



# **PROSIDING SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA 2017**

**“MATEMATIKA DALAM ERA DIGITALISASI”**

**14 OKTOBER 2017**

**UNS INN SURAKARTA**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS SEBELAS MARET**

# **Prosing Seminar Nasional Matematika 2017**

**Program Studi Matematika**

**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

**Universitas Sebelas Maret Surakarta**

**ISBN : 978-602-51340-0-5**

**Penanggungjawab** : Supriyadi Wibowo, S.Si., M.Si.

**Steering Committee** : Prof. Drs. Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.

Drs. Pangadi, M.Si.

Dr. Sutanto, DEA

**Penyunting** : Dr. Diari Indriati, M.Si.

**Editor** : Melisa, S.Si., M.Sc.

**Layout dan Cover** : Bowo Winarno, S.Si., M.Kom

**Cetakan Pertama** : Oktober 2017

## **Penerbit**

Program Studi Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Sebelas Maret Surakarta

Jalan Ir. Sutami 36 A Kentingan Surakarta 57126

Telp (0271) 669376, Fax. (0271) 663375

## **TIM REVIEWER**

Drs. Muslich, M.Si.  
Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc.  
Dra. Yuliana Susanti, M.Si.  
Dr. Diari Indriati, M.Si.  
Prof. Drs. Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.  
Drs. Pangadi, M.Si.  
Dr. Siswanto, M.Si.  
Dra Etik Zukhronah, M.Si.  
Dra Respatiwulan, M.Si.  
Dra. Sri Sulistijowati H., M.Si.  
Supriyadi Wibowo, S.Si., M.Si.  
Hasih Pratiwi, M.Si.  
Dr. Sutanto, DEA  
Dr. Dewi Retno Sari Saputro, S.Si., M.Kom.  
Titin Sri Martini, S.Si., M.Kom.  
Vika Yugi Kurniawan, S.Si., M.Sc.  
Ririn Setyowati, S.Si., M.Sc.  
Triwik Jatu P., S.Si., M.Sc.  
Melisa, S.Si., M.Sc.

## **KATA PENGANTAR**

Alhamdulillah rabbi'l'alamin. Segala puji dan syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT, atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga prosiding ini dapat terselesaikan dengan baik. Prosiding ini berisi kumpulan makalah yang telah dipresentasikan dan didiskusikan dalam Seminar Nasional Matematika 2017 yang diadakan oleh Program Studi Matematika FMIPA UNS Surakarta pada hari Sabtu, 14 Nopember 2017.

Seminar nasional ini bertemakan “Matematika dalam Era Digitalisasi” yang bertujuan sebagai sarana publikasi hasil-hasil penelitian dan karya tulis dalam bidang Analisis dan Geometri, Aljabar, Statistika dan aplikasinya, Matematika Keuangan dan Aktuaria, Kombinatorik, Komputasi, Optimisasi, Pemodelan Matematika dan Pendidikan Matematika. Selain itu, diharapkan prosiding ini dapat memberikan wawasan dan motivasi dalam peningkatan kompetensi sebagai peneliti.

Dalam penyelesaian prosiding ini, kami menyadari bahwa proses penyelesaiannya tidak terlepas dari bantuan pihak lain. Untuk itu, panitia seminar menyampaikan terima kasih kepada pembicara utama, yaitu Dr. Subiono, Dosen Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Ir. Beno K Pradekso M.Sc. E.E., CEO SOLUSI247 dan Dr. Dewi Retno Sari S. S.Si, M.Kom., Dosen Universitas Sebelas Maret Surakarta. Kami juga menyampaikan terima kasih kepada para pemakalah, peserta, Bapak/Ibu dosen beserta para pejabat instansi.

Atas nama panitia, kami mohon maaf yang sebesar-besarnya bilamana dalam prosiding ini masih terdapat kekurangan. Untuk itu, segala saran dan kritik kami harapkan demi perbaikan prosiding pada terbitan selanjutnya. Akhirnya kami berharap prosiding ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Surakarta, 14 Oktober 2017

Ketua Panitia

Bowo Winarno, S.Si., M.Kom.

## DAFTAR ISI

Halaman Judul .....	i
Tim Prosiding .....	ii
Tim <i>Reviewer</i> .....	iii
Kata Pengantar .....	iv
Daftar Isi .....	v
MAKALAH UTAMA	
<b>Petri Nets dan Penggunaannya pada Aljabar Max-Plus</b> Subiono .....	1
<b>Data, Penambangan Data, dan Pemodelan Data (Model Nondeterministik-Statistika)</b> Dewi Retno Sari Saputro, Purnami Widyaningsih, Sutanto .....	17
ALJABAR	
<b>Analisis Pemodelan Sistem Produksi Kaos Menggunakan Aljabar Max Plus</b> Mariani Dian, Marcellinus Andy Rudhito .....	27
<b>Pemodelan Dan Analisis Pada Proses Produksi Buku dengan Menggunakan Sistem Persamaan Linear Aljabar <i>Max – Plus</i></b> Mujiono, Marcellinus Andy Rudhito .....	40
<b>Proyektor Spektral Atas Aljabar Maks Plus</b> Tri Anggoro Putro, Siswanto, Supriyadi Wibowo .....	49
<b>Sistem Maks-Linear Dua Sisi Atas Aljabar Maks-Plus</b> Kiki Aprilia, Siswanto, Titin Sri Martini .....	56
<b>Grup Action dan Banyaknya Unsur Himpunan HK dengan H dan K Subgrup</b> Santoso Budiwiyono.....	63

**PEMODELAN DAN ANALISIS PADA PROSES PRODUKSI BUKU  
DENGAN MENGGUNAKAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR  
ALJABAR MAX – PLUS**

Mujiono<sup>1)</sup>, Marcellinus Andy Rudhito<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>*Mahasiswa Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta*

<sup>2)</sup>*Program Studi Magister Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta*

<sup>1)</sup>myono023@gmail.com, <sup>2)</sup>arudhito@gmail.com

**ABSTRAK.** Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui proses produksi buku pada percetakan dan untuk mendapatkan waktu tercepat dalam menyelesaikan proses produksi buku, sehingga mempermudah pihak percetakan dalam menentukan kesepakatan waktu pengambilan dengan pihak konsumen. Penelitian ini dilakukan di PT. Pustaka Pelajar yang merupakan perusahaan yang bergerak pada bidang percetakan di Yogyakarta. Pengumpulan data dilakukan dengan observasi mulai tahap print *kalkir* sampai pada tahap terakhir, yaitu proses penyampulan (*sring*). Selain itu juga melakukan wawancara dengan operator produksi. Dari data yang diberikan, kemudian dibuat beberapa asumsi sehingga diperoleh sistem produksi sederhana Aljabar *Max-Plus*. Sistem tersebut kemudian dianalisis menggunakan Sistem Linear *Max-Plus* Waktu-Invariant (SLMI) *Autonomous*, dimana mesin-mesin sudah bekerja pada kondisi awal dan untuk berikutnya tidak perlu menunggu kedatangan input, karena bahan baku produksi buku sudah selalu tersedia. Kesimpulan yang diperoleh adalah ketika memproduksi buku sejumlah 250 eksemplar dengan jenis kertas HVS A4 dan ketebalan 320 halaman memerlukan waktu tercepat selama 10 jam 7 menit.

**Kata Kunci:** *Aljabar Max-Plus, Sistem Produksi Sederhana, Produksi Buku.*

## 1. PENDAHULUAN

Kemajuan dunia teknologi utamanya dalam dunia percetakan atau industri percetakan, dewasa ini semakin pesat disertai dengan persaingan usaha di dunia industri utamanya dalam hal teknologi. Hal ini menuntut perusahaan untuk selalu berkembang dan melakukan inovasi-inovasi di berbagai bidang. Banyak cara yang dapat dilakukan agar perusahaan dapat terus bertahan menghadapi persaingan, namun semuanya akan kembali pada tujuan mendasar, yakni bagaimana membuat perusahaan agar lebih efisien dalam segala bidangnya sehingga produktivitas perusahaan dapat meningkat.

Salah satu perusahaan yang bergerak di bidang percetakan adalah PT. Pustaka Pelajar yang berada di Celeban, Umbulharjo, Yogyakarta. PT. Pustaka Pelajar merupakan perusahaan di bidang Penerbit sekaligus percetakan buku-buku ajar (*text book*) perguruan tinggi untuk bidang ilmu sosial-humaniora seperti psikologi, pendidikan, sosiologi, budaya, bahasa, filsafat, dan agama. Dalam proses produksi buku, mesin yang digunakan adalah mesin *offset*, yaitu mesin cetak yang menggunakan master yang disebut *plate* dengan proses pemindahan huruf ke *blanket* sebagai perantara sebelum memindahkannya ke permukaan kertas. Dalam kehidupan sehari-hari terdapat beberapa masalah yang dapat dimodelkan secara matematis dengan sistem dinamika (Rudhito, 2016:1). Dalam

penelitian ini akan diberikan masalah sistem produksi buku sejumlah 250 eksemplar menggunakan mesin *offset* dengan ukuran A4 kertas HVS 70 gsm, jumlah halaman 320, isi hitam putih, dan untuk *cover* buku menggunakan kertas *Ivory plus* dengan laminating *doff*. Masalah dimodelkan menggunakan aljabar *max-plus*, kemudian dihitung nilai eigen dan vektor eigen yang bersesuaian untuk mendapatkan waktu tercepat dalam menyelesaikan proses produksi buku, sehingga mempermudah pihak percetakan dalam menentukan kesepakatan waktu pengambilan dengan pihak konsumen.

## 2. KAJIAN TEORI

### 2.1 Teori-teori yang digunakan

**Definisi 2.1.1** (Baccelli dan Olsder, 2001) *Aljabar Max-Plus terdiri dari dua operasi,  $\oplus$  dan  $\otimes$  yang didefinisikan pada himpunan  $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}_{max}$ :*

$$a \oplus b = \max(a, b),$$

$$a \otimes b = a + b.$$

*Operasi  $\oplus$  disebut penjumlahan aljabar max-plus dan operasi  $\otimes$  disebut perkalian aljabar max-plus. Elemen netral penjumlahan max-plus adalah  $-\infty$  yang dinotasikan dengan  $\varepsilon$ . Elemen netral perkalian adalah 0 yang dinotasikan dengan  $e$ .*

*Operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  pada  $\mathbb{R}_{max}$  dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks dalam  $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ .  $\mathbb{R}_{max}^{m \times n} := \{A = (A_{ij}) \mid A_{ij} \in \mathbb{R}_{max}, i = 1, 2, 3, \dots, m \text{ dan } j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ .*

**Definisi 2.1.2** (Subiono, 2015:8) *Penjumlahan matriks  $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ , didefinisikan oleh:*

$$[A \oplus B]_{ji} = [A]_{ij} \oplus [B]_{ji} = \max\{[A]_{jk}, [B]_{ki}\} \text{ untuk } i \in n \text{ dan } j \in m.$$

**Definisi 2.1.3** (Subiono, 2015:9) *Hasil kali matriks  $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times l}$  dan  $B \in \mathbb{R}_{max}^{l \times n}$  didefinisikan oleh:*

$$[A \otimes B]_{ji} = \bigoplus_{k=1}^l ([A]_{jk} \otimes [B]_{ki}) = \max_{k=1, \dots, l} \{[A]_{jk} + [B]_{ki}\}.$$

**Definisi 2.1.4** (Rudhito, 2016:38) *SLMI Autonomous adalah SLMI yang mempunyai persamaan berikut:*

$$x(k+1) = A \otimes x(k)$$

$$y(k) = C \otimes x(k)$$

*Untuk  $k = 1, 2, 3, \dots$ , dengan kondisi awal  $x(0) = x_0 \neq \varepsilon$ ,  $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_{max}^n$ ,  $C \in \mathbb{R}_{max}^{1 \times n}$ .*

**Definisi 2.1.5** Nilai eigen dan vektor eigen max-plus (Schutter dalam Rudhito, 2016:38)

*Diberikan  $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ . Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$  disebut nilai eigen max-plus matriks  $A$  jika terdapat suatu vektor  $v \in \mathbb{R}_{max}^n$  dengan  $v \neq \varepsilon_{n \times 1}$  sehingga  $A \otimes v = \lambda \otimes v$ . Vektor  $v$  tersebut disebut vektor eigen max-plus matriks  $A$  yang bersesuaian dengan  $\lambda$ .*

**Definisi 2.1.6** Teori Graf (Rudhito, 2016:83)

*Suatu graf didefinisikan sebagai suatu pasangan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah suatu himpunan berhingga tak kosong yang anggotanya disebut titik (vertices) dan  $E$  adalah suatu himpunan pasangan (tak terurut) titik-titik. Anggota  $E$  disebut rusuk (edges). Suatu graf berarah didefinisikan sebagai suatu pasangan  $(V, A)$  dengan  $V$  adalah suatu himpunan titik-titik dan  $A$  adalah suatu himpunan pasangan terurut titik-titik.*

Anggota  $A$  disebut busur (arc). Untuk busur  $(v, w) \in A$ ,  $v$  disebut titik awal busur dan  $w$  disebut titik akhir busur.

**Definisi 2.1.7** (Graf bobot (Precedence Graph) (Schutter, 1996)  
 Diberikan  $\in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ . Graf bobot dari  $A$  adalah graf berarah berbobot  $G(A) = (V, A)$  dengan  $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  dan  $A = \{(j, i) \mid w(i, j) = A_{ij} \neq \varepsilon\}$ .

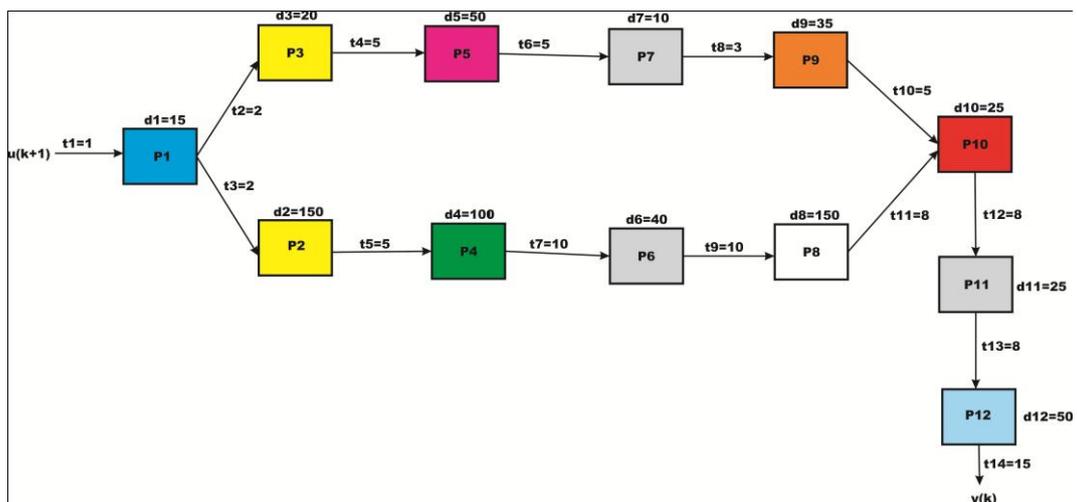
### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 3.1 Sistem Produksi Sederhana Buku.

Buku yang diproduksi dalam penelitian ini adalah buku dengan ukuran A4, jenis kertas HVS 70 gsm, jumlah halaman 320, isi hitam putih, dan untuk cover buku menggunakan kertas *Ivory plus* dengan laminating *doff*. Produksi buku terdiri dari beberapa proses, yaitu mulai dari proses pra-cetak (setting komputer, rekam *plate*, persiapan bahan kertas), proses cetak pada mesin *offset* dengan *Plate* cetak dipasang di atas roll yang terdapat di atas mesin, sedangkan bahan kertas dipasang pada tempat mendatar di bawah roll tersebut, tinta pun dipersiapkan pula pada tempatnya. Setelah terpasang *plate* cetak, roll berputar di atas bahan kertas memindahkan naskah yang ada di *plate* cetak ke bahan kertas tersebut melalui tinta, dan kertas pun keluar satu persatu berisi naskah yang sudah jadi, kertas masih berukuran lebar seperti Koran (sesuai dengan ukuran *plate*). Setelah proses cetak selesai, tahap selanjutnya adalah finishing yang terdiri dari: proses potong setelah cetak, proses penyusunan, proses Jilid (*Binding*), pemotongan atau merapikan tepi-tepi buku, dan proses penyampulan (*Sring*) inilah tahap akhir dari produksi buku.

#### 3.2 Bagan Produksi Sederhana Buku.

Berikut ini adalah proses produksi buku yang disajikan dalam graf.



Gambar 1. Graf sistem produksi sederhana buku

Keterangan:

$t_i$  = waktu pemindahan bahan yang akan diproses,  $i = 1, 2, 3, \dots, 18$ .

$d_1$  = waktu saat naskah (isi dan cover) diprint menggunakan kertas kalkir di mesin print.

- $d_2$  = waktu saat pembuatan plat cetak (*master plate*) isi di mesin cetak plat I.  
 $d_3$  = waktu saat pembuatan plat cetak (*master plate*) cover di mesin cetak plat II.  
 $d_4$  = waktu saat mencetak isi buku di mesin cetak isi (hitam putih).  
 $d_5$  = waktu saat mencetak cover buku di mesin cetak warna.  
 $d_6$  = waktu saat pemotongan lembaran naskah yang selesai cetak dari mesin cetak isi.  
 $d_7$  = waktu saat pemotongan lembaran cover yang selesai cetak dari mesin cetak warna.  
 $d_8$  = waktu penyusunan isi buku sekaligus penyortiran di ruang penyusunan (manual menggunakan tangan).  
 $d_9$  = waktu laminating cover buku (jenis laminating glossy) di mesin laminating.  
 $d_{10}$  = waktu saat binding (jilid) menggunakan mesin binding.  
 $d_{11}$  = waktu pemotongan atau merapikan tepi buku menggunakan mesin potong III.  
 $d_{12}$  = waktu penyampulan dengan plastik (memasukan plastic masih manual) pengepressan menggunakan mesin press (*sring*).  
 $P_1$  = proses naskah (*isi dan cover*) diprint menggunakan kertas kalkir di mesin print.  
 $P_2$  = proses pembuatan plat cetak (*master plate*) isi di mesin cetak plat I.  
 $P_3$  = proses pembuatan plat cetak (*master plate*) cover di mesin cetak plat II.  
 $P_4$  = proses saat mencetak isi buku di mesin cetak isi (hitam putih).  
 $P_5$  = proses saat mencetak *cover* buku di mesin cetak warna.  
 $P_6$  = proses saat pemotongan lembaran naskah yang selesai cetak dari mesin cetak isi.  
 $P_7$  = proses saat pemotongan lembaran *cover* yang selesai cetak dari mesin cetak warna.  
 $P_8$  = proses penyusunan isi buku sekaligus penyortiran di ruang penyusunan (manual menggunakan tangan).  
 $P_9$  = proses laminating *cover* buku (jenis laminating *doff*) di mesin laminating.  
 $P_{10}$  = proses saat binding (*jilid*) menggunakan mesin binding.  
 $P_{11}$  = proses pemotongan atau merapikan tepi buku menggunakan mesin potong III.  
 $P_{12}$  = proses penyampulan dengan plastik (memasukan plastik masih manual) , pengepressan menggunakan mesin press (*sring*).

### 3.3 Model Max-Plus Produksi Buku.

Terdapat 12 unit pemrosesan hasil modifikasi, pada sistem produksi buku. Pemodelan tersebut bertujuan untuk mencari waktu proses  $P_1, P_2$  hingga  $P_{12}$ . Selanjutnya, proses produksi buku tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut :

1.  $u(k + 1)$  : waktu saat bahan baku dimasukkan ke sistem untuk pemrosesan ke- $(k + 1)$ .
2.  $x_i(k)$  : waktu saat unit pemrosesan ke- $i$  mulai bekerja untuk pemrosesan ke- $k$ , dengan waktu pemrosesan sebesar  $d_i$ .
3.  $y(k)$  : waktu saat produk buku ke- $k$  yang diselesaikan meninggalkan sistem.

Berdasarkan graf gambar 1, maka diperoleh model max-plus dari system produksi buku sebagai berikut.

$$x_1(k + 1) = u(k + 1) \otimes 1 \oplus x_1(k) \otimes 15$$

$$x_2(k + 1) = u(k + 1) \otimes 18 \oplus x_1(k) \otimes 32 \oplus x_2(k) \otimes 150$$

$$x_3(k + 1) = u(k + 1) \otimes 18 \oplus x_1(k) \otimes 32 \oplus x_3(k) \otimes 20$$

$$x_4(k + 1) = u(k + 1) \otimes 173 \oplus x_1(k) \otimes 187 \oplus x_2(k) \otimes 305 \oplus x_4(k) \otimes 100$$

$$x_5(k + 1) = u(k + 1) \otimes 43 \oplus x_1(k) \otimes 57 \oplus x_3(k) \otimes 45 \oplus x_5(k) \otimes 50$$

$$x_6(k + 1) = u(k + 1) \oplus 283 \oplus x_1(k) \otimes 297 \oplus x_2(k) \otimes 415 \oplus x_4(k) \otimes 210 \oplus x_6(k) \otimes 40$$

$$x_7(k + 1) = u(k + 1) \otimes 98 \oplus x_1(k) \otimes 112 \oplus x_3(k) \otimes 99 \oplus x_5(k) \otimes 105 \oplus x_7(k) \otimes 10$$

$$x_8(k + 1) = u(k + 1) \oplus 323 \oplus x_1(k) \otimes 337 \oplus x_2(k) \otimes 455 \oplus x_4(k) \otimes 250 \oplus x_6(k) \otimes 80 \oplus x_8(k) \otimes 150$$

$$x_9(k + 1) = u(k + 1) \oplus 111 \oplus x_1(k) \otimes 125 \oplus x_3(k) \otimes 112 \oplus x_5(k) \otimes 118 \oplus x_7(k) \otimes 123 \oplus x_9(k) \otimes 3$$

$$x_{10}(k + 1) = u(k + 1) \oplus 481 \oplus x_1(k) \otimes 495 \oplus x_2(k) \otimes 603 \oplus x_3(k) \otimes 162 \oplus x_4(k) \otimes 408 \oplus x_5(k) \otimes 158 \oplus x_6(k) \otimes 238 \oplus x_7(k) \otimes 163 \oplus x_8(k) \otimes 303 \oplus x_9(k) \otimes 75 \oplus x_{10}(k) \otimes 25$$

$$x_{11}(k + 1) = u(k + 1) \oplus 514 \oplus x_1(k) \otimes 528 \oplus x_2(k) \otimes 636 \oplus x_3(k) \otimes 195 \oplus x_4(k) \otimes 441 \oplus x_5(k) \otimes 191 \oplus x_6(k) \otimes 271 \oplus x_7(k) \otimes 196 \oplus x_8(k) \otimes 336 \oplus x_9(k) \otimes 108 \oplus x_{10}(k) \otimes 58 \oplus x_{11}(k) \otimes 25$$

$$x_{12}(k + 1) = u(k + 1) \oplus 547 \oplus x_1(k) \otimes 561 \oplus x_2(k) \otimes 669 \oplus x_3(k) \otimes 228 \oplus x_4(k) \otimes 474 \oplus x_5(k) \otimes 224 \oplus x_6(k) \otimes 304 \oplus x_7(k) \otimes 229 \oplus x_8(k) \otimes 369 \oplus x_9(k) \otimes 141 \oplus x_{10}(k) \otimes 91 \oplus x_{11}(k) \otimes 58 \oplus x_{12}(k) \otimes 50$$

$$y(k) = x_{12}(k) \otimes 60, \text{ untuk } k = 1, 2, 3, \dots$$

Persamaan-persamaan evolusi tersebut dapat dituliskan dalam bentuk matriks aljabar *max-plus* agar lebih mudah untuk diselesaikan sebagai berikut.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 15 & \varepsilon \\ 32 & 150 & \varepsilon \\ 32 & \varepsilon & 20 & \varepsilon \\ 187 & 305 & \varepsilon & 100 & \varepsilon \\ 57 & \varepsilon & 45 & \varepsilon & 50 & \varepsilon \\ 297 & 415 & \varepsilon & 210 & \varepsilon & 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 112 & \varepsilon & 99 & \varepsilon & 105 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 337 & 455 & \varepsilon & 250 & \varepsilon & 80 & \varepsilon & 150 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 111 & \varepsilon & 125 & \varepsilon & 118 & \varepsilon & 123 & \varepsilon & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 495 & 603 & 162 & 408 & 158 & 238 & 163 & 303 & 75 & 25 & \varepsilon & \varepsilon \\ 528 & 636 & 195 & 441 & 191 & 271 & 196 & 336 & 108 & 58 & 25 & \varepsilon \\ 561 & 669 & 228 & 474 & 224 & 304 & 229 & 369 & 141 & 91 & 58 & 50 \end{bmatrix} \otimes x(k) \oplus \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \\ 18 \\ 173 \\ 43 \\ 283 \\ 98 \\ 323 \\ 111 \\ 481 \\ 514 \\ 547 \end{bmatrix} \otimes u(k + 1)$$

$$y(k) = [\varepsilon \ \varepsilon \ 60] \otimes x(k)$$

Dimana  $k = 1, 2, 3, \dots$ , dengan  $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_{12}(k)]^T$ , hasil tersebut, dapat juga dituliskan dengan:

$$x(k + 1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k + 1)$$

$$y(k) = C \otimes x(k)$$

Untuk  $k = 1, 2, 3, \dots$ , dengan  $x(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_{12}(k)]^T$ , keadaan awal  $x(0) = x_0$ . Dimana:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & \varepsilon \\ 32 & 150 & \varepsilon \\ 32 & \varepsilon & 20 & \varepsilon \\ 187 & 305 & \varepsilon & 100 & \varepsilon \\ 57 & \varepsilon & 45 & \varepsilon & 50 & \varepsilon \\ 297 & 415 & \varepsilon & 210 & \varepsilon & 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 112 & \varepsilon & 99 & \varepsilon & 105 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 337 & 455 & \varepsilon & 250 & \varepsilon & 80 & \varepsilon & 150 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 111 & \varepsilon & 125 & \varepsilon & 118 & \varepsilon & 123 & \varepsilon & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 495 & 603 & 162 & 408 & 158 & 238 & 163 & 303 & 75 & 25 & \varepsilon & \varepsilon \\ 528 & 636 & 195 & 441 & 191 & 271 & 196 & 336 & 108 & 58 & 25 & \varepsilon \\ 561 & 669 & 228 & 474 & 224 & 304 & 229 & 369 & 141 & 91 & 58 & 50 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 18 \\ 18 \\ 173 \\ 43 \\ 283 \\ 98 \\ 323 \\ 111 \\ 481 \\ 514 \\ 547 \end{bmatrix}$$

$$, C = [\varepsilon \ \varepsilon \ 60]$$

Dengan mengasumsikan bahwa bahan baku yang dimasukkan ke sistem yaitu, setelah produk selesai diproduksi ( $u(k + 1) = y(k)$ ), diperoleh evolusi dari keadaan sistem sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k + 1) \\ &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes y(k) \\ &= A \otimes x(k) \oplus B \otimes C \otimes y(k) \\ &= \bar{A} \otimes x(k) \end{aligned}$$

Dengan  $\bar{A} = A \oplus B \otimes C$

Untuk menghitung  $\bar{A}$  digunakan Aljabar *Max-plus Toolbox* dalam perangkat lunak Scilab 5.5.2 (dalam Subiono, 2015 hlm 90) dan diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 15 & \varepsilon & 61 \\ 32 & 150 & \varepsilon & 78 \\ 32 & \varepsilon & 20 & \varepsilon & 78 \\ 187 & 305 & \varepsilon & 100 & \varepsilon & 233 \\ 57 & \varepsilon & 45 & \varepsilon & 50 & \varepsilon & 103 \\ 297 & 415 & \varepsilon & 210 & \varepsilon & 40 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 343 \\ 112 & \varepsilon & 99 & \varepsilon & 105 & \varepsilon & 10 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 158 \\ 337 & 415 & \varepsilon & 250 & \varepsilon & 80 & \varepsilon & 150 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 383 \\ 111 & \varepsilon & 125 & \varepsilon & 118 & \varepsilon & 123 & \varepsilon & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 171 \\ 495 & 603 & 162 & 408 & 158 & 238 & 163 & 303 & 75 & 25 & \varepsilon & \varepsilon & 541 \\ 528 & 636 & 195 & 441 & 191 & 271 & 196 & 336 & 108 & 58 & 25 & \varepsilon & 574 \\ 561 & 669 & 228 & 474 & 224 & 304 & 229 & 369 & 141 & 91 & 58 & \varepsilon & 607 \end{bmatrix}$$

Kemudian sistem tersebut disimulasikan menggunakan program *MATLAB* (dalam Rudhito, 2016 hlm 52) sampai 10 iterasi dengan keadaan awal  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , diperoleh sebagai berikut:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 60 & 729 & 1336 & 1943 & 2550 & 3158 & 3764 & 4371 & 4978 & 5585 \\ 0 & 150 & 747 & 1354 & 1961 & 2568 & 3175 & 3782 & 4389 & 4996 & 5603 \\ 0 & 78 & 747 & 1354 & 1961 & 2568 & 3175 & 3782 & 4389 & 4996 & 5603 \\ 0 & 305 & 902 & 1509 & 2116 & 2723 & 3330 & 3937 & 4544 & 5151 & 5758 \\ 0 & 103 & 772 & 1379 & 1986 & 2593 & 3200 & 3807 & 4414 & 5021 & 5628 \\ 0 & 415 & 1012 & 1619 & 2226 & 2833 & 3440 & 4047 & 4654 & 5261 & 5868 \\ 0 & 158 & 827 & 1434 & 2041 & 2648 & 3255 & 3862 & 4469 & 5076 & 5683 \\ 0 & 415 & 1052 & 1659 & 2266 & 2873 & 3480 & 4087 & 4694 & 5301 & 5908 \\ 0 & 171 & 840 & 1447 & 2054 & 2661 & 3268 & 3875 & 4482 & 5089 & 5696 \\ 0 & 603 & 1210 & 1817 & 2424 & 3031 & 3638 & 4245 & 4852 & 5459 & 6066 \\ 0 & 636 & 1243 & 1850 & 2457 & 3064 & 3671 & 4278 & 4885 & 5492 & 6099 \\ 0 & 669 & 1276 & 1883 & 2490 & 3097 & 3704 & 4311 & 4918 & 5525 & 6132 \end{bmatrix}$$

$$y = [60 \ 729 \ 1336 \ 1943 \ 2550 \ 3157 \ 3764 \ 4371 \ 4978 \ 5585 \ 6192]$$

Hasil yang diperoleh belum periodik untuk keadaan awal  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Oleh karena itu, dapat dihitung vektor eigen yang bersesuaian dengan matriks  $\bar{A}$ . Menggunakan program MATLAB (dalam Rudhito, 2016 hlm 117) diperoleh vektor eigen fundamental ( $v$ ) dan nilai eigen ( $\lambda$ ) dari matriks  $\bar{A}$  adalah sebagai berikut :

$$v = [-547 \ -529 \ -529 \ -374 \ -504 \ -264 \ -449 \ -224 \ -436 \ -66 \ -33 \ 0]^T$$

Karena vektor eigen elemennya negatif, agar realistis dilakukan modifikasi terhadap vektor eigen  $v$ . Dibentuk vektor: (Rudhito, 2016 hal 125)

$$v^* = \beta \otimes v, \text{ dengan } \beta = -\min(v_i)$$

diperoleh  $\beta = 547$ , dengan menggunakan program *MATLAB* perhitungan  $v^* = \beta \otimes v$  diperoleh hasil sebagai berikut:

$$v^* = [0 \ 18 \ 18 \ 173 \ 43 \ 283 \ 98 \ 323 \ 111 \ 481 \ 514 \ 547]^T$$

Kemudian dalam perhitungan menggunakan *MATLAB* (dalam Rudhito, 2016 hlm 52), matriks awal diganti dengan menggunakan vektor eigen  $v^*$ , sehingga diperoleh: Barisan vektor keadaan sistem untuk  $k = 0,1,2,3, \dots$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 607 & 1214 & 1821 & 2428 & 3035 & 3642 & 4249 & 4856 & 5463 & 6070 \\ 18 & 625 & 1232 & 1839 & 2446 & 3053 & 3660 & 4267 & 4874 & 5481 & 6088 \\ 18 & 625 & 1232 & 1839 & 2446 & 3053 & 3660 & 4267 & 4874 & 5481 & 6088 \\ 173 & 780 & 1387 & 1994 & 2601 & 3208 & 3815 & 4422 & 5029 & 5636 & 6243 \\ 43 & 650 & 1257 & 1864 & 2471 & 3078 & 3685 & 4292 & 4899 & 5506 & 6113 \\ 283 & 890 & 1497 & 2104 & 2711 & 3318 & 3925 & 4532 & 5139 & 5746 & 6353 \\ 98 & 705 & 1312 & 1919 & 2526 & 3133 & 3740 & 4347 & 4954 & 5561 & 6168 \\ 323 & 930 & 1537 & 2144 & 2751 & 3358 & 3965 & 4572 & 5179 & 5786 & 6393 \\ 111 & 718 & 1325 & 1932 & 2539 & 3146 & 3753 & 4360 & 4967 & 5574 & 6181 \\ 481 & 1088 & 1695 & 2302 & 2909 & 3516 & 4123 & 4730 & 5337 & 5944 & 6551 \\ 514 & 1121 & 1728 & 2335 & 2942 & 3549 & 4156 & 4763 & 5370 & 5977 & 6584 \\ 547 & 1154 & 1761 & 2368 & 2975 & 3582 & 4189 & 4796 & 5403 & 6010 & 6617 \end{bmatrix}$$

Barisan output sistem untuk  $k = 1,2,3, \dots$

$$y = [607 \ 1214 \ 1821 \ 2428 \ 3035 \ 3642 \ 4249 \ 4856 \ 5463 \ 6070 \ 6677]$$

Dari hasil di atas, maka keadaan sistem telah periodik dengan periode sama dengan 607 (nilai eigen atau  $\lambda$ ). Di bawah ini akan ditunjukkan keadaan saat waktu awal yang terbaik untuk memulai masing-masing tahapan atau proses  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{12}$  aktif bekerja.

**Tabel 3.1** keadaan saat waktu awal sistem aktif

Proses	Fase atau Kejadian (dalam menit)			
	1	2	3	4
$P_1$	0	607	1214	1821
$P_2$	18	625	1232	1839
$P_3$	18	625	1232	1839
$P_4$	173	780	1387	1994
$P_5$	43	650	1257	1864
$P_6$	283	890	1497	2104
$P_7$	98	705	1312	1919
$P_8$	323	930	1537	2144
$P_9$	111	718	1325	1932
$P_{10}$	481	1088	1695	2302
$P_{11}$	514	1121	1728	2335
$P_{12}$	547	1154	1761	2368

#### 4. KESIMPULAN

Dari penelitian tentang pemodelan ini, diperoleh model yang diterapkan dalam proses produksi buku yaitu  $x(k + 1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k + 1)$  untuk  $k = 1, 2, 3, \dots, 12$ . Dari pembahasan dapat diketahui bahwa dalam memproduksi buku sejumlah 250 eksemplar dengan jenis kertas HVS A4 dan ketebalan 320 halaman memerlukan waktu produksi selama 607 menit. Dengan Kata lain proses  $P_{12}$  dapat mulai aktif bekerja setelah  $t = 547$  menit dan waktu pemrosesan di  $P_1$  adalah  $d_{12} = 60$  menit, sehingga diperoleh sebuah jadwal dari setiap sistem aktif secara teratur dengan periode 607 menit atau 10 jam 7 menit.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anindiati P.P & Cecilia Heru P.(2016). *Penjadwalan Proses Produksi Topeng Batik Menggunakan Aljabar Max-Plus*. Prosiding Seminar Nasional : Universitas Sanata Dharma.
- [2] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J. & Quadrat, J. P. *Shynchronization and Linearity*. John Wiley & Sons. New York. 2001.
- [3] M. Andy Rudhito. (2016). *Aljabar Max-Plus dan Penerapannya*. Program Studi Pendidikan Matematika FKIP, Universitas Sanata Dharma Yogyakarta.
- [4] Maria Rettian A.S. & Paskalia Pradanti. (2016). *Penerapan Aljabar Max-Plus pada Sistem Produksi Sederhana Tas Kulit*. Prosiding Seminar Nasional Aljabar:Universitas Sanata Dharma.
- [5] Schutter, B. De. 1996. *Max-Algebraic System Theory for Discrete Event Systems*. PhD Thesis. Department of Electrical Engineering Katholieke Universiteit Leuven. Leuven.

- [6] Schutter, B. D. and Boom, T. 2000. "*Model Predictive Control for Max-plus-linear Discrete-event Systems: Extended Report & Addendum*". *Technical report bds: 99-10a*. Faculty of Information Technology and System. Delft University of Technology. Delph.
- [7] Subiono. (2015). *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.