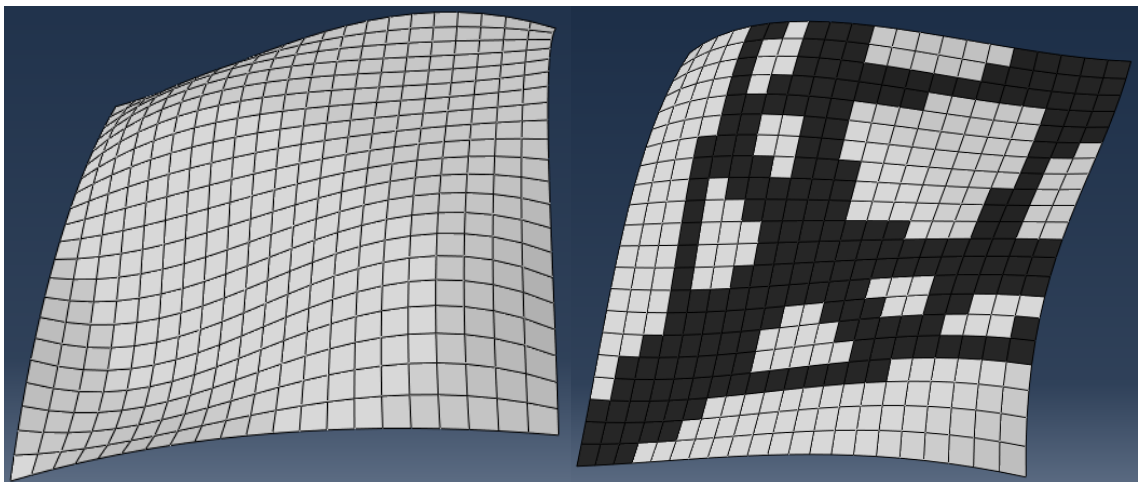


Figura 38 – À esquerda geometria inicial aleatória 1, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 3 – Geometria inicial aleatória 2

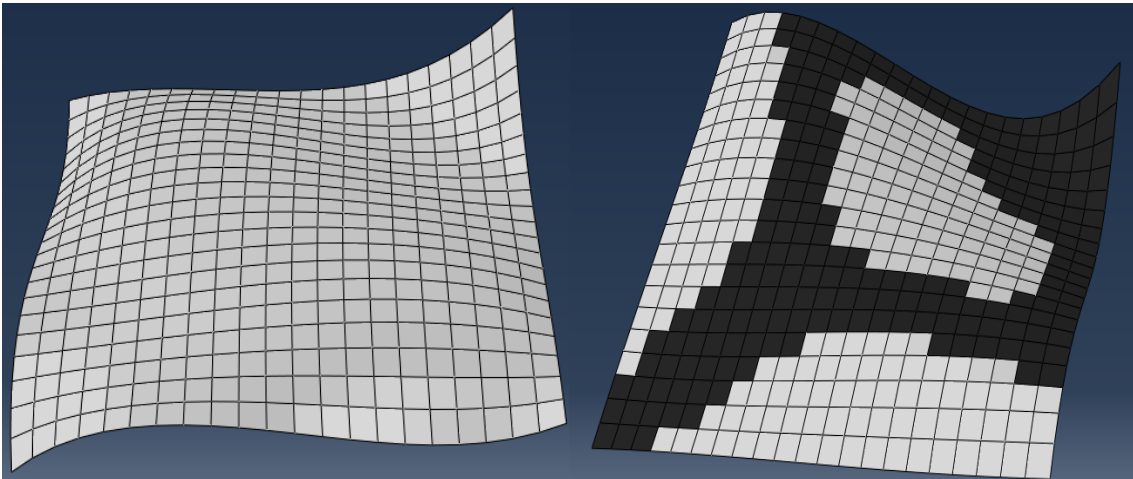


Figura 39 - À esquerda geometria inicial aleatória 2, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma com a geometria inicial aleatória 2 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 3 – Geometria inicial aleatória 3

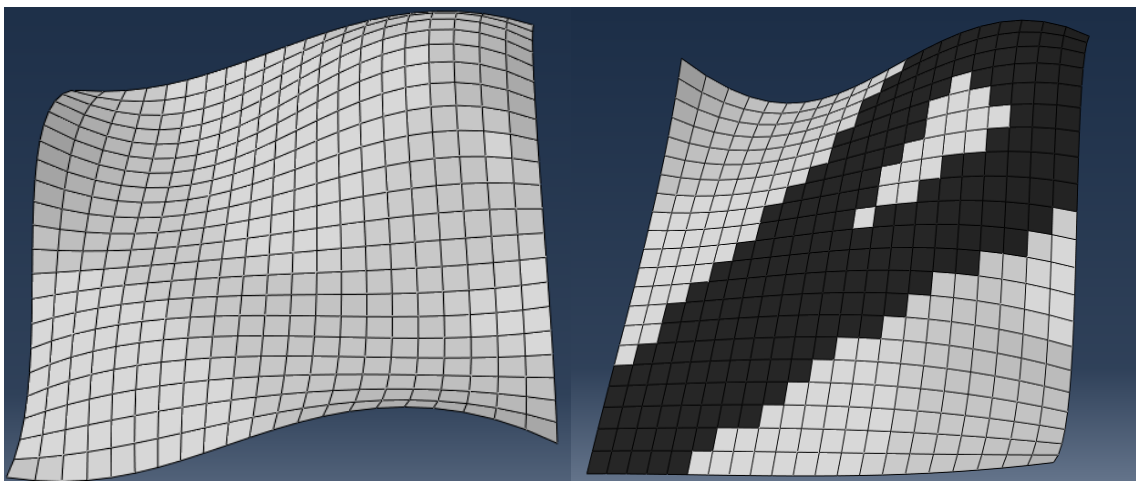


Figura 40 - À esquerda geometria inicial aleatória 3, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma com a geometria inicial aleatória 2 (Problema 1) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

Todos os exemplos convergiram ao fim de 300 iterações. Analisando os resultados verifica-se a existência de continuidade de material ao longo da estrutura em todos os exemplos, apresentando no exemplo 1 (Figura 39) zonas que se assemelham ao *checkerboard*. Avaliando a variação dos pontos de controlo (Anexo II) observa-se uma adaptação da geometria de forma a diminuir o momento causado pela carga aplicada.



Tabela 7 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de forma e topologia (Problema 1)

Geometria Inicial	Função Objetivo Inicial	Função Objetivo Final
Plana	3074	1.01
Aproximada 1	105	1.37
Aleatório 1	539	2.94
Aleatório 2	3218	2.41
Aleatório 3	1673	1.16

Pela Tabela 7 observa-se que não existe uma grande variação de função objetivo final, apresentando todos valores de rigidez semelhantes, pelo que o exemplo 1 (Figura 36) é o que apresenta melhor resultado. Também se observa que os resultados são, na maior parte dos casos, melhores do que o melhor resultado da otimização sequencial da Tabela 5.

A Figura 41 mostra a representação da topologia final da estrutura casca de cada um dos exemplos apresentados após a otimização simultânea.

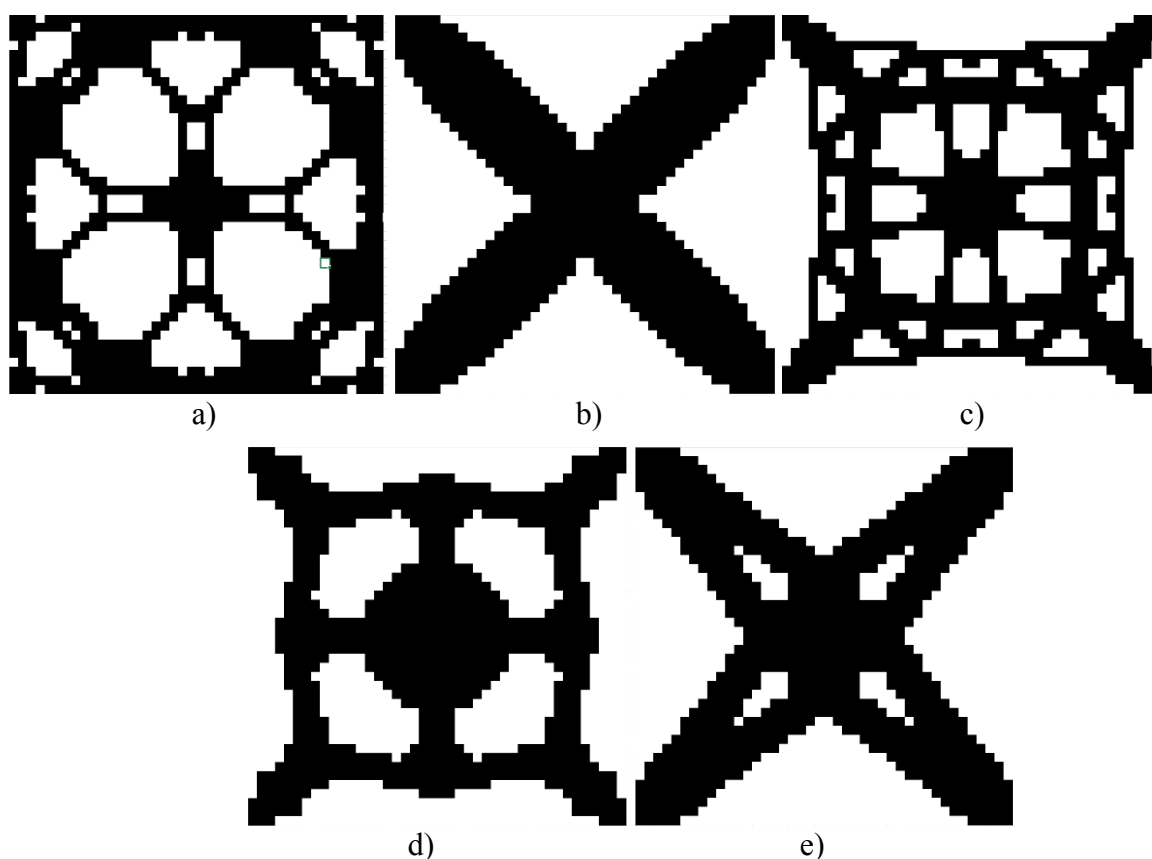


Figura 41 – Resultados otimização simultânea de forma e topologia (Problema 1): a) Exemplo 1; b) Exemplo 2; c) Exemplo 3; d) Exemplo 4; e) Exemplo 5

## 5.1. Resultados Otimização Simultânea de forma Problema 2

---

Nas Figuras 42 a 46 apresentam-se as geometrias e topologias que otimizam o problema 2. Foram usadas 5 geometrias iniciais diferentes (ver anexo II).

### Exemplo 1 – Geometria Inicial Plana

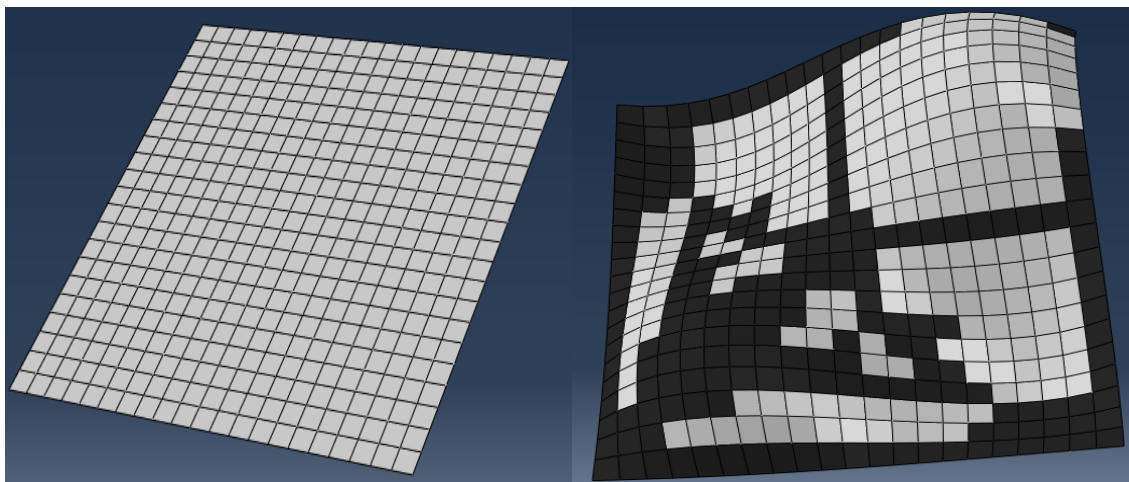


Figura 42 - À esquerda geometria inicial plana, e à direita o resultado da otimização simultânea de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 2 – Geometria Inicial aproximada 2

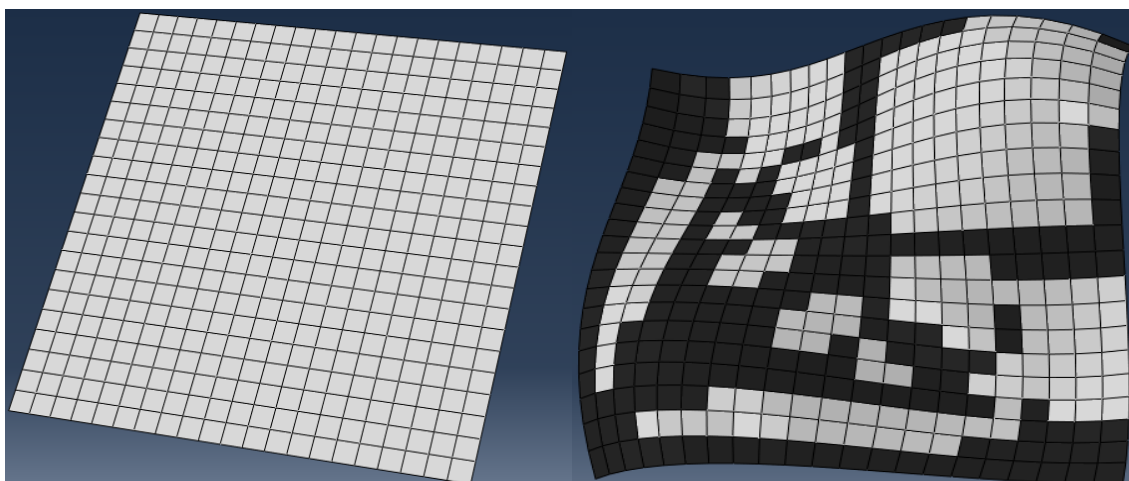


Figura 43 - À esquerda geometria inicial aproximada à geometria ótima de Hassani et al. (2013), e à direita resultado otimização de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 3 – Geometria inicial aleatória 1

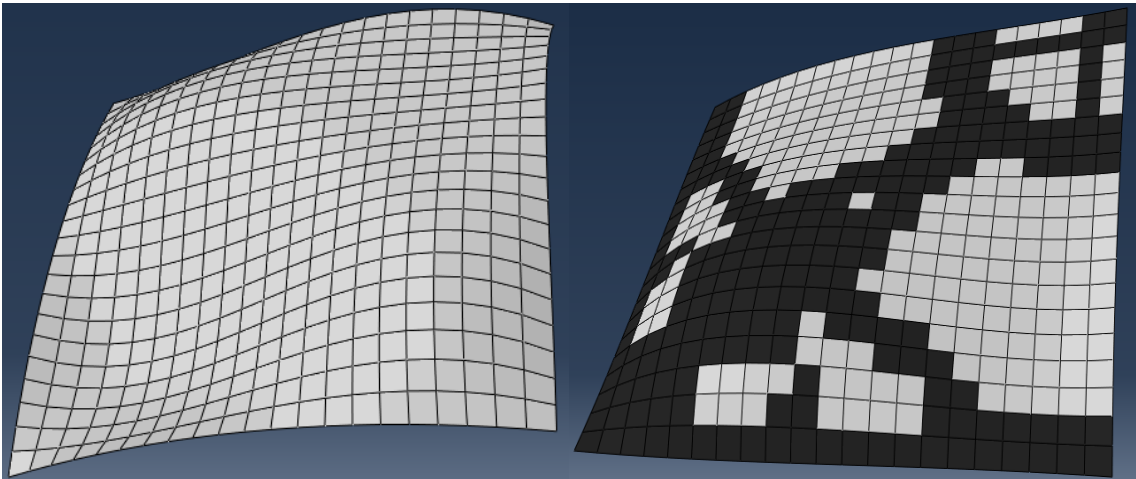


Figura 44 - À esquerda geometria inicial aleatória 1, e à direita o resultado da otimização de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 4 – Geometria inicial aleatória 2

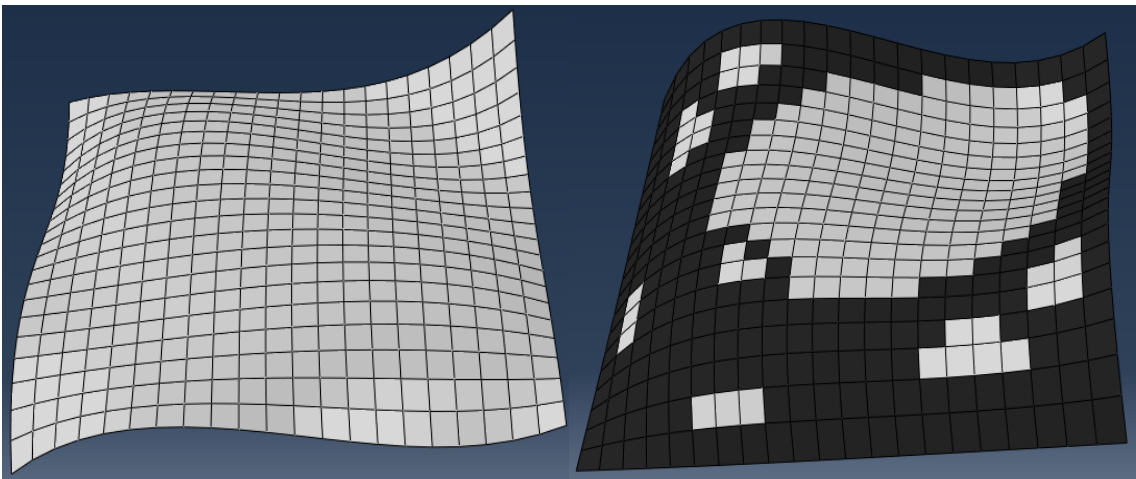


Figura 45 - À esquerda geometria inicial aleatória 2, e à direita o resultado da otimização de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

### Exemplo 5 – Geometria inicial aleatória 3

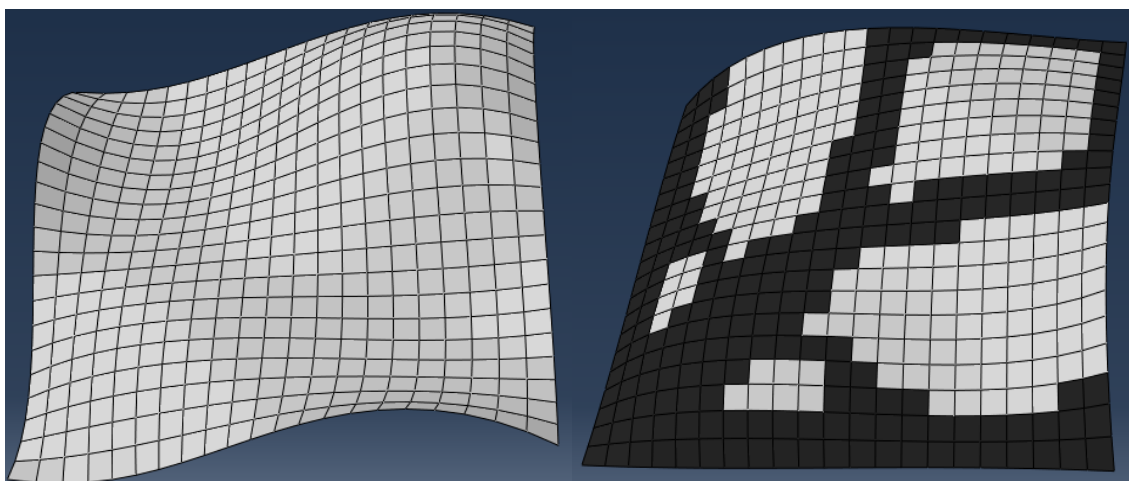


Figura 46 – À esquerda geometria inicial aleatória 3, e à direita o resultado da otimização de topologia e forma (Problema 2) (zona com material a preto e zona sem material a cinza)

Analisando as 5 figuras acima apresentadas pode-se verificar que, embora todos os casos tenham convergido, nem todos apresentaram resultados satisfatórios. No caso dos resultados obtidos partindo da geometria inicial plana (Figura 42) e da geometria de referência (Figura 43), a nível topológico existe uma descontinuidade de material numa zona crítica da geometria, resultando numa zona central com material e sem uma ligação estrutural ao local onde foi aplicada uma carga. Em termos de função objetivo, na Tabela 8 observa-se que o exemplo 5 (Figura 46) é o que apresenta melhor resultado, sendo também melhor quando comparado ao melhor resultado da otimização sequencial da Tabela 6.

Tabela 8 – Valores das funções objetivos dos resultados obtidos para a otimização de forma e topologia (Problema 2)

Geometria Inicial	Função Objetivo Inicial	Função Objetivo Final
Plana	23809	7.28
Aproximada 2	3303	6.45
Aleatório 1	4717	4.77
Aleatório 2	1888	4.13
Aleatório 3	3388	3.65

Na Figura 47 apresenta-se um conjunto de figuras que representam a topologia final da estrutura casca de cada um dos exemplos apresentados após a otimização simultânea.

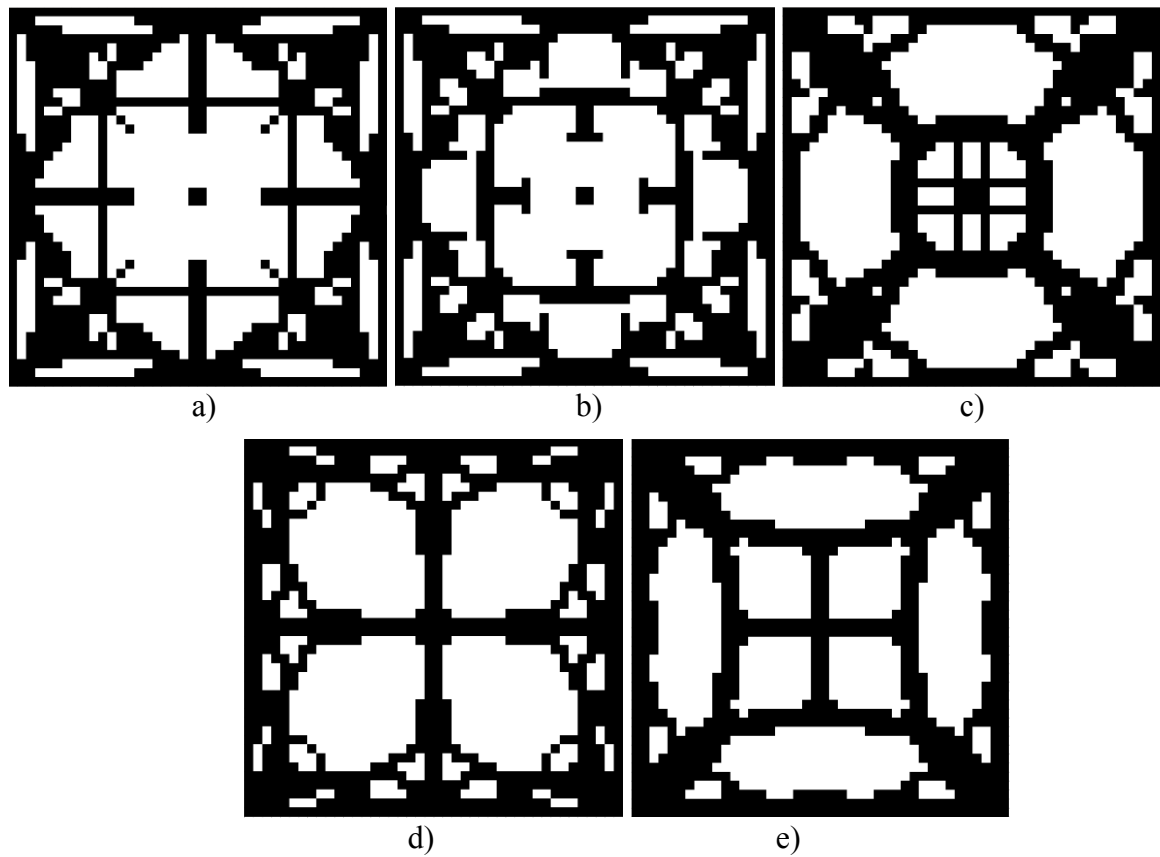


Figura 47 – Resultados otimização simultânea de forme e topologia (Problema 2): a) Exemplo 1; b) Exemplo 2; c) Exemplo 3; d) Exemplo 4; e) Exemplo 5

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*

## 6. Conclusões

---

Nesta dissertação aplicou-se a metodologia de otimização simultânea de forma e topologia desenvolvida por Hassani *et al.* (2013) para procurar a geometria e *layout* ótimo de uma estrutura casca. Foi considerado um problema de maximização da rigidez de estruturas casca, tendo o volume da estrutura como restrição. Contrariamente ao procedimento normalmente utilizado (otimização integrada) em que as variáveis de forma e topologia são otimizadas em duas etapas diferentes, neste trabalho foi utilizada otimização simultânea. Isto é, em cada iteração são atualizadas simultaneamente as variáveis de projeto referentes à topologia e aos parâmetros geométricos. O algoritmo de otimização utilizado foi o MMA, que é um método baseado nos gradientes, existindo a necessidade de se obterem as derivadas da função objetivo e dos constrangimentos.

As variáveis geométricas são parâmetros que permitem definir as superfícies através de *B-Splines*. O método SIMP foi implementado para a parametrização do material e as densidades dos elementos finitos foram considerados como variável de projeto de topologia (adoptando o sistema binário 0 e 1 para elementos sem material e com material, respetivamente). Para evitar/aliviar os problemas de instabilidades comuns em projeto de otimização de topologia (*checkerboard* e dependência de malha) foi aplicado o método da convolução.

Para testar o modelo de otimização simultânea, foram utilizados dois exemplos da literatura (designados ao longo da dissertação por Problema 1 e Problema 2), ao qual foi aplicado:

1. A otimização integrada ou sequencial, definidas nos capítulos 3 e 4;
2. A otimização simultânea, apresentada no capítulo 5.

A metodologia foi aplicada com sucesso resultando em diferentes geometrias e *layout* de material em todos os exemplos explorados. Pela análise dos resultados verifica-se uma dependência da topologia resultante em relação à geometria inicial. Essa dependência pode ser justificada pela existência de vários mínimos locais, que conjugado ao facto do MMA ser um método baseado nos gradientes, faz com que para diferentes parâmetros iniciais de geometria o problema convirja para um mínimo local e não o mínimo global do problema.

Na inexistência de informação relativa aos parâmetros iniciais de projeto utilizados por Hassani *et al.* (2013) não foi possível reproduzir exatamente os mesmos resultados (Figura 48).

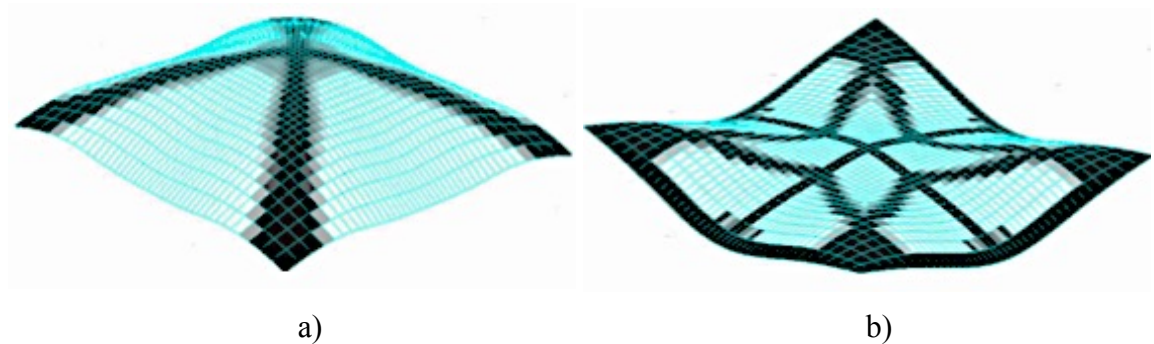


Figura 48 – Resultados ótimos de (Hassani, *et al.* 2013) para a) Problema 1 e b) Problema 2

No entanto obtiveram-se resultados muito próximos tanto a nível de forma como de topologia, como ilustra a Figura 25, a Figura 37 e Figura 40 para o primeiro problema, e a Figura 44 e a Figura 46 para o segundo problema.

Também se conclui que os melhores resultados foram obtidos com recurso à otimização simultânea. Sendo o tempo de cálculo menor, a obtenção de melhores resultados faz com que a otimização simultânea seja uma ferramenta a ter em conta neste tipo de problemas.

Algumas possibilidades para trabalhos futuros incluem:

- Estudo do efeito da variação do raio de atuação do filtro de convolução, assim como a sua eficácia perante diferentes configurações de malha de elementos finitos;
- Aplicação de diferentes algoritmos (que não se baseiam em gradientes) para o processo de otimização, por exemplo: algoritmos genéticos, *pattern search*, etc., com a finalidade que estudar o efeito da geometria inicial no resultado final.



## 7. Referências

---

ALLAIRE, Grégoire - Shape Optimization by the Homogenization Method

ANSOLA, Rubén *et al.* - An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures. *Computers and Structures*. 80:5–6 (2002) 449–458.

BENDSØE, M. P. - Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*. 1:4 (1989) 193–202.

BENDSØE, Martin Philip; KIKUCHI, Noboru - Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*. 71 (1988) 197–224.

BENDSØE, Martin Philip; SIGMUND, O. - Topology optimization: theory, methods, and applications

BLETZINGER, K. U.; RAMM, E. - Form finding of shells by structural optimization. *Engineering with Computers*. 9:27 (1993) 27–35.

BREMICKER, M. *et al.* - Integrated Topology and Shape Optimization in Structural Design. *Mechanics Structures & Machines*. 19:4 (1991) 551–587.

CUSTÓDIO, A. L.; MADEIRA, J. F. A. - GLODS: Global and Local Optimization using Direct Search. *Journal of Global Optimization*. 62:1 (2015) 1–28.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. - Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*. 10:1 (1995) 40–45.

DING, Yunliang - Shape optimization of structures: a literature survey. *Computers & Structures*. 24:6 (1986) 985–1004.

GUEDES, José Miranda; KIKUCHI, Noboru - Preprocessing and Postprocessing for Materials Based on The Homogenization Method with Adaptive Finite Element Methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 83:2 (1990) 143–198.

HAFTKA, Raphael T.; GRANDHI, Ramana V. - Structural shape optimization – A survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 57:1 (1986) 91–106.

HASSANI, B.; HINTON, E. - A review of homogenization and topology optimization I—homogenization theory for media with periodic structure. *Computers & Structures*. 69:6 (1998) 707–717.

HASSANI, B.; HINTON, E. - A review of homogenization and topology optimization II—analytical and numerical solution of homogenization equations. *Computers & Structures*. 69:6 (1998) 719–738.

HASSANI, B.; HINTON, E. - Review of homogenization and topology optimization III - topology optimization using optimality criteria. *Computers & Structures*. 69:6 (1998) 740–756.

HASSANI, B.; HINTON, E. - Homogenization and structural topology optimization: theory, practice and software

HASSANI, Behrooz; TAVAKKOLI, Seyed Mehdi; GHASEMNEJAD, Hossein - Simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 48:1 (2013) 221–233.

HINTON, E.; ÖZAKÇA, M.; SIENZ, J. - Optimum Shapes Of Vibrating Axisymmetric Plates And Shells. *Journal of Sound and Vibration*. 167:3 (1993) 511–528.

HINTON, E.; RAO, NVR; SIENZ, J. - Finite Element Structural Shape and Thickness Optimization of Axisymmetric Shells. *Engineering Computations*. 9:5 (1992) 499–527.

HSU, Yeh-Liang - A review of structural shape optimization. *Computers in Industry*. 25:1 (1994) 3–13.

IKEYA, Kenichi; SHIMODA, Masatoshi; SHI, Jin Xing - Multi-objective free-form optimization for shape and thickness of shell structures with composite materials. *Composite Structures*. 135 (2016) 262–275.

KROG, Lars A.; OLHOFF, N. - Optimum topology and reinforcement design of disk and plate structures with multiple stiffness and eigenfrequency objectives. *Computers & Structures*. 72:4–5 (1999) 535–563.

LANES, Ricardo Morais; GRECO, Marcelo - Aplicação de um Método de Otimização Topológica Evolutiva Desenvolvido em Script Python. *Ciência & Engenharia*. 22:1 (2013) 1–11.

MADEIRA, J. F.Aguilar; RODRIGUES, H.; PINA, Heitor - Multi-objective optimization of structures topology by genetic algorithms. *Advances in Engineering Software*. 36:1 (2005) 21–28.

MAUTE, Kurt; RAMM, Ekkehard - Adaptive Topology Optimization of Shell

Structures. AIAA Journal. 35:11 (1997) 1767–1773.

PIEGL, Les; TILLER, Wayne - The NURBS Book

RUBEN, Rui; FOLGADO, João; FERNANDES, Paulo - Three-dimensional shape optimization of hip prostheses using a multicriteria formulation. Structural and Multidisciplinary Optimization. 1:3 (2006) 147–158.

SANCHEZ-PALENCIA, Enrique - Non-homogeneous Media and Vibration Theory. Lecture Notes in Physics. 127 (1980).

SCHWARZ, Stefan; MAUTE, Kurt; RAMM, Ekkehard - Topology and shape optimization for elastoplastic structural response. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering. 190:15–17 (2001) 2135–2155.

SIGMUND, O. - Design of Material Structures using Topology Optimization. [S.l.] : Technical University of Denmark, 1994

SIGMUND, O. - A 99 line topology optimization code written in matlab. Structural and Multidisciplinary Optimization. 21:2 (2001) 120–127.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. - Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. Structural Optimization. 16:1 (1998) 68–75.

SVANBERG, Krister - The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 24 (1987) 359–373.

SVANBERG, Krister - A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. SIAM Journal on Optimization. 12:2 (2002) 555–573.

*Esta página foi intencionalmente deixada em branco*

# Anexo I – Resultados da variação dos pontos de controlo durante a otimização de forma

Resultado da variação dos valores dos pontos de controlo para os exemplos da otimização de forma do problema 1:

<b>Problema 1 – Otimização Forma</b>									
<b>Pontos de Controlo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>Geometria plana</b>									
<b>Valor Inicial</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Valor Final</b>	153	354	432	76	191	352	321	500	496
<b>Geometria aproximada 1</b>									
<b>Valor Inicial</b>	50	100	150	100	150	200	200	250	300
<b>Valor Final</b>	277	366	5	216	336	5	464	500	500
<b>Geometria Aleatório 1</b>									
<b>Valor Inicial</b>	190	206	42	146	462	269	480	425	156
<b>Valor Final</b>	218	382	5	245	407	500	496	500	5
<b>Geometria Aleatório 2</b>									
<b>Valor Inicial</b>	277	49	95	370	359	73	139	2	474
<b>Valor Final</b>	54	134	500	500	500	246	210	5	500
<b>Geometria Aleatório 3</b>									
<b>Valor Inicial</b>	65	459	30	206	108	94	496	384	188
<b>Valor Final</b>	113	295	500	158	236	223	437	500	399

Resultado da variação dos valores dos pontos de controlo para os exemplos da otimização de forma do problema 2:

<b>Problema 2 – Otimização de forma</b>									
<b>Pontos de Controlo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>Geometria plana</b>									
<b>Valor Inicial</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Valor Final</b>	5	279	467	86	270	500	5	275	500
<b>Geometria aproximada 2</b>									
<b>Valor Inicial</b>	0	100	50	150	175	150	200	250	300
<b>Valor Final</b>	361	224	107	500	413	472	406	242	5
<b>Geometria Aleatório 1</b>									
<b>Valor Inicial</b>	57	26	40	212	143	151	177	119	176
<b>Valor Final</b>	306	194	121	500	349	282	415	272	500
<b>Geometria Aleatório 2</b>									
<b>Valor Inicial</b>	16	153	417	331	413	379	208	444	383
<b>Valor Final</b>	5	306	483	380	500	336	5	435	334
<b>Geometria Aleatório 3</b>									
<b>Valor Inicial</b>	83	231	444	304	352	165	352	75	54
<b>Valor Final</b>	156	83	19	500	366	312	5	5	500

## Anexo II - Resultados da variação dos pontos de controlo durante a otimização Simultânea de forma e topologia

Resultado da variação dos valores dos pontos de controlo para os exemplos da otimização simultânea de forma e topologia do problema 1:

<b>Problema 1 – Otimização Simultânea de forma e Topologia</b>									
<b>Pontos de Controlo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>Geometria plana</b>									
<b>Valor Inicial</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Valor Final</b>	82	367	312	450	291	290	191	5	5
<b>Geometria aproximada 1</b>									
<b>Valor Inicial</b>	50	100	150	100	150	200	200	250	300
<b>Valor Final</b>	226	422	74	140	276	285	319	400.40	500
<b>Geometria Aleatório 1</b>									
<b>Valor Inicial</b>	190	206	42	146	462	269	480	425	156
<b>Valor Final</b>	209	344	186	266	453	500	331	262	5
<b>Geometria Aleatório 2</b>									
<b>Valor Inicial</b>	277	49	95	370	359	73	139	2	474
<b>Valor Final</b>	172	317	500	336	476	462	248	5	500
<b>Geometria Aleatório 3</b>									
<b>Valor Inicial</b>	65	459	30	206	108	94	496	384	188
<b>Valor Final</b>	90	201	431	217	250	5	500	500	485

Resultado da variação dos valores dos pontos de controlo para os exemplos da otimização simultânea de forma e topologia do problema 2:

<b>Problema 2 – Otimização Simultânea de forma e Topologia</b>									
<b>Pontos de Controlo</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>Geometria plana</b>									
<b>Valor Inicial</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>Valor Final</b>	421	200	78	500	21	5	500	427	5
<b>Geometria aproximada 2</b>									
<b>Valor Inicial</b>	0	100	50	150	175	150	200	250	300
<b>Valor Final</b>	500	257	95	500	52	5	500	500	5
<b>Geometria Aleatório 1</b>									
<b>Valor Inicial</b>	190	206	42	146	462	269	480	425	156
<b>Valor Final</b>	207	121	71	500	382	295	417	412	500
<b>Geometria Aleatório 2</b>									
<b>Valor Inicial</b>	277	49	95	370	359	73	139	2	474
<b>Valor Final</b>	44	15	5	500	362	500	5	55	83
<b>Geometria Aleatório 3</b>									
<b>Valor Inicial</b>	65	459	30	206	108	94	496	384	188
<b>Valor Final</b>	395	252	146	500	374	436	454	306	10