数学教材としてのヤング図形の活用

石　井　基　裕

A mathematics material concerning Young diagrams

Motohiro ISHII

群馬大学教育学部紀要　自然科学編
第 66 巻　23—27 頁　2018　別刷

群馬大学教育学部紀要　自然科学編　第 66 巻　23―27 頁　2018

数学教材としてのヤング図形の活用

石　井　基　裕
群馬大学教育学部数学教育講座
（2017 年 9 月 27 日受理）

A mathematics material concerning Young diagrams

Motohiro ISHII
Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
（Accepted on September 27th, 2017）

1　はじめに

組合せ数学における基本的な研究対象の一つである**ヤング図形**は高度な数学的知識を必要とすること無く取り扱うことが出来る非常に単純な図形である. それにも関わらずヤング図形は数学や数理物理学の様々な場面に登場し重要な役割を果たしている. この様なヤング図形の特性を活かして中学校・高等学校における数学教材として利用することで, 生徒達に数学の奥深さや最先端の数学研究の概観を示すことは出来ないだろうか. その様な試みの一つとして, 筆者は群馬大学教育学部附属中学校の第 2 学年 4 クラスの生徒を対象としてヤング図形を題材とした数学特別授業を平成 29 年 1 月 27 日, 2 月 3 日に行った. そして平成 29 年 2 月 27 日に行われた平成 28 年度第 7 回数学科研修院においてその授業実践の内容について報告した.

授業ではまずヤング図形の定義といくつかの例を示した後, 研究課題として自然数 n を固定した時に n 箱のヤング図形を経由する列の個数の数え上げ問題を取り上げた (問題 3). 生徒達には $n = 1, 2, 3, 4$ の場合に実際に計算を行わせるとともに, 一般の n の場合にはどの様な結果になるのかを予想させた. そして最後にその結果が実は $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ (n の階乗) であることを述べて授業を終了した.

箱の数 n が小さい簡単な状況から考察していくことで, 計算の速さの個人差はあるものの, どの生徒も自分で考えた方法で取り組む様子が窺えた. 多くの生徒は正しい結論を予想出来ており, その一般的かつ簡潔な結論に対して驚嘆している様子であった. 授業後には何人かの生徒との質疑応答があり, 生徒が独自に設定した数え上げ問題を提示して, 結論は間違っていたものの, 帰納的に考察して一般的な性質を予想するという方法を自発的に実践している場面もあった. 自然数の階乗は高校数学の内容であり多少発展的であったが, 附属中の担当教諭によって確率の授業の中で樹形図や場合の数との関連から簡単な補足説明が行われた.

本稿ではヤング図形の基本的な性質や整数の分割との関係を述べた後, 授業の中で述べることが出来なかった上記の研究課題に対する一般の n の場合の結論に対する証明を述べる. 特にその中で重要な役割を果たす**ロビンソン–シェンステッド対応**について詳述する.

2　整数の分割

1 以上の整数 n をいくつかの 1 以上 n 以下の整数の和 $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell$ $(1 \leqq a_1, a_2, \ldots, a_\ell \leqq n)$ の形に表示したものを n の**分割**といい, 各項を**和因子**, 項の数 ℓ を**長さ**とい

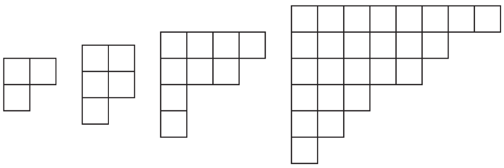
う．ただし和の順番を変えて得られる表示は互いに同一の分割を表すものとし, 特に断らない限り $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_\ell$ と大きい順に和因子が並んでいるものとする．また便宜上 0 の分割 0 も考えることにする ([AE04]).

例 1 (4 以下の整数の分割)**.**

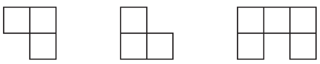
$$\begin{gathered} 0 \\ 1 \\ 2,\ 1+1 \\ 3,\ 2+1,\ 1+1+1 \\ 4,\ 3+1,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1 \end{gathered}$$

3 ヤング図形

ヤング図形 ([Y02]) とはいくつかの同じ大きさの正方形 □ を左端と上端を揃えて左方向と上方向には隙間が無い様に並べて得られる図形のことである．例えば,



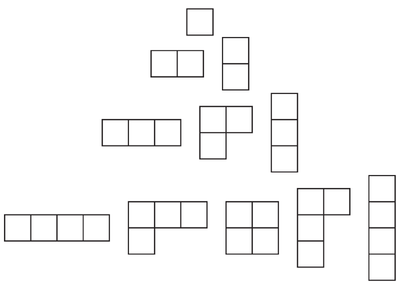
などである．ただし,



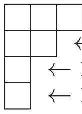
の様に左端や上端が揃っていなかったり, 隙間が空いていたりする図形はヤング図形とは呼ばず, 本稿では扱わない．また便宜上 0 箱のヤング図形も考察し, それを $\emptyset$ と表すことにする．

例 2 (4 箱以下のヤング図形)**.**

$$\emptyset$$

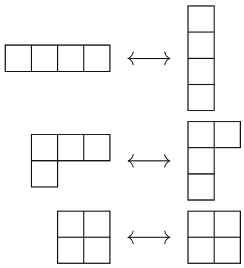


n の分割 $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_\ell$ が与えられると各 $1 \leqq i \leqq \ell$ について i 行目に a_i 箱を持つ n 箱のヤング図形を作ることが出来る．例えば $n = 7$ の分割 $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ に対応するヤング図形は次で与えられる:



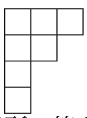
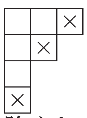
この様にして n の分割全体と n 箱のヤング図形全体とは一対一に対応することが分かる．例 1 と例 2 とを比較されたい．

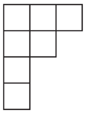
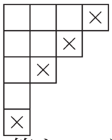
ヤング図形と整数の分割との対応の簡単な応用として, 任意の自然数 m, n について「長さが m 以下の n の分割」と「最大の和因子が m 以下の n の分割」とは同数存在することが分かる．例えば $m = 2,\ n = 4$ の場合, 「長さが 2 以下の 4 の分割」は $4,\ 3+1,\ 2+2$ の 3 通りであり, 「最大の和因子が 2 以下の 4 の分割」は $1+1+1+1,\ 2+1+1,\ 2+2$ の 3 通りである．これをヤング図形で表すと



となる．するとヤング図形の左上の頂点から斜め右下 45° に引いた直線に関する折り返しの操作によって互いに一対一に対応していることが分かり, このことから同数であることが従う．

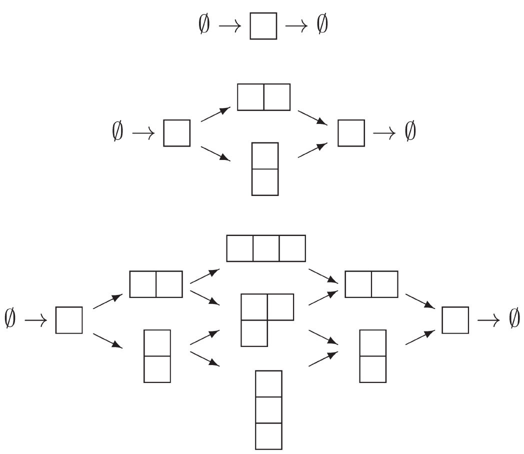
4 ロビンソン–シェンステッド対応

ヤング図形  において  の様に ⊠ で示した場所の箱を一つ取り除くと, その結果は再びヤング図形となる．同様にヤング図形

 において  の様に $\boxtimes$ で示した場所のいずれかに箱を一つ追加すると, その結果は再びヤング図形となる. この考え方を踏まえて次の問題を考える.

問題 3. 自然数 n を一つ固定する. 0 箱のヤング図形 $\emptyset$ から出発して箱を一つずつ追加していき n 箱のヤング図形に到達し, その後箱を一つずつ取り除いていき $\emptyset$ まで到達する様な列 *(*ここでは「**n 箱のヤング図形を経由する列**」と呼ぶことにする*)* は全部でいくつあるか？

例 4. $n = 1, 2, 3$ の場合に n 箱のヤング図形を経由する列を図示すると以下の様になり, それぞれ 1 通り, 2 通り, 6 通りの列があることが分かる. $n = 4$ の場合も同様に計算すると 24 通りの列があることが確認出来る.

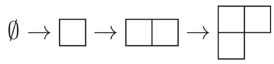


定理 5 ([R38, Sch61])**.** 任意の自然数 n について, n 箱のヤング図形を経由する列は全部で $n!$ 通り存在する.

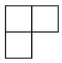
定理を証明するために「n 箱のヤング図形を経由する列」を別の扱い易い形に書き換える. そこでまず**標準盤**について述べる. n 箱のヤング図形 λ に対して型 λ の標準盤とは λ の各箱に 1 から n までの数字を右方向または下方向に進むと増加する様にちょうど一回ずつ記入したものを言う. 例えば次の様なものである:

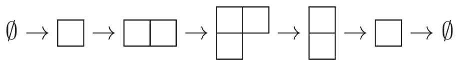
$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 5 & 8 \\ \cline{1-3} 7 \\ \cline{1-1} 9 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

実は, ヤング図形の増大 (減少) 列は標準盤と一対一に対応する. 例えば $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ という標準盤は, 記入されている数字を箱が増加した順番であると解釈すると

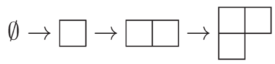


というヤング図形の増大列と対応する. 逆にヤング図形の増大列が与えられれば箱が増加した順番を記入することによって標準盤が得られる. ヤング図形の減少列は逆向きに見ると増大列と思えるので, 同様に標準盤と一対一に対応することが分かる. よって n 箱のヤング図形 λ を経由する列は型 λ の二つの標準盤の組と一対一に対応することが分かる.

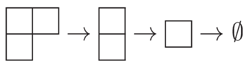
例 6. 3 箱のヤング図形 $\lambda =$  を経由する次の列



は前半の増大列

 $\longleftrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$

と後半の減少列

 $\longleftrightarrow \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$

とに分けて考えれば, 型 λ の標準盤の組

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}, \ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \right)$$

に対応する.

命題 7. 自然数 n について $\mathrm{Seq}(n)$ を n 箱のヤング図形を経由する列全体の集合, $\mathrm{ST}(\lambda)$ を型 λ の標準盤全体の集合とする. この時, $\mathrm{Seq}(n)$ と n 箱のヤング図形 λ に渡る直積集合 $\mathrm{ST}(\lambda) \times \mathrm{ST}(\lambda)$ の非交和 $\bigsqcup_{\lambda: n\text{箱}} \mathrm{ST}(\lambda) \times \mathrm{ST}(\lambda)$ とは一対一に対応する.

命題 7 より定理 5 を示すためには集合 $\bigsqcup_{\lambda:n\text{箱}} \mathrm{ST}(\lambda)\times\mathrm{ST}(\lambda)$ が $n!$ 個の元からなることを示せばよい. 一方, よく知られている様に数字 1 から n の並べ方は全部で $n!$ 通りである. 今, S_n を数字 1 から n の並べ方全体の集合とすれば, 定理 5 を示すためには S_n と $\bigsqcup_{\lambda:n\text{箱}} \mathrm{ST}(\lambda)\times\mathrm{ST}(\lambda)$ とが一対一に対応することを言えばよい.

例 8. $n=3$ の時

$$S_3=\{123,132,213,231,312,321\}.$$

以下では上述の一対一対応を与える**ロビンソン–シェンステッド対応**

$$S_n \to \bigsqcup_{\lambda:n\text{箱}} \mathrm{ST}(\lambda)\times\mathrm{ST}(\lambda),\ w\mapsto(P(w),Q(w))$$

について述べる ([F97, R38, Sag01, Sch61]).

$w=i_1i_2\cdots i_n\in S_n$ とする. この時 $P(w)$ は $\emptyset$ に順次 $i_1,i_2,\ldots,i_n$ を挿入することによって定義する:

$$P(w)=((\emptyset\leftarrow i_1)\leftarrow i_2\cdots)\leftarrow i_n$$

ただし, 標準盤 T に対して T に現れない数字 i を挿入する操作 $T\leftarrow i$ は次の様に帰納的に定義する (以下の説明では T に相異なる自然数が右方向・下方向に増加する様に記入されていることのみを仮定する):

(1) $T=\emptyset$ の時, $\emptyset\leftarrow i$ を $\boxed{i}$ として定義する.

(2) $T=\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a_1&a_2&\cdots&a_\ell\\ \hline\end{array}$ $(a_1<a_2<\cdots<a_\ell)$ の時,

(a) $a_\ell< i$ の場合, T の右端に $\boxed{i}$ を追加したもの

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline a_1&a_2&\cdots&a_\ell&i\\ \hline\end{array}$$

として $T\leftarrow i$ を定義する.

(b) $a_{k-1}<i<a_k$ を満たす k $(1\leqq k\leqq\ell)$ が存在する場合 (ただし $k=1$ の時は $a_{k-1}=0$ とする), まず a_k を i に置き換え, 次に 1 行目から取り除かれた a_k を 2 行目に置いて得られるもの

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1&a_2&\cdots&i&\cdots&a_\ell\\ \hline a_k\\ \cline{1-1}\end{array}$$

として $T\leftarrow i$ を定義する.

(3) T が二つ以上の行を持つ標準盤の時, まず (2) で述べた方法で 1 行目に i を挿入する. この時, もしも (2)-(a) の状況が起こる場合には 1 行目の右端に $\boxed{i}$ を追加したものとして $T\leftarrow i$ を定義する. また, もしも (2)-(b) の状況が起こる場合には 1 行目から取り除かれた a_k を 2 行目に挿入する. この操作を 2 行目以降に対しても繰り返し行う. つまり (2)-(b) の状況が起こる場合には取り除かれた数を一つ下の行に挿入する. これを (1) または (2)-(a) の状況に達するまで続ける. 最終的に得られるものとして $T\leftarrow i$ を定義する.

例 9. *(1)* $T=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array}$, $i=3$ の時

$$T\leftarrow i\ =\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 2&4\\ \hline\end{array};$$

まず 1 行目に 3 を挿入すると $1<3<4$ で *(2)-(b)* の状況なので 4 が取り除かれて, そこに 3 が置かれる. 次に 1 行目から取り除かれた 4 を 2 行目に挿入すると $2<4$ で *(2)-(a)* の状況なので 4 は 2 行目の右端に置かれ, これで操作が終了する.

(2) $T=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&5\\ \hline 3&6\\ \cline{1-2}\end{array}$, $i=2$ の時

$$T\leftarrow i\ =\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\ \hline 3&4\\ \cline{1-2} 6\\ \cline{1-1}\end{array};$$

まず 1 行目に 2 を挿入すると $1<2<4$ で *(2)-(b)* の状況なので 4 が取り除かれてそこに 2 が置かれる. 次に 1 行目から取り除かれた 4 を 2 行目に挿入すると $3<4<6$ で再び *(2)-(b)* の状況なので 6 が取り除かれて, そこに 4 が置かれる. 次に 2 行目から取り除かれた 6 を 3 行目

に挿入すると, 3 行目には箱が全く無く *(1)* の状況なので, 6 はそのまま 3 行目に置かれ, これで操作が終了する.

次に $Q(w)$ の定義を述べる. $Q(w)$ は $P(w)$ が $\emptyset$ から出発して順次 $i_1, i_2, \ldots, i_n$ を挿入していった時の成長の過程を記録した標準盤として定義する.

例 10. $w = 312$ に対する $P(w)$ を求めると,

$$\begin{aligned} P(w) &= ((\emptyset \leftarrow 3) \leftarrow 1) \leftarrow 2 \\ &= \left(\boxed{3} \leftarrow 1\right) \leftarrow 2 \\ &= \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \end{aligned}$$

となる. この時, 計算の過程で $P(w)$ は $\emptyset$ から出発して

$$\emptyset \to \boxed{3} \to \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} = P(w)$$

と成長している. これを記入されている数字を無視してヤング図形の増大列

$$\emptyset \to \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array}$$

と解釈した時に対応する標準盤 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$ として $Q(w)$ を定義する.

同じ型の n 箱の標準盤の組 (P, Q) に対して上記の対応を逆に辿れば $P = P(w)$, $Q = Q(w)$ を満たす $w \in S_n$ を一意的に求めることが出来る. よってロビンソン–シェンステッド対応は可逆であることが分かり, これで定理 5 が証明された.

例 11. $n = 3$ の場合にロビンソン–シェンステッド対応を書き下すと次の様になる:

$$\begin{aligned}
123 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}\right) \\
132 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}\right) \\
213 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}\right) \\
231 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}\right) \\
312 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}\right) \\
321 &\longleftrightarrow \left(\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}\right)
\end{aligned}$$

謝辞. 数学特別授業の機会を与えて下さいました群馬大学教育学部附属中学校に御礼申し上げます. 特に群馬大学教育学部附属中学校の数学科の木村謙太郎教諭には数学特別授業の日程調整や授業内容に関する事前打合せなど色々な面でお世話になりました. この場をお借りして御礼申し上げます.

参考文献

[AE04] G. E. Andrews and K. Eriksson, Integer Partitions, Cambridge University Press, Cambridge, 2004 (邦訳: 佐藤文広訳, 整数の分割, 数学書房, 2006).

[F97] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts, **35**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[R38] G. de B. Robinson, On representations of the symmetric group, Amer. J. Math. **60** (1938), 745-760.

[Sag01] B. E. Sagan, The Symmetric Group, Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **203**. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Sch61] C. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences, Canad. J. Math. **13** (1961), 179-191.

[Y02] A. Young, On quantitative substitutional analysis Ⅱ, Proc. London Math. Soc. (1) **34** (1902), 361-397.