Investigação em Educação Matemática

2015

Representações Matemáticas

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

Investigação em Educação Matemática 2015

Representações Matemáticas

Editores

Manuel Vara Pires

Rosa Tomás Ferreira

António Domingos

Cristina Martins

Helena Martinho

Isabel Vale

Nélia Amado

Susana Carreira

Teresa Pimentel

Leonor Santos

Sociedade
Portuguesa de
Investigação em
Educação
Matemática

Investigação em Educação Matemática 2015

Representações Matemáticas

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

ISSN: 2182-0023

Edição: João Carvalho Sousa.

Apoios: Instituto Politécnico de Bragança, Escola Superior de Educação de Bragança.

ÍNDICE

Tema do Encontro

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS

Leonor Santos
Presidente da SPIEM
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ulisboa.pt

As representações matemáticas constituem um importante meio para o desenvolvimento de uma aprendizagem matemática com compreensão, uma vez que podem potenciar o acesso de todos os alunos a ideias abstratas, à linguagem e ao raciocínio matemáticos. Poder-se-á afirmar que este tema tomou particular relevância na agenda da educação matemática nas últimas décadas. Por exemplo, o NCTM dá às representações um destaque especial no seu livro de 2000 (NCTM, 2007).

Mas do que falamos quando nos referimos às representações matemáticas? "Num sentido lato, uma representação é uma configuração que pode representar algo de alguma forma" (Golding, 2008, p. 178). Em particular, uma representação matemática é "um constructo mental ou físico que descreve aspetos da estrutura inerente a um conceito e a inter-relação entre este e outras ideias" (Tripathi, 2008, p. 438). Construídas através de regras definidas, as representações matemáticas são traduzidas por signos e pelas suas relações complexas (Duval, 2006).

Duval (2006) chama-nos a atenção, em particular, para a impossibilidade de se aceder aos objetos matemáticos através da observação, ao contrário do que se passa em outras ciências. A única forma possível de se aceder e de trabalhar com os objetos matemáticos é através das representações. Mas estas não são os objetos matemáticos, são apenas uma forma de os aceder, pelo que estão "no coração da atividade matemática" (Duval, 2006, p. 107).

De acordo com cada autor, assim podemos encontrar diferentes tipologias para caracterizar as representações matemáticas. Representações *internas* e *externas* distinguem as imagens mentais que criamos sobre os objetos e processos matemáticos das que usamos para comunicar com outros (Cuoco, 2001). Entre os diferentes sistemas de representações matemáticas podemos ter: o *verbal/sintático*, que inclui a capacidade de linguagem natural, competência lexicográfica, associação verbal, gramática e sintaxe; o *sistema de imagem*, visual/espacial; o *sistema táctil/cinestésico*; *os sistemas de códigos auditivos/rítmicos*; os *sistemas formais notacionais*, que incluem as configurações internas pessoais, sistemas simbólicos convencionais da matemática (numeração, notação algébrica,…) e modo de os manipular; os *sistemas de planificação, regulação e controlo executivo* que orientam na resolução de problemas, incluindo estratégias de raciocínio, heurísticas, e capacidades metacognitivas; e o *sistema afetivo*, onde se encontram as crenças e atitudes, bem como mudanças de estado ao longo da aprendizagem matemática (Golding, 2008). Outra tipologia muito referenciada diz respeito à *representação ativa*, que recorre a simulações e/ou materiais manipuláveis, estruturados ou não (geoplanos, figuras ou sólidos, cubos ou cubos de encaixe, espelhos, cordas,…); à *representação icónica*, que faz uso a imagens mais ou menos estruturadas (desenho, esquema, diagrama – representação visual que apresenta informações num formato espacial); e a *representação simbólica*, que recorre a símbolos que envolvem códigos (numerais, sinais, fórmulas, expressões, escrita simbólica matemática, …) (Bruner, 1999).

É, contudo, de assinalar que, embora os professores de matemática estejam muito familiarizados com as representações formais da matemática, tal não acontece com os alunos (Webb, Boswinkell, & Dekker, 2008). O tempo utilizado pelos professores para os alunos trabalharem com representações de nível mais informal, como sejam as representações icónicas, através de experiências de aprendizagem que tenham para estes sentido é essencial para garantir posteriormente um uso e prática com significado de representações matemáticas simbólicas (Canavarro & Pinto, 2012). Para além disso, "as ideias matemáticas são potenciadas através de representações múltiplas, que servem não apenas como ilustrações ou estratégias pedagógicas, mas forma uma parte significativa do conteúdo matemático a aprender e serve de apoio ao raciocínio matemático" (NRC, 2001, p. 94). Mas os alunos podem usar várias representações matemáticas de modo procedimental sem, contudo, compreenderem o seu significado (Abrahamson, 2006).

Por seu turno, muitos professores têm também dificuldades na compreensão de várias representações matemáticas (e.g., Ma, 1999). No entanto, o domínio das representações matemáticas é essencial para um conhecimento pedagógico do conteúdo sólido, na aceção de Shulman (1986). O uso que os professores fazem das várias representações influencia o que os alunos conseguem fazer e compreender com elas. Os professores necessitam proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem que os ajude a dar sentido às representações que utilizam, procurando interligar os vários tipos de representações. Além disso, a discussão coletiva acerca do uso de várias representações para lidar com uma mesma situação matemática ajuda os alunos a compreender a estrutura matemática por trás de cada representação e a perceber como é que as várias representações se interligam (Abrahamson, 2006).

Em suma, as representações matemáticas não são apenas meios de comunicação, mas igualmente de construção de conhecimento. Deste modo, a importância das representações matemáticas justifica que se tenha escolhido este tema para o Encontro de Investigação em Educação Matemática que se realizou na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, nos dias 24 e 25 de outubro de 2015. A presente publicação resulta dos textos finais de versões sujeitas a um processo de revisão por pares das comunicações e pósteres apresentados e aceites. Organiza-se segundo a estrutura do programa. Começa com os textos relativos a dois momentos plenários: a conferência plenária que discute a importância do papel de múltiplas representações da álgebra para uma aprendizagem matemática com compreensão, e o painel que procura confrontar e discutir diversos olhares e perspetivas sobre o tema das representações matemáticas. Em seguida apresenta os diferentes textos produzidos, agrupados por grupo de discussão. Três grupos de discussão foram constituídos: *As representações e a aprendizagem matemática*, *As representações e o conhecimento profissional dos professores*, e *As representações e as práticas de ensino e recursos*. Contamos que o contributo dado pelos diversos autores para a publicação da Investigação em Educação Matemática, Representações matemáticas, possa inspirar e impulsionar a continuação da investigação nesta área da educação matemática.

Referências bibliográficas

Abrahamson, D. (2006). *Mathematical representations as conceptual composites: Implications for design*. Paper presented at the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Merida, Mexico.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante, 21*(2), 51-79.

Cuoco, A. (2001). Preface. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. ix-xiii). Reston: NCTM.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131 (DOI: 10.1007/s10649-006-0400-z)

Golding, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-200). New York: Routledge.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM. (obra original em inglês, publicada em 2000)

National Research Council (NRC) (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. In J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.), *Mathematics Learning Study Committee, Centre for Education, Division of Behavioral and Social Sciences for Education*. Washington, DC: National Academy Press.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research, 15*(2), 4-14.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-444.

Webb, D., Boswinkell, N. & Dekker, T. (2008) Beneath the tip of the iceberg. Using representations to support student understanding. *Mathematical Teaching in the Middle School, 14*(2), 110-113.

Conferência Plenária

ARITMÉTICA, ÁLGEBRA, FUNÇÕES E REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS ATRAVÉS DO CURRÍCULO ESCOLAR[1]

Analúcia D. Schliemann

Tufts University, Medford, MA – Estados Unidos da América

O ensino e aprendizagem da álgebra constituem uma das áreas mais problemáticas do currículo escolar. Alunos da escola secundária apresentam várias dificuldades nesta área (Bednarz, 2001; Bednarz & Janvier, 1996; Booth, 1984; Filloy & Rojano, 1989; Kieran, 1981, 1985; Sfard & Linchevsky, 1994; Steinberg, Sleeman, & Ktorza, 1991; Vergnaud, 1985). Tais dificuldades foram, por muito tempo, atribuídas a uma possível imaturidade cognitiva e ao inerente caráter abstrato da álgebra (ver, por exemplo, Collis, 1975, Kuchemann, 1981 e MacGregor, 2001). No entanto, estudos mais recentes sobre o ensino e aprendizagem de álgebra a partir da escola primária (ver análise por Carraher & Schliemann, 2007 e no prelo) sugerem que as dificuldades de estudantes, ao serem introduzidos à álgebra no ensino médio e secundário, têm sua origem, como já propunha Booth (1988), num currículo que enfatiza primeiro o ensino de aritmética e, só mais tarde, o ensino de álgebra e numa abordagem que, como enfatizam Brenner et al. (1995) privilegia a manipulação de símbolos algébricos para a resolução de equações.

Quando iniciamos nossos estudos sobre a possibilidade de introduzir conceitos e representações algébricas desde os primeiros anos escolares, nossa primeira pergunta era: como promover, desde a escola primária, a aprendizagem da aritmética além de habilidades computacionais, de forma a preparar os estudantes para compreensão mais profunda de matemática, incluindo álgebra e outros tópicos do currículo?

Matemáticos e pesquisadores em educação matemática reconhecem que uma abordagem para o ensino de matemática que inclui o estudo de funções e suas representações pode enriquecer e contribuir, desde a escola elementar, para uma compreensão não apenas da álgebra mas também da aritmética, minimizando dificuldades que têm sua origem na ênfase quase exclusiva em computações e na sintaxe da álgebra (ver Kaput & Blanton, 2007; Booth, 1988; Carraher & Schliemann, 2007, 2015; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 1999, 2000, 2005; Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2007; Kaput, 1995; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2000, 2007, 2012 e Schoenfeld, 1995, entre outros).

O estudo de funções e suas representações constituem aspectos centrais da álgebra e do ensino da álgebra (ver, por exemplo, Barbosa, 2013; Dubinsky & Harel, 1992;

---

[1] Esta palestra baseia-se em estudos em sala de aula sobre álgebra, funções e represntações na escola primária (http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/default.asp), desenvolvidos com David W. Carraher, Bárbara M. Brizuela e outros. Estes estudos foram financiados pela National Science Foundation através dos auxílios à pesquisa de números 9722732, 9909591 e 0310171.

Schoenfeld, 1999; Schwartz & Yerushalmy, 1992). Reconhece-se também que o ensino de matemática que enfatiza relações, incluindo as relações funcionais (ver Carraher & Schliemann, no prelo e Teixidor-i-Bigas, Carraher & Schliemann, 2012) pode promover uma melhor compreensão sobre operações aritméticas, frações, proporções e geometria, inter-relacionando estes tópicos como parte, na expressão utilizada por Vergnaud (1996), de um campo conceitual mais amplo.

A contribuição de uma abordagem para o ensino da álgebra com base em funções deve-se, em parte, à variedade de representações matemáticas para funções e ao fato de que equações e inequações podem ser interpretadas como comparações de funções e, como tal, podem ser resolvidas não apenas pela manipulação simbólica mas também geometricamente, através da comparação dos gráficos das funções em questão. Por outro lado, funções podem ser representadas verbalmente e podem emergir da consideração de relações entre quantidades físicas e situações da vida diária, o que constitui pontos de entrada importantes para o ensino de matemática, especialmente nas séries iniciais.

A importância do uso de representações múltiplas é enfatizada pelos organizadores deste encontro na introdução aos Grupos de Discussão, de forma clara e com base em extensa literatura sobre o tema. A contribuição do uso de representações não convencionais para resolução de problemas de matemática tornou-se evidente para nós em estudos sobre matemática no trabalho e na escola. Entrevistas com crianças e adultos com pouca ou nenhuma escolarização revelaram que, frequentemente, eles resolviam problemas de matemática em situações de trabalho mas não conseguiam resolver os mesmos problemas em situações semelhantes às da escola. Análises das estratégias usadas em cada uma das situações mostraram que, no trabalho, os vendedores de rua utilizavam representações mentais e orais e procedimentos próprios que, embora diferente dos procedimentos escolares, revelavam uma compreensão implícita de princípios matemáticos e da estrutura decimal do sistema monetário (Carraher, Carraher & Schliemann, 1982, 1985; Nunes Schliemann & Carraher, 1993). Em estudos sobre o uso de balanças de dois pratos para determinar o peso de mercadorias (Carraher, Schliemann & Carraher, 1988) descobrimos também que vendedores de rua resolviam situações representadas na balança que correspondiam a equações com variáveis nos dois lados do sinal de igualdade.

Por outro lado, as operações aritméticas podem ser interpretadas como funções e, como tal, atividades envolvendo funções podem ser desenvolvidas desde a escola primária (Carraher & Schliemnn, 2007, no prelo; Carraher, Schliemann & Brizuela, 1999, 2000, 2005; Schliemann, Carraher & Brizuela, 2007). Multiplicação por 7, por exemplo, é construída como uma relação de um conjunto de valores (inputs) para outro conjunto de valores (outputs) de forma que a cada input corresponde um output. Na medida em que os estudantes trabalham com relações aritméticas entre conjuntos de valores, ao invés de apenas memorizar resultados de computações específicas, eles podem considerar funções lineares como 7x+b e discutir e compreender propriedades gerais das operações aritméticas. A compreensão de funções permite introduzir o estudo de equações como comparações entre duas funções. Por exemplo, 5+x=8 pode ser tratada como a comparação entre f(x)=5+x e g(x)=8. Neste caso, apenas a solução x=3 satisfaz a equação; todos os outros valores de x falsificam a equação. Isto permite unificar e inter-relacionar o estudo e aprendizagem de equações e inequações.

O ensino e a aprendizagem de matemática que privilegia relações e funções permite também que, a partir da análise de situações, enunciados verbais, e quantidades no mundo físico e das representações intuitivas propostas pelos estudantes, as representações algébricas convencionais como tabelas de funções, reta numérica, gráficos Cartesianos e notações algébricas, sejam introduzidas como representações alternativas dos mesmos conceitos matemáticos.

Naturalmente, as ideias discutidas acima e adotadas, pelo menos em parte, por propostas de currículos de matemática (ver National Council of Teachers of Mathematics Standards, 2000 para os Estados Unidos), precisavam ser validadas por estudos empíricos em sala de aula.

Nossas entrevistas com crianças de 7 a 11 anos de idade (Schliemann, et al, 2007) sobre situações de comparações entre conjuntos de objetos apresentados concretamente, em diagramas, ou em enunciados verbais, já haviam demonstrado que, desde os sete anos de idade, as crianças compreendiam que a igualdade entre duas quantidades com número de elementos conhecidos ou desconhecidos permanece após transformações idênticas nas duas quantidades comparadas. No entanto, estudos e avaliações de intervenções escolares visando promover a representação de funções e o raciocínio algébrico eram raros. Para responder à pergunta sobre se crianças na escola primária poderiam desenvolver, em sala de aula, uma compreensão inicial de variáveis, funções, equações e suas múltiplas representações, iniciamos em1995 uma série de estudos longitudinais sobre o raciocínio algébrico e a representações de funções entre crianças de terceira à quinta série escolar.

Nesta palestra examinaremos exemplos e resultados desses estudos onde as crianças analisavam, discutiam e representavam situações e problemas verbais utilizando vários tipos de representações. As intervenções visavam introduzir, na sala de aula, os conceitos de variável, função e equação, utilizando diversas representações de funções, ou seja, descrições verbais, retas numéricas, tabelas de dados, gráficos e notação algébrica.

Álgebra, funções e representações na escola primária

Em nossos estudos desenvolvemos mais de cem atividades, cada uma com duração de 60 a 90 minutos. Essas atividades foram implementadas em três estudos longitudinais, com alunos da terceira à quinta série, em de uma a quatro classes de escolas públicas servindo populações de baixa renda na área de Boston, Massachusetts, EUA.

Detalhes sobre as lições e atividades nos três estudos encontram-se em Carraher & Schliemann, 2007, no prelo; Carraher, Schliemann, & Brizuela, 1999, 2000, 2005; Carraher, Schliemann, & Brizuela, & Earnest, 2006, no prelo; Carraher, Schliemann, &

Schwartz, 2007; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2000, 2007, 2012 e em http://ase.tufts.edu/education/earlyalgebra/materials.asp).

Descreveremos parte dessas atividades e seus resultados, com ênfase nas representações produzidas e adotadas pelos estudantes ao longo das intervenções. Para um dos estudos descreveremos também resultados coletados três anos após o fim da intervenção.

Variáveis e tabelas

No início da terceira série implementamos duas aulas sobre o conceito de função, utilizando "O Problema das Caixas de Bombons". Em uma das versões desta atividade, as crianças manipulavam duas caixas de bombons, representavam a situação e discutiam quantos bombons João e Mary teriam, a partir da seguinte descrição:

> João e Maria têm, cada um, uma caixa de bombons. As duas caixas contêm exatamente o mesmo número de bombons. Maria tem três bombons a mais em cima de sua caixa. Desenhe ou escreva alguma coisa que compare as quantidades de bombons de João e Maria.

Inicialmente as crianças tentavam adivinhar o número exato de bombons, algumas balançando as caixas ou avaliando o seu peso. Em seguida, o professor (um dos membros da equipe de pesquisa ou a professora da escola) pedia que representassem por escrito o que eles sabiam sobre a situação. A Figura 1 mostra exemplos das respostas a este pedido.

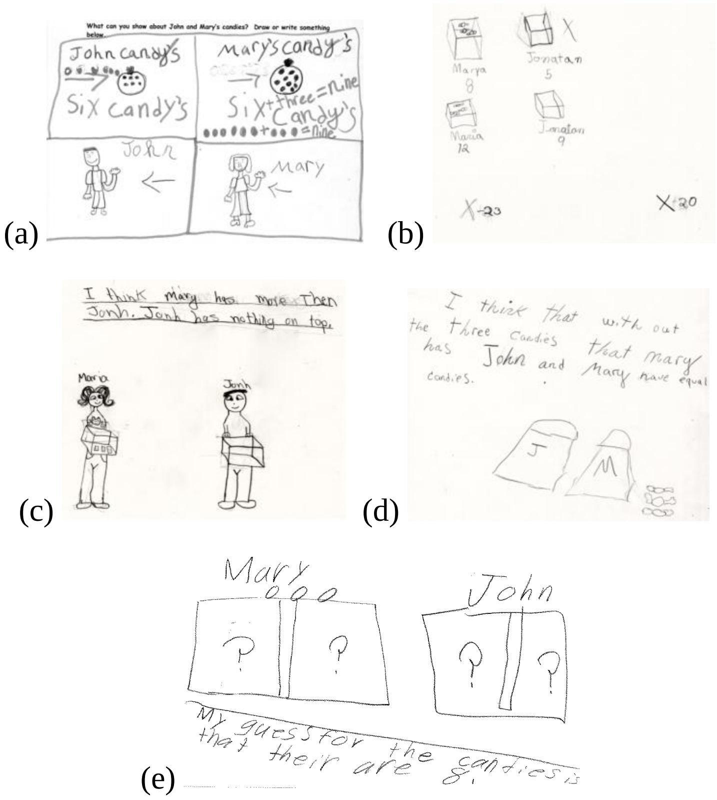


Figura 1: Exemplos de representações produzidas pelas crianças.

Ao representarem a situação, dois terços das crianças atribuíram um valor específico para a quantidade nas caixas (exemplo a), outras atribuíram mais de um valor para as caixas (exemplo b), e alguns não incluíram nenhum valor para o número de bombons em cada caixa, desenhando as caixas opacas (exemplo d), com letras para indicar talvez o dono da caixa (exemplo c) ou com uma interrogação em cada caixa (exemplo e).

O professor passava então a discutir as produções escritas das crianças, registando os valores propostos em uma tabela com uma coluna para o número de bombons na caixa de John, outra para o número total de bombons de Mary e uma terceira para a diferença entre os números de bombons dos dois protagonistas.

Quando uma criança dizia não saber ou não querer dar uma resposta, ou quando utilizava um ponto de interrogação, o professor discutia esses casos e enfatizava que, de fato, a caixa podia conter qualquer número de bombons. A essa altura propunha então representar qualquer número possível de bombons dentro da caixa por uma letra, N. As crianças facilmente aceitavam a sugestão. No entanto, algumas delas afirmavam que N era um número como nove ou noventa ou o número 14 (a posição de N no alfabeto). Outras propunham atribuir o mesmo símbolo aos dois protagonistas da estória.

Também não era imediatamente evidente que alguém pudesse adicionar algo à *letra* para expressar o total de Maria como uma expressão matemática ou como uma função de N. Entretanto, após uma nova fase de discussão, algumas crianças propunham que, se John tinha N bombons, Maria tinha N+3 e que, qualquer que fosse a quantidade que John tinha, Mary tinha 3 a mais, ou que a diferença era sempre 3.

A reta numérica

Nas aulas seguintes as crianças passaram a trabalhar com retas numéricas, representando operações aditivas como movimentos ao longo de linhas que incluíam números positivos e negativos.

Após um período de familiarização com a reta numérica onde todos os valores eram conhecidos, introduzimos uma reta onde as posições eram identificadas como mostra a Figura 2. Os alunos expressaram operações aditivas nessa reta para solucionar problemas de adição e subtração onde o valor inicial era desconhecido.

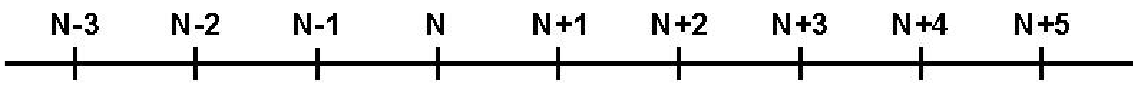


Figura 2: A reta numérica para qualquer valor de N.

Representando e resolvendo problemas de aritmética com variáveis e reta numérica

Na maioria das aulas que se seguiram, apresentávamos um problema verbal ou a descrição verbal de uma situação e pedíamos que as crianças, individualmente, representassem o problema ou situação por escrito. Essas produções espontâneas permitem analisar a evolução e adoção da notação algébrica pelas crianças.

Descreveremos a seguir uma atividade em que os alunos efetivavam operações sucessivas sobre valores desconhecidos. Na atividade, intitulada "Os Cofrinhos (The Piggy Bank Problem)," as crianças representavam os valores correspondendo a quantias que mudavam no decorrer de quatro dias:

> Mary e John têm, cada um, um cofrinho.
> No domingo eles tinham quantidades iguais de dinheiro no cofrinho.
> Na segunda feira, a avó deles veio visitá-los e deu 3 dólares para cada um.
> Na terça feira, eles foram a um livraria. Mary gastou 3 dólares em um livro de Harry Potter. John gastou 5 dólares em um calendário.
> Na quarta feira, John lavou o carro do vizinho e ganhou 4 dólares. Mary também ganhou 4 dólares cuidando de uma criança.
> Eles correram para colocar o dinheiro em seus cofrinhos.
> Na quinta feira Mary abriu seu cofrinho e descobriu que tinha 9 dólares.

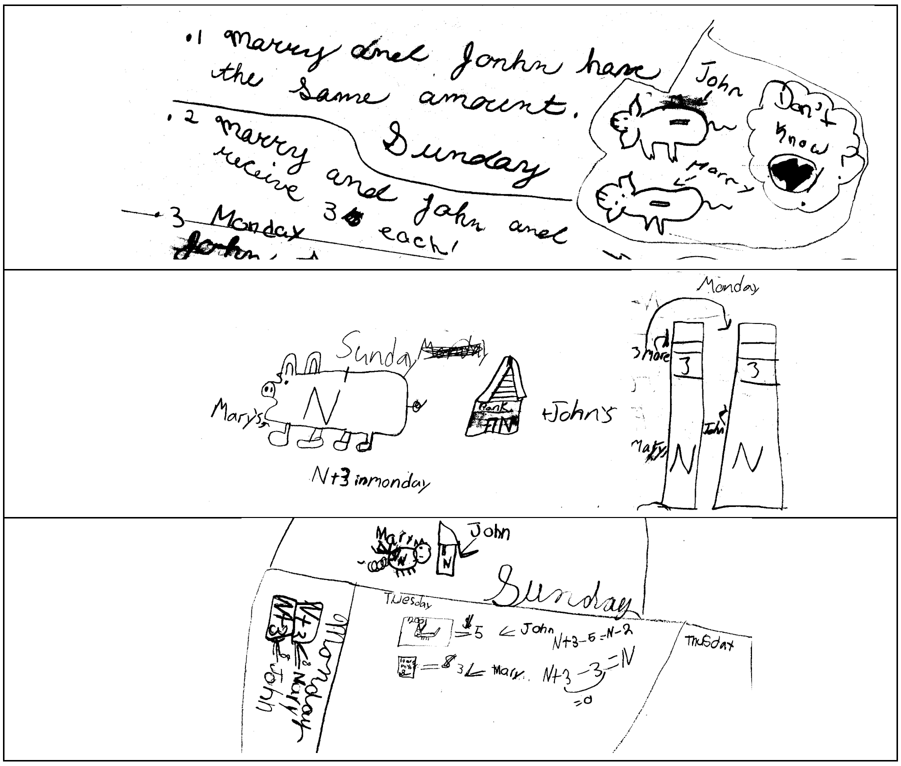


Figura 3: Três representações sobre a descrição do dinheiro nos cofrinhos.

No quadro superior da Figura 3, a criança escreveu que não sabia qual a quantia nos cofres e simplesmente escreveu N. No quadro no meio, a quantidade de dinheiro em cada cofre no domingo é representada como N e a quantidade na segunda feira como N+3. O quadro inferior mostra a relação entre as quantias na terça feira, representadas como N+3-5=N-2 para John e N=3-3=N para Mary.

Em outra aula, sobre "O Problema das Alturas," as crianças representavam a descrição seguinte:

> Tom é 4 polegadas mais alto que Maria. (Tom is 4 inches taller than Maria.)
> Maria é 6 polegadas mais baixa que Leslie. (Maria is 6 inches shorter than Leslie.)
> Desenhe a altura de Tom, a altura de Maria e a altura de Leslie.
> Mostre o que os números 4 e 6 representam.

No primeiro exemplo da Figura 4, vemos que a criança usou N e um gráfico de barras com altura não identificada para Maria e incluiu as partes correspondentes às diferenças entre as alturas acima das barras de dimensão desconhecida. No segundo exemplo uma das crianças utilizou, espontaneamente, a reta numérica com N como origem, atribuindo N à altura de Maria, N+4 à altura de Tom e N+7 à de Leslie (ver cópia da reta numérica produzida por esta criança no meio da Figura 5).

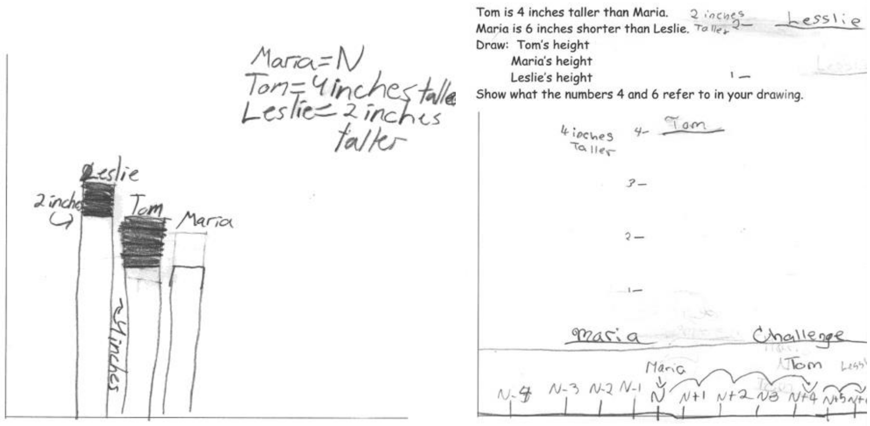


Figura 4: Representações para o problema das alturas.

Após discutir a representação de Maria como N no trabalho da aluna, a professora solicitava que os alunos considerassem a altura de Tom como N na reta numérica (ver reta superior na Figura 5) e, depois, a altura de Leslie como N (ver reta inferior). Em cada opção, pedia que as crianças determinassem a localização das alturas dos dois outros personagens da estória. As crianças localizaram os resultados em cada caso, relacionando as diferenças entre as alturas aos intervalos na reta numérica (Figura 5).

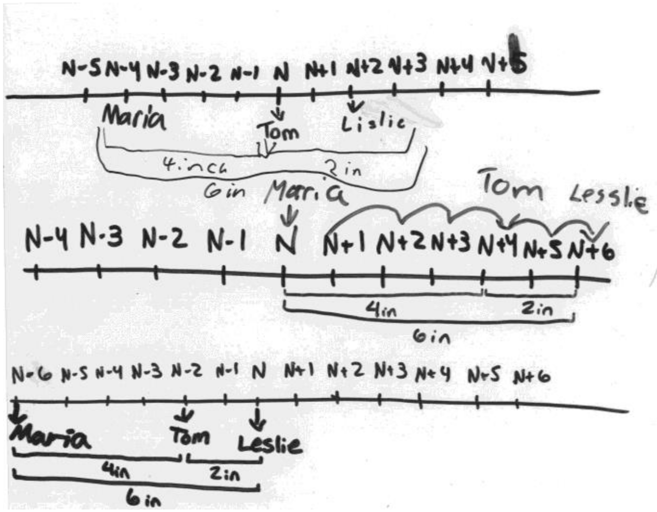


Figura 5: Representando as relações entre as três alturas.

Representando uma função linear: Mesas em um Restaurante

Em uma lição no segundo semestre da terceira série, sobre “O Problema das Mesas,” as crianças eram informadas que, em um restaurante, mesas quadradas eram colocadas juntas, em fileiras, e somente uma pessoa podia sentar-se em cada uma das bordas livres de cada mesa. Após desenharem fileiras de mesas, contando quantas pessoas podiam sentar em duas, três, quatro ou mais mesas juntas e registando em uma tabela o número de mesas e o número correspondente de pessoas, as crianças procuravam criar uma regra para calcular quantas pessoas podiam sentar em qualquer número de mesas. A Figura 6 mostra a produção de uma criança utilizando setas e notação algébrica para, corretamente, representar a função descrita verbalmente pela professora.

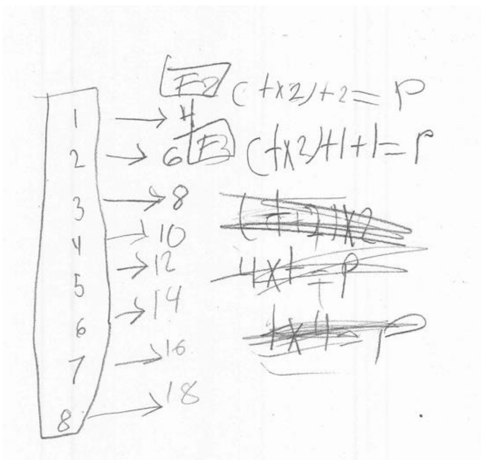


Figura 6: Representações criadas por uma criança.

Da reta numérica ao espaço Cartesiano

No final da terceira série, quando as crianças já estavam habituadas a representar funções simples como pulos ou deslocamentos ao longo de uma reta numérica, colocamos duas retas numéricas, paralelas, no chão da sala de aula e pedimos que elas representassem pares de valores correspondentes às quantidades na sentença “Para cada hora de trabalho você ganha R$ 2,00”. As crianças, individualmente, procuravam tocar, ao mesmo tempo, em dois pontos (um na linha representando número de horas e o outro na linha representando número de dólares). Isto era fácil para valores próximos mas extremamente difícil e mesmo impossível, quando a distância entre os pontos era grande (ver Figura 7). Esta dificuldade levava o professor a sugerir mover uma das linhas de forma a obter-se duas linhas perpendiculares com a origem no zero, criando-se assim o espaço Cartesiano, onde um único um ponto podia representar valores das duas linhas.

Figura 7: Criança tentando representar 5 horas de trabalho em uma linha e 10 dólares em outra linha paralela.

A representação Cartesiana requer a consideração de linhas perpendiculares a cada eixo, cada linha indo do valor em um eixo até cruzar com a linha perpendicular ao outro eixo para representar a coordenação dos dois valores. Com alguma ajuda, os alunos se deslocavam, a partir de cada eixo, colocando-se nos pontos que representavam as relações entre as variáveis (Figura 8). Em aulas subsequentes, eles interpretaram gráficos no plano Cartesiano em folhas de exercícios ou projetados na sala de aula e construíram tabelas e gráficos para representar relações de ganhos por hora, bombons por pessoa e distância por tempo.

Figura 8: Três crianças (no centro da foto) representando três pontos para a relação “2 dólares para cada hora de trabalho”.

Representando e resolvendo problemas verbais com tabelas, gráficos e equações

No final da quarta série, após várias atividades sobre gráficos no espaço Cartesiano utilizando lápis e papel, os alunos trabalharam com problemas onde se comparavam duas funções lineares. No primeiro destes problemas o professor apresentava e discutia com toda a classe a situação seguinte:

> "Mike e Robin têm, cada um, uma certa quantidade de dinheiro. Mike tem 8 dólares na sua mão e o resto do seu dinheiro em sua carteira. Robin tem três vezes a quantidade de dinheiro que Mike tem em sua carteira. Quem tem mais dinheiro, Mike ou Robin?"

De início, várias crianças achavam que Robin tinha mais dinheiro porque ele tinha "três vezes mais." Outras achavam que Mike tinha mais por que ele tinha 8 dólares.

As crianças então passavam a trabalhar individualmente para responder ao seguinte pedido: "Mostre quanto dinheiro Mike tem e faça o mesmo para Robin.".

As produções escritas dos alunos (ver exemplos na Figura 9) revelam o enorme progresso desde a lição sobre as Caixas de Bombons, onde dois terços das crianças atribuíam um único valor para o número de bombons em cada caixa. Na aula sobre o Problema das Carteiras, aproximadamente dois terços dos 63 estudantes no estudo usaram a representação algébrica para a situação e 12% deles produziram desenhos ou tabelas listando várias possibilidades. Apenas 22% representaram a situação atribuindo um único valor para a quantidade de dinheiro na carteira de Mike.

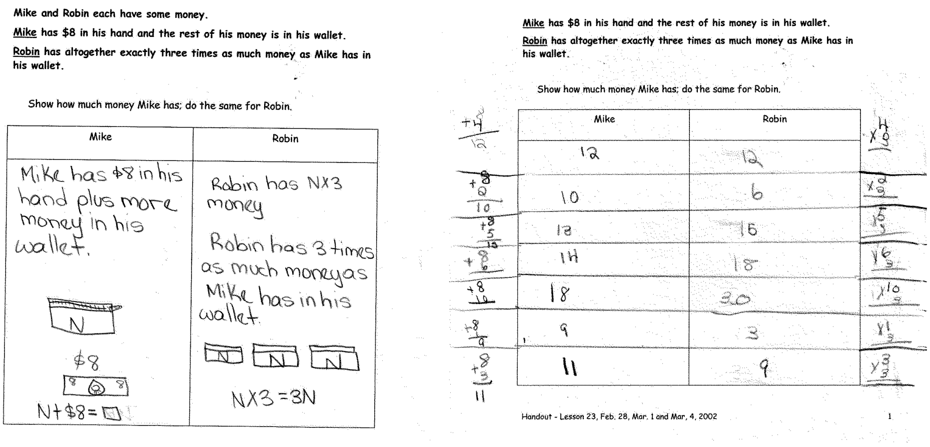


Figura 9: Exemplo de representação algébrica e de uso de tabelas para o problema das carteiras.

Em seguida, a partir das sugestões dos estudantes, o professor completava uma tabela com os valores possíveis para a quantidade de dinheiro na carteira e para os totais de Mike e de Robin (ver Figura 10). Com base nos valores da tabela, também com a colaboração de vários estudantes, eles construíram e analisaram os gráficos representando as quantidades de dinheiro que Mike e Robin poderiam ter em função da quantidade de dinheiro na carteira. Ao discutir e analisar os dados da tabela e os gráficos, as crianças percebiam que a resposta à questão “Quem tem mais dinheiro?” dependia da quantidade de dinheiro na carteira: com menos de quatro dólares, Mike tinha mais dinheiro; com 4 dólares na carteira, Mike e Robin tinham a mesma quantia; com mais de 4 dólares, Robin tinha mais dinheiro.

The Wallet problem

Mike and Robin each have some money.

Mike has $8 in his hand and the rest of his money is in his wallet.

Robin has altogether exactly three times as much money as Mike has in his wallet.

Complete the table:

W	W + 8	3W
In Mike's Wallet	Mike (in wallet and hand)	Robin
0	8	0
1	9	3
2	10	6
3	11	9
4	12	12
	13	
		18
		21
8		
	17	
		30
11		
	20	

Figura 10: A tabela completada na sala de aula.

Durante a atividade, as crianças consideraram a quantidade na carteira como variável, mencionavam que a diferença na inclinação dos gráficos se devia ao fato de que, quando o valor na carteira aumentava, a quantidade de dinheiro de Robin aumentava mais rapidamente que a quantidade de Mike, explicavam porque um gráfico começava na origem e outro no valor 8 para a quantidade de dinheiro que cada um poderia ter e inter-relacionavam as representações gráfica, tabular e verbal.

Esta e outras aulas da quarta série foram idealizadas para expressar a ideia que as equações representam comparações entre duas funções. Outro objetivo era preparar os alunos para trabalhar, na quinta série, com equações como objetos algébricos a serem diretamente manipulados.

Representando e resolvendo problemas como equações

Na última aula na quarta série, bombons em sacolas transparentes e tubos e caixas opacas contendo bombons (ver diagrama na Figura 11) eram colocados em duas mesas, uma com dois tubos, uma caixa, e sete bombons em uma sacola transparente, a outra com um tubo, uma caixa e 20 bombons em uma sacola transparente. As crianças podiam contar o número de bombons nas sacolas mas não os bombons nos tubos e caixas.

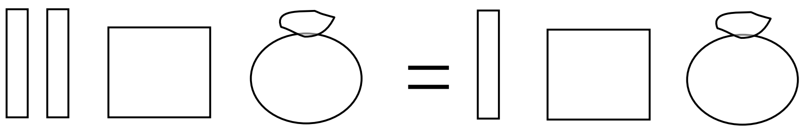


Figura 11: Tubos, caixas e sacolas com bombons.

O professor e os alunos discutiam a situação, visando representá-la por escrito e determinar o número de bombons em cada tubo. As crianças eram informadas que o número total de bombons em uma mesa era igual ao da outra mesa, que cada tubo continha o mesmo número de bombons e cada caixa também continha o mesmo número de bombons, igual ou diferente da quantidade em cada tubo.

Os estudantes notaram diferentes aspectos do problema como, por exemplo, que era um problema semelhante ao problema das carteiras resolvido seis semanas antes, que uma mesa tem 13 bombons a mais que a outra nas sacolas e uma mesa tem um tubo a mais que a outra. Inicialmente a maioria dos estudantes expressou que eles não poderiam descobrir quantos bombons haviam nos tubos ou nas caixas. No entanto, em uma das classes, após apenas 14 minutos desde o início da aula, um deles explica que cada tubo deve ter 13 bombons de forma que um tubo mais os sete bombons na sacola é o mesmo que os 20 bombons na sacola da outra mesa. Outro estudante diz que o número de bombons nas caixas não importa e propõe eliminar as duas caixas, explicando que elas contêm o mesmo número de bombons e não são necessárias para descobrir o número de bombons nos tubos. Após a discussão entre os alunos, o professor pediu que alguém demonstrasse que existem realmente 13 bombons em um tubo. Um aluno sugeriu usar a letra N para representar cada tubo e outros afirmaram que deviam usar outra letra para as caixas. Cada aluno passou então a representar o problema por escrito, usando desenhos ou letras para representar variáveis. O exemplo na Figura 12 mostra o uso de desenhos e letras por um estudante para representar a quantidade de bombons em um tubo. Ele então cancelou uma caixa e um tubo em cada um dos conjuntos, comparou 20 a N+7, decompôs 20 em 13 + 7 e cancelou 7 em cada lado, obtendo assim 13 como igual a N.

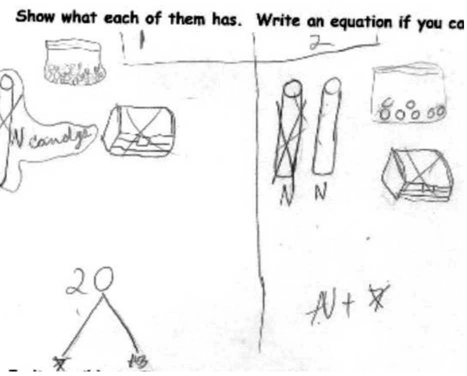


Figura 12: Representando e resolvendo o problema.

A discussão e produção escrita dos alunos nesta aula revelou uso de notação e raciocínio algébricos e estratégias para a resolução de equações com base na compreensão da situação com que lidavam e não apenas aplicação de regras de manipulação de símbolos.

As aulas da quinta série visavam promover a representação algébrica e resolução de problemas verbais com variáveis em ambos os lados do sinal de igualdade.

Avaliando o impacto da intervenção

A descrição do que ocorria nas salas de aula, em cada um dos estudos, suporta a conclusão de que, desde os oito anos de idade, crianças podem ter acesso, produzir, interpretar e inter-relacionar vários tipos de representações que, em geral, somente são introduzidas após o fim da escola primária. Essas representações eram desenvolvidas e utilizadas durante discussões onde os alunos produziam generalizações sobre conjuntos de valores, raciocinando algebricamente e demonstrando compreensão de relações e princípios aritméticos.

Restava ainda analisar o impacto dessas experiências em exames escritos. Com este objetivo, em um de nossos estudos com um total de 50 alunos em dois grupos consecutivos, comparamos, no fim da quinta série, os resultados desses 50 alunos em um teste escrito aos resultados de um grupo controle no mesmo teste. O desempenho do grupo de intervenção no teste escrito foi significativamente melhor nos itens relacionados à intervenção e semelhante ao do grupo controle nos demais itens (ver Figura 13).

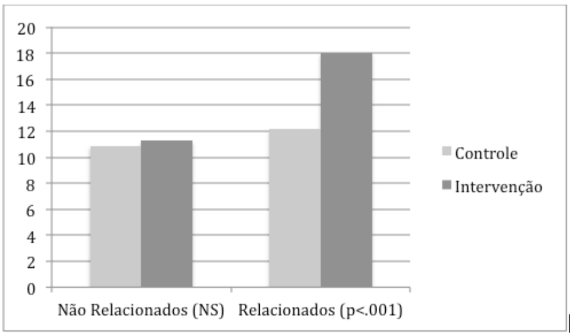
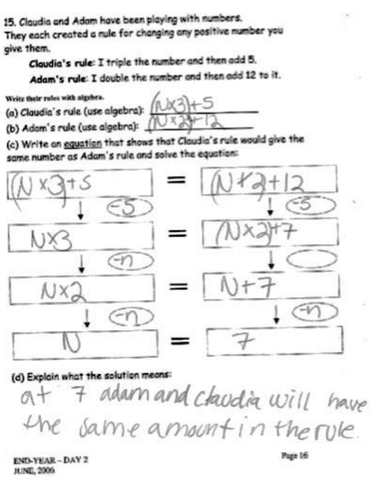


Figura 13: Média de respostas corretas ao término da intervenção (quinta série) para itens relacionados e não relacionados à intervenção.

Uma das questões no teste encontra-se na Figura 14, com as respostas dadas por uma das crianças.



15. Claudia and Adam have been playing with numbers.
They each created a rule for changing any positive number you give them.

Claudia's rule: I triple the number and then add 5.

Adam's rule: I double the number and then add 12 to it.

Write their rules with algebra.

(a) Claudia's rule (use algebra): (N×3)+5

(b) Adam's rule (use algebra): (N×2)+12

(c) Write an equation that shows that Claudia's rule would give the same number as Adam's rule and solve the equation:

(N×3)+5 = (N×2)+12
−5 / −5
N×3 = (N×2)+7
−n
N×2 = N+7
−n / −n
N = 7

(d) Explain what the solution means:

at 7 adam and claudia will have the same amount in the rule.

END-YEAR – DAY 2
JUNE, 2006
Page 16

Figura 14: Exemplo de resposta a item do teste escrito sobre a representação e resolução de problemas utilizando notação algébrica e equações.

Nas respostas a este problema, 68% das crianças representaram as duas regras e a equação e 45% resolveram a equação. Apenas um estudante propôs transformações diferentes nos dois lados da igualdade.

Dois ou três anos depois, quando os alunos que participaram da intervenção cursavam a sétima ou oitava séries, conseguimos contactar 19 deles para que respondessem a um novo teste escrito sobre conteúdo mais complexo. Em comparação com um grupo controle (ver Figura 15), este grupo apresentou resultados significativamente melhores em itens relacionados a representação e resolução de problemas algébricos e resultados melhores, embora não significativos, nos itens envolvendo gráficos.

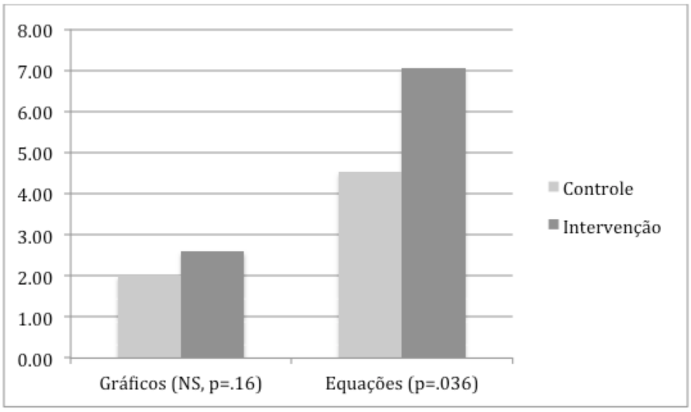


Figura 15. Número médio de respostas corretas sobre gráficos e equações para cada grupo, dois ou três anos após a intervenção.

Discussão

A avaliação das intervenções que desenvolvemos demonstra a viabilidade da inclusão de variáveis, funções, equações e suas múltiplas representações no currículo de matemática para a escola primária. Além disto, nossos resultados sugerem que o enfoque que adotamos para o ensino de matemática, privilegiando o acesso a funções e suas representações, tem o potencial de promover aprendizagem duradoura. O impacto da intervenção se faz notar nos resultados de exame escrito ao fim da intervenção e dois ou três anos depois.

Os dados coletados em sala de aula mostram que a discussão de relações funcionais entre quantidades favorece o uso de raciocínio algébrico entre crianças jovens, inicialmente expresso verbalmente e através de notação não convencional. Essas representações intuitivas podem, progressivamente, dar lugar às representações matemáticas convencionais. A virtude principal desta transição de representações intuitivas a representações convencionais consiste em possibilitar a aprendizagem dos procedimentos matemáticos com base na compreensão de relações, em lugar de promover o uso de regras memorizadas sem compreensão.

Ainda resta avaliar, sistematicamente, o impacto de intervenções deste tipo na escola primária sobre a aprendizagem de matemática na escola média e secundária. Dados que coletamos, antes e depois de uma semana de ensino intensivo de álgebra em um curso de verão, sugerem que a intervenção da terceira à quinta série facilitou a aprendizagem futura: seis estudantes de sétima e oitava série, que haviam participado da intervenção e com quem mantivemos contato dois ou três anos após a intervenção, apresentaram, durante o curso de verão, um progresso significativamente maior em comparação com os estudantes do grupo controle. Esses resultados preliminares são promissores mas precisam ser replicados em estudos com amostras maiores e dentro do ensino regular de matemática.

Desde 2010, iniciamos um programa de desenvolvimento de professores do ensino primário e médio que leva em conta os resultados aqui descritos e outros estudos sobre o ensino e aprendizagem de matemática. O programa, The Poincaré Institute for Mathematics Education, busca promover a melhoria do ensino de matemática através do estudo de funções, álgebra e suas múltiplas representações como elemento unificador dos vários tópicos do currículo escolar. O programa foi desenvolvido por matemáticos, cientistas e pesquisadores em educação matemática na Universidade de Tufts (ver descrições em https://sites.tufts.edu/poincare/, artigo por Teixidor-i-Bigas, Carraher, e Schliemann, 2013 e vídeo em http://hub.mspnet.org//index.cfm/28084?). Os três cursos de pós-graduação do programa abordam, de forma integrada, conteúdo matemático e pedagógico, com ênfase na compreensão dos processos de raciocínio dos estudantes e em atividades onde os professores colaboram no desenvolvimento, implementação e avaliação de atividades de ensino.

A maioria dos professores em cinco distritos escolares do estado de Massachusetts, nos Estados Unidos, já participou do programa em cinco grupos sucessivos de 60 professores cada. Os cursos são oferecidos online e através de encontros mensais. Resultados de estudantes da quinta à oitava série dos cinco distritos participantes, em testes escritos aplicados pelo estado, foram comparados aos resultados de estudantes de 20 distritos com populações semelhantes. Encontramos uma melhora significativa nos resultados de estudantes desses cinco distritos enquanto os estudantes dos distritos semelhantes não apresentaram progresso. Além disso, o progresso dos estudantes dos cinco distritos estava positivamente correlacionado com a percentagem de professores que concluíram os três cursos em cada série e em cada distrito (Spearman's $r = .54$, $p = .007$). Esperamos que as análises que estamos desenvolvendo sobre outros dados coletados nas atividades do programa levem a sugestões específicas para futuras iniciativas relativas à melhoria do ensino de matemática.

Referências bibliográficas

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. In Santos, L. Domingos, A., Vale, I., Saraiva, M.J, Rodrigues. M., Costa, M.C. & Ferrerira, R.A.T. (Eds.), *Investigação em Educação Mathemática 2013: Raciocínio Mathemático*.

Sociedade Portuguesa de Educação Matemática, pp. 51-80. http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2013/Atas_EIEM_2013.pdf

Bednarz, N. (2001). A problem-solving approach to algebra: Accounting for the reasonings and notations developed by students. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (vol. 1, pp. 69-78). The University of Melbourne, Australia.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 115-136). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M., & Kaput, J. (2000). Generalizing and progressively formalizing in a third grade mathematics classroom: Conversations about even and odd numbers. In M. Fernández (Ed), *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (p. 115). Columbus, OH, ERIC Clearinghouse (ED446945).

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in six-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5).

Booth, L. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17,* 1-30.

Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 273-301). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Brizuela, B. M., & Schliemann, A. D. (2004). Fourth graders solving linear equations. *For the Learning of Mathematics, 24*(2), 33-40.

Carraher, D.W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol II, pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Carraher, D.W., & Schliemann, A.D. (in press). Powerful ideas in elementary mathematics education. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (3rd edition). New York: Taylor & Francis.

Carraher, D.W., Brizuela, B., & Schliemann, A. (2000). Bringing out the algebraic character of arithmetic. Instantiating variables in addition and subtraction. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the XXIV Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 145-152). Hiroshima, Japan.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., & Brizuela, B. (2000). Early algebra, early arithmetic: Treating operations as functions. Plenary address. *XXII Meeting of the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Tucson, AZ, October, 2000 [available on CD].

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., & Brizuela, B. (2001). Can young students represent and manipulate unknowns. *Proceedings of the XXV Conference of the International Group for* *the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, 130-140). Utrecht, The Netherlands. (invited research forum paper).

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., & Brizuela, B. (2005). Treating operations as functions. In D. Carraher & R. Nemirovsky (Eds.), *Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education, XIII*, CD-Rom Only Issue.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., & Schwartz, J.L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87-115.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., Brizuela, B., & Earnest, D. (in press). Arithmetic and algebra in early mathematics education. In E.A. Silver & P.A. Kenney (Eds), *Lessons Learned from Research: Volume 2. Useful Research on Teaching Important Mathematics to All Students*. NCTM.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British journal of developmental psychology, 3*(1), 21-29.

Collis, K. (1975). *The development of formal reasoning*. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992b). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E., & Harel, G. (Eds.) (1992a). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Filloy, E., & Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. In *Proceedings: VI Annual Meeting of PME, North American Chapter*. Montreal, Canada.

Kaput, J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by 'algebrafying' the K-12 Curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics and Mathematical Sciences Education Board Center for Science, Mathematics and Engineering Education, National Research Council (Sponsors), *The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum* (pp. 25-26). Washington, DC: National Academies Press.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317-326.

Kieran, C. (1985). The equation-solving errors of novices and intermediate algebra students. In *Proceedings of IX International Conference Psychology of Mathematics Education*. Montreal, Canada.

Kuchemann, D.E. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics* (pp. 102-119). London: Murray.

MacGregor, M. (2001). Does learning algebra benefit most people? In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (vol. 2, pp. 405-411). The University of Melbourne, Australia.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B.M. (1999). Bringing out the algebraic character of arithmetic. *Symposium presentation at the Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Montreal, Canada.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. & Brizuela, B.M. (2001). When tables become function tables. In M. v. d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the XXV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, 145-152. Utrecht, The Netherlands: Freudenthal Institute.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B.M. (2002). From unknown amounts to representing variables. *Proceedings of the XIV Annual Meeting Psychology of Mathematics Education, North American Chapter*, Athens, GA: ERIC Clearinghouse, October 26-29, pp. 127-129.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B.M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schliemann A.D., Carraher D.W., & Brizuela B.M. (2012). Algebra in elementary school. In L. Coulange & J.-P. Drouhard (Eds.), Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives. *Special Issue of Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 109-124.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., Brizuela, B.M., Earnest, D., Goodrow, A., Lara-Roth. S., & Peled, I. (2003). Algebra in elementary school. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA* (Vol. 4, pp. 127-134). CRDG, College of Education, University of Hawai'i: Honolulu, HI,

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Caddle, M. (2013). From seeing points to seeing intervals in number lines and graphs. In B. Brizuela & B. Gravel (Eds.), *Show me what you know: Exploring Representations across STEM disciplines*. New York, NY. Teachers College Press.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., Goodrow, A., Caddle, M., & Porter, M. (2013). Equations in elementary school. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 161-168). Kiel, Germany: PME.

Schliemann, A.D., Goodrow, A., & Lara-Roth, S. (2001). Tables as multiplicative function tables. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (vol. 2, pp. 531-540). The University of Melbourne, Australia.

Schliemann, A.D., Lins Lessa, M.; Brito Lima, A.P., & Siqueira, A. (2007). Young children's understanding of equivalences. Chapter in A.D. Schliemann, D.W., Carraher, D. W., & B.M. Brizuela (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1995). Report of Working Group 1. In C. B. Lacampagne (Ed.), *The Algebra Initiative Colloquium: Vol. 2. Working Group Papers* (pp. 11-18). Washington, DC: U.S. Department of Education, OERI.

Schwartz, J., & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function on and with algebra. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.*), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 261-289). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Sfard, A., & Linchevsky, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification – The case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26,* 191-228.

Steinberg, R., Sleeman, D., & Ktorza, D. (1990). Algebra students knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 22* (2), 112-121.

Vergnaud, G. (1985). Understanding mathematics at the secondary-school level. In A. Bell, B. Low, & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, research & practice in mathematical education* (pp. 27-45). Nottingham, UK: University of Nottingham, Shell Center for Mathematical Education.

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. Steffe & P. Nesher (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-239). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

PAINEL PLENÁRIO

De que nos serve "representar"? Contributos sobre o papel das representações matemáticas no ensino e aprendizagem da Matemática

Susana Carreira

Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do IE, Universidade de Lisboa

scarrei@ualg.pt

Apresentação do painel

Neste painel, cujo objetivo é discutir a temática das representações matemáticas no ensino e aprendizagem da Matemática, participam investigadores que no âmbito dos seus projetos e trabalhos de investigação deram uma atenção especial às representações matemáticas e as elegeram como parte do seu objeto de estudo. Os membros do painel trazem naturalmente perspetivas diferenciadas e interesses distintos no que respeita ao estudo das representações matemáticas, partilhando todavia a convicção de que se trata de uma questão preponderante na aprendizagem e no ensino da Matemática. A diversidade de pontos de vista foi aliás intencional e espelha-se, por exemplo, nos tópicos curriculares que cada um aborda, nos níveis de escolaridade em que desenvolvem a sua pesquisa, no foco sobre o aluno ou sobre o professor, nas linhas teóricas que adotam e nos resultados que apresentam decorrentes dos seus estudos.

Alessandro Ribeiro considera a relação entre formas de representação matemática de um conceito e os significados desse conceito. Debruça-se sobre os significados do conceito de equação e tem em mente desenvolver o conhecimento profissional do professor de Matemática relativamente ao ensino deste conceito, desde o ensino básico ao secundário.

Ana Henriques centra-se na relação entre representações matemáticas e raciocínio, referindo-se especificamente ao raciocínio estatístico. O seu trabalho tem a particularidade de integrar o uso de uma ferramenta tecnológica – o TinkerPlots – e assenta em dados empíricos relativos ao trabalho realizado em sala de aula por alunos de 8.º ano.

Paula Teixeira tem, como base do seu estudo, os recursos tecnológicos que acompanham os manuais escolares, seja no ensino básico ou no secundário, e analisa as representações que os professores têm das aulas que lecionam com a aplicação desses recursos tecnológicos, em tópicos de álgebra e de geometria.

Sandra Nobre investiga a aprendizagem de métodos algébricos formais, utilizando a Folha de Cálculo como um recurso para a representação e expressão de relações algébricas e analisando as conversões e tratamentos de representações realizados por alunos do 9.º ano, em diversos tipos de tarefas na sala de aula.

Problematização do tema

Uma breve análise das ideias trazidas pelos membros do painel poderá conduzir-nos rapidamente a algumas ideias gerais:

i. Não é trivial descrever o papel ou a função que as representações matemáticas desempenham na aprendizagem escolar e na atividade do professor – ora são recursos para a expressão de ideias e por isso é importante aumentar o leque de ferramentas disponíveis; ora estão na base da construção dos significados de um conceito matemático, pelo que sem a representação matemática não se pode atingir plenamente o significado de um conceito; servem ainda para apoiar o raciocínio, tornando-se eventualmente em parte integrante do raciocínio matemático; e também influenciam a forma como o professor concebe e perceciona a aprendizagem e o ensino da Matemática.
ii. Observa-se uma presença crescente de representações tecnológicas na vasta variedade de representações matemáticas, sendo que a disponibilidade da tecnologia e das representações dinâmicas que esta oferece parece facilitar a aprendizagem e aumentar a flexibilidade representacional de alunos e de professores.

O tema das representações matemáticas no ensino e na aprendizagem da Matemática – provavelmente com mais ênfase em torno da questão da aprendizagem – tem muitas décadas de trabalho de investigação associado. Em grande medida foi a própria investigação em torno da resolução de problemas de Matemática que impulsionou uma maior atenção sobre as representações matemáticas. E este tema nunca foi destituído de divisões e divergências entre os teóricos e os investigadores em Educação Matemática. Uma das polémicas de que certamente nos recordamos prende-se com a questão da *possibilidade/impossibilidade* de distinguir entre representações externas e internas, um tema que ateou discussões vivas, protagonizadas, por exemplo, por Gerard Goldin (veja-se Goldin, 1998; Kaput, 1998). Uma outra clivagem foi ainda salientada por Paul Cobb e colaboradores ao questionarem a ideia de representação como fonte de compreensão, chamando a atenção para a *transparência/opacidade* das representações matemáticas, também abordada por Godino e Font (2010) em termos do caráter *ostensivo/não-ostensivo* das representações. Outros investigadores, como Ainsworth (2006) ou Panasuk e Beyranevand (2011) têm estudado as preferências dos alunos por determinados tipos de representações e questionam a ideia de representação *adequada/desadequada* para determinada tarefa matemática. Mais recentemente, assiste-se a uma outra discussão acerca do poder representacional das ferramentas tecnológicas. Vários são os investigadores que têm salientado a expressividade representacional das tecnologias digitais como algo que transforma profundamente a natureza do pensamento e do raciocínio matemático, entre os quais se podem incluir Hegedus e Moreno-Armella (2009) ou Richard Noss (2001).

Nas contribuições dos membros deste painel surgem ideias, dados e resultados que nos permitem revisitar algumas das controvérsias históricas associadas ao estudo e à teorização das representações matemáticas. Mas para além dessas, as oportunidades de convergência parecem igualmente abundantes. Assim, mais do que reiterar as complexidades que o estudo das representações acarreta, parece-nos que esta é uma boa oportunidade para encontrar fios condutores, em torno de algumas questões que pretendem acima de tudo alimentar o debate.

Algumas questões a debater

1. Fará sentido perguntar que tipos de representações matemáticas são mais úteis para responder a determinada questão ou resolver determinado problema?
2. Sabemos que toda a representação matemática resulta em grande medida do estabelecimento de convenções. A linguagem simbólica da álgebra é um bom exemplo de um sistema de representação repleto de convenções. Como é que a tradução entre sistemas de representação pode promover a aprendizagem, sabendo que isso obriga a mudar sistematicamente de significados convencionados?
3. Existe uma distinção entre i) o papel das representações matemáticas como um meio para exprimir (exteriorizar, comunicar) determinada ideia ou informação e ii) como um meio para o próprio indivíduo desenvolver uma estratégia ou uma forma de pensar?
4. Como estão os recursos tecnológicos a "invadir" o espaço das representações matemáticas e como é que, em particular, as representações dinâmicas, visuais, e interativas convivem (melhor ou pior) com as representações estáticas, formais e tradicionais?
5. Qual a importância de fomentar o uso de múltiplas representações externas na aprendizagem da Matemática, quando sabemos que em dada fase do desenvolvimento da aprendizagem, preterimos o uso de determinados sistemas de representação, isto é, removemos os andaimes representacionais (as figuras ou os esquemas, os números na reta ordenada, a linguagem do Excel, etc.)?
6. Quando algebrizamos a Geometria, passamos a usar uma linguagem específica – a da Álgebra – mas os conceitos com que trabalhamos continuam a ser geométricos (ex. equação da reta tangente a uma circunferência ou equação da reta perpendicular ao plano…). O que significa então a representação matemática no campo da Geometria? E o que significará trabalhar em Geometria com o registo da Álgebra?
7. Que vantagens e desvantagens em associar a representação matemática aos multi-significados dos conceitos quer para o conhecimento pedagógico do professor quer para fomentar a compreensão dos alunos?

Referências bibliográficas

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, *16*, 183-198.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2-33.

Godino, J., & Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *9*(1), 189-210.

Goldin, G. (1998). The PME Working Group on Representations. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 283-301.

Hegedus, S., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM*, *41*, 399-412.

Kaput, J. (1998). Representations, iinscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 265-261.

Noss, R. (2001). For a learnable mathematics in the digital culture. *Educational Studies in Mathematics*, *48*, 21-46.

Panasuk, R., & Beyranevand, M. (2011). Preferred representations of middle school algebra sudents when solving problems. *The Mathematics Educator*, *13*(1), 32-52.

RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO: QUANDO AS REPRESENTAÇÕES FAZEM (A) DIFERENÇA

Ana Henriques
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
achenriques@ie.ul.pt

Introdução

As representações estatísticas têm sido amplamente investigadas, atendendo ao seu importante papel no desenvolvimento da literacia e raciocínio estatístico dos alunos. O modo como os alunos tiram vantagem das características das representações e das ações de transnumeração que realizam sobre elas não tem, contudo, merecido a mesma atenção, particularmente quando são usados recursos tecnológicos. Nesta comunicação debruço-me sobre esta temática, apresentando alguns resultados de um estudo que visa analisar as representações estatísticas e as ações de transnumeração que são usadas por alunos do ensino básico, quando utilizam o *software TinkerPlots*, para apoiar o seu raciocínio estatístico. Discuto, em particular, quais os propósitos das ações realizadas e o seu contributo na emergência desse raciocínio, bem como as dificuldades que os alunos revelaram nestes processos.

Raciocínio estatístico e representações

Não existindo consenso sobre a sua definição, o raciocínio estatístico, tem sido descrito como raciocínio a partir de evidências, processo usado para justificar uma conclusão ou fazer uma inferência ou, de forma mais abrangente, o modo como os indivíduos raciocinam com ideias estatísticas e atribuem significado à informação estatística (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Este envolve fazer interpretações com base em conjuntos de dados, representações ou resumos estatísticos de dados e, ainda, a compreensão conceptual de ideias estatísticas importantes ou a combinação de ideias sobre os dados e incerteza que conduz à realização de inferências (Garfield, 2002). A capacidade dos alunos raciocinarem sobre dados e de os usarem efetiva e criticamente para previsões e na tomada de decisões é, assim, uma prioridade na educação estatística (Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2011).

As recentes orientações curriculares para o ensino da Estatística (Franklin et al., 2007; NCTM, 2007) priorizam o desenvolvimento da literacia e raciocínio estatístico dos alunos através de abordagens que valorizem as investigações em contextos diversificados e tirem partido da riqueza de dados e dos múltiplos recursos tecnológicos disponíveis, sobretudo os educacionais (Garfield & Ben-Zvi, 2010). Atendendo às características do raciocínio estatístico, acima descritas, e à natureza das atividades preconizadas para o seu desenvolvimento, torna-se clara a sua dependência de uma grande diversidade de representações que apoiem a compreensão e favoreçam a comunicação de ideias (Duval, 2006).

O termo representação tem sido usado, frequentemente, para referir objetos externos (tabelas, gráficos, símbolos) que expressam, de forma convencionada, ideias matemáticas (Duval, 2006). No entanto, a função destes objetos não é apenas designar ou retratar ideias ou relações estatísticas mas também apoiar o trabalho com essas ideias. Uma vez que cada representação tem um conjunto de características únicas e as suas próprias convenções e regras estruturais para a trabalhar, podem ser usadas operações particulares que transformam a sua estrutura sem afetar a relação ou ideia estatística que ela designa. Por exemplo, uma representação gráfica de um conjunto particular de dados pode ser alterada sobrepondo-lhe um símbolo representando uma medida de centro ou uma linha de ajustamento, sem alterar a relação estatística originalmente retratada. Apesar disso, a representação agora aumentada promove evidências e significados de relações estatísticas adicionais entre os dados e/ou medidas que poderão ser mais exploradas. As representações estatísticas são, por isso, ferramentas essenciais na *transnumeração*, componente fundamental no raciocínio estatístico descrita como o processo de transformar dados numa representação, alterar representações ou coordenar várias com a intenção de gerar compreensão (Wild & Pfannkuch, 1999).

Chick (2004) propõe um quadro de análise das técnicas de transnumeração possíveis de serem aplicadas aos dados para facilitar a representação da mensagem neles contida. Algumas destas técnicas são: ordenar, agrupar, cálculo de frequências, proporções ou de medidas estatísticas e a representação gráfica. Cada uma destas técnicas envolve uma mudança na representação dos dados e são, frequentemente, realizadas durante a sua exploração ou como passos finais para apresentar os resultados da sua análise. No entanto, algumas técnicas de transnumeração precedem a representação gráfica, como por exemplo, mudar o tipo de uma variável, transformando os dados numa forma adequada para serem representados graficamente.

Estudos prévios, como os de Chick e Watson (2001) e Chick (2003), sugerem que os processos de transnumeração podem ser mais difíceis que o processo de interpretação de dados. Nesses estudos, os alunos são capazes de interpretar tendências e factos sobre dados, a partir de representações, mas a escolha da representação nas tarefas estatísticas tem-se mostrado problemática, dada a dificuldade que eles evidenciam em representar os dados adequadamente para transmitir mensagens a partir deles. O que é, então, que se apresenta tão difícil nas representações estatísticas? Dado um conjunto de dados, é claro para os alunos que deverão fazer 'alguma coisa' para produzir uma representação. Frequentemente, a manipulação adicional dos dados através de ações de transnumeração resultam em melhores representações e tornam as mensagens dos dados mais claras. Assim, o sucesso na comunicação de dados através de representações, particularmente quando as mensagens dos dados são complexas, envolvendo associação ou comparação de distribuições, é dependente do conhecimento dos alunos sobre: (i) quais os tipos de representação que são úteis; e (ii) um conjunto de técnicas para transformar os dados em formas que conduzam a tais representações ou para as alterar, tornando-as convincentes no que respeita à evidência que proporcionam das afirmações sobre dados. Chick (2003) acrescenta, ainda, que as fases da transnumeração de escolha da representação e de transformação dos dados podem depender de uma fase inicial de identificação da mensagem nos dados. Na verdade, sem uma compreensão da mensagem que é necessário transmitir, é difícil escolher que processo de transnumeração usar. Além disso, alguns alunos não compreendem que a transnumeração é realmente necessária porque permite que a mensagem seja transmitida com clara evidência (Chick, 2000).

Representando dados no *TinkerPlots*

As abordagens orientadas para a exploração de dados encorajam uma forte interação com os dados, a qual pode ser proporcionada pelo tipo de representação gráfica de dados que é gerada pelos computadores de forma quase imediata. Os ambientes dinâmicos de aprendizagem estatística, como o *TinkerPlots* (Konold & Miller, 2005), têm evidenciado um grande potencial na aprendizagem da Estatística e no desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos (Ben-Zvi, 2006). Makar e Confrey (2008) defendem que o uso de ferramentas dinâmicas, em particular as suas capacidades representacionais, permite aos alunos investigar um conjunto de dados de formas diversas, desenvolvendo hipóteses e usando os dados para explorar e formular afirmações sobre eles. Além disso, permite-lhes ilustrar a sua compreensão, levando a melhorias no raciocínio estatístico geral e na compreensão das representações gráficas.

As potencialidades de um *software* estatístico dinâmico incluem, segundo Lee et al. (2014), a capacidade para: (i) criar e visualizar representações de dados e medidas estatísticas; (ii) articular representações de forma dinâmica; e (iii) melhorar representações gráficas através de acréscimos. Assim, focados na análise destas três ações de transnumeração, os mesmos autores identificaram diversas formas da tecnologia apoiar uma transnumeração apropriada. A capacidade de articular dinamicamente várias representações é salientada também por Finzer (2000), que descreve dois aspetos essenciais para um *software* estatístico promover um ambiente dinâmico: “manipulação direta de objetos matemáticos e atualização síncrona de todos os objetos dependentes durante as operações de arrastamento” (p. 1). Num ambiente estatístico, os objetos manipuláveis incluem valores de dados, linhas representando valores ou equações, eixos e parâmetros, entre outros. Vários objetos podem, ainda, ser dependentes destes, tais como medidas estatísticas calculadas a partir dos dados, um gráfico de dispersão dos dados ou uma tabela de valores.

O *TinkerPlots* usa cartões de dados, como o apresentado na figura 1. Cada cartão representa um caso e contém os valores de cada atributo, do conjunto de dados disponíveis. Não são fornecidas opções para tipos de gráficos *standard*, a construção de representações é feita através de ações primitivas de separar, empilhar e ordenar. A barra de ferramentas, ao longo da parte de cima do écran, mostra as ferramentas disponíveis para efetuar acréscimos ao gráfico, quando os alunos trabalharem numa janela gráfica. Neste *software*, existem ligações construídas entre todas as representações dos dados, tal como forem criadas e todos os objetos irão atualizar-se sincronamente se houver uma mudança num outro ao qual estejam ligados. Assim, salientar um caso numa representação cria um destaque em todas as outras. O *TinkerPlots* também fornece ferramentas para calcular e mostrar uma variedade de medidas estatísticas e permite diversos melhoramentos de uma representação gráfica, adicionando informação adicional para apoiar a análise dos dados. Estas características permitem que as representações sejam usadas como ferramentas analíticas no processo de exploração de dados, através da realização de ações de transnumeração (incluindo a criação de representações gráficas).

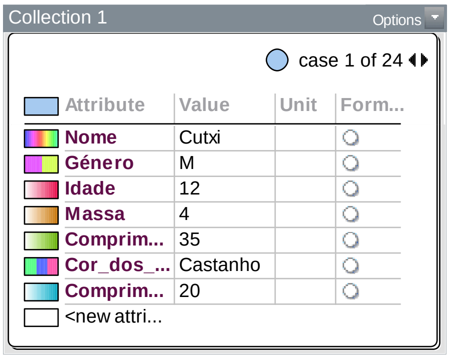


Figura 1: Exemplo de cartões de dados.

O estudo: contexto e métodos

O estudo que serve de base a esta comunicação integra-se num projeto de investigação e desenvolvimento orientado para a construção e experimentação de sequências de tarefas orientadas para o raciocínio estatístico (TORE) dos alunos do ensino básico, recorrendo ao *software TinkerPlots*. Uma parte significativa do projeto foi desenvolvida no âmbito de uma Oficina de Formação onde participaram 11 professoras de Matemática dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico, sendo a autora deste estudo uma das formadoras. O trabalho na Oficina decorreu entre novembro e junho do ano letivo de 2013/14, com 40 horas presenciais, assumiu um carácter eminentemente colaborativo, sendo as professoras co-responsáveis pela proposta e discussão das tarefas, experimentação na sala de aula e reflexão sobre todo o processo.

Neste estudo analiso uma sequência de três tarefas, aplicada numa turma do 8.º ano, por um par de professoras participantes. As tarefas propostas obedeceram aos princípios do SRLE (Garfield & Ben-Zvi, 2010), envolvendo os alunos na exploração e análise de um conjunto de dados reais fornecidos aos alunos ou obtidos através de simulações ou recolha pelos próprios, visando a compreensão da sua necessidade para tirar conclusões e fazer avaliações. Adicionalmente, forneceram oportunidades para envolver e simultaneamente apoiar os alunos em diversos aspetos significativos do raciocínio estatístico, em particular a comparação de distribuições, a análise de relações e a prática de inferência informal, formulando e testando conjeturas e fazendo previsões baseadas em evidência fornecida pelos dados e suas representações proporcionadas por um ambiente de aprendizagem estatística dinâmico (BEN-ZVI, 2006). Na verdade, o uso do *software TinkerPlots* foi uma característica marcante do ambiente de aprendizagem criado, permitindo a exploração e análise de dados em todas as tarefas.

Os resultados que apresento nesta comunicação resultam de uma análise qualitativa dos dados recolhidos a partir das resoluções escritas das tarefas pelos alunos da turma referida e dos registos da sua atividade no computador com o *TinkerPlots*, recorrendo a um *software* de gravação de écrans (*AutoScreenRecorder 3.1 Pro*).

A partir de exemplos do trabalho dos alunos com o *TinkerPlots*, discuto aspetos que emergiram como interessantes no que respeita ao uso das três ações de transnumeração gráfica propostas por Lee et al. (2014): (i) criar e visualizar representações de dados e medidas estatísticas; (ii) articular representações de forma dinâmica; e (iii) melhorar representações gráficas através de acréscimos. Além disso, discuto o modo como os alunos tiram vantagem das características do *software* para criar representações e realizar ações de transnumeração e o seu contributo para a emergência do raciocínio estatístico.

Algumas tendências

É interessante observar que os alunos foram capazes de fazer escolhas apropriadas de representações gráficas e de usar adequada e intencionalmente ações de transnumeração, tirando partido das potencialidades do *TinkerPlots* para apoiar a interpretação dos seus dados e para obter evidência para as suas afirmações.

Nas tarefas propostas, os cartões de dados estavam automaticamente disponíveis no *TinkerPlots*, pelo que não foram considerados como representação criada pelos alunos, embora fossem considerados quando utilizados para fazerem articulações entre dados e gráficos. As representações mais comuns, criadas em resposta às questões das tarefas, foram o gráfico de pontos (simples e duplo), particularmente os de escala intervalar e o diagrama de extremos e quartis, de que são exemplo os gráficos das figura 2 e 3.

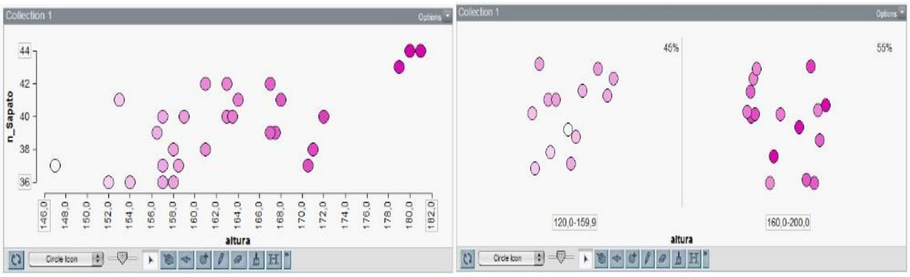


Figura 2: Exemplo de gráficos de pontos, duplo e simples, com acréscimos gráficos (escala intervalar e percentagens).

Além disso, e de modo geral, os alunos usaram resumos estatísticos apropriados relacionados com a questão que estavam a analisar. As medidas mais usadas foram percentagens, média e mediana, sobrepostas no gráfico, como mostram as figuras 2 e 3. Este desempenho não é surpreendente pois estas medidas são as mais familiares aos alunos e o *TinkerPlots* permite facilmente a incorporação destas estatísticas nas representações gráficas, através do clicar de um botão da barra de ferramentas. Ambas as representações são apropriadas para examinar e comparar distribuições. No entanto, a utilização de medidas simples, como a média, para comparar distribuições limitou a visão dos dados como agregado e influenciou a evidência obtida a partir dos dados para as generalizações formuladas pelos alunos.

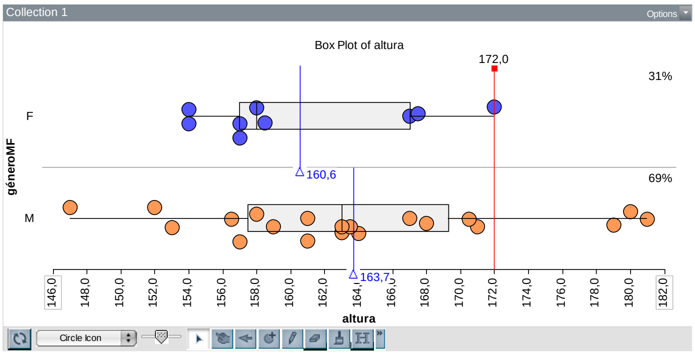


Figura 3: Exemplo de diagrama de extremos e quartis com acréscimos gráficos (média, percentagens e linhas de referência).

Os alunos, em geral, usaram várias ferramentas do *TinkerPlots* para trabalhar com as suas representações gráficas, incluindo alguma forma de acréscimo gráfico nas representações criadas. Como já referido, muitos alunos adicionaram um ou mais tipos de medidas estatísticas aos seus gráficos. Mais de metade dos alunos tirou vantagem de outras formas de acréscimo gráfico, tais como adicionar linhas de referência, como mostra a figura 3. Enquanto alguns alunos simplesmente adicionaram os símbolos icónicos para a média e mediana, alguns adicionaram o valor da medida ou mostraram uma linha vertical na sua localização. Por exemplo, alguns alunos acrescentaram a linha de referência e arrastaram-na para a localização de pontos extremos ou do 1.º e 3º quartil no diagrama de extremos e quartis. Apesar de serem capazes de usar várias ferramentas e ações de transnumeração para obter esses valores, não os usam para estimar a amplitude interquartílica, o que permitiria comparar as distribuições de forma mais completa. Estes acréscimos não são apenas visíveis no trabalho dos alunos mas usualmente referidos nas suas respostas, indicando que são intencionais para facilitar a compreensão e interpretação dos dados e dos gráficos que os representam.

Nas tarefas, os alunos também foram solicitados a gerarem as suas próprias questões que envolviam examinar relações entre atributos. Apesar da sua simplicidade, poucos alunos usaram gráficos de dispersão para examinar distribuições de diversos atributos, o que é de esperar atendendo a que no nível de ensino em que se encontram esta representação não foi ainda abordada. No entanto, alguns foram capazes de produzir representações, como um gráfico de pontos duplos com acréscimos resultantes das ações de transnumeração de agrupar (em células), ordenar e sobrepor um terceiro atributo utilizando o gradiente de cor, onde a associação era visível sem um grande esforço de leitura (figura 4). Estas estratégias consideradas informais, pouco utilizadas mas aparentemente poderosas, permitiram ao alunos estabelecerem relações entre atributos e, por isso, poderão receber uma ênfase maior e explícita no ensino, beneficiando-os no que respeita ao aumento do seu repertório de ferramentas de transnumeração para produzir mais e melhores representações.

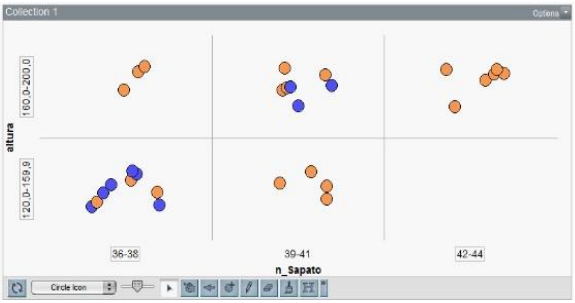


Figura 4: Exemplo de gráficos de pontos duplos com acréscimos gráficos (agrupar e gradiente de cor).

Também foram identificadas algumas diferenças no trabalho dos alunos com as representações conforme exploravam a comparação de distribuições ou a identificação de relações. Neste estudo, os alunos tendem a usar maior variedade de representações e mais acréscimos gráficos quando trabalham na comparação de distribuições, possivelmente porque ser uma tarefa mais familiar aos alunos deste nível de ensino e, nos casos em que usam gráficos de dispersão, a sua simplicidade gráfica não envolve transnumeração além da sua própria criação. Note-se que o *TinkerPlots* não permite a sobreposição de retas de regressão no gráfico e, ainda que assim não fosse, este tópico não faz parte dos conhecimentos destes alunos. No entanto, se considerarmos os tipos de acréscimos individualmente, não se identificam diferenças no seu uso, consoante se trate de comparar distribuições ou identificar relações.

Poucos alunos aproveitaram as capacidades dinâmicas do *software* para articularem as suas representações, quer estática quer dinamicamente. No geral, o propósito para a articulação dinâmica foi identificar um valor particular para um caso específico de interesse, clicando num caso particular no gráfico e usando o cartão dos dados para determinar o valor do atributo. Esta articulação foi observada, com maior frequência, nas questões envolvendo relações entre atributos. Os alunos estiveram frequentemente focados em casos especiais e situaram esses casos em comparação com o agregado, limitando a formulação de generalizações. A articulação estática de representações ocorreu essencialmente com o propósito de comparar a posição de grupos de casos entre duas representações gráficas e fazer afirmações sobre as suas relações. Foi mais evidente entre gráficos de extremos e quartis mas esta articulação não foi aproveitada para coordenarem a característica da distribuição de um atributo com alguma coisa notada anteriormente na distribuição de um atributo diferente. Na verdade, a articulação ficou limitada à comparação de medidas estatísticas dos diferentes atributos, sobrepostas nos diferentes gráficos. Deste modo, a articulação de representações, embora tenha facilitado as observações durante a análise, não suportou o processo inferencial. Estes resultados sugerem que quando os alunos se envolvem na comparação de distribuições, o uso de ferramentas de acréscimo gráfico pode apoiar a análise das tendências do grupo mais do que o uso de capacidades de articulação no ambiente do *software*.

A maioria dos alunos são claramente capazes de fazer escolhas apropriadas de representações e de realizar intencionalmente ações de transnumeração sobre elas, melhorando-as, tirando partido das potencialidades do *software TinkerPlots* para facilitar o seu raciocínio sobre dados. Vale a pena referir que, mesmo nos casos em que são consideradas pouco adequadas, as representações criadas pelos alunos não obscurecem os dados, pois os valores podem ser obtidos a partir delas desde que alguma informação extra seja incluída. O que se destaca é que algumas representações e transformações sobre elas são melhores que outras para 'contar a história dos dados' (Lee et al., 20014). Atendendo aos resultados apresentados, será útil refletir sobre como ajudar os alunos a aprender a melhor representar e transformar os dados e a compreender a necessidade dos dados como evidência para afirmações feitas sobre as mensagens neles contidas.

Agradecimentos

Trabalho realizado no âmbito do Projeto *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE-CED/117933/2010) da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia. Agradeço a colaboração da Hélia Oliveira na realização do estudo que serve de base a esta comunicação.

Referências bibliográficas

Ben-Zvi, D. (2006). Using Tinkerplots to scaffold students' informal inference and argumentation. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics: Working Cooperatively in Statistics Education*. [CDROM]. Voorburg: IASE and ISI.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Chick, H. L. (2000). Young adults making sense of data. In J. Bana, & A. Chapman (Eds.), *Mathematics Education Beyond 2000. Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 157-164). Sydney: MERGA.

Chick, H. L. (2003). Transnumeration and the art of data representation. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity. Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 207-214). Sydney: MERGA.

Chick, H. L. (2004). Tools for Transnumeration: Early stages in the art of data representation. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics Education for the third millennium: Towards 2010*. *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 167-174). Sydney: MERGA.

Chick, H. L., & Watson, J. M. (2001). Data representation and interpretation by primary school students working in groups. *Mathematics Education Research Journal*, *13*, 91-111.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1/2), 103-131.

Finzer, W. (2000). *Design of Fathom, a dynamic statistics environment for the teaching of mathematics*. Paper presented at the International Conference on Mathematics Education. Copenhagen, Denmark.

Franklin, C., Kader, G., Menborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A Pre-K-12 Curriculum Framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.

Garfield, J. (2002, november). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education,* 10(3).

Garfield, J. B., & Ben-Zvi, D. (2010). *Developing students' statistical reasoning. Connecting research and teaching practice*. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Konold, C., & Miller, C. D. (2005). *TinkerPlots® Dynamic data exploration* [Computer software]. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Lee, H., Kersaint, G., Harper, S., Driskell, S., Jones, D., Leatham, K., Angotti, R., Adu-Gyamfi, K. (2014). Teachers' use of Transnumeration in solving statistical tasks with dynamic statistical software. *Statistics Education Research Journal, 13*(1), 25-52.

Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning, 13*(1/2), 152-173.

Makar, K., & Confrey, J. (2008). Dynamic statistical software: How are learners using it to conduct data-based investigations? *Proceedings of the Joint Study of the ICMI/IASE* (Monterrey, Mexico).

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248.

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS: TRANSFORMAR PARA APRENDER!

Sandra Nobre

Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira, Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa e Bolseira da FCT

sandraggnobre@gmail.com

Introdução

No painel apresento parte do trabalho de investigação que estou a desenvolver no âmbito da aprendizagem da Álgebra. Neste caso abordo o tópico Equações do 2.º grau. Este estudo decorre da implementação de uma experiência de ensino numa turma do 9.º ano, onde grande parte do trabalho dos alunos é baseado na resolução de problemas, alguns resolvidos com a folha de cálculo.

O principal objetivo do estudo é analisar o contributo da intervenção pedagógica no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, em particular na aprendizagem de métodos formais. Interessa-me perceber a forma como os alunos expressam as suas ideias matemáticas e como as mobilizam. Desta forma analiso as representações matemáticas e a forma como os alunos as coordenam.

Atendendo à natureza do estudo, a metodologia adotada é essencialmente qualitativa seguindo um paradigma interpretativo. Esta investigação segue um *design* de experiência de ensino com recurso estudos de caso, onde assumo o duplo papel de professora da turma e investigadora.

Neste texto debruço-me sobre as produções de uma aluna, Carolina, bem como nos diálogos que ocorrem em sala de aula durante a resolução e discussão de duas tarefas resolvidas num ambiente combinado da folha de cálculo e papel e lápis.

As representações matemáticas e sua transformação na aprendizagem da Álgebra

As representações são poderosas ferramentas de comunicação e de aprendizagem. Tripathi (2008) define representação como um constructo mental ou físico que descreve aspetos da estrutura e as inter-relações entre o conceito e outras ideias. Uma representação deve incluir componentes concretos, verbais, numéricos, gráficos, pictóricos ou simbólicos que retratam aspetos do conceito. Deste modo, uma representação é a expressão de uma ideia que nos ajuda a interpretar, comunicar e discutir a ideia com outros.

Segundo Tripathi (2008) o trabalho em sala de aula não se deve limitar ao uso de representações de forma isolada, pois uma imagem global do conceito começa a emergir apenas quando o objeto é observado de diferentes perspetivas. A compreensão dos significados e o uso de variáveis desenvolve-se gradualmente à medida que os alunos criam e usam expressões simbólicas e as relacionam com linguagem natural, com as representações tabulares e gráficas. As representações dos alunos e a capacidade de transferirem ideias de uma representação para outra são indicadores de compreensão.

A utilização da tecnologia digital vem ampliar o leque de representações que os alunos dispõem quer para se exprimirem quer para trabalharem os conceitos matemáticos. Por exemplo a folha de cálculo dá acesso a representações em diferentes registos (numéricos, relacionais, gráficos). A resolução de tarefas neste ambiente permite ainda o estabelecimento de relações entre esta linguagem e a linguagem algébrica, com papel e lápis, e pode ser vista como um meio para preencher a lacuna entre o pensamento algébrico e a capacidade de usar a notação algébrica para expressar tal pensamento, como é descrito em Carreira, Jones, Amado, Jacinto e Nobre (2015).

Para Duval (2011) as representações não se devem confundir com os próprios objetos mas a sua diversidade é necessária para que seja possível aceder ao objeto, uma vez que "elas estão no "lugar dos" objetos ou os "evocam", quando esses não são imediatamente acessíveis" (p. 23). Este autor defende que as representações semióticas não são úteis apenas para trabalhar com os objetos matemáticos e que se queremos descrever a maneira própria de trabalhar em matemática são as transformações de representações que devemos analisar.

Existem dois tipos de transformação das representações: os tratamentos que são transformações dentro do mesmo registo e as conversões que são transformações que consistem em mudança de registo. De acordo com Duval, a conversão é fundamental na aquisição do conhecimento matemático.

Na aprendizagem da Álgebra as conversões são fundamentais na medida em que é importante que os alunos consigam identificar por exemplo uma representação tabular com a respetiva equação assim como com a respetiva representação gráfica. Os alunos devem, ainda, reconhecer que a equação e a respetiva representação gráfica são representações distintas para o mesmo objeto matemático e que o recurso a uma ou outra, depende da situação em que estão a trabalhar. Em determinadas situações o recurso à representação gráfica pode afigurar-se mais adequado do que a equação e vice-versa.

Os tratamentos são igualmente importantes para a aprendizagem. Kieran (2013) argumenta que esta transformação não se deve assumir apenas como manipulação simbólica, uma vez que desempenha um papel importante na aprendizagem por contribuir para a compreensão dos objetos e proporcionar uma reflexão acerca dos conceitos.

Neste estudo, no trabalho com papel e lápis, considero os seguintes registos de representações: linguagem natural, sistema de notação numérica (SNN), sistema de notação algébrica (SNA), representações pictóricas e representações gráficas. Na folha de cálculo considero: a linguagem natural, *input* de valores numéricos, geração de sequências numéricas, geração de variáveis-coluna, representações gráficas e formatação condicional. No ambiente da folha de cálculo uso também as noções de conversão e de tratamento propostos por Duval (2011).

O trabalho de Carolina

Ilustro de seguida o trabalho de Carolina em duas tarefas propostas para explorar com a folha de cálculo e em articulação com papel e lápis.

Tarefa B- As idades dos irmãos

O Carlos, a Ana e o Ricardo são três irmãos. A Ana tem um ano a mais do que o Carlos e um ano a menos do que o Ricardo.

No outro dia a Ana estava a fazer operações com os números que correspondem às suas idades e disse para os irmãos:

- Comparei o produto das vossas idades com o quadrado da minha idade e descobri uma coisa muito interessante! Vejam se também conseguem descobrir!

Figura 1: Enunciado da Tarefa B.

Na resolução do problema, na folha de cálculo, Carolina começa por nomear três colunas, cada uma delas com um dos nomes dos irmãos, onde constrói sequências numéricas através do arrastamento, tendo em conta a relação entre as idades deles. Seguidamente constrói mais duas colunas “ Produto das idades dos rapazes” e “Idade Ana ao quadrado” onde insere as fórmulas e através da geração de variáveis-coluna estabelece as relações descritas no enunciado, como mostro na figura 2.

B	C	D	E	F
Carlos	Ana	Ricardo	Produto das idades dos rapazes	Idade Ana ao quadrado
9	10	11	99	100
10	11	12	120	121
11	12	13	143	144
12	13	14	168	169
13	14	15	195	196
14	15	16	224	225

Carlos	Ana	Ricardo	Produto das idades dos rapazes	Idade Ana ao quadrado
9	10	11	=B2*D2	=C2^2
10	11	12	=B3*D3	=C3^2
11	12	13	=B4*D4	=C4^2

Figura 2: Excerto da produção de Carolina.

Carolina rapidamente conclui a sua resolução na folha de cálculo e diz bem alto “Já descobri a coisa interessante!”, pelo que intervenho rapidamente para que a aluna não divulgue o resultado para a turma. A aluna dá como resposta em linguagem natural “A Ana descobriu que ao fazer o quadrado da sua idade e o produto dos irmãos (idades) o quadrado da idade dela é sempre maior 1 unidade". De seguida é pedido que os alunos expliquem algebricamente o que verificam, Carolina hesita e diz muito espontaneamente "Ah pode ser para o Carlos damos um *c* para a Ana damos um *a* e para a idade do Ricardo damos um *r* …". A aluna escreve a relação como apresento na figura 3.

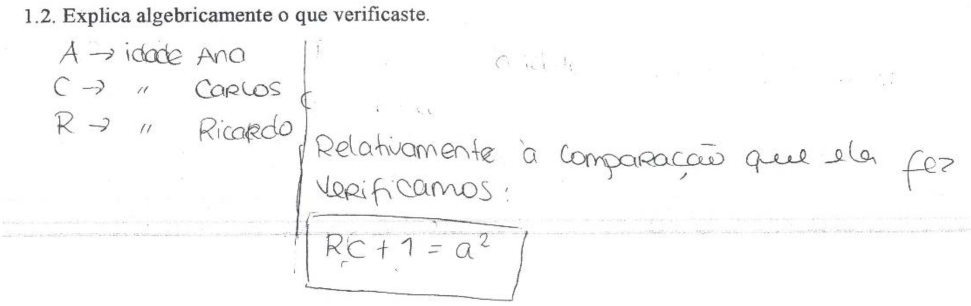


Figura 3: Produção de Carolina, Q1.2.

No momento da discussão Carolina vai ao quadro e apresenta a resolução. A sua resposta, tal como acontece na linguagem natural, não contempla a diferença entre as idades dos irmãos. Neste momento, os alunos estão convictos de que a questão está resolvida. Pergunto se alguém resolveu de forma diferente e verifico que a única variação encontrada foi nas letras escolhidas para designar as variáveis. Pelo que continuo a questionar a turma de modo a escreverem a condição em função de uma única variável.

> Prof.: … *a* é a idade da Ana … Será que podemos expressar a idade do Carlos em função de *a*?
> Patrícia: Então é *a*-1…
> Gabriela: a^2-1 é igual ao produto das idades dos irmãos…
> Prof.: … Será que posso expressar as idades dos irmãos em função de *a*?
> Tatiana: Pode … Pode pôr *a*-1 e *a*+1.
> […]
> Prof.: Como é que fica agora a relação entre as idades deles?
> Patrícia: *a*-1 vezes *a*+1
> Prof.: É igual a quê?
> Alguns alunos: a^2
> Carolina: a^2-1!

Na resolução do problema a atividade de Carolina com as representações matemáticas pode ser esquematizada como mostro na figura 4.

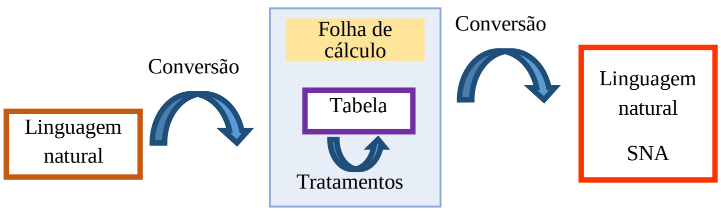


Figura 4: Atividade de Carolina na transformação das representações.

A aluna inicialmente começa por traduzir o enunciado de linguagem natural para uma tabela na folha de cálculo onde através de tratamentos estabelece as relações indicadas no problema de modo a obter a solução. A aluna converte depois o resultado a que chegou para linguagem natural e para o SNA. Embora numa fase inicial esta conversão não tenha contemplado o resultado obtido na íntegra de forma explícita, a discussão estabelecida em sala de aula leva ao refinamento da escrita da condição no SNA.

Tento depois levar os alunos ao reconhecimento da igualdade encontrada.

> Prof.: … Não reconhecem esta igualdade?
> Patrícia: É uma equação do 2.º grau.
> Carolina: Conhecemos, conhecemos… É uma coisa… que…
> Gabriela: Lei do anulamento do produto…
> Carolina: É aquilo que a professora deu.
> Gabriela: É a lei do anulamento do produto! a^2-1= a-1 ou a^2-1= a+1
> Patrícia: Isto é a lei do anulamento do produto? É do quadrado do binómio!
> Carolina: Oh pá eu já disse isso! … Eu não sei nada disso do quadrado do binómio.
> Gabriela: Não, não! Isso ai é outra coisa… A diferença de quadrados!

Este diálogo retrata a confusão que existe por parte dos alunos relativamente à identificação da condição.

Peço depois aos alunos que encontrem a relação entre o quadrado da idade da Ana e o produto das idades dos irmãos sabendo que agora a diferença de idades entre os irmãos é de 5 anos. Carolina rapidamente constrói a tabela no Excel e afirma: “eh eh eh este menos este dá sempre 25!”. Aproximo-me e questiono a aluna acerca do resultado, ao que me responde “5 vezes 5 dá 25!”.

Na discussão desta questão Carolina intervém afirmando a generalização deste resultado, embora grande parte dos colegas ainda não estivesse consciente dessa propriedade.

> Carolina: 25 … é sempre a diferença ao quadrado.
> Prof.: Explica lá isso melhor Carolina.
> Carolina: Porque se a Ana tem 5 anos de diferença dos irmãos … A diferença vai dar sempre 5 ao quadrado. Vai dar sempre a coisa [diferença] ao quadrado …

Os alunos de um modo geral não manifestam depois dificuldades na escrita da relação no SNA.

Por fim é proposta a situação da diferença das idades entre os irmãos ser k. Os alunos já não recorrem à folha de cálculo.

Prof.: Se a diferença entre as idades deles, em vez de ser 1, em vez de ser 5, for k, o que é que acontecerá?

Gabriela e Carolina: $a^2 - k^2$ [resposta em simultâneo].

[…]

Alguns alunos: $a - k$ vezes $a + k$ é igual a $a^2 - k^2$.

Patrícia: É só substituir o 5 pelo k!

Este diálogo conduz os alunos à generalização da condição inicial.

Esta tarefa leva Carolina à dedução da fórmula da diferença de quadrados. A conversão do trabalho realizado na folha de cálculo em articulação com o papel e lápis conduz à generalização no SNA, um aspeto fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Tarefa D- A bola saltitona

A Carlota atirou uma bola que embateu por diversas vezes no chão.

A bola a partir do momento que tocou no chão descreveu uma trajetória em que a sua altura, em cada instante t, é dada por uma função quadrática.

Na primeira vez, que tocou no chão, a altura A da bola é dada por $A(t) = -20t^2 + 160t$ (A em centímetros e t em segundos).

Na segunda vez, a altura B da bola é dada por $B(t) = -20t^2 + 120t$ (B em centímetros e t em segundos).

Na terceira vez, a altura C da bola é dada por $C(t) = -20t^2 + 80t$ (C em centímetros e t em segundos)

Na quarta vez, a altura D é dada por $D(t) = -20t^2 + 40t$ (D em centímetros e t em segundos).

Por fim, a bola rolou no chão e parou.

Figura 5: Enunciado da Tarefa D.

Peço a simulação do primeiro salto da bola na folha de cálculo. Carolina faz a simulação conforme mostro na figura 6. A conversão da tabela da folha de cálculo para a representação gráfica permite-lhe um primeiro contacto com o gráfico da parábola. Carolina facilmente identifica a altura máxima atingida pela bola e a que momento isso acontece, assim como o tempo que a bola demora até voltar a bater no chão.

Tempo	Altura
0	0
1	140
2	240
3	300
4	320
5	300
6	240
7	140
8	0

Tempo	Altura
0	=-20*B3^2+169*B3
1	=-20*B4^2+160*B4
2	=-20*B5^2+160*B5
3	=-20*B6^2+160*B6
4	=-20*B7^2+160*B7
5	=-20*B8^2+160*B8
6	=-20*B9^2+160*B9
7	=-20*B10^2+160*B1
8	=-20*B11^2+160*B1

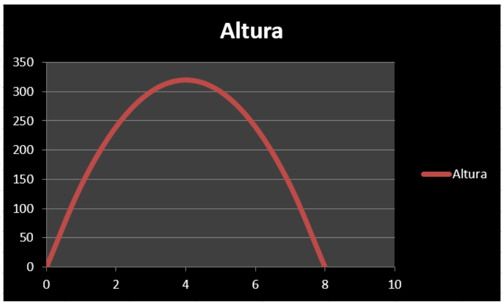
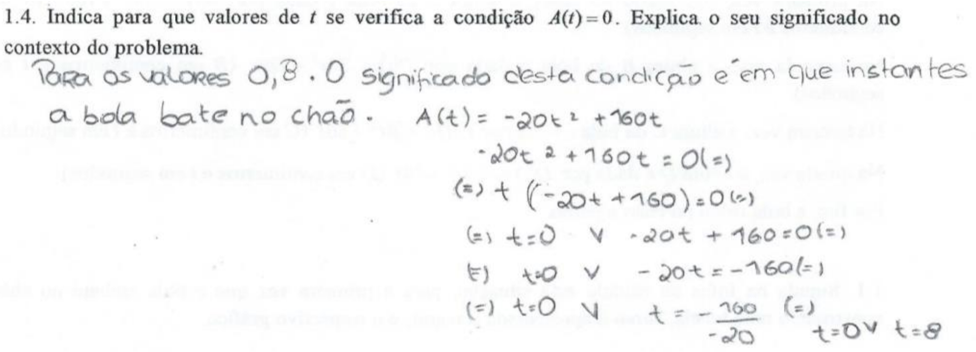


Figura 6: Produção de Carolina.

A aluna também identifica os valores de t que satisfazem a condição $A(t)=0$ e explica o seu significado. Durante a discussão peço uma justificação algébrica para os valores de t obtidos. Carolina resolve a equação e usa corretamente a lei do anulamento do produto, como mostro na figura 7.



1.4. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=0$. Explica o seu significado no contexto do problema.

Para os valores 0, 8. O significado desta condição é em que instantes a bola bate no chão.

$A(t) = -20t^2 + 160t$

$-20t^2 + 160t = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t(-20t + 160) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee -20t + 160 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee -20t = -160 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee t = -\frac{160}{-20} \Leftrightarrow$

$t=0 \vee t=8$

Figura 7: Resposta de Carolina, Q1.4.

Reforço depois a conexão entre as representações para uma ampliação da compreensão do significado da solução da equação.

> Prof.: … Vocês já tinham respondido a esta questão observando a tabela e observado o gráfico. Agora têm uma resolução algébrica. … No vosso gráfico quando é que a parábola intersecta o eixo dos *xx*?
>
> Turma: No 0 e 8.
>
> Prof.: Portanto significa que 0 e 8 são as raízes ou as soluções daquela equação que ali está.

Por fim, noutra questão os alunos verificam que $A(t)-240=0$ é uma equação equivalente a $-20(t-2)(t-6)=0$. A partir da discussão desta questão explico que é possível escrever uma equação do 2.º grau como um produto de fatores, na forma $c(x-r_1)(x-r_2)=0$, onde c é uma constante e r_1 e r_2 são as raízes.

Os alunos resolvem ainda outra tarefa na folha de cálculo que envolve uma função quadrática sem raízes e cuja representação gráfica é uma parábola com a concavidade virada para cima. Só posteriormente é apresentada a fórmula resolvente e os alunos estudam outras propriedades das equações do 2.º grau.

A concluir

Ambas as tarefas incentivam Carolina na transformação das representações. A aluna começa por converter a informação dos enunciados para tabelas na folha de cálculo. Na tarefa D a aluna converte ainda a tabela para uma representação gráfica, o que permite um primeiro contacto com a parábola. Converte depois estas representações da folha de cálculo para o ambiente de papel e lápis, quer para linguagem natural quer para o SNA. Posteriormente a aluna efetua tratamentos no SNA. Esta coordenação das representações leva a aluna a entender o significado de resolver uma equação do 2.º grau, mesmo antes da aprendizagem formal do método algébrico e por outro lado a entender a factorização de uma equação dadas as suas raízes.

O ambiente da folha de cálculo mostra-se propício para Carolina estabelecer as relações entre as variáveis presentes nos enunciados das tarefas, sem o constrangimento do uso do simbolismo algébrico. Por outro lado, as questões colocadas bem como as discussões são fundamentais para o estabelecimento de conexões entre as diferentes representações criando uma grande proximidade entre o ambiente da folha de cálculo e o de papel e lápis, como ilustro na figura 8.

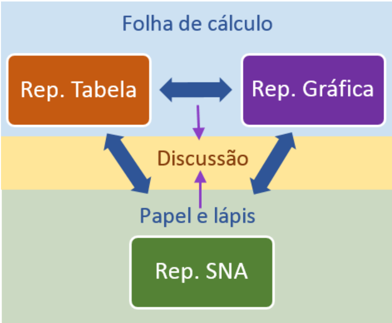


Figura 8: Conexões entre a folha de cálculo e o papel e lápis.

As tarefas propostas, num ambiente combinado da folha de cálculo com papel e lápis, associadas às discussões realizadas em sala de aula, constituem um contexto de trabalho que incentiva Carolina a transformar as representações que é um aspeto essencial na construção do conhecimento (Duval, 2011; Kieran, 2013).

Referências bibliográficas

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2015). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project*. New York, NY. Springer.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: An example from algebra. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions in mathematics educations research* (pp. 153-171). New York, NY: Springer.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

DIFERENTES SIGNIFICADOS DE EQUAÇÃO E O ENSINO DE ÁLGEBRA: UMA PROPOSTA PARA DISCUTIR O CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR

Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC (UFABC), Brasil
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

A proposta principal deste texto é servir de suporte à participação nas discussões de um painel plenário acerca das representações matemáticas, procurando explorar diferentes significados que podem ser atribuídos à equação no ensino de Álgebra e buscar tecer relações destes significados com o Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008). Primeiramente irei apresentar e exemplificar diferentes significados do conceito de equação (Ribeiro, 2007), fundamentado nos resultados de minha tese de doutoramento e em trabalhos de mestrado que dão continuidade às investigações por mim anteriormente iniciadas. Nesta primeira parte, à medida que os diferentes significados são apresentados e são discutidos, procuro estabelecer relações entre os referidos significados e diferentes formas de representar matematicamente um conceito. Em seguida, coloco em discussão o papel que uma abordagem enfatizando esses diferentes significados de equação pode trazer para o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado do professor, em especial, no que se refere a conceitos algébricos.

Considerando a relevância que o termo significado[2] acaba por assumir em meus trabalhos, provisoriamente esclareço que entendo significado como sendo as *diferentes formas pelas quais reconhecemos e utilizamos* um determinado conceito. É importante ainda que se destaque a preocupação que diversos pesquisadores tem apresentado, ao colocar em discussão a questão dos significados em Educação Matemática (Kipatrick, Hoyles & Skovsmose, 2005).

Em Ribeiro (2007) desenvolvi um trabalho de caráter teórico composto por um estudo epistemológico e um estudo didático. Utilizando diferentes referenciais bibliográficos, investiguei os significados concebidos historicamente para a conceito de equação, bem como aqueles identificados em livros didáticos e em resultados de pesquisas em Educação Matemática.

A partir das análises acima descritas, as quais foram desenvolvidas num diálogo com referenciais teóricos da Educação Matemática que tematizam representações

[2] Uma discussão mais aprofundada e ampla pode ser encontrada em Ribeiro (2010), constante nas referências bibliográficas deste texto.

matemáticas, foi possível identificar e categorizar seis diferentes significados. A seguir[3] procuro apresentá-los e explica-los, segundo a leitura histórica por mim adotada:

1) Intuitivo-Pragmático: por esse significado o conceito de equação é concebido como uma noção intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades. Sua utilização está relacionada à resolução de problemas de ordem prática, os quais são originários de situações do dia-a-dia. Tal significado foi identificado nos Babilônios e nos Egípcios, em situações envolvendo problemas de origem prática, geralmente relacionados à questões da agricultura;

2) Dedutivo-Geométrico: por esse significado o conceito de equação é concebido como uma noção ligada às figuras geométricas, como os segmentos por exemplo. Sua utilização está relacionada à situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medidas de lados de figuras geométricas, com intersecções de curvas. Tal significado foi identificado nos Gregos, em situações que relacionavam as equações com a utilização do método das proporções e o da aplicação de áreas. Foi possível ainda identificar tal significado na Geometria das Curvas, de Ommar Khayyam, quando ele encontrou soluções geométricas para equações cúbicas, utilizando-se de intersecções de curvas, como a do círculo com a parábola, ou a intersecção da parábola e a hipérbole equilátera;

3) Estrutural-Generalista: por esse significado o conceito de equação é concebido como uma noção estrutural definida e com propriedades e características próprias. A equação aqui é considerada por si própria, operando-se sobre ela mesma na busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza. Tal significado foi identificado nos trabalhos de al-Khwarizmi que, embora utilizasse equações originárias de problemas de ordem prática, sua atenção estava focada para a determinação da resolução de qualquer equação quadrática; nos trabalhos de Descartes, quando da utilização de seu método cartesiano, quando ele toma as próprias equações não mais como um meio de organização de fenômenos, mas como um campo de objetos que necessita de novos meios para sua organização, como foi o caso da resolução de equações utilizando-se a forma canônica; e também nos trabalhos de Abel e Galois, que passaram a investigar a estrutura do processo de resolução das equações, visando encontrar, ou mostrar que não existia, um algoritmo capaz de resolver, por meio de radicais, as equações de grau superior a quatro;

4) Estrutural-Conjuntista: por esse significado, o conceito de equação é concebido dentro de uma perspectiva estrutural, que está diretamente ligada à noção de conjunto. Equação é vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos. Tal significado foi identificado principalmente em livros didáticos pós Movimento da Matemática Moderna;

5) Processual-Tecnicista: por esse significado, o conceito de equação é concebido como a sua própria resolução – como os métodos e técnicas que são utilizadas para resolvê-la.

[3] Uma discussão mais ampla e aprofundada sobre os Multisignificados de Equação pode ser encontrada em Ribeiro & Machado (2009), constante nas referências bibliográficas do presente trabalho.

Diferentemente dos estruturalistas, aqui equação não vista como um ente matemático sobre o qual as operações e manipulações que são realizadas atendem a regras bem definidas. Tal significado foi concebido principalmente a partir da análise dos resultados de pesquisas na área de Educação Matemática, assim como na análise de livros didáticos de matemática;

6) Axiomático-Postulacional: por esse significado, o conceito de equação é concebido como uma noção da Matemática que não precisa ser definida, uma ideia a partir da qual outras ideias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Nesta perspectiva, equação é vista como uma noção primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana. Tal significado foi concebido a partir de reflexões e críticas à Teoria da Transposição Didática, de Chevallard.

Apesar da apresentação acima desenvolvida obedecer uma ordenação histórica, fato que foi tomado apenas por uma questão de escolha na maneira de apresentar os resultados, chamo a atenção para o fato de que, a meu ver, os diferentes significados de equação devam ser considerados de forma articulada e sem nenhum “nível de hierarquização”. Coloco ainda que, o significado *axiomático-postulacional* parece ter uma natureza distinta dos demais, pois acredito que ele deva ser considerado como o primeiro a ser discutido, de maneira implícita principalmente, no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra. Digo isto baseado em minha conjectura de que não seja necessário definirmos o conceito de equação, para podermos abordá-lo em nossas aulas de Matemática.

Como continuidade às pesquisas desenvolvidas em Ribeiro (2007), os trabalhos de Barbosa (2009) e de Dorigo (2010) foram investigar como professores e alunos veem, interpretam e tratam situações matemáticas que contemplem os diferentes significados de equação. Estas pesquisas estavam vinculadas à um projeto docente[4] mais amplo, o qual foi composto por outros alunos de graduação e pós-graduação que constituíram uma equipe de trabalho.

A partir dos resultados apresentados por Barbosa (2009) e por Dorigo (2010), identificamos o que professores e alunos pensam e fazem quando se deparam com situações matemáticas envolvendo equações. O trabalho de Barbosa (2009) foi desenvolvido com 6 professores de Matemática com diferentes tempos de experiência e diferentes titulações. Por outro lado, o trabalho de Dorigo (2010) foi realizado com um grupo de alunos da 3ª série do Ensino Médio regular (alunos de 16-17 anos) de uma escola pública na cidade de São Paulo, Brasil[5].

[4] O referido projeto docente tem por objetivo principal identificar as possibilidades e potencialidades que a abordagem de diferentes significados de conceitos algébricos na formação do professor de Matemática que ensina Álgebra na Educação Básica (alunos de 6 a 17 anos).

[5] Vale acrescentar que Barbosa (2009) utilizou-se de entrevistas semi- estruturadas para coletar seus dados, as quais foram realizadas individualmente com cada professor. Enquanto isso, Dorigo (2009) trabalhou com o grupo de alunos distribuídos em duplas, ambientado num contexto de um “espaço de discussão”. Em

Barbosa (2009) e Dorigo (2010) apontam que, tanto professores como alunos apresentam em suas concepções, uma forte presença do significado Intuitivo-Pragmático. Entretanto, ainda que os alunos "utilizem" com mais naturalidade tal significado (Dorigo, 2010), percebe-se que eles sentem uma grande necessidade de utilizar-se de procedimentos e técnicas (significado Processual-Tecnicista) para tratar as situações às quais eles foram expostos.

Nas análises desenvolvidas por eles e nos resultados apresentados, pudemos observar que há necessidade de se discutir tanto com professores, como com alunos, situações "não usuais", quer seja, situações que possibilitem abordar as equações em problemas e contextos que "fujam" da exclusividade e/ou excesso de procedimentos e técnicas.

Finalmente, gostaria de colocar em discussão ***se*** e ***como*** resultados de pesquisas como as apresentadas acima podem trazer para o ambiente da Formação do Professor de Matemática, uma discussão sobre temas da Educação Básica – como é o caso das equações – que não contemple um simples caráter de revisão e retomada de conteúdos "básicos". Em meu ponto de vista, tal abordagem pode possibilitar discussões epistemológicas e/ou didático-pedagógicas desses conhecimentos, o que pode propiciar a ampliação das concepções que os professores e os futuros professores possam ter desses conceitos matemáticos.

Nessa direção, parece-me que o trabalho com os diferentes significados de equação na formação do professor de Matemática possibilita ainda a elaboração de contextos em que sejam discutidas as diferentes vertentes do conteúdo (Shulman, 1986), bem como pode permitir reflexões e discussões acerca do *Mathematical Knowlegde for Teaching* – Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball, Thames & Phelps, 2008), no que se refere às equações, por exemplo.

Ratificando a importância de se contemplar e desenvolver pesquisas que tenham como preocupação investigar os conhecimentos do professor de matemática que ensina Álgebra, Doerr (2004) ressalta *a carência de um corpo substancial de pesquisas sobre o conhecimento e a prática do professor no ensino de Álgebra* (p. 268).

A continuidade dos trabalhos e investigações iniciadas por mim, como em Ribeiro (2007), caminha na direção de observar, contemplar e sistematizar tais discussões e reflexões uma vez que tenho desenvolvido pesquisas com professores e alunos acerca do conceito de equação em aulas de Matemática. Além dos trabalhos já concluídos, ou em fase final de conclusão, outros mais estão sendo levados a cabo na mesma perspectiva e, também, considerando outros conceitos da Álgebra.

Dentre as propostas finais que pretendemos alcançar com nosso trabalho temos, por um lado, um anseio de instrumentalizar as "tarefas" do professor, nas quais os resultados aqui

ambos os casos, as intervenções que ocorreram foram no sentido de possibilitar uma maior "explicitação" das concepções de equação que tais alunos e professores possuíam.

discutidos possam ser incorporados às práticas dos professores de matemática no que se refere ao ensino de equações na Educação Básica e/ou no Ensino Superior. Por outro lado, reflexões teóricas estão sendo desenvolvidas no intuito de delinear o MKT (*Mathematical Knowlegde for Teaching*) no que se refere ao conceito de equação.

Fundamentado nos resultados apresentados e nas reflexões aqui desenvolvidas, alguns questionamentos encontram-se em aberto e estimulam nossas inquietações, tais como: Qual é o conhecimento específico (ou especializado) sobre o conceito de equação é necessário para o professor de matemática? Como considerar e contemplar o desenvolvimento epistemológico do conceito de equação na formação do professor de matemática? Qual o papel das diferentes formas de representar matematicamente um conceito para/na formação do professor? Quais as principais dificuldades de aprendizagem estão presentes quando se ensina equações na Educação Básica e/ou no Ensino Superior? Quais as principais dificuldades para o ensino de equação na Educação Básica e/ou Ensino Superior? Qual poderia (ou deveria?) ser o percurso para o ensino de equação, do ponto de vista curricular, na Educação Básica e/ou Ensino Superior?

Enfim, as questões ainda são muitas; são amplas; são complexas. Todavia, certamente, elas são necessárias e fundamentais se queremos propiciar a alunos e professores um ensino e uma aprendizagem de equações – e de Álgebra – que possa romper com uma mera manipulação sem sentido e sem significados de símbolos, procedimentos e técnicas.

Referências Bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

Barbosa, Y. O. (2009). *Multisignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 196 f.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and teaching of algebra. In K. Stancey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 267-289). New York: Kluwer Academic Publishers.

Dorigo, M. (2010). *Investigando as concepções de equação de um grupo de alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2010, 137f.

Kilpatrick, J., Hoyles, C., & Skovsmose, O. (2005). *Meaning in Mathematics Education.* New York: Springer.

Ribeiro, A. J. (2007). *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2007, 142f.

Ribeiro, A. J. (2008). *Multisignificados de equação e o ensino de matemática: desafios e possibilidades.* São Paulo: Blucher Acadêmico.

Ribeiro, A. J. (2010). Uma proposta de construção de perfil conceitual de equação: implicações para a Educação Matemática. *Boletim GEPEM, 56*.

Ribeiro, A. J., & Cury, H. N. (2015). *Álgebra e a formação do professor: explorando os conceitos de equação e de função.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ribeiro, A. J., & Machado, S. D. A. (2009). Equação e seus multisignificados: potencialidades para a construção do conhecimento matemático. *Zetetiké, 17*(31), 109-128.

Shulman, L. S. (1986). Those who undestand: Knowledge growth in the teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Grupo de Discussão 1

As representações e a aprendizagem matemática

AS REPRESENTAÇÕES E A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Rosa Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, e CMUP
rferreir@fc.up.pt

Maria Helena Martinho
Instituto de Educação, Universidade do Minho, e CIE
mhm@ie.uminho.pt

As representações desempenham um importante papel no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Em qualquer nível de ensino, os alunos devem "criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; selecionar, aplicar e traduzir entre representações matemáticas para resolver problemas; e usar representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos" (NCTM, 2007, p. 75). Em suma, os alunos devem ser capazes de usar flexível e fluentemente representações matemáticas, e os professores devem proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem ricas que os ajudem a usar uma variedade de representações para navegar entre conceitos e processos matemáticos (Stylianou, 2010). De facto, "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (NCTM, 2007, p. 75).

O termo representação é comummente aceite como dizendo respeito a uma configuração que pode representar algo (Goldin, 2008). Como exemplos de representações de conceitos matemáticos podemos considerar os desenhos, gráficos, expressões simbólicas, palavras, numerais, etc. As representações não podem ser entendidas de forma isolada pois apenas fazem sentido quando perspetivadas como fazendo parte de sistemas mais abrangentes (Goldin & Shteingold, 2001).

Goldin (2008) distingue entre sistemas de representação *externa* de sistemas de representação *interna*. Os primeiros dizem respeito às configurações que podemos observar e facilmente comunicar a terceiros como, por exemplo, desenhos, equações, esquemas geométricos, numeração na base 10 (Cuoco, 2001); os segundos dizem respeito às imagens de objetos e processos matemáticos que criamos na nossa mente como, por exemplo, as configurações pessoais de símbolos convencionais da Matemática (Cuoco, 2001; Goldin, 2008).

Revemo-nos na perspetiva do NCTM (2007) que apresenta o termo representação como dizendo respeito "tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática numa determinada forma e à forma, em si mesma” (p. 75). Deste modo, a representação “é uma parte essencial da atividade matemática e um veículo para captar conceitos matemáticos” (Stylianou, 2010, p. 327), o que espelha bem a sua complexidade.

Durante o processo de aprendizagem matemática, os alunos recorrem a representações que lhes são propostas, apresentadas, mas também geram, inventam, as suas próprias representações. Apesar dos desafios que se colocam aos professores pelo facto de as representações inventadas pelos alunos diferirem frequente e significativamente das representações que têm acompanhado as convenções matemáticas ao longo dos tempos, o diálogo entre representações inventadas e representações apresentadas (pelo professor) favorece e enriquece a sua compreensão matemática (Cuoco, 2001; Kamii, Kirkland, & Lewis, 2001; Whitin & Whitin, 2001).

De facto, o professor, quando pensa em como ajudar os alunos a compreender um determinado conceito, deve equacionar o uso de diferentes representações desse conceito pois só recorrendo a representações múltiplas se consegue uma aprendizagem significativa (Kieran, 1992). A combinação de representações ajuda a melhor identificar e clarificar os vários aspetos dos conceitos e a transição entre representações diferentes implica o envolvimento dos alunos em atividade matematicamente interessante.

De acordo com Miura (2001), numa sala de aula, podemos identificar representações instrucionais e cognitivas. As representações *instrucionais* correspondem às usadas pelo professor quando comunica com os alunos; são, por isso, representações apresentadas, na aceção anteriormente referida. Incluem-se aqui as representações convencionais como, por exemplo, definições, modelos, exemplos, formas de manipular expressões. Trata-se de sistemas construídos socialmente (Goldin, 2008). As representações *cognitivas* ou *mentais* são as utilizadas pelos próprios alunos quando procuram dar sentido a um conceito ou quando procuram resolver uma determinada tarefa. Entre as representações cognitivas podemos incluir símbolos construídos pelos próprios alunos (as representações geradas de que falámos atrás), a linguagem natural, imagens ou estratégias de resolução. Estas representações não se podem observar diretamente, pelo que são representações internas, na aceção de Goldin (2008). A forma como o aluno descreve uma ideia, constrói um diagrama, descreve como pensou, manipula um material evidencia as suas representações cognitivas. Perceber as representações cognitivas dos alunos ajuda o professor a compreender as suas dificuldades, melhorando assim o seu conhecimento profissional e, consequentemente, a sua prática (Goldin, 2008).

Investigadores e professores, na tentativa de compreenderem o aluno, a aprendizagem e respetivas dificuldades, fazem inferências acerca das representações internas usadas pelos alunos, e das suas conceções ou ideias erróneas com base nas interações que estabelecem com o professor ou com os colegas. Ou seja, mais especificamente, os professores baseiam as suas inferências na exteriorização das representações internas.

Segundo Goldin e Shteingold (2001), a existência de interação entre representações internas e externas é essencial para o processo de ensino e aprendizagem. As conexões entre representações internas e externas podem estabelecer-se através de analogias, imagens, metáforas e apresentação de estruturas similares. Paralelamente, e tal como já referimos, o uso de múltiplas representações constitui uma ferramenta poderosa para facilitar a compreensão matemática dos alunos (Kieran, 1992; Tripathi, 2008).

A diversidade de representações externas a que o professor pode recorrer e a oportunidade dada aos alunos de exprimir as suas ideias recorrendo também a diferentes representações ajudam o aluno a desenvolver as suas próprias representações, cada vez mais poderosas. De acordo com Duval (2006), os alunos devem ser fluentes a realizar tratamentos e conversões, os dois tipos fundamentais de transformação de representações. Por *tratamentos* entende-se as transformações de representações que ocorrem dentro de um mesmo sistema de representação como, por exemplo, a manipulação algébrica. Os tratamentos dependem das possibilidades de transformação que o sistema utilizado oferece. Por *conversões* entende-se as transformações de representações em que há uma mudança de sistema como, por exemplo, passar da representação gráfica de uma função para a sua representação algébrica.

As conversões exigem "em primeiro lugar, o reconhecimento do mesmo objeto matemático entre duas representações cujos conteúdos não têm, muitas vezes, nada em comum" (Duval, 2006, p. 112). Mais ainda, mudar de um sistema de representação para outro acarreta a mudança "não apenas [d]os meios de tratamento, mas também [d]as propriedades que podem ser explicitadas" (p. 114). Deste modo, aprender matemática com compreensão exige o reconhecimento, pelo aluno, de um mesmo objeto em diferentes sistemas de representação, bem como o reconhecimento, em cada sistema de representação, daquilo que é matematicamente relevante.

É possível identificar, no conjunto de contribuições apresentadas no EIEM 2015 que se dedicam ao tema da aprendizagem matemática, diversos pontos de contacto. Assim, a preocupação com a identificação de representações internas ou mentais percorre todos os textos, de forma mais ou menos explícita. A compreensão dos raciocínios dos alunos, do domínio dos conceitos ou dos processos de resolução de tarefas é também uma constante. Os temas matemáticos presentes nas diferentes contribuições passam pelos números racionais e decimais, raciocínio quantitativo aditivo e estatístico, sistemas de equações e padrões, evidenciando a transversalidade da temática deste grupo de discussão.

O primeiro momento deste grupo de discussão, dedicado às representações mentais dos números racionais, é composto por duas comunicações. A primeira, apresentada por Helena Guerreiro e Lurdes Serrazina, centra-se na construção do conceito de número racional através de múltiplas representações de alunos de uma turma do 1.º ciclo. Estas autoras defendem que a mensagem visual dos modelos construídos relativamente à percentagem e a utilização de diferentes representações contribuiu para consolidar o conceito de número racional. Na segunda comunicação, Renata Carvalho e João Pedro da Ponte procuram compreender as representações mentais de alunos do 6.º ano relativamente ao cálculo mental com números racionais. Estes autores recorrem à perspetiva de Schnotz, Baadte, Müller e Rasch (2010) relativamente às representações mentais distinguindo entre as representativas (modelos e imagens) e as descritivas (proposicionais). A investigação realizada sugere que os alunos, ao calcularem mentalmente com números racionais, recorrem essencialmente a estratégias que envolvem relações numéricas, mas também a estratégias na aplicação de factos numéricos (tabuadas) e regras de memorização (uso mental do algoritmo). Os autores sublinham a relevância da promoção de representações mentais na aprendizagem de números racionais, para que os alunos as possam utilizar perante a necessidade do cálculo mental.

O segundo momento de discussão deste grupo debruça-se sobre a interpretação do raciocínio dos alunos através da leitura das representações exteriorizadas. A primeira comunicação, apresentada por Lurdes Serrazina e Cília Silva, dedica-se à compreensão do modo como alunos brasileiros do 4.º ano de escolaridade evoluem nas representações de números decimais. O recurso a transformações de representações ajudou-os a chegarem ao significado da vírgula na notação decimal. A segunda comunicação, de Inês Diogo e Margarida Rodrigues, dedica uma atenção particular à compreensão do raciocínio estatístico de crianças de 5 e 6 anos. Este estudo revela a capacidade destas crianças organizarem, representarem e interpretarem dados que elas próprias recolhem, evidenciando um raciocínio estatístico sobre os dados e suas representações. Neste segundo momento de discussão, surge também o póster de Ema Mamede e Liliane Carvalho, em que as autoras procuram conhecer o efeito de três tipos diferentes de representação de informação (gráficos de barras, tabelas e casos isolados – entendidos como conjuntos de dados não organizados) no desempenho dos alunos ao resolver problemas. Os dados do estudo realizado apontam para um desempenho semelhante, independente da representação usada.

O terceiro momento deste grupo de discussão apresenta três comunicações que analisam representações explicitadas pelos alunos na resolução de tarefas e nas quais as transformações entre diferentes representações assumem um papel relevante para a aprendizagem. A primeira comunicação, proposta por Paula Montenegro, Cecília Costa e Bernardino Lopes, apoia-se nas representações semióticas sugeridas por Duval (2011), onde as transformações entre diferentes representações são reveladoras da compreensão do conceito envolvido. Ao longo do estudo foi verificada a ocorrência de diferentes conversões na realização de uma tarefa com padrões por alunos do 6.º ano de escolaridade. No entanto, algumas incongruências foram identificadas, originando dificuldades e bloqueios. A segunda comunicação, de Margarida Rodrigues e Lurdes Serrazina, dedica-se ao raciocínio quantitativo aditivo de alunos do 2.º ano de escolaridade, através da análise de representações utilizadas pelos alunos na resolução de duas tarefas que recorrem a transformações. As autoras referem o duplo papel das representações: como suporte para o pensamento matemático dos alunos e, paralelamente, como contribuição para a compreensão do raciocínio que seguem. A terceira comunicação, apresentada por Sandra Nobre, Nélia Amado e João Pedro da Ponte, centra-se no estudo das representações matemáticas e na transformação entre representações reveladas por uma aluna do 9.º ano durante a atividade de resolução de problemas na aprendizagem do método de substituição para resolução de sistemas. Os autores concluem que a atividade de resolução de problemas promove o uso de diferentes representações e a própria transformação entre estas.

Ao longo dos três momentos deste grupo de discussão pretendemos discutir de que forma as diferentes representações podem contribuir para a aprendizagem dos alunos nos vários níveis de escolaridade. Pretendemos também que, do trabalho de grupo, seja possível extrair um conjunto de questões e problemas relevantes que possam constituir objeto para futuras investigações e colaborações.

Referências bibliográficas

Cuoco, A. A. (2001). Preface. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. ix-xiii). Reston: NCTM.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semióticas*. S. Paulo: PROEM.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Reston: NCTM.

Kamii, C., Kirkland, L., & Lewis, B. A. (2001). Representation and abstraction in young children’s numerical reasoning. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 24-34). Reston: NCTM.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school Algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Miura, I. T. (2001). The influence of language on mathematical representations. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 53-116). Reston: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. Jong & J. Elen (Eds.), *Use of representation in reasoning and problem solving* (pp. 11-35). New York, NY: Routledge.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers’ conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 325-343.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*, 438-445.

Whitin, P., & Whitin, D. (2001). Using literature to invite mathematical representations. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics. 2001 Yearbook* (pp. 228-235). Reston: NCTM.

Comunicações – GD1

CÁLCULO MENTAL COM NÚMEROS RACIONAIS: REPRESENTAÇÕES MENTAIS DOS ALUNOS

Renata Carvalho
Agrupamento de Escolas Joaquim Inácio da Cruz Sobral
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
renatacarvalho@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo: O indivíduo constrói representações mentais do mundo que o rodeia, às quais recorre para compreender a realidade e fazer inferências. Estas representações mentais refletem os conhecimentos matemáticos e do mundo real dos alunos e tanto são fundamentais para a realização de cálculo mental como para estabelecer relações entre números e operações. O objetivo deste estudo é analisar as estratégias de cálculo mental dos alunos e as representações mentais que lhes estão subjacentes em questões de cálculo mental com números racionais nas representações fracionária, decimal e percentagem. O estudo seguiu uma metodologia de *design research*, tendo sido realizados dois ciclos de experimentação com a participação de duas professoras e 39 alunos do 6.º ano. As estratégias de cálculo mental dos alunos centradas em relações numéricas, aplicação de factos ou regras memorizadas parecem ter subjacentes representações representativas (modelos e imagens) e descritivas (representações proposicionais), embora as representações descritivas se associem mais a relações numéricas.
Palavras-chave: Cálculo mental, Números racionais, Estratégias, Representações mentais.

Introdução

O conhecimento que temos do mundo depende de representações mentais (Johnson-Laird, 1980; 1983/90) que construímos. Estas representações são criadas a partir de experiências de aprendizagem, escolares e não escolares, que originam informação que é armazenada na nossa memória de trabalho (*working memory*) e de longo termo (*long-term memory*). A memória de trabalho é um sistema temporário que depende de outros sistemas, entre os quais os que estão envolvidos na memória a longo termo, e constitui um mecanismo de processamento e armazenamento de informação que desempenha um papel fundamental em tarefas cognitivas como o raciocínio, a aprendizagem e a compreensão (Baddeley, 1993). A memória de trabalho é importante para a aprendizagem em geral, mas assume uma importância ainda maior na aprendizagem da Matemática uma vez que o raciocínio matemático é uma atividade cognitiva de nível elevado que faz uso de conhecimentos prévios e factos básicos armazenados na memória a longo prazo. Dehaene (1997) considera que a memória tem um papel central no cálculo mental, seja exato ou aproximado, não só pela sua capacidade de guardar factos numéricos, mas também pelos modelos mentais que vão sendo criados com base em conhecimentos prévios e que apoiam os alunos no seu processo de raciocínio e construção de estratégias.

Um conhecimento matemático estruturado, por norma, está relacionado com o contexto em que foi aprendido, sendo difícil de transpor para novas situações (Bell, 1993). Daí a importância de diversificar experiências de aprendizagem e contextos onde os números racionais sejam apresentados e abordados, de forma a criar oportunidades aos alunos para estabelecerem relações entre diversas representações e formarem imagens mentais dos conceitos matemáticos (Swan, 2008). O desenvolvimento desta capacidade relacional dos alunos apoia-os na transferência e/ou extensão de conhecimentos de uns contextos para outros. Mas, no âmbito da aprendizagem dos números racionais, que contextos poderão ser relevantes para os alunos e promotores de representações mentais? Tendo em conta esta questão, este estudo tem por objetivo analisar as estratégias de cálculo mental dos alunos e as suas representações mentais subjacentes em questões de cálculo mental com números racionais nas representações fracionária, decimal e percentagem

Estratégias de cálculo mental com números racionais

Calcular mentalmente requer compreensão acerca da grandeza e valor dos números, do efeito das operações sobre os números e a aquisição prévia de um conjunto de factos numéricos que permitam calcular rapidamente e com precisão (Heirdsfield, 2011). Estes factos numéricos envolvem, por exemplo, conhecimentos sobre somas, diferenças, produtos e quocientes que os alunos vão retendo na memória ao longo da sua experiência escolar. Neste estudo, o cálculo mental é entendido como um cálculo exato, efetuado mentalmente de forma rápida e eficaz, onde é possível usar registos intermédios em papel e que, recorrendo a representações mentais, faz uso de factos numéricos, regras memorizadas e relações entre números e operações. O conhecimento dos alunos acerca das operações com números, decorrente da sua experiência matemática e leva-os a simplificarem cálculos cada vez mais. Isso, bem como a complexidade dos raciocínios usados no cálculo mental com números racionais (Barnett-Clarke, Fisher, Marks & Ross, 2010), origina, por parte dos alunos, o recurso a estratégias baseadas na aplicação de regras memorizadas. A simplificação de cálculos é um aspeto referido no Programa de Matemática de 2007 como uma capacidade a desenvolver a par do cálculo mental. Estas regras memorizadas envolvem, por exemplo, a aplicação de procedimentos referentes à multiplicação/divisão por potências de 10 (desloca-se a vírgula uma posição para a direita na multiplicação por 10 ou uma posição para a esquerda na divisão por 10) ou às operações com números racionais como a regra “inverte e multiplica” na divisão de frações, ou a adição de numeradores quando os denominadores são iguais na adição de frações. Os factos numéricos e as regras memorizadas podem surgir isoladamente enquanto estratégia de cálculo mental. Por exemplo, no cálculo de $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ o aluno ao referir "fiz meio mais meio que sei logo que dá 1" está a usar uma estratégia baseada num facto numérico que conhece e no cálculo de $10\%\ de\ 350$ ao referir "dá 35. Tirei o zero" está a aplicar a regra de divisão por potências de 10. Mas os factos numéricos e as regras memorizadas também podem surgir como auxiliares preciosos no estabelecimento de relações entre números e operações.

Estratégias baseadas em relações numéricas refletem o pensamento relacional dos alunos (Empson, Levi & Carpenter, 2010) ao contemplarem a mudança de representação (Caney & Watson, 2003), entre números racionais (fração→decimal; decimal→fração; fração→percentagem; percentagem→ fração; percentagem→decimal e decimal→percentagem) ou de um racional para um número natural (decimal→número natural referente a $\frac{10}{100}$); a relação parte-todo ou parte-parte; a equivalência entre expressões; a relações entre operações inversas, etc. O pensamento relacional é um aspeto importante do cálculo mental pois refere-se à capacidade para usar propriedades fundamentais das operações e a noção de igualdade, para analisar e resolver problemas tendo em conta o seu contexto (Empson et al., 2010). Baseia-se em relações numéricas e o seu desenvolvimento serve de suporte à transição da aritmética para a álgebra (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

Representações mentais: Modelos, imagens e representações proposicionais

Como indica Plasencia (2002), representações mentais são representações internas que fazem parte das estruturas cognitivas de um indivíduo, sendo através delas que damos sentido aos fenómenos e explicamos conceitos e ideias matemáticas. Na sua perspetiva, as representações internas (mentais) e as representações externas (usadas para comunicar ideias) estão diretamente relacionadas em Matemática, uma vez que nos movemos entre ambas para podermos explicar a forma como pensamos, embora por vezes inconscientemente. Como indica a autora, pelo facto das representações mentais ocorrerem na mente de cada indivíduo e não serem diretamente observáveis, tudo o que podemos dizer sobre elas é baseado em inferências.

A Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1990) pretende explicar processos de conhecimento complexos e, em particular, processos de compreensão e inferência. Esta teoria assume que existem três tipos de representações mentais: modelos mentais, representações proposicionais e imagens mentais que são fundamentais na construção destes processos de pensamento. A diferença entre estas representações mentais reside na sua especificidade e função embora os modelos mentais sejam a base para a criação de imagens e de representações proposicionais. Se estes modelos mentais representam o mundo real com alguma especificidade, são considerados imagens, se fazem inferências acerca do mundo real representado por modelos mentais são representações proposicionais. Os termos usados em Psicologia Cognitiva para designar estes "entes mentais” estruturantes do conhecimento variam de teoria para teoria. De acordo com a Teoria dos Modelos Mentais (Johnson-Laird, 1990), os modelos mentais têm uma estrutura análoga à estrutura correspondente do mundo real e as imagens são relações percetivas dos modelos a partir de um ponto de vista particular. Na perspetiva de Schnotz, Baadte, Müller e Rasch (2010), modelos mentais são representações mentais criadas a partir da compreensão de representações externas e que estão na base da compreensão e construção do conhecimento. Como indica Medeiros (2001), o conceito de modelo mental, apesar de sujeito a diversas interpretações, parece ser aceite e entendido como fruto de representações pessoais e privadas de um indivíduo. As imagens são classes especiais de modelos, representam objetos e correspondem a uma visão dos modelos, como resultado da perceção ou imaginação, representando as características percetíveis dos objetos do mundo real. Modelos como imagens são altamente específicos. Por exemplo, não é possível formarmos uma imagem geral de um triângulo sem que esta esteja associada a um triângulo específico (equilátero, escaleno, ou isósceles). Plasencia (2002) refere que, em Matemática, os alunos recorrem essencialmente a cinco tipos de imagens mentais: imagens concretas, de padrão, de memória de fórmulas, cinestésicas e dinâmicas. Imagens concretas são “*pictures-in-the-mind*” (aspas no original), ou seja, imagens fotográficas sem movimento mas com muito detalhe. Imagens de padrão representam relações descritas através de um esquema visual-espacial, sem no entanto apresentarem detalhes acerca do objeto que representam. A visualização mental dos movimentos das peças num jogo de xadrez são imagens de padrão. Imagens de fórmulas são usadas pelos alunos sempre que desejam “ver” (entre aspas no original) uma determinada fórmula na sua mente, imaginando-a escrita no seu caderno ou no quadro. Este tipo de imagem, que pode ser bastante precisa e detalhada, constitui um poderoso meio de representar informação abstrata, embora em alguns casos não reflita a compreensão matemática dos alunos (nem contribua para essa compreensão). As imagens cinestésicas envolvem atividade muscular onde os alunos acompanham com gestos a exteriorização das suas representações internas (e.g., indicar com o dedo uma parte de um círculo dividido ao meio). Por fim, as imagens dinâmicas envolvem a capacidade de mover e transformar mentalmente imagens concretas (e.g., transformar um retângulo que roda sobre um eixo dando origem a um cilindro de revolução). Na perspetiva desta autora, uma aprendizagem significativa está fortemente associada à utilização de imagens mentais onde a visualização assume um papel importante. A autora acrescenta ainda que, se a Matemática escolar se basear unicamente na aprendizagem de regras e procedimentos, isto não irá permitir aos alunos a criação de modelos mentais e de destreza na capacidade de encarar a Matemática de forma relacional.

A representação proposicional enquanto representação mental refere-se à linguagem mental de uma proposição que é usada para fazer inferências. Estas proposições podem ser verdadeiras ou falsas e representam afirmações que não se parecem diretamente com o objeto que representam (não são estruturas análogas) mas são fundamentais para estabelecer relações. Schnotz et al. (2010) consideram que as representações mentais podem ser consideradas sinais e vice-versa e dividem-nas em dois tipos, os símbolos e os ícones que associam a dois tipos de representações: descritivas (*description*) e representativas (*depiction*). As representações descritivas são símbolos, ou seja, sinais que não têm qualquer semelhança com o seu referente, mas que permitem perceber relações. A linguagem natural, falada ou escrita, expressões matemáticas ou fórmulas são representações descritivas. Schnotz et al. (2010) relacionam-nas com representações proposicionais. As representações representativas são ícones, ou seja, sinais (tais como fotografias, desenhos, pinturas, mapas ou linhas de um gráfico) associados ao seu referente por semelhança ou analogia. Os autores relacionam-nas com modelos mentais e imagens. Na sua perspetiva, ambas as representações servem propósitos distintos. Enquanto as representações descritivas são mais gerais e abstratas e poderosas a expressar o conhecimento abstrato, as representativas são mais concretas e específicas, mais seletivas, sendo fundamentais para fazer inferências e caracterizar objetos. São essenciais para atingir altos níveis de abstração e importantes para o pensamento criativo, a compreensão, para raciocinar, argumentar e resolver problemas. Deste modo, as representações descritivas e representativas complementam-se. Por vezes, uma representação representativa (modelos e imagens) permite a criação de uma representação descritiva (representação proposicional) simples facilitando acesso rápido a um processo simbólico.

Ainda a propósito da construção de modelos mentais, Dehaene (1997) realça a importância de, na resolução de problemas, se compreender o problema para que se possa formar um modelo mental da situação e não ser traído pelo acionar involuntário de determinados automatismos mentais. O autor sugere que, no ensino e aprendizagem das frações, se deve incentivar a criança a usar a sua intuição de quantidade para compreender e construir um reportório de modelos mentais que a ajude a distinguir situações onde os números racionais surjam.

Metodologia de investigação

Este estudo é qualitativo e interpretativo (Denzin & Lincoln, 2005) com uma metodologia de *design research* (Cobb, Confrey, diSessa, Lehere & Schauble, 2003). Participam duas professoras e duas turmas do 6.º ano (39 alunos) que já tinham trabalhado os números racionais nas suas várias representações (decimal, fração, percentagem) e nas quatro operações, e a primeira autora (a partir daqui designada por investigadora) como observadora participante.

O estudo desenvolveu-se em três fases (Figura 1): preparação, experimentação e análise. A fase de preparação envolveu uma primeira revisão de literatura e um estudo preliminar, com alunos do 5.º ano da investigadora, baseado num protótipo de experiência de ensino com 6 tarefas de cálculo mental. Era objetivo deste estudo preliminar perceber as estratégias dos alunos no cálculo mental com números racionais e algumas das dinâmicas inerentes à realização de uma experiência de ensino centrada em tarefas de cálculo mental e na discussão coletiva dessas tarefas. Posteriormente foi construída uma experiência de ensino com 10 tarefas de cálculo mental, partindo da conjetura de que uma experiência de ensino realizada durante dois períodos letivos, baseada em tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos (expressões) e não matemáticos (situações contextualizadas) com números racionais envolvendo as quatro operações e centrada na discussão das estratégias dos alunos no 6.º ano, contribui para o desenvolvimento do reportório de estratégias de cálculo mental dos alunos e para a melhoria gradual do seu desempenho em tarefas de cálculo mental.

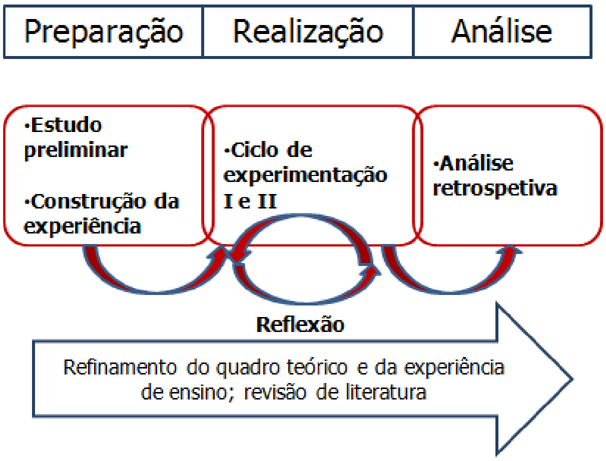


Figura 1: Fases de desenvolvimento do estudo.

A fase de experimentação contemplou dois ciclos, um em 2012 (ciclo I) e outro em 2013 (ciclo II). Os dados foram recolhidos recorrendo à observação direta das aulas em que se realizaram tarefas de cálculo mental e de reuniões de preparação/reflexão da experiência de ensino com as professoras participantes. A experiência de ensino foi elaborada pela investigadora e discutida e reajustada com as professoras das turmas que a realizaram na sala de aula. A discussão na sala de aula foi conduzida pelas professoras, intervindo a investigadora pontualmente para esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias dos alunos. As reuniões de trabalho com as professoras foram áudio-gravadas e as aulas de cálculo mental foram áudio e vídeo-gravadas para posterior análise e reflexão acerca dos momentos de discussão coletiva.

Na análise de dados foram visionados os episódios de aula com o intuito de identificar as estratégias de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão. Para a análise das estratégias, consideramos três categorias: (i) factos numéricos; (ii) regras memorizadas; e (iii) relações numéricas. Estas categorias (e suas subcategorias) foram construídas com base em estudos anteriores (e.g., Caney & Watson, 2003) e na análise dos dados recolhidos. O nome dado à estratégia do aluno foi escolhido em função do elemento mais forte presente na sua estratégia (por exemplo, se faz um uso forte de relações numéricas, nomeadamente da relação parte-todo é considerada uma estratégia de categoria "relações numéricas" e subcategoria "relação parte-todo"). Para cada categoria foram identificadas as representações mentais subjacentes às estratégias dos alunos, nomeadamente modelos mentais, imagens mentais, ou representações proposicionais.

As três fases do estudo foram acompanhadas por uma reflexão individual por parte da investigadora, e coletiva entre esta e as professoras nas reuniões de preparação/reflexão nos dois ciclos de experimentação. Esta reflexão individual e coletiva, em conjunto com uma contínua revisão de literatura, permitiu melhorar e aprofundar não só o quadro concetual mas também as conjeturas de ensino e aprendizagem e a experiência de ensino, originando diversos ajustes nas tarefas.

A experiência de ensino

A experiência de ensino é composta por 10 tarefas de cálculo mental, que denominámos de "Pensa rápido!". Estas tarefas incluem expressões e situações contextualizadas que foram projetadas semanalmente na sala de aula com recurso a um *PowerPoint* temporizado. No ciclo I de experimentação realizámos sete tarefas envolvendo expressões, duas com situações contextualizadas e uma envolvendo ambas (mistas). No ciclo II houve a necessidade de proceder a uma reorganização das tarefas tendo-se realizado cinco tarefas com expressões e cinco tarefas mistas. Esta reorganização emergiu da necessidade dos alunos darem sentido aos números usando situações contextualizadas (Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer & Keijker, 2008).

Cada tarefa é constituída por duas partes com 5 expressões ou 4 situações contextualizadas cada parte. Os alunos têm 15 segundos para resolver cada expressão e 20 segundos para resolver cada situação contextualizada individualmente e anotar o resultado numa folha de registo. Na primeira parte promove-se um primeiro momento de discussão de estratégias dos alunos com o intuito de influenciar positivamente a realização da segunda parte da tarefa. No final da segunda parte promove-se novo momento de discussão, cuja duração varia entre 30 e 90 minutos. Nas tarefas com expressões, intercalam-se expressões sem valor em falta (e.g., $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$) com expressões de valor em falta (e.g., 0,7 +__=1), sendo que estas últimas representam um contexto de aprendizagem promotor de pensamento relacional ao invés de uma aplicação direta de procedimentos de cálculo (Carpenter et al., 2003). As tarefas com situações contextualizadas (e.g., "*Uma tina tem de capacidade* $22{,}5\ l$ *. Quantos baldes de* $\frac{1}{2}\ l$ *são necessários encher para despejar por completo a tina?"*) pretendem facilitar a criação de representações mentais bem como ajudar os alunos a dar significado aos números através da relação entre estas e as expressões apresentadas, podendo os raciocínios ser transpostos de uma situação para outra. Por exemplo, a resolução da situação da tina referida acima pode relacionar-se com a resolução da expressão $2{,}4 \div \frac{1}{2}$. A dinâmica de realização e exploração das tarefas é igual ao longo de toda a experiência de ensino.

Na construção das tarefas, os números racionais surgem em diferentes representações (decimal, fração e percentagem), estando a representação usada em cada tarefa de acordo com o tópico que as professoras estavam a trabalhar no momento. No momento em que se estudam volumes usa-se sobretudo a representação decimal, no estudo das relações e regularidades usa-se a representação em fração e em Estatística usam-se as três representações. Esta opção permite desenvolver o cálculo mental de forma integrada com a aprendizagem dos números racionais, prolongada no tempo e estabelecer relações entre diferentes tópicos matemáticos. Recorremos ao uso de numerais decimais com o último dígito par ou múltiplos de 5 e de 10 e números de referência para facilitar a equivalência entre as representações decimal, fracionária e percentagem. Enfatizámos a importância de algumas relações numéricas (e.g., dividir por 0,5 é o mesmo que multiplicar por 2) fazendo-as surgir em diversas questões ao longo das 10 tarefas.

As tarefas permitem não só rever e consolidar aprendizagens envolvendo números racionais de referência, mas também ampliar estratégias de cálculo mental dos alunos. Mas as tarefas, por si só, são insuficientes para desenvolver o cálculo mental. Tal como refere Thompson (2009), é fundamental que o professor crie um ambiente de sala de aula onde os alunos se sintam confortáveis a partilhar as suas estratégias, em que oiça atentamente as suas estratégias e as reforce positivamente, contribuindo para a melhoria do conhecimento dos alunos sobre os números e as operações e da sua capacidade de implementar estratégias eficazes. O professor deve também assegurar-se que os alunos tiveram oportunidade de experienciar situações diversificadas de cálculo mental para assim desenvolverem estratégias cada vez mais sofisticadas. Acrescentamos ainda a importância do questionamento na sala de aula, quer no sentido professor-aluno, quer entre alunos, por exemplo: Como pensaste? Como chegaste ao teu resultado? O que pensam da estratégia do colega? Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega? Este tipo de questões tem como objetivo ajudar o aluno a explicar e a clarificar como pensou e a ser crítico face às explicações dos colegas, gerando-se um ambiente de partilha onde se vai construindo um reportório de estratégias e se validam as estratégias dos alunos, através da interação entre estes.

Estratégias e representações mentais dos alunos

As questões de cálculo mental que analisaremos de seguida pretendem ilustrar algumas das estratégias mais comuns dos alunos no cálculo mental com números racionais, bem como as representações mentais associadas a essas estratégias, verbalizadas através das suas explicações. Analisaremos questões envolvendo frações, numerais decimais, percentagens ou envolvendo duas destas representações dos números racionais. Os tipos de questões apresentadas variam entre expressões com valor ou sem valor em falta e situações contextualizadas.

A expressão sem valor em falta indicada na figura 2 foi a primeira realizada na experiência de ensino nos ciclos de experimentação I e II e refere-se à adição de duas frações. A explicação de Gonçalo evidencia uma estratégia de *relação parte-todo* que parece ter sido originada por uma *imagem mental*, onde o acompanhamento da explicação do aluno nos permite visualizar mentalmente a situação apresentada por este: “Pensei numa maçã e parti. E depois eu juntei os dois meios”. Nesta estratégia, o aluno sente necessidade de “imaginar” uma maçã (todo), de a partir em meios (partes) e de voltar a juntar as partes para formar o todo estabelecendo, assim, uma *relação parte-todo*. A relação parte-todo foi um tipo de estratégia que surgiu pontualmente associada às operações com frações, sobretudo no cálculo de percentagens. No que se refere à imagem mental de Gonçalo e que envolve uma unidade continua (uma maçã), esta apenas surgiu associada ao cálculo de frações.

Tarefa	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$
Explicação do aluno	***Gonçalo (ciclo II)***: Eu pensei numa maçã e parti. E depois eu juntei os dois meios e depois vi logo que era uma unidade.
Estratégia	Relações numéricas – relação parte-todo
Representação mental	Imagem mental

Figura 2: Análise da questão $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$.

A adição de dois numerais decimais é frequentemente associada pelos alunos à adição de dois números naturais, o que se reflete nas suas estratégias. A estratégia de Rui (figura 3) reflete a aplicação de uma *regra memorizada*, onde é possível perceber que este realizou mentalmente o algoritmo da adição.

Tarefa	$0{,}5 + 0{,}25$
Explicação do aluno	***Rui (ciclo II)***: Está ali 5 décimas e ali está 25 centésimas. Fiz unidades com unidades. Zero com 5, 5. 5 com 2. Não transformei o 5 em 50 centésimas . . . zero com 5, 5. 5 com o 2, 7. Zero com zero, zero.
Estratégia	Regras memorizadas – algoritmo da adição de numerais decimais
Representação mental	Imagem mental

Figura 3: Análise da questão $0{,}5 + 0{,}25$.

Esta estratégia parece ter sido influenciada pela *imagem mental* de algoritmos escritos, dado o pormenor com que Rui explica a forma como realizou o cálculo: “Fiz unidades com unidades. Zero com 5, 5. 5 com 2 . . . 7. Zero com zero, zero”.

Estratégias baseadas em imagens mentais de algoritmos escritos, não surgiram apenas associadas à adição de numerais decimais mas também às operações com frações, especialmente na multiplicação e divisão de duas frações.

O cálculo de percentagens fez emergir relações parte-parte e parte-todo (entre outras) como a apresentada por João, especialmente em expressões de valor em falta como a que se apresenta na figura 4. João apresenta uma estratégia que parece ter subjacente uma *imagem mental* baseada em experiências do "dia-a-dia" tal como refere: "Nas frações utilizávamos a piza e eu lembrei-me de uma coisa do dia-a-dia. Lembrei-me de berlindes", onde usa como unidade de referência uma unidade discreta (sacos de berlindes). Esta imagem mental reveste-se de alguma especificidade: ("3 berlindes em cada saco"; "enchia 20 sacos, cada um com 3 berlindes", "fiz 3 vezes 20") permitindo-nos "imaginar" a situação ao longo da sua explicação. João, ao *relacionar parte-todo* mostra saber que (e de acordo com a sua imagem mental) 5% corresponde a 3 berlindes e que são necessários 20 sacos para obter o todo ("enchia 20 sacos cada um com 3 berlindes porque 5 vezes 20 dá o 100%"). No final apoia-se em *factos numéricos* (tabuada) para chegar ao valor em falta. Esta estratégia parece basear-se igualmente numa *representação proposicional* que reflete as relações numéricas verbalizadas por João: se $5\%\ de\ ? = 3$ e $5\% \times 20 = 100\%$ então $3 \times 20 = ?$

Tarefa	5% de ?=3
Explicação do aluno	***João (ciclo I):*** Então punha 3 berlindes dentro de um saco. Esse valia 5 [%]. Depois ia buscar, ia buscar mais 95 sacos e enchia-os todos com 3 berlindes. Não, enchia 20 sacos cada um com 3 berlindes porque 5 vezes 20 dava o 100%. E depois fui contar os berlindes. 3 mais... Fiz 3 vezes 20.
Estratégia	Relações numéricas – relação parte-todo
Representação mental	Imagem mental/representação proposicional

Figura 4: Análise da questão 5% de ?=3.

Uma das estratégias mais comuns dos alunos nas operações entre uma fração e um numeral decimal é a *mudança de representação*. Enquanto alguns alunos preferem mudar a representação fracionária para decimal outros preferem *a decimal para fracionária* como fez Maria (figura 5). Maria parece ter recorrido a um modelo mental (um relógio) para a apoiar no cálculo. A expressão: "Pus 0,50 em meia hora" parece indiciar que esta converteu o numeral decimal 0,5 na fração $\frac{1}{2}$ e que, sem recorrer a frações equivalentes ou a qualquer procedimento algorítmico calcula o valor da expressão com base na sua perceção e "visualização mental" da marcação das horas no relógio, indicando posteriormente o resultado em numeral decimal. Esta estratégia mostra alguma destreza na transição entre representações equivalentes dos números racionais e o recurso a contextos familiares dos alunos como apoio ao cálculo mental.

Tarefa	$\frac{3}{4} + 0{,}5$
Explicação do aluno	***Maria (ciclo I)***: Portanto $\frac{3}{4}$... Pensei no relógio e pus 0,50 em meia hora. Então se $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{3}{4}$ de hora, mais meia hora dá uma hora e um quarto. Uma hora e um quarto pus 1,25.
Estratégia	Relações numéricas – mudança de representação
Representação mental	Modelo mental

Figura 5: Análise da questão $\frac{3}{4} + 0{,}5$.

A resolução da situação dos copos de refresco (figura 6), realizada na última tarefa da experiência de ensino, poderia ter sido resolvida através da expressão $0{,}75 \div \frac{1}{8}$. A estratégia de Ricardo evidencia que este possui conhecimentos sobre *equivalência entre representações* dos números racionais e frações ao associar 0,75 a 75% e posteriormente a $\frac{6}{8}$. Ao optar por converter 0,75 em $\frac{6}{8}$ e, tendo em conta que cada copo tinha a capacidade de $\frac{1}{8}l$, de forma quase intuitiva e sem necessidade de cálculos demorados (como a regra “inverte e multiplica” sobejamente usada pelos alunos) Ricardo chega ao resultado 6 possivelmente através da relação entre as frações. Esta estratégia poderá ter-se baseado numa *representação proposicional* centrada na *mudança de representação* e na relação entre dividendo e divisor da operação a realizar: se $0{,}75 = 75\% = \frac{6}{8}$ então $0{,}75 \div \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \div \frac{1}{8}$ como $\frac{6}{8} = 6 \times \frac{1}{8}$ então $\frac{6}{8} \div \frac{1}{8} = 6$.

Tarefa	*A Ana quer encher copos com refresco. Cada copo tem $\frac{1}{8}l$ de capacidade. Quantos copos consegue encher a Ana com $0{,}75l$ de refresco?*
Explicação do aluno	***Ricardo (ciclo II)***: $\frac{1}{8}$ é um copo e 75% é $\frac{6}{8}$ . . . $\frac{6}{8}$ é 6 copos.
Estratégia	Relações numéricas – mudança de representação
Representação mental	Representação proposicional

Figura 6: Análise da questão sobre os copos de refresco.

Na primeira parte da tarefa 5 Tiago resolve a situação contextualizada apresentada na figura 7 recorrendo a *factos numéricos*. Esta situação envolve o conceito de área e a compreensão deste conceito é fundamental para a resolução da situação. A expressão “eu multipliquei lado vezes lado” evidencia que o aluno compreende o conceito envolvido e certamente por isso simplesmente recorre ao seu reportório de factos numéricos conhecidos (produtos de fatores iguais que originam 36) para a sua resolução. Tendo em conta a explicação que apresenta, Tiago poderá ter recorrido à *imagem mental* do produto $6 \times 6 = 36$.

Tarefa	A *Rita construiu um cubo em que a área da base era $0{,}36\ m^2$. Qual a medida do lado?*
Explicação do aluno	***Tiago (Ciclo II)***: [Deu] 0,6 eu multipliquei lado vezes lado [$0{,}6 \times 0{,}6$] supondo que deu 0,36.
Estratégia	Factos numéricos – tabuada do 6
Representação mental	Imagem mental

Figura 7: Análise da questão sobre a face de um cubo de área 0,36 m^2.

Depois de discutida a primeira parte da tarefa 5, na segunda parte, foi proposto o cálculo de $? \times 0{,}4 = 0{,}16$ (figura 8). Neste caso, Tiago mostra ter operado com numerais decimais como se estes fossem números naturais (*mudança de representação* de numeral decimal para número natural referente a $\frac{10}{100}$), algo que não ficou explícito na explicação que apresentou para a resolução da situação da figura 7, e tenta encontrar um produto, no seu reportório de *factos numéricos*, cujo valor seja 16, sendo que um dos fatores é 4. A explicação de Tiago mostra que o aluno relaciona 4×4 com $0{,}4 \times 0{,}4$ e que coloca duas casas decimais no produto 16, mas não explica a razão por que o faz. A estratégia de Tiago poderá ter-se baseado numa *representação proposicional* onde este poderá ter comparado a resolução da situação contextualizada apresentada na da figura 7 ("Eu fiz aquilo que nós aplicámos, neste aqui") com a expressão de valor em falta da figura 8: se $0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$ com $6 \times 6 = 36$ então para $? \times 0{,}4 = 0{,}16$, $4 \times 4 = 16$ com $0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$. Esta representação proposicional poderá ter surgido a partir da *imagem mental* de factos numéricos associados ao conceito de área, usados por Tiago na resolução da situação apresentada na figura 7.

Tarefa	$? \times 0{,}4 = 0{,}16$
Explicação do aluno	***Tiago (ciclo II)***: Eu fiz aquilo que nós aplicámos, neste aqui (refere-se à situação contextualizada da face do cubo com $0{,}36m^2$ de área). . . Fiz $0{,}4 \times 0{,}4$. 4×4, 16 depois acrescenta-se, duas casas.
Estratégia	Relações numéricas- mudança de representação
Representação mental	Imagem mental/Representação proposicional

Figura 8: Análise da questão $? \times 0{,}4 = 0{,}16$.

Estes dois contextos (figuras 7 e 8) e sua relação, usados na experiência de ensino em partes diferentes de uma mesma tarefa (contextos relacionados também foram usados em tarefas diferentes) e tornada explícita na explicação de Tiago, reforça a importância de proporcionar aos alunos contextos distintos mas relacionáveis. A figura 8 apresenta uma expressão simbólica que Tiago considerou como sendo uma hipótese para modelar uma situação envolvendo o conceito de área, relacionando assim o cálculo de $? \times 0{,}4 = 0{,}16$ com o que tinha realizado a propósito da situação apresentada na figura 7.

Conclusão

No cálculo mental com números racionais os alunos optam por recorrer a estratégias que envolvem relações numéricas, embora estratégias baseadas na aplicação de factos numéricos (tabuadas) e regras memorizadas (aplicação mental do algoritmo para a adição de numerais decimais) surjam igualmente, Nas questões analisadas, as relações numéricas centram-se na relação parte-todo para operar com frações e percentagens e na mudança de representação (Caney & Watson, 2003) para operar com frações e numerais decimais.

A análise das estratégias dos alunos permite-nos perceber que contextos se revelam para eles mais significativos, podendo ser, por isso, promotores de representações mentais de suporte ao cálculo mental. Os dados revelam que os alunos recorrem tanto a representações representativas, como modelos ou imagens, como a representações descritivas como representações proposicionais (Schnotz et al., 2010). Os modelos mentais surgem com uma representação do mundo real, por exemplo um relógio, sem grandes especificidades associadas, enquanto as imagens mentais se revestem de maior especificidade, caracterizando de forma mais precisa o objeto que pretendem representar, como o caso da maçã ou do algoritmo da adição de numerais decimais. Modelos e imagens parecem estar subjacentes a estratégias envolvendo tanto relações numéricas como factos ou regras. Uma vez que as representações proposicionais, enquanto representações descritivas, permitem perceber relações, surgem associadas a estratégias baseadas em relações numéricas. A complementaridade entre representações representativas e descritivas parece refletir-se na estratégia de João que parte de uma imagem mental (saco de berlindes) para estabelecer uma relação parte-todo assente numa representação proposicional ou na estratégia de Tiago que, ao comparar estratégias de resolução de uma situação contextualizadas com a resolução de uma expressão, parece apoiar-se igualmente na imagem mental de factos (produto de fatores iguais associado ao conceito de área) para criar uma representação proposicional que reflete as relações que estabelece.

As representações mentais dos alunos refletem os seus conhecimentos sobre números racionais, suas operações e relações. Este estudo reforça a importância do uso de contextos na aprendizagem dos números racionais, promotores de representações mentais, às quais os alunos podem recorrer no cálculo mental.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através da bolsa atribuída à primeira autora.

Referências bibliográficas

Baddeley, A. (1993). *Human memory: Theory and practice*. London: Lawrence Erlbaum.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W., Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers: Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Bell, A. (1993). Principles for the design of teaching, *Educational Studies in Mathematics*, *24*(1), 5-34.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*. (retirado de http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em15/05/2010)

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Plasencia, I. C. (2002). Imágenes mentales en la actividad matemática: Reflexiones de una investigacion. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *49*, 3-34.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.

Denzin, N., & Lincoln, Y. (2005). Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *The Sage handbook of qualitative research* (pp.1-28). Thousand Oaks, CA: SAGE.

Empson, S., Levi, L., & Carpenter, T. (2010). The algebraic nature of fraction: Developing relational thinking in elementary school. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Heidelberg: Springer.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense.

Heirdsfield, A. (2011). Teaching mental computation strategies in early mathematics. *Young Children*, *66*(2), 96-102.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press.

Johnson-Laird, P. N. (1980). Mental models in cognitive science. *Cognitive Science*, *4*, 71-115.

Johnson-Laird, P. N. (1990). *Mental models*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Medeiros, C., F. (2001). Modelos mentais e metáforas na resolução de problemas matemáticos verbais. *Ciência & Educação*, *7*(2), 209-234.

Schnotz, W., Baadte, C., Müller, A., & Rasch, R. (2010). Creative thinking and problem solving with depictive and descriptive representations. In L. Verschaffel, E. de Corte, T. Jong, & J. Elen (Eds.), *Use of representation in reasoning and problem solving* (pp.11-35). New York, NY: Routledge.

Swan, M. (2008). Designing a multiple representation learning experience in secondary algebra. *Educational Designer*, *1*, 1-17.

Thompson, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*, *213*, 40-42.

REPRESENTAÇÕES: JANELAS PARA A COMPREENSÃO DO RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO DE CRIANÇAS DE 5 E 6 ANOS

Inês Diogo

Colégio Atlântico

Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

inesdiogoo@gmail.com

Margarida Rodrigues

Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa

Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

margaridar@eselx.ipl.pt

Resumo: Este artigo apresenta parte de um estudo que se encontra a decorrer e que visa compreender como se caracteriza o raciocínio estatístico de crianças de 5 e 6 anos. O artigo apresenta a interpretação do raciocínio estatístico revelado pelas crianças através da análise das suas representações. Começamos por discutir teoricamente o conceito de raciocínio estatístico, os princípios inerentes a um ambiente de aprendizagem que favoreça o seu desenvolvimento e o papel das representações, especificando depois as características do trabalho em Organização e Tratamento de Dados na educação pré-escolar. O estudo segue uma abordagem de natureza qualitativa sob um paradigma interpretativo e a recolha de dados realizou-se em 2015 através da observação participante e da análise documental. Os resultados preliminares aqui apresentados sugerem que a maioria do grupo de crianças reconhece as diferentes formas de representação dos dados, identifica os seus nomes e sabe explicar as diferentes representações. No âmbito de um pequeno projeto de investigação estatística, as crianças atenderam às suas diferentes fases, mostrando-se capazes de representar e interpretar dados recolhidos por si. Algumas das crianças preocuparam-se em organizar os dados no momento da sua recolha, classificando-os, sendo que uma delas organizou os dados, de modo espontâneo, numa tabela de frequências. As crianças evidenciaram um raciocínio estatístico sobre os dados e sobre a sua representação.

Palavras-chave: raciocínio estatístico, representações estatísticas, educação pré-escolar, investigação estatística, Organização e Tratamento de Dados.

Introdução

A matemática tem um papel muito importante na estruturação do pensamento da criança. Desde muito cedo, e a partir das suas vivências diárias, a criança vai espontaneamente construindo noções matemáticas. Ao nível formal, o educador de infância pode assumir um papel primordial na promoção destas aprendizagens, recorrendo a situações do dia-a-dia que sejam do interesse da criança. Assumindo que estas experiências têm um papel fundamental em aprendizagens futuras, é necessário que o educador esteja atento às muitas possibilidades de aprendizagens em matemática que o quotidiano na educação pré-escolar possibilita, tal como preconizado nas Orientações Curriculares para a Educação Pré-escolar (OCEPE, 1997, p. 73): “Cabe ao educador partir das situações do quotidiano para apoiar o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático, intencionalizando momentos de consolidação e sistematização de noções matemáticas”. A Organização e Tratamento de Dados (OTD) é uma área com forte ligação ao quotidiano e sabendo que a informação que, atualmente, nos chega diariamente se encontra cada vez mais representada em tabelas ou gráficos, a necessidade de saber como interpretar esses dados é cada vez mais premente. Por outro lado, é relevante investigar se, ao ser estimulada desde cedo, a criança desenvolve um raciocínio estatístico que lhe permita ser capaz de levantar questões, recolher dados, organizá-los e representá-los em gráficos, bem como interpretá-los.

Este artigo apresenta parte de um estudo, no âmbito de uma dissertação de mestrado, que se encontra ainda a decorrer, e que tem como objetivo compreender como se caracteriza o raciocínio estatístico de crianças de 5 e 6 anos. As questões de investigação desse estudo são: (1) Como é que as crianças analisam, interpretam e representam dados registados em mapas? (2) Como é que as crianças implementam um projeto de investigação estatística, atendendo às suas diferentes fases? (3) Que tipos de raciocínio estatístico evidenciam as crianças? O artigo enquadra-se nas segunda e terceira questões, tendo como foco as representações das crianças no âmbito da implementação de um projeto de investigação estatística, que partiu de uma questão levantada por elas: Quantas manas tens? O projeto contemplou diferentes fases, nomeadamente, a formulação de questões, recolha e organização dos dados, representação dos dados, interpretação e comunicação dos dados (Ponte & Fonseca, 2001; Wild & Pfannkuch, 1999). A primeira autora é a educadora titular do grupo de crianças de 5 e 6 anos, com o qual foi desenvolvido o presente estudo, e que frequentava a educação pré-escolar durante o ano letivo 2014-2015, num colégio particular do distrito de Setúbal.

Enquadramento teórico

De acordo com Garfield (2002), o raciocínio estatístico pode ser definido como a forma como as pessoas raciocinam com as ideias estatísticas e dão sentido à informação estatística, envolvendo fazer interpretações baseadas em representações gráficas, conjuntos de dados ou sumários estatísticos. A este respeito, Lopes e Fernandes (2014, pp. 72-73) indicam que possuir um raciocínio estatístico “significa compreender e ser capaz de explicar os processos estatísticos e interpretar completamente os resultados estatísticos. (…) Assim, o desenvolvimento do raciocínio estatístico possibilita o aluno a compreender, interpretar e explicar um processo estatístico com base em dados reais”. Estas autoras, citando Garfield e Gal, apresentam seis tipos de raciocínio estatístico: (i) sobre os dados; (ii) sobre a representação dos dados; (iii) sobre as medidas estatísticas; (iv) sobre a incerteza; (v) sobre as amostras; e (vi) sobre associações. No âmbito do raciocínio sobre os dados, o aluno é capaz de reconhecer e categorizar os dados e sabe utilizar uma tabela, um gráfico ou uma medida adequada para um dado tipo de variável. No raciocínio sobre a representação dos dados, o aluno é capaz de ler e interpretar gráficos, entender que tipo de gráfico é apropriado para representar um conjunto de dados e de reconhecer as caraterísticas gerais de uma distribuição pelo seu gráfico.

Segundo Garffield e Ben-Zvi (2009), a implementação de um ambiente de aprendizagem propício ao desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos passa pela adoção de seis princípios: (1) focar a aprendizagem no desenvolvimento de ideias estatísticas centrais e não em procedimentos; (2) usar conjuntos de dados que sejam reais e motivantes que envolvam os alunos a fazer e a testar conjeturas; (3) usar as atividades de sala de aula para apoiar o desenvolvimento do raciocínio dos alunos; (4) integrar o uso de ferramentas tecnológicas apropriadas que permitam aos alunos testar as suas conjeturas, explorar e analisar dados; (5) promover um discurso na sala de aula que inclua argumentos estatísticos e discussões focadas em ideias estatísticas significativas, e (6) usar uma avaliação formativa que permita perceber o que os alunos sabem e monitorizar o desenvolvimento da sua aprendizagem estatística bem como avaliar as planificações e o progresso realizado.

Também o NCTM (2007) enfatiza a importância de se promover discussões nas aulas focadas nas representações feitas pelos alunos.

> As representações dos alunos devem ser discutidas, partilhadas com os colegas e apreciadas, uma vez que refletem a sua compreensão. Estas representações permitem aos professores avaliar a sua compreensão e dar início a discussões de turma acerca de assuntos importantes relacionados com a representação de dados. As ideias erróneas que possam surgir devido a algumas representações de dados proporcionam oportunidades para uma nova aprendizagem e ensino. (NCTM, 2007, p. 130)

Sendo uma representação uma configuração que permite pensar sobre um dado objeto matemático (Goldin, 2008), este evoca uma multiplicidade de representações (Velez & Ponte, 2014), as quais assumem um papel importante quer na compreensão pelo docente do raciocínio desenvolvido pelas crianças, quer no processo de aprendizagem, auxiliando-as na construção de novos conhecimentos (NCTM, 2007). É fundamental que as crianças possam usar representações informais, intuitivas, de modo a conferir sentido às diversas ideias matemáticas, mas é igualmente importante que as mesmas se familiarizem com formas convencionais de representação matemática, como é o caso das representações estatísticas estabelecidas para organizar e representar os dados. De acordo com Hutchison, Ellsworth e Yovich (2000), o uso de múltiplas formas de representação de um conjunto de dados contribui para um maior conhecimento dos alunos acerca do tópico em estudo. Estes autores, reportando-se a um estudo realizado com alunos do 3.º ano de escolaridade, sublinham a importância da discussão em turma bem como da experiência de elaboração de gráficos no aumento da capacidade dos alunos em analisar e representar dados.

É importante promover atividades relacionadas com a Organização e Tratamento de Dados com crianças em idade pré-escolar, que assentem na classificação, contagem e comparação, organizando atividades que levem as crianças a questionar e a procurar respostas para essas questões, tendo sempre em conta que seja qual for o tema, este deve sempre fazer sentido para elas e partir da sua curiosidade (Castro & Rodrigues, 2008). Assim, é relevante que os educadores promovam atividades que levem as crianças a analisar mapas de registo e a construírem gráficos e tabelas, de modo a que estas possam analisar e discutir com os seus pares. Este passo é importante para que posteriormente as crianças sejam capazes de autonomamente vivenciarem as diferentes fases de um projeto investigativo, que gradualmente as ajude a desenvolver um raciocínio estatístico.

Segundo Sheffield et al. (2004), é recomendável que os alunos formulem questões que possam ser respondidas através da recolha e análise de dados e expliquem em que consistem as mesmas. Os autores referem, ainda, que para raciocinarem estatisticamente, as crianças precisam de compreender a análise de dados e os aspetos das probabilidades com eles relacionados. Para isso, recomenda-se que as crianças trabalhem diretamente com os dados, considerando importante que os alunos do pré-escolar ao 12º ano estejam habilitados a: (a) formular questões que possam ser abordadas por meio de dados e recolher, organizar e apresentar dados relevantes que permitam responder a essas questões; (b) selecionar e usar métodos estatísticos adequados a analise de dados; (c) desenvolver e avaliar inferências e previsões baseadas em dados; (d) compreender e aplicar conceitos básicos de probabilidades.

Estudos desenvolvidos com crianças do pré-escolar mostram a importância da atribuição de um significado pessoal às representações estatísticas. O estudo de Cordeiro (2014) que teve como objetivo compreender como é que crianças de 4 e 5 anos representam e interpretam dados recolhidos nas suas rotinas evidencia que as crianças transpuseram os dados dos mapas de registo para gráficos através de diversos tipos de correspondência, atribuindo significado pessoal às representações. Por exemplo, num pictograma alusivo aos aniversários das crianças, apesar de ter sido usado o mesmo símbolo (cara representativa da unidade observacional), as crianças associavam cada um dos símbolos a uma criança específica, tendo usado uma ordenação temporal na colocação dos símbolos. Neste estudo, uma das crianças mostrou ter compreendido que o total dos símbolos do pictograma correspondia ao número de crianças na sala. O estudo de Souza (2008) teve como objetivo verificar as etapas de uma proposta didático-pedagógica para a abordagem da estatística na educação infantil, bem como o significado que as crianças atribuem a algumas noções estatísticas. Este estudo evidencia a capacidade das crianças em idade pré-escolar de desenvolverem ideias estatísticas, embora requerendo uma contextualização ligada às suas vivências ainda mais acentuada do que nos outros níveis educativos.

Abordagem metodológica

Este estudo assenta numa metodologia de investigação interpretativa de natureza qualitativa. Bogdan e Biklen (1994) referem que uma das principais caraterísticas da investigação qualitativa é o facto de os investigadores qualitativos se interessarem mais pelo processo do que pelo produto. Na nossa investigação, o mais importante será o envolvimento das crianças, os seus registos, representações e explicação dos mesmos. Assim, o estudo foca o processo de investigação estatística vivenciado pelas crianças.

Este estudo foi realizado num colégio particular, que possui as valências de creche, pré-escolar, 1.º, 2.º e 3.º ciclo, situado no distrito de Setúbal. O estudo incidiu sobre um grupo de 26 crianças (13 rapazes e 13 raparigas), com idades compreendidas entre os 5 e 6 anos. Este é um grupo que maioritariamente se encontra junto desde os dois anos de idade. A investigadora é a primeira autora do presente artigo, sendo também a educadora titular destas crianças desde os seus dois anos. Este grupo de crianças revela elevadas capacidade linguísticas, estando habituado a tomar decisões e a encontrar respostas para as suas escolhas. O trabalho com gráficos, nomeadamente o gráfico de barras e o pictograma, já vinha a ser desenvolvido desde os 4 anos. Antes do desenvolvimento do projeto investigativo, apresentado neste artigo, as crianças realizaram diversas atividades relacionadas com a representação e análise de dados, envolvendo gráficos de barras, gráficos de pontos, pictogramas e tabelas de frequência. As atividades foram realizadas em grande grupo (todas as crianças), pequeno grupo (até 7 crianças) e individualmente.

A recolha de dados, realizada de fevereiro a junho de 2015, contemplou como técnicas a observação participante e a análise documental. Para a recolha dos dados, recorremos a gravações de áudio e vídeo, a registos fotográficos dos trabalhos elaborados pelas crianças, e à elaboração de um diário de bordo. A análise documental foi realizada tendo por base os registos produzidos pelas crianças, nomeadamente as suas representações estatísticas, as transcrições das gravações vídeo e áudio e o diário de bordo.

Na análise de dados, que ainda se encontra numa fase muito preliminar, é enfatizada uma perspetiva interpretativa e indutiva, e visando a triangulação dos dados, são usadas e cruzadas diversas fontes (Bogdan & Biklen, 1994). As categorias analíticas ainda se encontram em desenvolvimento, sendo possível, nesta fase, identificar as seguintes, com base na revisão da literatura efetuada bem como nos dados aqui apresentados: tipos de raciocínio (raciocínio sobre os dados, raciocínio sobre a representação dos dados); representações estatísticas (tabela de contagem e de frequências, pictograma, gráfico de pontos, gráfico de barras); representações usadas pelas crianças na fase de recolha de dados.

Por último, antes de iniciarmos o estudo, foi pedida uma autorização à Diretora Pedagógica, bem como aos encarregados de educação do grupo participante. Após este procedimento, foi explicado às crianças o projeto em que seriam envolvidas. O facto de serem filmados não colocou qualquer obstáculo pois já era prática corrente com este grupo. O verdadeiro nome dos alunos envolvidos não é mencionado, sendo utilizados nomes fictícios.

Apresentação de alguns resultados

O projeto de investigação estatística aqui analisado partiu de uma questão levantada pelas crianças -- *Quantas manas tens?* -- e passou pela fase da recolha de dados, sua organização e representação numa tabela de contagem e de frequências, num pictograma, gráfico de barras e gráfico de pontos. O projeto desenvolveu-se em três momentos, que foram realizados em diferentes dias:

a) Formulação de questões – Inicialmente foi proposto em grupo que as crianças pensassem em algo que gostassem de saber sobre os colegas. Depois cada um apresentou a sua escolha enquanto a educadora ia escrevendo numa folha A4 todas as propostas. Por fim, votou-se com 'dedos no ar', qual a pergunta preferida do grupo. A questão escolhida foi “Quantas manas tens?".

b) Recolha e organização dos dados – Após a escolha da pergunta, as crianças receberam apenas a orientação de que podiam ter uma folha A4 e um lápis ou caneta de feltro para iniciar individualmente a recolha dos dados, o que resultou num momento social muito rico em comunicação, onde o envolvimento das crianças por todo o espaço da sala e o seu empenho foi notório. Devido à falta de duas crianças, este momento foi realizado com 24 crianças. De volta ao grande grupo, foram comparados os resultados e a educadora questionou as crianças: “Têm a certeza de que falaram com todos os colegas? Como é que podemos ter essa certeza?”.

A maioria do grupo atuou de forma idêntica. Foram fazendo a pergunta aos diferentes colegas e registando a sua resposta, não revelando preocupação ou cuidado em saberem quais os colegas que já tinham questionado e quais os colegas que faltavam. Os registos da Ana, da Carla e da Marina são representativos das três formas de registo que as crianças utilizaram na sua recolha, sendo que todas usaram representações simbólicas das respostas obtidas.

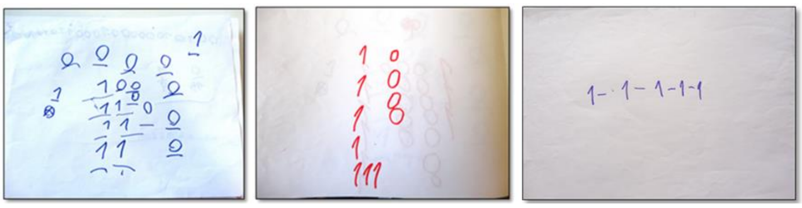


Figura 1: Os primeiros registos da recolha dos dados da Ana, da Carla e da Marina, respetivamente.

A Ana registou todas as respostas de “uma mana”, com o número 1, e as respostas de “zero manas”, com o número 0. A Carla recorreu à mesma forma de registo da Ana. Contudo, organizou a sua recolha numa forma mais simples de consultar, o número 1 no lado esquerdo da folha e o número 0 no lado direito. A Marina optou por apenas registar os números correspondentes a “uma mana”. Ao relatarem os resultados da sua recolha aos colegas, as crianças contaram o número de vezes que tinham escrito o número 1 e o número 0.

Após a partilha sobre a forma como tinham efetuado a recolha de dados, as crianças chegaram à conclusão de que não tinham o registo de todos. Assim foi decidido em grupo, com a orientação da educadora, que deviam ficar todos juntos, em roda e no tapete enquanto a educadora fazia a pergunta a cada um, ao mesmo tempo que todos iam fazendo o seu registo da resposta.

No segundo registo da recolha de dados, foi notório um maior cuidado por parte das crianças.

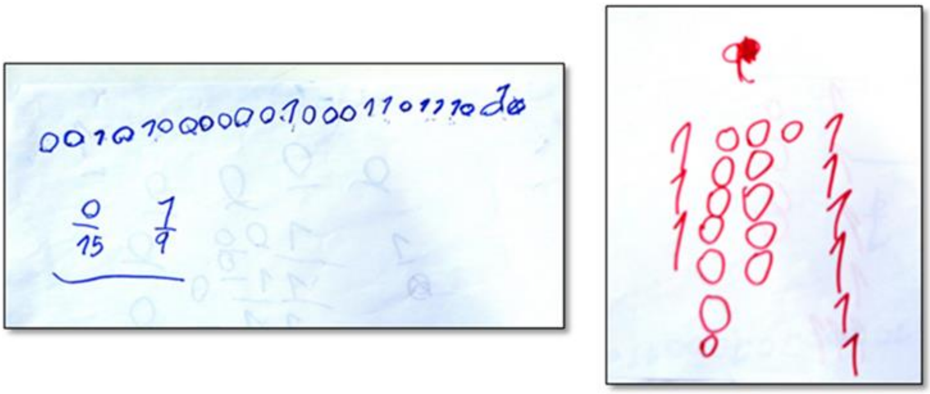


Figura 2: Os segundos registos da recolha dos dados da Ana e da Carla, respetivamente.

A Ana optou por um registo linear de todas as respostas dos colegas. No fim, contou o número de zeros e o número de uns e representou os seus resultados de forma muito organizada e clara. O seu resultado final aparece registado como uma tabela de frequências, tendo classificado os dados nas categorias 0 e 1 e registado por baixo a respetiva frequência absoluta. A Carla usou uma representação parecida à que já tinha adotado, optando no final por registar apenas a resposta ao número de crianças que tinham manas. Quando questionada, respondeu que a pergunta era quantas manas. Não justificou a razão de ter 13 zeros, mas tendo em conta a resposta de só dar importância aos números 1, pensamos que deverá ter desistido de os registar, na parte final da recolha. Enquanto a Ana regista os dados de seguida à medida que vai obtendo as respostas, só fazendo a organização e a classificação posteriormente, a Carla faz a classificação dos dados, organizando-os espacialmente, ao mesmo tempo que recolhe os dados. Ambas as crianças revelam raciocínio estatístico sobre os dados, categorizando-os, por sua própria iniciativa.

c) Representação dos dados – Posteriormente, a educadora propôs que, em pequeno grupo, escolhessem uma forma de representarem esses dados. Os grupos só podiam ir até sete elementos, mas eram as crianças que decidiam em que grupo queriam estar, sendo que cada grupo ficou responsável de elaborar uma representação diferente da dos restantes grupos. Contudo, a representação final não era uma representação única do grupo mas sim uma representação individual de cada criança. Especificamente, foram formados quatro grupos de trabalho, o do pictograma, o do gráfico de pontos, o do gráfico de barras e o da tabela de frequências. Cada criança decidia em grupo a melhor forma de representar os dados no formato escolhido, mas cada um tinha a sua própria folha para a realização da sua própria representação. Durante a realização do trabalho em grupo, as crianças foram sendo orientadas recorrendo a representações de outros gráficos e tabelas expostos na sala. Procurou-se ainda que as crianças, que diziam já saber como fazer o trabalho, ajudassem os restantes colegas a finalizar. No final, cada grupo escolheu um dos seus elementos para apresentar o seu trabalho final aos colegas.

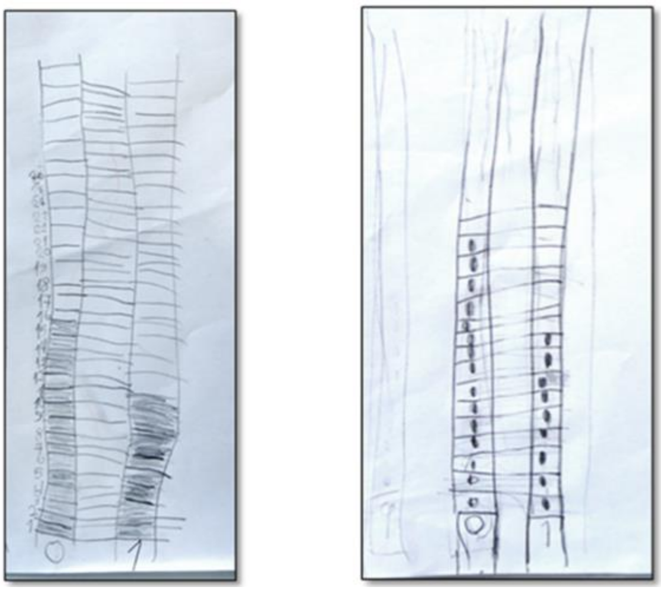


Figura 3: O gráfico de barras do Hugo e o gráfico de pontos da Ana.

Ao longo da realização do seu trabalho, o Hugo levantou-se diversas vezes para ver como era o gráfico de barras que estava exposto na sala. Como se pode ver na figura 3, o Hugo procurou representar as frequências 15 e 9, mas teve dificuldade em desenhar as duas colunas com o mesmo número de linhas, tal como fazer corresponder os números a cada linha. Essa dificuldade revelou-se ao interpretar o seu gráfico, para o grupo.

> Hugo – (…) eu escrevi o 0 e o 1. Depois pintei 26…
> Grupo – 15.
> Hugo – Sim. E no 1 pintei… já não me lembro!

O facto de o Hugo ter assinalado, no seu gráfico, a escala numérica até ao 26, e de ter referido que pintou 26 parece dever-se à sua consciência de serem 26 crianças na sala, tendo ignorado a falta nesse dia de duas delas.

A Ana foi muito assertiva desde o início do seu trabalho, conseguindo colocar as duas colunas separadas mas com o mesmo número de linhas. Não revelou muitas dúvidas, terminou rápido e ajudou os colegas. A sua apresentação do gráfico de pontos ao grupo foi muito clara, procurando recorrer a um vocabulário específico.

Ana – Eu fiz um gráfico de pontos e tive de meter 9 bolinhas aqui (*apontou para a coluna do número 1*) e aqui 15 (*apontou para a coluna do numero 0*) porque eles não tinhas manas. E os que tinham, meti 9 porque foi esse o meu resultado.

Educadora – Porque é que fizeste aqui estas linhas iguais?

Ana – Para saber que este liga a este e este liga a este (*aponta de uma coluna para a outra coluna*).

A Ana preocupou-se em colocar algum rigor na sua representação unindo com linhas as quadrículas das duas colunas para que as mesmas estivessem niveladas e permitissem assim uma leitura visual correta. Também o Hugo traçou linhas a unir as células das colunas mas não conseguiu que ficassem completamente niveladas por serem de diferentes tamanhos.

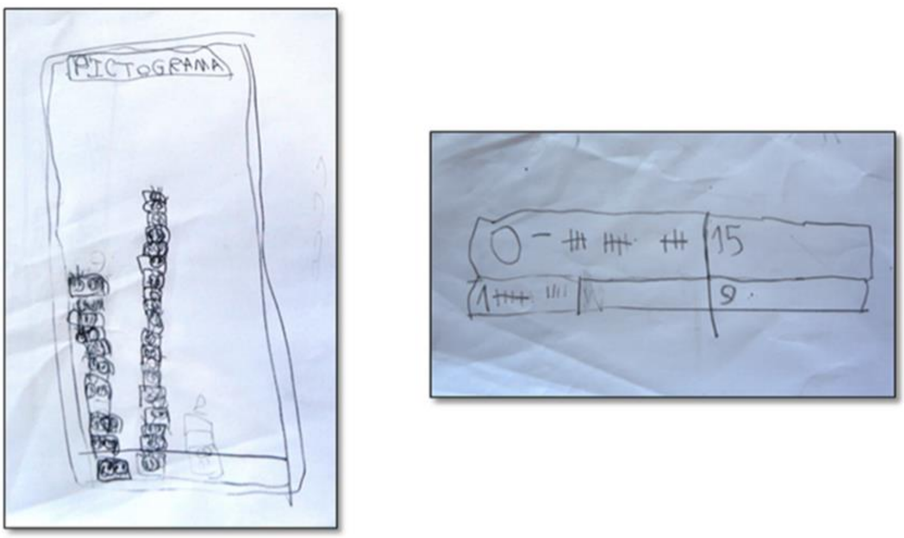


Figura 4: O pictograma do Dinis e a tabela de contagem e de frequências do Marco.

Na figura 4, pode-se ver o pictograma do Dinis que revelou alguma dificuldade em iniciar o seu trabalho, parando algum tempo com a Carolina a olhar para um dos pictogramas exposto na sala.

Carolina - No pictograma fazemos desenhos.

Dinis - Mas não podem ser iguais porque um tem manas e o outro não!

Chegado a essa conclusão, iniciou o seu trabalho com algum divertimento. Recorreu à contagem para saber quantos já tinha desenhado e quantos faltava desenhar. No momento de apresentar o trabalho, explicou:

> Dinis – Eu fiz um pictograma (…) Fiz um menino e uma menina para quem tinha manas, mas no mesmo quadrado, e só um menino para quem não tinha manas.

Verificamos, pois, que o Dinis optou por símbolos diferentes, um para cada classe da variável em causa, embora sejam representativos da unidade observacional, as crianças da sala. A questão do género só se lhe colocou para a representação das manas na coluna do 1, tendo representado do mesmo modo cada uma das crianças da sala, independentemente do género.

Por sua vez, na apresentação do seu trabalho, o Marco foi sempre falando em voz alta, para que os colegas o fossem corrigindo ou orientando.

> Marco – Eu fiz uma tabela de frequências. Coloquei aqui o 0 (*aponta para o número 0*) para quem não tem manas. Coloquei aqui o 1 (*aponta para o número 1*) para quem tem manas. (…) Eu fiz cinco, mais cinco, mais cinco, (*aponta para os tracinhos*) que dá 15 meninos que não tinham manas e depois fiz cinco mais quatro que dá nove. Nove meninos que tinham manas.

O Marco revela um sentido de número com algum desenvolvimento. A aplicação que faz da forma de registar os dados na tabela de contagem relaciona-se com aspetos relevantes do sentido de número, como é o caso da estruturação numérica em grupos de 5.

O raciocínio estatístico sobre os dados foi evidenciado pelas crianças na forma como conseguiram usar diferentes representações para os dados por si recolhidos. Também o raciocínio sobre a representação dos dados foi evidenciado no modo como as crianças conseguiram ler e interpretar os gráficos por si elaborados.

Conclusão

Através do desenvolvimento de um pequeno projeto de investigação estatística, as crianças atenderam às suas diferentes fases (Ponte & Fonseca, 2001; Wild & Pfannkuch, 1999), tendo começado por escolher uma questão de entre um conjunto de questões que elas próprias formularam, de acordo com o interesse suscitado pela mesma. Trata-se de uma questão relacionada com as suas vidas pessoais e cuja resposta contribui para uma maior caracterização do grupo de crianças, sendo de destacar a importância de trabalhar com conjuntos de dados reais e motivantes para as crianças (Garffield & Ben-Zvi, 2009). A recolha de dados relativos ao número de manas foi realizada primeiro de forma mais livre e espontânea, tendo as crianças chegado à conclusão que não tinham controlado terem inquirido todas as crianças da sala. A discussão em grande grupo conduziu à necessidade de repetir a recolha de dados, agora de um modo mais organizado e orientado pela educadora. A organização dos dados foi realizada por algumas das crianças em simultâneo com a recolha. Para representarem os dados, as crianças usaram diferentes representações gráficas -- gráficos de barras, gráficos de pontos e pictogramas -- e também tabelas de frequência, tal como defendido por Hutchison et al. (2000). Para a elaboração das diferentes representações, as crianças apoiaram-se nas representações expostas na parede da sala, elaboradas anteriormente noutros contextos, bem como no trabalho desenvolvido em pequeno grupo, discutindo entre si a forma de as concretizar. Já em grande grupo, as diferentes representações foram apresentadas e explicadas (NCTM, 2007).

As crianças revelam dois tipos de raciocínio estatístico: (1) sobre os dados, e (2) sobre a representação dos dados (Garfield & Gal, citados em Lopes & Fernandes, 2014). A análise das representações feitas pelas crianças, bem como a forma como as mesmas as explicaram aos restantes colegas, evidenciam alguns dos aspetos que caracterizam esses tipos de raciocínio estatístico. No que se refere ao raciocínio estatístico sobre os dados, as crianças reconheceram e categorizaram os dados, de forma espontânea, sem que tivessem sido orientados pela educadora, nesse sentido, na fase de recolha de dados. Uma das crianças, após o registo das respostas obtidas, elaborou informalmente, e por iniciativa própria, uma tabela de frequências, como forma de organizar os dados. No entanto, não assumiu essa representação como sendo uma tabela de frequências. Revelaram, também, ser capazes de utilizar uma tabela e diferentes tipos de gráficos para representar os dados recolhidos. Relativamente ao raciocínio sobre a representação dos dados, a maioria das crianças conseguiu ler e interpretar os gráficos elaborados por si próprios. A forma como comunicaram ao grande grupo as suas representações estatísticas revela o domínio de vocabulário específico bem como o modo como conferiram sentido à informação estatística produzida (Garfield, 2002). Assim, a maioria do grupo reconhece as diferentes formas de representação dos dados, identifica os seus nomes e sabe explicar as diferentes representações, recorrendo a vocabulário específico, como podemos ilustrar, por exemplo, com a conclusão da Ana: "Eu fiz um gráfico de pontos (...). E os que tinham [manas], meti 9 porque foi esse o meu resultado".

Ao nível das condições de realização, verificou-se um grande envolvimento por parte das crianças. As estratégias utilizadas por algumas destas crianças foram copiar (a representação exposta na sala ou a representação elaborada pelo colega de grupo), questionar o colega ou simplesmente entregar o que tinham feito. Isso permitiu identificar quem necessitava de uma maior ajuda por parte da educadora.

Na educação pré-escolar, desde que o tema seja do interesse das crianças e faça sentido para elas, estas encontram-se disponíveis para se envolver na atividade proposta (Castro & Rodrigues, 2008). Nas diversas fases da atividade desenvolvida, verificou-se que as crianças estavam empenhadas e divertidas. Consideramos que a autonomia na escolha da pergunta, assim como a metodologia utilizada no desenvolvimento da atividade, já explicitada anteriormente, foram um contributo fundamental.

Verificamos que as crianças são realmente capazes de participar autonomamente em atividades deste género. Porém, o facto da educadora realizar um pequeno momento com o grupo antes do início de uma nova etapa, com o objetivo de recordar o trabalho já desenvolvido na etapa anterior, foi essencial para a sua concretização. Ou seja, concretamente sempre que se iniciava uma nova etapa, num dia diferente, recordava-se em grupo o que já tinha sido feito. Tal como noutros estudos realizados na educação pré-escolar (Cordeiro, 2014; Souza, 2008), existem evidências de que crianças nesta faixa etária são capazes de construir conceitos relacionados com estatística, atribuindo-lhes um forte sentido pessoal. Assim, as representações elaboradas pelas crianças parecem ter assumido um papel relevante na construção significativa desses conceitos, e embora respeitem o modo convencional das representações estatísticas, elas incorporam elementos pessoais dos seus autores, como é o caso do pictograma elaborado pelo Dinis quando este representou de modo diferenciado o ter ou não manas. Por um lado, as representações usadas pelas crianças no registo da recolha de dados sugerem a necessidade intrínseca que as mesmas sentem de proceder à classificação dos dados, à sua organização e à contagem da frequência absoluta, dado que o fizeram de forma espontânea. Por outro lado, ambas as representações do gráfico de barras e do gráfico de pontos, não obstante não terem o mesmo rigor no seu traçado, revelam a consciência por parte das crianças, o Hugo e a Ana, da necessidade de nivelamento das células das colunas para não desvirtuar a leitura visual da informação estatística. Por fim, a representação convencional da tabela de contagem encontra-se em estreita conexão com o desenvolvimento do sentido de número, potenciando a estruturação numérica em grupos de 5.

Referências bibliográficas

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Castro, J. P., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido do número e organização de dados: Textos de apoio para educadores de infância*. Lisboa: Direção – Geral de Inovação e de desenvolvimento Curricular. Ministério da Educação.

Cordeiro, S. (2014). *Organização e tratamento de dados recolhidos nas rotinas das crianças na sala dos quatro anos* (Tese de mestrado, Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa). Online in http://repositorio.ipl.pt/handle/10400.21/4119

Garffield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education, 10*(3). Consultado a 12 de julho de 2015, em www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.htlm

Garffield, J., & Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a Statistical Reasoning Learning Environment. *Teaching Statistics, 31*(3), 72-77.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), Handbook of international research in mathematics education (2nd ed.) (pp. 176-200). London: Routledge.

Hutchison, L., Ellsworth, J., & Yovich, S. (2000). Third-grade students investigate and represent data. *Early Childhood Education Journal, 27*(4), 213-218.

Lopes, P., & Fernandes, E. (2014). Literacia, raciocínio e pensamento estatístico com robots. *Quadrante, 23*(2), 69-93.

Ministério da Educação (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Departamento da Educação Básica – Ministério da Educação.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Fonseca, H. (2001). Orientações curriculares para o ensino da Estatística: Análise comparativa de três países. *Quadrante, 10*(1), 93-132.

Sheffield, L., Cavanagh, M., Dacey, L., Findell, C., Greenes, C., & Small, M. (2004). *Navigating through data analysis and probability in prekindergarten-grade 2* (2.ª ed.). Reston: NCTM.

Souza, A. (2008). A análise das etapas de uma proposta didático-pedagógica para a abordagem de algumas idéias estatísticas com alunos de Educação Infantil. In C. Lopes & E. Curi (Orgs.), *Pesquisas em educação matemática: Um encontro entre a teoria e a prática* (pp. 21-42). São Carlos: Pedro & João Editores.

Velez, I., & Ponte, J. P. (2014). Promover a compreensão de representações no 3.º ano. In J. Brocardo, A. Boavida, C. Delgado, E. Santos, F. Mendes, J. Duarte, M. Baía & M. Figueiredo (Eds.), *Livro de Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (EIEM 2014)* (pp. 175–191). Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-265.

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO RACIONAL ATRAVÉS DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES

Helena Gil Guerreiro
Instituto de Educação; Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação da Universidade de Lisboa
hg@campus.ul.pt

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa; Unidade de Investigação e Desenvolvimento em Educação e Formação da Universidade de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo: Neste artigo pretendemos contribuir para uma reflexão em torno do modo como os alunos do 1.º ciclo do ensino básico constroem o conceito de número racional, recorrendo a múltiplas representações. Destacamos a percentagem, como representação trabalhada numa etapa menos comum do percurso e a sua articulação com outras representações, icónicas e simbólicas, no sentido de procurar analisar a evolução da aprendizagem dos alunos, através das relações que estabelecem, das representações que constroem e das opções que tomam. O estudo que inspira este artigo apoia-se numa experiência de ensino, orientada por uma conjetura, baseada num quadro teórico centrado na aprendizagem dos números racionais, numa perspetiva sociocultural. Analisamos a comunicação e as produções dos alunos de uma turma, que decorreram no ambiente natural de aprendizagem dos alunos, a sala de aula. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada num diário de bordo, nas gravações áudio e vídeo das aulas e na análise documental das produções da turma. Numa análise preliminar, os resultados parecem evidenciar uma certa intuição por parte dos alunos em relação à percentagem, que parece advir das suas vivências dentro e fora da escola. A mensagem visual dos modelos associados à percentagem parece facilitar a construção e a utilização de diferentes representações e contribuir para fortalecer a rede de relações entre as ideias subjacentes ao conceito de número racional.
Palavras-chave: aprendizagem, interação, números racionais, sentido de número, representações.

Introdução

No que diz respeito aos números racionais, a investigação internacional alerta para a necessidade dos alunos desenvolverem uma aprendizagem com significado deste tópico, apelando no sentido de se investir na compreensão dos conceitos e contrariando a tendência de sobrevalorizar o ensino de procedimentos e regras (Moss & Case, 1999; Fosnot & Dolk, 2002). Associadas a uma aprendizagem centrada na compreensão, surgem as representações, cujo papel na construção dos conceitos é há algum tempo debatido pela comunidade de educação matemática (Goldin & Kaput, 1996; Greeno, James, Hall & Rogers, 1997; Ponte & Serrazina, 2000; Goldin & Shteingold, 2001; NCTM, 2007; Tripathi, 2008; Kilpatrick, 2009), sem que se lhe esgote o interesse e a pertinência. Também as dinâmicas de trabalho em sala de aula são equacionadas, sendo sugerido que o professor promova a comunicação na sala de aula e a negociação de significados, numa construção compartilhada das aprendizagens (Mercer, 2006; Niza, 1998), isto é, que assuma uma atitude necessária ao processo de mudança (Wenger, 1998; Ponte & Serrazina, 2009).

A investigação que inspira este artigo tem como objetivos: (1) aprofundar a compreensão do processo de construção do conhecimento matemático dos alunos, relativo aos números racionais, no ambiente natural de aprendizagem e (2) descrever e analisar como se desenvolve a aprendizagem dos números racionais, através da utilização que os alunos fazem das diferentes representações simbólicas (percentagem, numeral decimal ou fração), na resolução de tarefas, numa construção compartilhada das aprendizagens. Estes objetivos procurarão responder às seguintes questões:

- Que papel pode desempenhar a percentagem na construção do conceito de número racional?
- Que compreensão desenvolvem os alunos das diferentes representações dos números racionais? Que relações estabelecem entre si?
- Que segurança revelam numa utilização livre e flexível das diferentes representações?
- Que relações estabelecem entre as diversas ideias chave e conceitos essenciais associados aos números racionais?

Os dados que partilhamos neste artigo remetem para excertos de episódios de sala de aula, durante o 3.º ano de escolaridade, numa escola pública de Lisboa, em que a primeira autora foi também professora titular, tendo acompanhado a turma ao longo do seu percurso de quatro anos no 1.º ciclo.

Aprendizagem dos números racionais com compreensão e o papel das diferentes representações

A complexidade na compreensão dos números racionais. Em educação matemática, a aprendizagem dos números racionais é apontada como sendo um dos aspetos em que os alunos revelam mais dificuldade e onde é mais complexo construir conhecimento matemático sustentado (Behr, Lesh, Post & Silver 1983; Treffers, 1991; NCTM, 2007; Fosnot & Dolk, 2002; Smith, 2002; Lamon, 2006; Monteiro & Pinto, 2006).

Segundo Behr et al. (1983) “os números racionais são das ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante a escolaridade básica.” (p. 91). Smith (2002) afirma mesmo que “não existe outra área da matemática escolar que seja tão rica, tão complicada do ponto de vista cognitivo e tão difícil de ensinar” (p.3).

Moss e Case (1999) apontam algumas explicações para as dificuldades que normalmente surgem associadas à conceptualização do conhecimento relativo aos números racionais: (1) a ênfase atribuída à sintaxe e não à semântica, considerando que no currículo do ensino básico dedica-se mais tempo ao ensino dos procedimentos de cálculo e à nomenclatura, do que à construção de significados e compreensão dos conceitos; (2) o facto de os professores não privilegiarem as tentativas espontâneas dos alunos de compreensão dos números racionais fazendo uma abordagem centrada na memorização de regras; (3) a opção, no início do trabalho com os números racionais, pela utilização de representações que se confundem facilmente com os números inteiros; e (4) a ideia de que a representação simbólica dos números racionais é algo tão evidente e transparente, que pode ser dado no início de uma aula.

Múltiplas representações na compreensão dos números racionais. A utilização por parte dos alunos de variados tipos de representação e a flexibilidade com que os usam é um aspeto determinante para alcançar um conhecimento mais profundo na aprendizagem da matemática (Ponte & Serrazina, 2000; Tripathi, 2008). A multiplicidade de representações é justificada pela ideia de que "diferentes representações matemáticas de um conceito destacam diferentes aspetos da sua estrutura, que se complementam no sentido da compreensão desse mesmo conceito" (Tripathi, 2008, p.438). A construção de representações por parte dos alunos é também um aspeto fundamental que, segundo Ponte e Serrazina (2000) pode ajudar na compreensão de problemas e funcionar como "ponto de partida a partir do qual os alunos podem desenvolver uma apreciação de outras representações" (p.43). Fagnant e Vlassis (2013) realçam que a presença de representações esquemáticas, diagramas ou desenhos esquemáticos, em particular, tem um efeito positivo no desempenho dos alunos na resolução de problemas, sendo que a sua reutilização induz a produção de representações.

O poder de uma representação está diretamente relacionado com a sua versatilidade (Goldin & Kaput, 1996), isto é, com a forma como pode ser aplicada a diferentes contextos e permite relacionar-se com outras representações. Daí a necessidade dos alunos precisarem de desenvolver um bom "repertório de representações" (Ponte & Serrazina, 2000, p.45), mais ou menos convencionais, mas com as quais "se sintam confiantes a trabalhar" (p.45). Contudo, Boavida, Paiva, Cebola, Vale, e Pimentel (2008) salientam que nem todos os alunos estão aptos ao mesmo tempo para trabalhar com a mesma representação, o que reforça a necessidade de se discutirem diversos processos de exploração de uma mesma tarefa, de modo a que os alunos possam associar os novos conhecimentos a representações diversificadas.

A corrente de investigação holandesa, associada ao Instituto Freudenthal (Gravemeijer, 2005; Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen, & Keijzer, 2008), fala em modelos e associa o processo à atividade de modelação que os alunos desenvolvem quando usam e transformam representações para chegar à solução de um problema. Esta atividade de modelação implica uma evolução do próprio modelo, como afirmam Galen et al. (2008) “de modelos de situações concretas para modelos de pensamento” (p.18).

O modelo do iceberg (Webb, Boswinkel & Dekker, 2008), também desenvolvido pelo Instituto Freudenthal, ilustra a necessidade dos alunos “vivenciarem um vasto conjunto de experiências com diferentes modelos matemáticos para darem sentido a representações matemáticas formais.” (p.111). Este apresenta uma classificação das representações em três categorias: *representações informais*, que incluem as representações associadas a contextos, diagramas e explicações, que advêm de experiências vivenciadas pelos alunos associadas a situações de contexto; *representações pré-formais*, como o modelo da reta numérica dupla ou da tabela de área; e *representações formais*, como os algoritmos. Webb, Boswinkel e Dekker (2008) afirmam que deste modelo decorre uma formalização progressiva, na qual as representações mais formais se constroem a partir das menos formais.

Repescando a categorização de Bruner (1962) as diferentes formas de representar ideias matemáticas podem organiza-se em três tipos de representações: as *representações ativas*, associadas à ação, envolvem a manipulação de objetos e materiais manipulativos; as *representações icónicas* implicam o uso de figuras, imagens, esquemas ou desenhos para ilustrar conceitos; e as *representações simbólicas* são a tradução da experiência em linguagem simbólica, segundo regras convencionadas.

Estas duas formas de organizar as representações são próximas no tipo de representações que envolvem. As representações informais e pré-formais do modelo holandês vão ao encontro das representações icónicas de Bruner. Também em ambas as categorizações, a categoria mais complexa, a que se pretende que os alunos cheguem, se reveste necessariamente de maior formalismo, traduzindo-se em linguagem simbólica. Boavida et al. (2008) alertam para o facto da formalização, necessária e desejável, poder comprometer a compreensão, sugerindo que a simbologia da linguagem matemática possa ir integrando progressivamente a linguagem natural. Neste sentido, Ponte e Serrazina (2000), às representações *ativas*, *icónicas* e *simbólicas*, acrescentam a *linguagem oral e escrita*, reforçando a importância da linguagem natural ao nível do trabalho no 1.º ciclo.

A percentagem como representação simbólica no 1.º ciclo. Com vista ao desenvolvimento da compreensão dos números racionais, nos primeiros anos, Moss e Case (1999) desenvolveram um projeto de investigação cujo objetivo era “promover uma compreensão flexível e interligada do sistema de números racionais” (Moss, 2003, p.335). A trajetória de ensino-aprendizagem escolhida para o projeto de investigação desenvolvido por Moss e Case (1999) é considerada pouco comum, pois os alunos começaram o seu percurso trabalhando as percentagens, num contexto de medida. A aprendizagem das frações e decimais surgiu depois, enraizada na aprendizagem das percentagens. Moss (2002) fundamenta que “embora esta abordagem seja diferente daquela a que os alunos são normalmente convidados a seguir, traz muitas vantagens para os alunos mais novos.” (p. 335), destacando que pode prevenir mal entendidos e melhorar a compreensão das diferentes representações. O uso da linguagem simbólica, como alertam Ponte e Serrazina (2000), não deve ser arbitrário, pois depende do fim com que os símbolos são usados e do significado construído e partilhado por todos. O uso da percentagem e a sua articulação com as outras representações simbólicas dos números racionais permite comunicar e discutir um dado conceito com os outros, permitindo traduzir as inter-relações entre esse conceito e as outras ideias matemáticas (Tripathi, 2008).

A construção socialmente construída das aprendizagens. Boavida et al. (2008) destacam o papel da construção social das representações, afirmando que “a existência de representações partilhadas é essencial para que possa haver comunicação e compreensão. Por sua vez, é através da comunicação que se negoceiam representações.” (p. 71). O desenvolvimento de uma partilha comunicativa, segundo Pontecorvo et al. (2005), é determinante para uma co-construção do conhecimento, explicando que esta resulta do chamado pensar em conjunto, “que não corresponde exatamente ao pensamento de alguém” (p. 71), mas que se constrói com os contributos de vários participantes, em momentos de discussão alargada, tal como previsto no modelo de *ensino-aprendizagem exploratório* de Ponte (2005), em que os alunos, depois da apresentação da tarefa, são convidados a trabalhar uma tarefa a pares ou em pequenos grupos para, posteriormente, se envolverem numa discussão em coletivo, que se assemelha ao *congresso matemático* de Fosnot e Dolk (2002).

Metodologia

A investigação em curso é de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) e segue os procedimentos metodológicos de um *Design Research* (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer (2001), com base numa experiência de ensino, orientada por uma conjetura. Consiste no desenvolvimento de um percurso de aprendizagem, construído com a turma, enquanto comunidade de aprendizagem, que se pretende analisar e compreender, ao longo de dez momentos de aula no terceiro período do 3.º ano, e doze momentos de aula no primeiro período do 4.º ano de escolaridade.

Neste nosso estudo, a experiência de ensino apoiou-se em sequências de tarefas, que contemplaram a percentagem como representação a privilegiar numa primeira fase, recorrendo a números de referência e a contextos familiares. Do trabalho com a percentagem passamos à introdução da representação decimal, arredondada às centésimas, tal como sugere o estudo da Moss e Case (1999), fazendo as centésimas decorrer da percentagem. Só depois foi feita a articulação com a representação decimal, arredondada às décimas. As frações, numa primeira fase as frações decimais, surgiram como alternativa à representação decimal e à percentagem. Posteriormente, procurou-se relacionar as diferentes representações entre si, proporcionando conversões. Foram escolhidos números de referência para a mudança de representação, de modo a permitir que os alunos pensassem nas tarefas de forma mais flexível, eficaz e rigorosa. De forma esquemática, o percurso que se traçou é o que se apresenta de seguida, na figura 1.

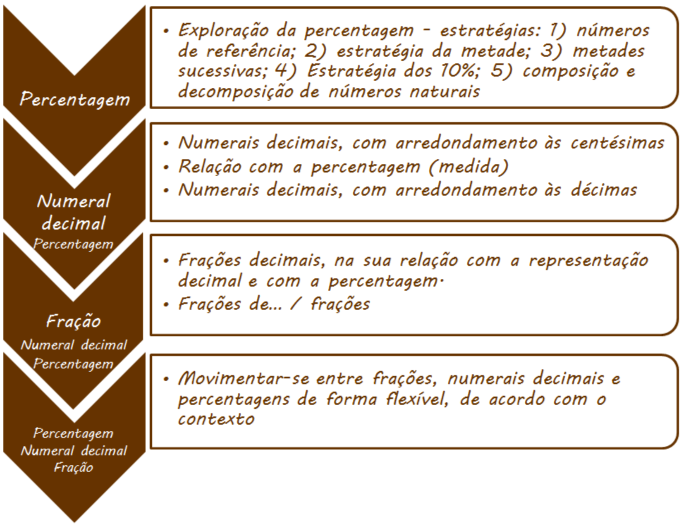


Figura 1: Esquema do percurso de aprendizagem construído.

O *design research* é uma modalidade analítica usada para tentar compreender a aprendizagem matemática dos alunos, tal como ocorre no contexto social da sala de aula. A conjetura formulada, que orienta a experiência de ensino implementada, resulta de uma inferência baseada numa evidência e sustentada por uma teoria (Confrey & Lachance, 2000) e apresenta uma dimensão de conteúdo matemático e outra pedagógica, traduzindo-se no seguinte enunciado:

> No tópico dos números racionais, um trabalho apoiado numa sequência de tarefas, que privilegia a percentagem e a subsequente inter-relação com as outras representações (decimal e fração), pode gerar um percurso potente de aprendizagem, à medida que os alunos participam na atividade social da sala de aula e constroem significados partilhados, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

As duas dimensões complementam-se permitindo estudar as práticas e a sua evolução, determinando que a recolha de dados seja feita no ambiente natural de aprendizagem, a sala de aula, e que a unidade de análise seja a própria turma.

A dupla função de professora da turma e investigadora conduz a uma interseção de dois campos de intervenção, o que implica algumas precauções, para minimizar a possibilidade de possíveis enviesamentos. Assim, procuramos refletir em conjunto sobre cada etapa do estudo, tendo presente o grau de subjetividade crítica associado às decisões que vão sendo tomadas. A propósito da investigação sobre a prática realizada por professores, Ponte (2002) salienta que é importante "analisar as condições que permitam um distanciamento do investigador relativamente ao objeto de estudo, quando este lhe é à partida muito próximo, possibilitando a sua análise racional" (p.10). Para acautelar uma excessiva implicação da primeira autora e assegurar uma descrição mais fiel e completa dos episódios de aula em análise, procurámos uma variedade de procedimentos e instrumentos de recolha de dados, como sublinham Confrey e Lachance (2000), onde se incluem a observação participante, apoiada pela gravação áudio e vídeo, instrumentos de pilotagem da sala de aula e as produções dos alunos. O diário de bordo (Ponte, 2002), um instrumento de informação complementar fundamental, assumiu também um papel relevante, pois permitiu registar notas de campo e reflexões de uma observação participante.

As ideias do referencial teórico do estudo, que se apresentaram anteriormente, forneceram a base de conceitos a partir dos quais se desenvolve a análise dos dados. Esta análise incide sobre episódios de aula, identificando sequências fortes, do ponto de vista de uma aprendizagem com compreensão dos números racionais e interpretando a utilização das múltiplas representações, como forma de encontrar respostas às questões de investigação. No processo analítico desenvolvido, os elementos teóricos apresentados e os elementos empíricos relativos aos dados recolhidos, interagem entre si. No entanto, pretendemos que este processo possa vir a fazer emergir novas categorias de análise, bem como transformar e refinar as já existentes.

A experiência de ensino

O percurso escolar da turma que consideramos neste estudo como unidade de análise inicia-se no ano letivo de 2010/2011, um ano após a generalização da implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico – PMEB (ME, 2007) e termina com a chegada ao 4.º ano, no último ano em que este PMEB vigorou.

Importa relembrar que neste PMEB, um dos objetivos gerais para o ensino da matemática apontava para a importância da compreensão na sua aprendizagem (ME, 2007). Em relação ao trabalho com os números racionais, as indicações metodológicas do PMEB apontavam este como um tópico a iniciar "nos dois primeiros anos com uma abordagem intuitiva" (ME, 2007, p.15).

À data do início do estudo, a turma tinha trabalhado os números racionais não negativos recorrendo a tarefas que envolviam partilha equitativa e a divisão da unidade em partes iguais. A representação dessas quantidades era feita, como sugeria o PMEB, apenas por palavras, desenhos, esquemas ou frações. A representação decimal tinha surgido associada a contextos de referência, nomeadamente ao dinheiro e enquanto propriedade mensurável de um dado objeto (massa ou capacidade). A percentagem não tinha sido uma representação trabalhada no contexto das tarefas até então desenvolvidas.

O estudo de diagnóstico. Chegados ao 3.º ano, a necessidade de perceber que compreensão os alunos revelavam dos números racionais, bem como a familiarização que evidenciavam com as suas diferentes representações, pareceram constituir um ponto de partida incontornável. Realizámos assim um estudo de diagnóstico. Algumas das tarefas desse estudo procuravam identificar relações entre contextos da vida quotidiana dos alunos, e a utilização da percentagem. O objetivo era percecionar, por um lado, se esta representação se oferecia familiar e potente, e por outro, que sentido de proporcionalidade revelavam. Foram escolhidas situações contextualizadas que envolviam números de referência.

Uma análise preliminar dos resultados deste estudo fornece alguns dados sobre os quais vale a pena refletir. Todos os alunos reconheceram a expressão 100% e associaram-na, no contexto de uma bateria de telemóvel, a uma bateria "cheia", isto é, completamente carregada, rodeando a bateria A, da figura 2.

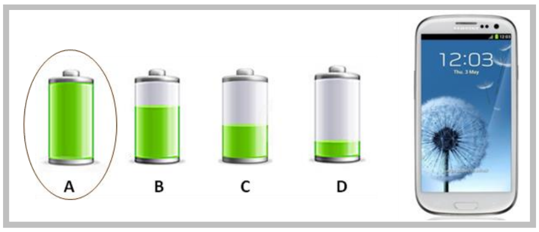


Figura 2: Tarefa 1 do estudo de diagnóstico.

Na tarefa da figura 3, a maioria dos alunos foi ainda capaz de fazer corresponder 50% a metade, apresentando justificações que permitem associar esse conhecimento a experiências vividas fora da escola.

Figura 3: Tarefa 4 do estudo de diagnóstico.

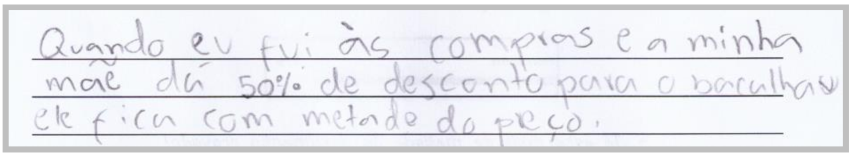


Figura 4: Justificação do aluno AS, que assinalou a resposta "20 euros".

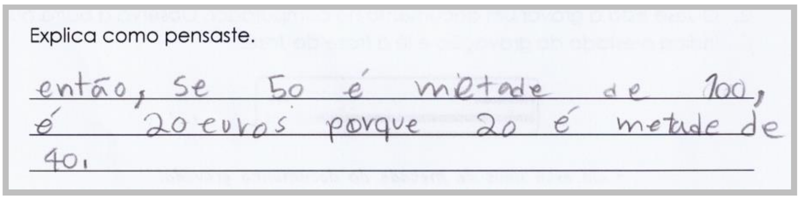


Figura 5: Explicação do aluno CM para a opção de resposta "20 euros".

Justificações, em linguagem natural, como as apresentadas nas figuras 4 e 5, permitem ainda percecionar uma noção esclarecida da expressão 50%, bem como alguma intuição relativa ao sentido de proporcionalidade.

Na mesma sequência de tarefas, era pedido aos alunos que se posicionassem face uma afirmação que sustentava que a barra de estado da figura 6 mostrava que mais de 50% de um dado documento estaria gravado.

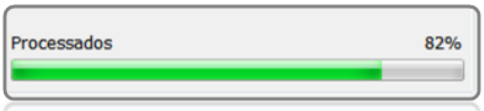


Figura 6: Barra de estado correspondente à gravação de um dado documento no computador.

Mais de metade dos alunos conseguiu justificar, através de linguagem escrita, que a afirmação era verdadeira, com frases como: “Aquilo vai no 82 e já passa do 50”, “O documento gravado acaba aos 100% e já passou de metade, que é 50%, já vai no 82%”; “Está a partir de 50% para cima”; “Metade é 50 e está lá 82%”; “Metade é 50% e já está mais carregado do que 50%”.

Os argumentos apresentados traduzem a força do modelo visual representado pela barra de estado. Evidenciam justificações que integram na linguagem natural, símbolos da linguagem matemática (Boavida et al., 2008). Ligada a uma situação real concreta, a barra de estado, pode desempenhar um papel importante na compreensão da relação proporcional, na medida em que permite relacionar a grandeza tempo e a gravação do documento, apoiando-se nas relações entre os números inteiros até 100. Além disso, traduz-se numa representação icónica (Bruner, 1962; Ponte & Serrazina, 2000) potente, pois relembrando Galen et al. (2008), o desenvolvimento de modelos é um processo evolutivo. É interessante perceber que os alunos, no seu discurso escrito, deixam traduzir alguma intuição para a percentagem (Moss & Case, 1999), uma vez que conseguem indicar parte de um conjunto que está definido para cem, quando perante uma situação que envolve uma dada percentagem (Galen, et al., 2008).

O início do percurso – exploração da percentagem. O percurso que pretendemos construir, inspirado nos princípios do currículo experimental de Moss e Case (1999) e reforçado pelos resultados do estudo de diagnóstico, foi-se apoiando numa diversidade de tarefas (explorações, problemas, exercícios ou projetos) baseadas, muitas das vezes, em situações realísticas, diretamente relacionadas com a realidade dos alunos, como sugerem Ponte e Serrazina (2009).

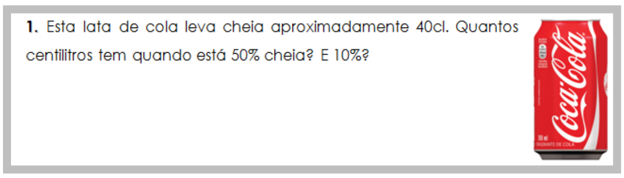


Figura 7: Tarefa 2 da sequência de tarefas.

A tarefa da figura 7, tal como as outras tarefas de apresentadas ao longo deste percurso, seguiu uma abordagem exploratória (Ponte & Serrazina, 2009). Foi apresentada à turma em coletivo. Seguiu-se-lhe um momento de trabalho a pares, após o qual se fez a discussão em coletivo. Este último momento teve como suporte um esquema no Quadro Interativo Multimédia (QIM), sobre o qual se foi trabalhando em coletivo, como mostra a imagem da figura 8.

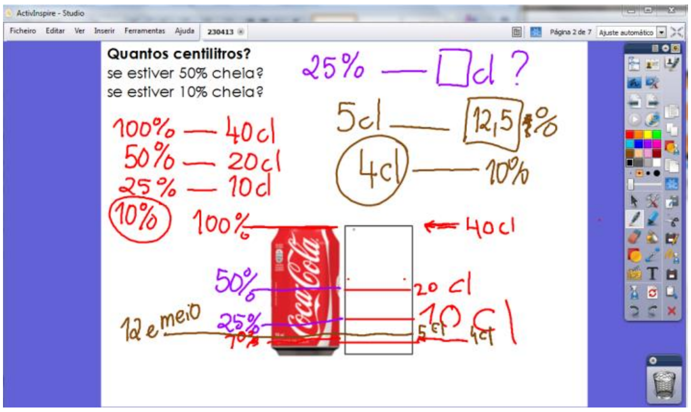


Figura 8: Esquema e registos construídos no QIM no momento de discussão.

Embora não fosse pedido, mas provavelmente, na tentativa de chegar aos 10%, alguns pares procuraram descobrir a quantidade de cola que teria a lata a 25%. Discutiu-se então o que representariam os 25%, quantos centilitros poderiam representar na situação apresentada.

Prof: 50% é metade, então e 25%?
AS: Metade da metade.
Prof:Lembram-se de termos falado na metade da metade. Outra maneira de dizer “metade da metade”?
MF: Metade da metade significa metade de 50%...
HB: Significa ¼ de ¼…
IP: Não. ¼ de ¼ é pegares em ¼ e dividires em 4…
Prof: HB, isso é que significa metade da metade? Metade da metade… AR.
AR: É fazer ao meio, a metade.
Alunos: É ¼.

Neste excerto é possível perceber que os alunos reconhecem que algumas representações simbólicas dos números racionais, aparentemente diferentes, podem representar o mesmo número. Relembrado que estava o conceito de 25%, associando-o à metade da metade e a ¼ foi interessante perceber a discussão que se gerou em torno do cálculo de 25% de 40 cl.

Prof: […] BF, então quanto é que vocês acharam que 25% é?
BF: [Aponta 25cl]
Prof: A BF e a CM acharam que eram 25cl, pensaram da mesma maneira? LS.

LS: Não, 25% é de "porcentos", mas de centilitros não é... Lá em cima no 50% está 20…
Prof: Vai lá indicar… Estão a perceber o LS? Ele diz que 25% é "nos porcentos", isto é, é na percentagem, não corresponde aos centilitros…
LS: [dirige-se ao QIM] Aqui não pode estar o 25, porque aqui está o 20, e o 25 passa dos 20%.

Neste episódio, é interessante destacar o papel que o esquema parece ter na organização do raciocínio do aluno LS, percebendo que a percentagem diz respeito a um todo que está para 100, e que, neste caso, diz respeito a 40 centilitros.

Ainda na mesma tarefa, a discussão conduziu para a partilha da forma como cada par chegou aos 10% de 40. Esta estratégia causou alguns constrangimentos, pois as tentativas dos alunos remeteram para o cálculo, ineficaz, mas familiar, das "metades sucessivas".

Prof: E quantos centilitros são os 10%?
Alunos: 5 cl, … 4cl, …
Prof: Chegaram a valores diferentes. Uns dizem 5 cl outros 4cl. Mas a maioria diz 5cl. Vamos perceber. Então HG [que estava no QIM], o que vocês acharam?
HG: Estivemos sempre a fazer metade. E metade de 10 é 5.
Prof: Fazer metade de 10… concordam? HG, será que 10 é metade de 25%?
HG: não…
IP: É um bocadinho menos…
HB: …é 12 e meio, não 10.

Neste episódio, o tentar dar sentido às explicações uns dos outros, acontece em resposta ao desafio de analisar a situação, em interação social. A construção da solução do problema passa pelo "raciocinar em conjunto, por meio de um pensamento-discurso que cada intervenção manifesta e, ao mesmo tempo, colhe dos outros" (Pontecorvo et al., 2005, p. 208).

SA: Eu sei outra maneira de explicar, professora. Posso?
Prof: Vamos ouvir a estratégia do SA. SA.
SA: Como 10 vezes 10 dá 100, 4 vezes 10 dá 40.
Prof: Que vos parece? Como pensou o SA?
HB: Eu sei o que o SA fez.
IP: Eu percebi o que o SA disse.
Prof: Ok. E o resto da turma? … Então, olhando para o esquema, o SA viu que 100% são 40cl.
HB: 10% 10 vezes, dá 100%.
Prof: Ok.
IP: Ele está a ver dividido em 10 vezes o 4.

Prof: Isso. Qual é o número que eu tenho que usar 10 vezes para chegar a 40?
Alunos: É o 4.
RA: Porque 4 x 10 dá 40.

Ao longo da tarefa, o esquema da *figura 8* foi-se transformando, fazendo emergir diferentes representações simbólicas, que foram sendo usadas para organizar e registar o pensamento (Tripathi, 2008). Esta interação entre representações (Goldin & Kaput, 1996) ajudou a desconstruir a complexidade do problema e foi útil para apresentar e justificar aos outros cada ponto de vista, apoiando a compreensão e a solução da tarefa (Ponte & Serrazina, 2000), como se pode percecionar no discurso do aluno SA, na sua intervenção no excerto anterior.

Prof: Mas por que é que ele agarrou em 10?
MB: Deve ter pensado que, se estava dividido em 10, e ele quer chegar à quantidade de 40cl, podia fazer 10 vezes o 4.
Prof: Então, quando queremos descobrir 10% de uma quantidade qualquer, o que podemos fazer?
AS: Podemos ver qual é numero que…
DR: …multiplicado por 10 dá essa quantidade.
BF: Também podemos fazer os 100% a dividir por 10…
Prof: É outra forma de dizer… fazemos a divisão da quantidade que temos, que temos como 100%, por…
Alunos: Por 10.
Prof: Ora bem. Que vos parece? Vamos registar.

Assim, no fim da tarefa, um momento participado de sistematização em coletivo, construído no quadro e registado em papel, como mostra a figura 9, permitiu fixar (e afixar) essa rede de relações entre conceitos, resultando num modelo que traduz uma variedade de representações partilhadas. Este modelo permitiu o registo do modo de pensar dos alunos, ilustrando quer a resposta, quer o processo utilizado (NCTM, 2007) e ficou disponível, à distância de um olhar.

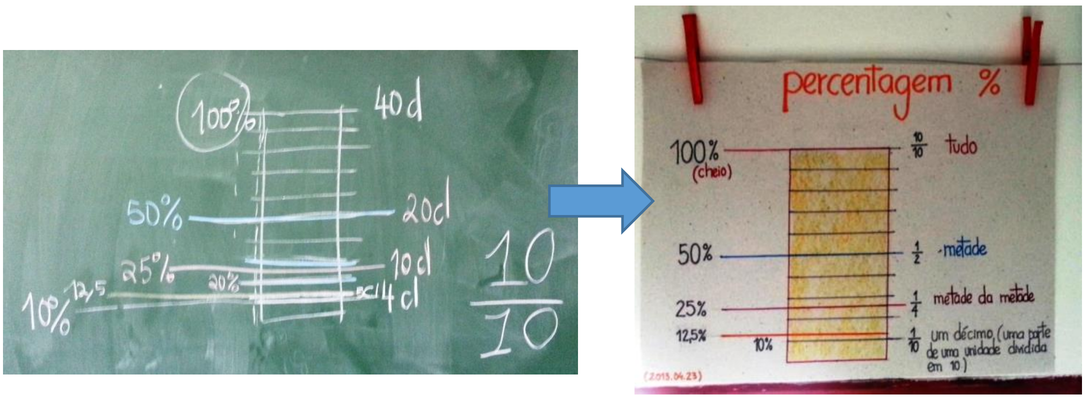


Figura 9: Registos do momento de sistematização e cartaz afixado na sala.

A compreensão pelos alunos dos conceitos e das relações relativos aos números racionais, que se constrói ao longo desta tarefa, traduz-se na produção de saber para o grupo e para cada individuo. Parece resultar de um pensar em conjunto, que se constrói com os contributos de vários participantes numa atividade conjunta (Pontecorvo et al., 2005), apoiada numa multiplicidade de representações.

Considerações finais

Da investigação que temos em desenvolvimento, trazemos a esta reflexão dados referentes ao estudo de diagnóstico e à primeira fase do percurso traçado, que diz respeito à exploração da percentagem. Assim, consideramos que a análise preliminar apresentada contribui para a identificação de pistas, nomeadamente ao nível da interpretação das inter-relações entre ideias e conceitos, apoiadas no uso das representações, no espaço sociocultural da sala de aula, numa perspetiva assente no quadro teórico escolhido.

Numa resposta, ainda que provisória, em relação à primeira questão, a percentagem parece constituir uma representação intuitiva, com potencialidade para explorar no 1º ciclo, no trabalho com os números racionais, pois traz consigo uma mensagem visual muito forte, como afirmam Moss e Case (1999). A barra de estado parece permitir uma transposição para uma representação esquemática, no conceito de Fagnant e Vlassis (2013), que os alunos podem usar e transformar, como mencionam Galen et al. (2008). O seu uso e interpretação podem assim associar-se, de forma consistente, a representações icónicas e a outras simbólicas, que apoiadas na linguagem oral e escrita, uma forma de representação que Ponte e Serrazina (2000) consideram desempenhar um papel importante no 1.º ciclo, permitem traduzir a organização do pensamento dos alunos, quer no registo, quer na comunicação das inter-relações das ideias matemáticas associadas aos processos de resolução.

A interpretação dos dados referentes às tarefas apresentadas possibilita a identificação de sequências de aprendizagem em que diferentes tipos de representação das ideias associadas aos números racionais são usados, de forma inter-relacionada e em simultâneo, como sugerem Boavida et al. (2008), permitindo identificar pistas para a construção de uma resposta à segunda questão do estudo. Modelos visuais associados a contextos, como o caso da lata de cola na tarefa da *figura 7*, são usados e transformados na sala de aula, através de atividades significativas para os alunos, em representações icónicas. Estas surgem em estreita ligação com a linguagem simbólica, servindo de suporte ao pensamento dos alunos e com as quais, na perspetiva de Tripathy (2008), podem raciocinar. Esta relação entre representações proporciona o registo do seu raciocínio, permitindo como sugere o NCTM (2007) reconstituir o processo utilizado para chegar à resposta. Neste sentido, e acompanhando a perspetiva de Ponte e Serrazina (2000), as representações são interpretadas como um processo e um fim em si mesmas.

No cenário de aprendizagem escolhido, sala de aula como comunidade de aprendizagem, a comunicação, como referem Pontecorvo et al. (2005), assume-se como ferramenta na construção das relações entre representações, de uma forma compartilhada e em interação comunicativa, pois conduz a processos de negociação dos significados das ideias relativas ao conceito de número racional em construção. Nos momentos de interação apresentados, os alunos parecem também ir construindo a confiança necessária à sua autonomia e perseverança em fazer matemática, num cenário em que "as ideias de todos merecem atenção e de cada um é esperado que consiga desenvolver a sua participação numa dada tarefa. O desígnio, como relembram Fosnot e Dolk (2002, p.35) é que "de todos se espera que consigam aprender".

Referências bibliográficas

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G. Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *A investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Bruner, J. S. (1962). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in Classroom Mathematical Practices. In E. Yackel, K. Gravemeijer & A. Sfard (Eds.), *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb* (pp. 117-163). New York: Springer.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Edits.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231-266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 149-168.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals and percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6.* Rotterdam: Sense.

Goldin, G., & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning*, (pp. 397-430). Mahwah: Erlbaum.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In *Roles of representation in school mathematics*. *2001 Yearbook.* (pp. 1-23). Reston, Virginia: NCTM

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Org.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM & DEFCUL.

Greeno, J., & Hall, R. (1997). Practicing representations: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan*, *78*(5), 361-367.

Kilpatrick, J. (2009). Programa de Matemática do Ensino Básico: O olhar de um especialista internacional em currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *105*, 50-52.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC. Acedido em setembro, 15, 2012, em http://www.dgidc.min-edu.pt/ensinobasico/data/outrosprojectos/Matematica/Documentos/programamatematica.pdf.

Mercer, N., & Sams, C. (2006). Teaching children how to use language to solve maths problems. *Language and Education*, *20*(6), 507-528.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2006). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-108.

Moss, J. (2003). Introducing percents in linear measurement to foster an understanding of rational-number operations. *Teaching Children Mathematics*, *9*(6), 335-339.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 122-147.

Niza, S. (1998). A organização social do trabalho de aprendizagem no 1.º Ciclo do Ensino Básico. *Inovação*, *11*, 77-98.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática, 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2009). O novo programa de matemática: uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, *105*, 2-6

Pontecorvo, C., Ajello, A. M., & Zucchermaglio, C. (2005). *Discutindo se aprende – interação social, conhecimento e escola*. Porto Alegre: Artmed.

Smith, P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 3-17). Reston, VA: NCTM.

Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland. (Ed.). *Realistic Mathematics Education in primary school* (pp. 21-56). Utrecht: Freudenthal Institute.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*, 438-445.

Webb, D., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(2), 110-113.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice – Learning, meaning and identity*. New York: Cambridge University Press.

A CONGRUÊNCIA DE CONVERSÕES ENTRE REPRESENTAÇÕES EM TAREFA COM PADRÕES NO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

Paula Montenegro

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

mpmvcardoso@gmail.com

Cecília Costa

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, CIDTFF – Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (Lab-DCT da UTAD)

mcosta@utad.pt

Bernardino Lopes

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, CIDTFF – Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (Lab-DCT da UTAD)

blopes@utad.pt

Resumo: A primeira abordagem formal à Álgebra no Ensino Básico português faz-se no 6.º ano de escolaridade com a exploração de sequências com padrões de crescimento. A forma como os alunos generalizam e representam os padrões que lhes são propostos tem sido alvo de diversos estudos. Uma representação consiste na substituição de uma entidade por outra configuração. A Teoria de Registos de Representação Semiótica considera a existência de dois tipos de transformação de representações: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações que ocorrem dentro de um mesmo registo; as conversões consistem em transformar uma representação de um registo para outro. Os intervenientes deste estudo foram 19 alunos, com idades compreendidas entre os 10 e os 13 anos. Este estudo teve por objetivos identificar as conversões feitas pelos alunos às representações usadas durante a resolução de uma tarefa de exploração de sequências, assim como determinar o grau de congruência "semântica" nas conversões que envolveram uma representação visual. Os dados foram recolhidos da gravação áudio dessa aula, dos respetivos registos individuais discentes e das notas da professora. Na sua análise, fez-se a identificação das conversões realizadas e determinou-se o grau de congruência em conversões que envolveram uma representação visual. Concluímos que os alunos utilizam diferentes tipos de representação e realizam conversões entre elas com diferentes graus de congruência que pode ter como consequência erros, dificuldades e bloqueios.

Palavras-chave: Sequências, representações, conversão, congruência "semântica".

Introdução

É hoje consensual, entre professores e investigadores em Educação Matemática, a importância da exploração de padrões para um contacto à Álgebra nos primeiros anos de escolaridade (p. e., Canavarro, 2007; NCTM, 2008; Borralho & Barbosa, 2009). Como no nosso país, a exploração de padrões nas salas de aula de matemática do 2.º ciclo de escolaridade apenas entrou no currículo escolar do Ensino Básico português com o Programa de Matemática de 2007, torna-se pertinente uma investigação nesta área. Um dos problemas centrais que se coloca é o conhecimento de como os alunos são capazes de generalizar os padrões que lhes são propostos, assim como as estratégias a que recorrem para o fazer. Vários autores (Moyer-Packenham (2005); Borralho, Cabrita, Palhares & Vale (2007); Jacobs, Frank, Carpenter, Levi & Battey (2007); Warren & Cooper (2008); Ross (2011); Faria (2012); Merino, Cañadas & Molina (2013); Altay, Akyüz, & Erhan (2014); Akkan (2013); e Callejo & Zapatera (2014)) estudaram esta temática colocando o foco dos seus estudos na categorização de estratégias, dificuldades e identificação dos erros cometidos nessa exploração, assim como nas suas representações.

No nosso país o trabalho de Barbosa, Vale e Palhares (2012), entre outros, mostra as estratégias utilizadas, os erros e dificuldades que alunos portugueses do 6.º ano de escolaridade evidenciam na exploração de tarefas com padrões, alguns de natureza visual.

Por outro lado, constatamos que, neste nível de ensino são propostos aos alunos, com frequência, padrões de natureza geométrica e que, na sua exploração, os mesmos os convertem em padrões de natureza numérica. Nesse trabalho de exploração de padrões, há o recurso a diversas representações, sendo umas fornecidas na própria tarefa ou explicação docente e outras da própria (re)criação discente. Nas representações visuais, utilizam-se figuras, a maior parte das vezes com recurso a figuras geométricas, sendo esta com muita frequência a representação fornecida como ponto de partida para a exploração de sequências neste nível de ensino. As representações numéricas utilizam números. Por sua vez, os alunos utilizam esquemas, mais ou menos formais, para representar a ordem e/ou os termos da sequência e relação entre eles. Também recorrem a tabelas, representação mais formal e sugerida na maioria das vezes pelo professor ou na própria tarefa. A tabela, como não é uma representação da iniciativa dos alunos, mas sim sugerida pelo professor, é utilizada pelos alunos com diferentes graus de correção e organização. Por último, a representação através da linguagem natural, em que os alunos recorrem à linguagem materna para expressar características ou propriedades das sequências. Também verificamos que os alunos têm consciência da necessidade de mudança de representação para outra que consideram mais adequada, manifestando muitas vezes dificuldades e bloqueios neste trabalho de mudança de representação. Desta forma, este estudo teve por objetivos: (a) identificar as conversões feitas pelos alunos às representações usadas durante a resolução de uma tarefa de exploração de sequências, (b) determinar o grau de congruência “semântica” nas conversões que envolveram uma representação visual. Para o efeito, vamos recorrer à Teoria de Registos de Representação Semiótica.

Enquadramento teórico

Na aula de matemática, uma das formas de promoção da interação e colaboração entre alunos e professor é a utilização de tarefas com a finalidade de provocar atividade. Stein, Grover e Henningsen (1996) consideram como tarefas significativas as que permitem mais do que uma estratégia de solução, exigem representações múltiplas e explicação e justificação de raciocínios, oralmente e por escrito. Uma representação consiste na substituição de uma entidade por outra configuração (Goldin, 2008). Segundo o NCTM (2008), a forma com representamos as nossas ideias matemáticas é essencial para o modo como compreendemos e utilizamos essas ideias. O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado e aplica-se tanto aos processos e resultados obtidos externamente como aos que ocorrem internamente nas mentes dos indivíduos quando fazem matemática. Refere ainda que os alunos aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente quando acedem às representações matemáticas e às ideias que elas expressam. Assim,

> As representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação. (NCTM, 2008, p.75)

A Teoria dos Registos de Representação Semiótica de Duval (2009) tem por objetivo a criação de um modelo do funcionamento semiótico-cognitivo subjacente ao pensamento matemático (Duval, Freitas & Rezende, 2013). Para Duval (2009) não há conhecimento que não mobilize uma atividade de representação, e só existe compreensão dos objetos matemáticos quando somos capazes de os representar pelo menos de dois modos diferentes, transformando esses modos diferentes de representação entre si. Assim, segundo o autor, para termos acesso aos objetos matemáticos é necessária uma atividade de produção semiótica.

Duval (1999, 2009) considera como representações semióticas situações abrangentes como por exemplo as frases em linguagem natural ou as equações e não apenas um simples traço ou um símbolo isolado, como as letras, palavras ou algarismos. Ainda considera que a noção de representação semiótica pressupõe a existência de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações semióticas de um registo para outro. Para distinguir as representações semióticas utilizadas pela matemática das representações semióticas utilizadas noutros processos cognitivos, o mesmo autor adotou o nome de registo de representação (Duval, 2011). Duval (2009) identificou 3 registos de representação: as representações subjetiva e mental, as representações internas ou computacionais e as representações semióticas. As primeiras são as crenças, elucidações e conhecimentos da infância; as segundas são as que enfatizam o tratamento de uma informação, caracterizada pela execução automática de uma tarefa com o objetivo de gerar uma resposta adequada à situação; por último, as representações semióticas são externas e intencionais e permitem-nos efetuar determinadas funções cognitivas. É através destas representações, por exemplo, gráficos, tabelas, enunciado em linguagem natural, uma expressão ou equação algébrica ou numérica, entre outros, que temos acesso aos objetos matemáticos. Mas o importante não é classificar as representações semióticas comuns (imagens, linguagem e índices) mas todos os sistemas semióticos usados em Matemática, pois elas não são apenas necessárias para fins de comunicação, elas são essenciais à atividade cognitiva do pensamento, pois desempenham um papel importante (i) no desenvolvimento das representações mentais que dependem de uma interiorização das representações semióticas; (ii) na realização de várias funções cognitivas; (iii) na produção de conhecimentos, já que as representações semióticas permitem representações muito diferentes de um mesmo objeto, estando o desenvolvimento da ciência dependente do desenvolvimento de sistemas semióticos cada vez mais específicos.

O funcionamento cognitivo do pensamento humano está inseparável da existência de uma diversidade de registos de representação semiótica. Duval e Moretti (2012) chamam *semiose* à apreensão ou produção de uma representação semiótica e *noesis* à apreensão conceitual de um objeto. Na atividade matemática não há noesis sem semiose, pois é essencial poder mobilizar muitos registos de representação semiótica assim como selecionar um registo em detrimento de outro. Este recurso a muitos registos parece ser uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com as suas representações e que possam ser também reconhecidos em cada uma das suas representações. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, pois ela dá acesso ao objeto matemático representado. Desta forma, à atividade matemática estão associados três fenómenos:

1. Diversificação dos registos de representação semiótica;
2. Diferenciação entre representante e representado;
3. Coordenação dos diferentes registos de representação semiótica.

A distinção entre os diferentes registos permite separar os dois tipos de transformações que constituem a atividade matemática. O mesmo autor identifica dois tipos de transformação de registos de representações, a que também chama ultimamente de gestos intelectuais: os tratamentos e as conversões. Os tratamentos são transformações que ocorrem dentro de um mesmo registo; as conversões consistem em transformar uma representação de um registo para outro. De salientar que a compreensão de um conteúdo matemático não se dá apenas pela mudança de um registo para outro, mas sim pelo reconhecimento de que tais registos se referem ao mesmo objeto matemático (Duval, 2009). Assim, ensinar matemática sob o ponto de vista da Teoria dos Registos de Representação Semiótica é possibilitar o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização, através do uso de representações e respetivas transformações.

Duval (2009) considera ainda duas faces distintas da atividade matemática: uma face exposta e uma face oculta. A primeira diz respeito aos objetos matemáticos: números, funções, equações, polígonos, poliedros, etc., às suas propriedades, às fórmulas, aos algoritmos, às demonstrações, etc. Esta face toma forma no currículo escolar, organizado por sequências de conteúdos e subconteúdos, sendo uns, pré-requisitos dos seguintes. A face oculta da atividade matemática corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico característico da matemática, que não é diretamente observável no trabalho discente em sala de aula, mas indiretamente através de erros recorrentes e bloqueios quando solicitamos a resolução de problemas, sejam elementares ou não. Esta face oculta também se manifesta no não reconhecimento do mesmo objeto matemático em representações diferentes. Ainda acrescenta que não basta justapor representações diferentes do mesmo objeto, pois não é garantido que os alunos aprendam a reconhecê-las. A Teoria dos Registos de Representação Semiótica diz respeito à face oculta da atividade matemática, visando conhecer o funcionamento do pensamento matemático, pois sem o desenvolvimento deste não se pode compreender nem conduzir uma atividade matemática.

A congruência "semântica" (Duval & Moretti, 2012) procura medir o grau de transparência entre representações de um mesmo objeto. Duval apresenta 3 critérios de congruência que permitem determinar o carácter congruente ou não congruente de uma conversão a ser efetuada entre duas representações semióticas diferentes e que representam o mesmo conteúdo. São eles:

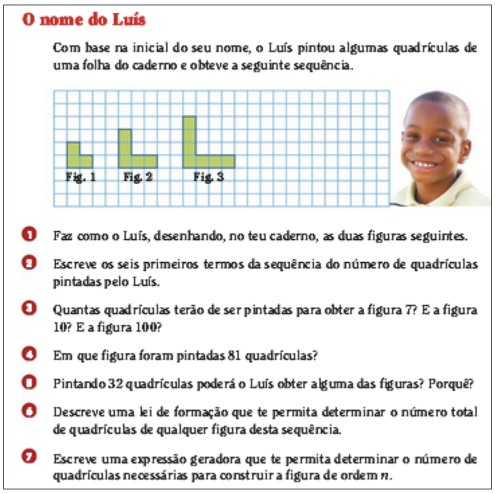
1. Possibilidade de uma correspondência "semântica" de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar.
2. A univocidade "semântica" terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma única unidade significante elementar no registo de representação de chegada.
3. A organização das unidades significantes: as organizações respetivas das unidades significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender as unidades em correspondência "semântica", segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência na ordem do arranjo das unidades que compõem cada uma das duas representações apenas é pertinente quando estas apresentam a mesma dimensão.

Quando não há congruência, a conversão torna-se difícil. Assim, a coordenação entre muitos registos é uma condição absolutamente necessária para que ocorra conhecimento efetivo.

Constatam-se indicações claras no Programa de Matemática (MEC, 2013) para a conversão de símbolos e expressões entre a linguagem natural e a linguagem simbólica matemática, mas não há referências claras a conversões entre outros tipos de representação, nomeadamente a representação visual. Assim, neste estudo, fomos analisar as conversões que os alunos efetuaram no decurso da sua atividade. Dado que a representação de partida na abordagem à Álgebra no 6.º ano de escolaridade é, com frequência, uma representação visual (desenho de uma sequência geométrica), demos especial destaque ao grau de congruência das conversões que os alunos fizeram sempre que usaram essa representação.

Metodologia

Este trabalho insere-se numa investigação de caráter mais alargado com vista a determinar a eficácia e interesse da utilização de representações visuais e respetivas transformações, na aprendizagem de diferentes conteúdos matemáticos no 2.º ciclo de escolaridade. Serviu como estudo piloto fornecendo informação preliminar sobre o que se pretende investigar. A atividade discente decorreu da resolução da tarefa "O nome do Luís" (Figura 1), retirada de um manual comercializado. A referida atividade teve a duração de 40 minutos de uma aula de 60.


O nome do Luís

Com base na inicial do seu nome, o Luís pintou algumas quadrículas de uma folha do caderno e obteve a seguinte sequência.

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

1. Faz como o Luís, desenhando, no teu caderno, as duas figuras seguintes.
2. Escreve os seis primeiros termos da sequência do número de quadrículas pintadas pelo Luís.
3. Quantas quadrículas terão de ser pintadas para obter a figura 7? E a figura 10? E a figura 100?
4. Em que figura foram pintadas 81 quadrículas?
5. Pintando 32 quadrículas poderá o Luís obter alguma das figuras? Porquê?
6. Descreve uma lei de formação que te permita determinar o número total de quadrículas de qualquer figura desta sequência.
7. Escreve uma expressão geradora que te permita determinar o número de quadrículas necessárias para construir a figura de ordem n.

Figura 1: Tarefa "O nome do Luís", retirada de MSI6, p.87, Areal Editores.

Esta tarefa foi aplicada depois da abordagem formal do conteúdo "Sequências e regularidades" para consolidação das aprendizagens. No sentido de enriquecer a situação de aprendizagem, optou-se por uma tipologia de trabalho de grupo (Gillies, 2003). Foram formados 4 grupos de trabalho constituídos por 4 ou 5 elementos cada. O critério para a formação dos grupos teve por base a heterogeneidade dos elementos em termos de competência matemática e capacidade de comunicação escrita. Apesar das respostas terem sido discutidas em grupo, cada aluno registou as conclusões que considerava pertinentes e usava as representações que considerava mais adequadas. Em momento algum, a professora influenciou os alunos nos seus registos escritos.

Com este trabalho procurou-se responder às seguintes questões de investigação:

1. *Que conversões fazem os alunos durante a resolução de tarefas com sequências geométricas de crescimento?*
2. *Qual o grau de congruência "semântica" que as conversões que envolvem uma representação visual evidenciam?*

Tendo em consideração as questões e o foco do estudo apresentados, optou-se por um estudo com uma abordagem qualitativa com caráter interpretativo para compreender melhor a particularidade da exploração de uma representação visual na resolução de uma tarefa com uma sequência geométrica. O estudo reporta-se a uma atividade de resolução de uma tarefa com uma sequência geométrica com uma turma de 6º ano com alunos com idades compreendidas entre os 10 e os 13 anos e o seu professor em ambiente natural de sala de aula. Os dados recolhidos em ambiente de sala de aula foram gravação áudio da aula, registos escritos dos alunos e observação participante da professora a partir dos quais se elaborou uma narração multimodal seguindo o protocolo indicado por (Lopes et al., 2014).

Para responder às questões de investigação focalizamos a nossa análise nos registos escritos discentes efetuados durante a resolução da tarefa supracitada, mais concretamente nas conversões das representações utilizadas. Para reduzir os dados formaram-se categorias. O critério utilizado para a formação dessas categorias baseou-se na classificação de Duval (2011) para as transformações/gestos intelectuais. Na sua análise, fez-se a identificação das representações utilizadas, das conversões efetuadas durante a sua resolução e determinou-se o grau de congruência "semântica" entre elas. Foram assim criadas duas categorias de análise: "Representações" e "Conversões entre representações". A segunda categoria possui subcategorias, de acordo com o seu grau de congruência "semântica". A cada uma das categorias e subcategorias foi atribuído um código (Cohen, Manion & Morrison, 2007). Ambas encontram-se devidamente identificadas na Tabela 1.

Tabela 1: Categorias e subcategorias de análise utilizadas e respetivos códigos.

Categorias de análise		
Representações	**Conversões**	**Congruência "semântica"**
RV = Representação visual **RN** = Representação numérica **RT** = Representação em tabela **RE** = Representação esquemática **RA** = Representação algébrica **LN** = Linguagem natural	**Entre representações ($Ri \rightarrow Rj$)**	**$(Ri \rightarrow Rj)_{GE}$** (Grau elevado) = Verificam-se os 3 critérios em todas as situações. **$(Ri \rightarrow Rj)_{GM}$** (Grau médio) = Verificam-se 2 dos 3 critérios ou parte dos 3 critérios. **$(Ri \rightarrow Rj)_{GB}$** (Grau baixo) = Verifica-se, no máximo, o 1º critério.

Numa fase posterior, analisaram-se as respostas descritivas de cada uma das subcategorias (Bogdan & Biklen, 1994). De cada uma das subcategorias da categoria “Conversões entre Representações” selecionamos uma resposta para servir de exemplo, caracterizando assim o grau de congruência “semântica” entre as conversões efetuadas.

Resultados

Todos os grupos iniciaram a exploração da sequência seguindo a sugestão de utilização do desenho da figura geométrica proposta (Figura 2).

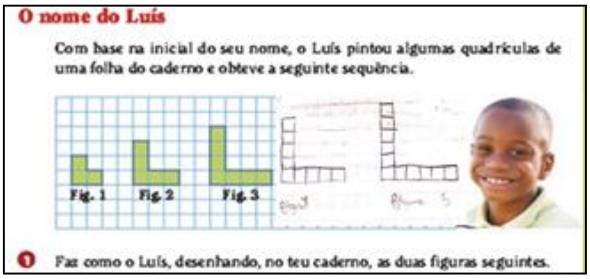


Figura 2: Representações visuais sugeridas na tarefa, à esq., e utilizadas pela totalidade dos alunos, à dir.

Todos os grupos conseguiram, pela representação visual, identificar quase imediatamente a lei de formação da sequência, apesar de esta ser pedida apenas na pergunta 6, tendo feito uma conversão da representação visual para a linguagem natural (Figura 3).

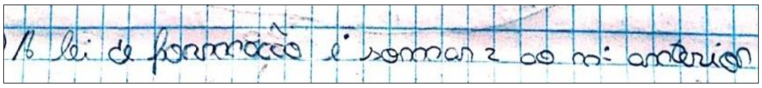


Figura 3: Representação da lei de formação da sequência: conversão para linguagem natural.

De seguida, conforme sugerido na pergunta 2 da tarefa, os alunos abandonaram a exploração do desenho e recorreram a outras representações: esquemática (Figura 4, à esq.) e numérica (Figura 4, à dir.), convertendo a sequência geométrica numa sequência numérica.

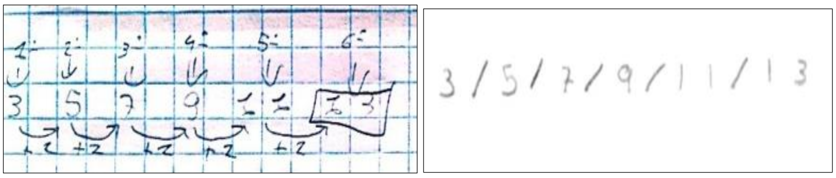


Figura 4: Representação esquemática, à esq., e representação numérica, à dir.

Outros grupos converteram a representação visual fornecida no início da tarefa numa representação em tabela (Figura 5).

Figura 5: Representação em tabela da sequência.

Quando os grupos tiveram que responder à pergunta 3, os alunos confrontaram-se com diversas dificuldades para determinar o número de quadrículas da figura 100. Dois dos grupos conseguiram responder-lhe estabelecendo uma relação entre a ordem do termo da sequência com o termo correspondente. Assim encontraram uma expressão algébrica de generalização, a *expressão geradora* ($2n$+1), apesar desta apenas ser pedida na pergunta 7 (Figura 6).

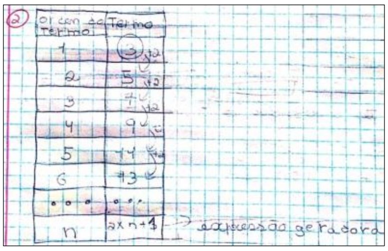


Figura 6: Conversão da representação visual fornecida para representação em tabela e desta para representação algébrica.

No entanto, os outros dois grupos não foram capazes deste procedimento, tendo tido outro desempenho que passamos a descrever. Abandonaram a representação visual por considerarem ser inviável o desenho dos 100 termos da sequência, conforme excerto da narração multimodal:

> Um dos elementos do grupo sugere como estratégia contar o número de quadrículas até à figura 100, mas nem outros elementos nem eu aceitamos essa estratégia que verificamos não ser a melhor e mais eficiente nesta situação. Encontram outra, baseada numa regra de proporcionalidade direta, incentivo-os a utilizá-la e afasto-me até ao grupo IV.

Decidiram então trabalhar com uma representação em tabela, mas não foram capazes de relacionar corretamente as suas duas colunas, isto é, a ordem do termo da sequência com o termo da mesma. Vendo as dificuldades, e ignoradas as potencialidades da exploração da representação visual, a professora procurou uma estratégia que facilitasse a conversão da representação visual para outra representação. Assim, sugeriu-lhes um olhar atento à mesma, à procura de semelhanças e diferenças entre os desenhos. Como não obteve o resultado esperado, evidenciou o que se mantinha constante da 1.ª para a 2.ª figura e desta para a 3.ª (Figura 7 a cinzento) e o que variava de figura para figura (Figura. 7 a branco).

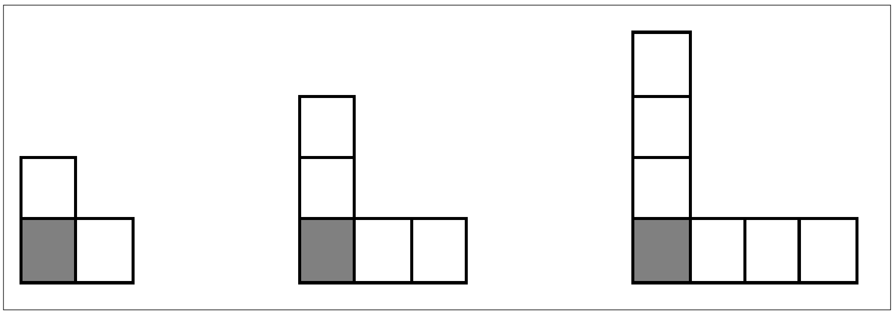


Figura 7: Tratamento da representação visual fornecida com evidência nos termos da sequência através da utilização de duas cores do que se mantém constante (a cinzento) e do que varia (a branco).

Depois desta intervenção, verificou-se que os alunos descobriam rapidamente o termo de qualquer ordem, incluindo a expressão geradora. Teceram ainda alguns comentários relativos à facilidade do reconhecimento do padrão desta sequência, desta forma.

De seguida, apresentamos na Tabela 2 a identificação das conversões entre representações efetuadas, as ocorrências relativas e o grau de congruência “semântica” verificado nas conversões que envolveram uma representação visual.

Tabela 2: Tabela de frequências para as conversões entre representações efetuadas.

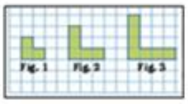
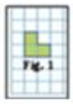
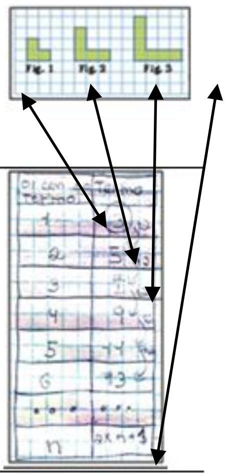
Conversão de representações		**Frequência relativa**	**Congruência “semântica”**		
Código	**Representações**		**GE**	**GM**	**GB**
RV→RT	Visual para Tabela	13%	x	x	
RV→RN	Visual para Numérica	11%		x	
RV→LN	Visual para L. Natural	8%	x	x	
RV→RE	Visual para Esquemática	7%		x	
RN→LN	Numérica para L. Natural	13%	*Não analisado*		
RN→RE	Numérica para Esquemática	7%	*Não analisado*		
RN→RA	Numérica para Algébrica	5%	*Não analisado*		
RN→RV	Numérica para Visual	3%	x	x	
RT→RA	Tabela para Algébrica	7%	*Não analisado*		
RT→RN	Tabela para Numérica	3%	*Não analisado*		
RE→RN	Esquemática para L. Natural	16%	*Não analisado*		
RA→RN	Algébrica para Numérica	7%	*Não analisado*		
TOTAL		**100%**			

Legenda 1: GE = Grau Elevado; GM = Grau Médio; GB = Grau Baixo.

De uma primeira análise, verificou-se que as conversões mais utilizadas partiram de uma representação visual (ponto de partida) e de uma representação numérica (sugerida logo na 2.ª pergunta) para outras representações. Verificaram-se conversões da representação numérica para a representação algébrica. As conversões menos frequentes verificaram-se das representações em tabela, esquemática e algébrica, sendo a menos frequente, a conversão da representação algébrica para numérica. Apenas 3% das conversões se deu de uma representação numérica para uma representação visual.

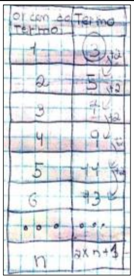
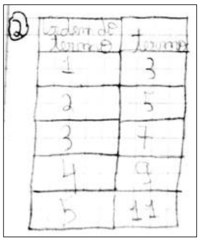
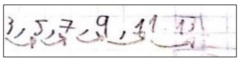
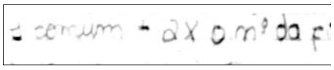
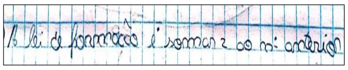
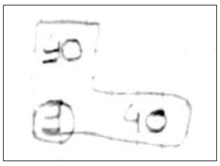
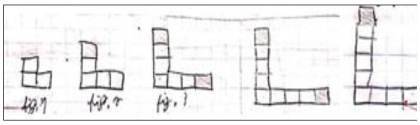
A Tabela 3 justifica a classificação de Grau Elevado na conversão da representação visual fornecida (Representação de partida) para a representação em Tabela (Representação de chegada).

Tabela 3: Congruência semântica (Grau elevado) na conversão de duas representações (visual e em tabela).

		Critérios de congruência "semântica"		
	Representação	**Identificação da unidade elementar**	**Univocidade "semântica" (Exemplo)**	**Organização das unidades**
De partida		Cada uma das figuras		
De chegada		Cada uma das linhas		

Os resultados mostraram que, apesar de o ponto de partida ser uma representação visual, a quase totalidade dos alunos fez imediatamente a conversão para outras representações, nomeadamente para a representação numérica, para a linguagem natural, para a esquemática, e para a representação em tabela, cujos exemplos se encontram na Tabela 4, caracterizadas de acordo com o grau de congruência "semântica" que consideramos evidenciados.

Tabela 4: Grau de congruência "semântica" na conversão das representações que envolvem uma representação visual.

Conversão	Congruência "semântica"	
	Grau Elevado	**Grau Médio**
RV→ RT		
RV→ RN	*Não observável*	
RV→ LN		
RV→ RE	*Não observável*	
RN→ RV		

Discussão e conclusões

Este estudo procurou: (a) identificar as conversões feitas pelos alunos às representações usadas durante a resolução de uma tarefa de exploração de sequências, (b) determinar o grau de congruência "semântica" nas conversões que envolveram uma representação visual. A Teoria de Representação Semiótica de Duval (2009) revelou-se adequada para alcançar aqueles objetivos e apresentar aos professores evidências do pensamento matemático dos alunos baseado nas transformações de representações (Duval, Freitas & Rezende, 2013).

No presente estudo, todos os alunos conseguiram compreender a representação visual fornecida (desenho de figuras geométricas) e utilizaram-na para responder às questões mais simples da tarefa. Todos os alunos utilizaram a conversão desta representação para a linguagem natural para pronunciarem a lei de formação da sequência. Para responder às questões da tarefa mais complexas, os alunos abandonaram a representação visual fornecida e optaram por outras representações. A própria tarefa encaminhou os alunos para uma representação numérica logo na segunda pergunta, o que confirma o predomínio no uso desta representação, já detetado em outros estudos (p.e. em (Barbosa, (2010)) mas também se verificaram conversões espontâneas da representação visual para a representação em tabela, esquemática, linguagem natural e numérica. Verificou-se, em dois grupos, um desempenho adequado e uma utilização correta destas representações que os levou à generalização através da escrita da expressão geradora. No entanto, os restantes grupos, apesar de estarem a trabalhar com os mesmos tipos de representação, não tiveram o mesmo sucesso, tendo mesmo bloqueado em determinada altura do seu trabalho. A Teoria dos Registos de Representação Semiótica refere dificuldades na conversão de representações (Duval & Moretti, 2012), o que verificamos neste caso pois as conversões efetuadas não tiveram um grau elevado de congruência "semântica" o que originou dificuldades e erros. Por exemplo, a representação em tabela utilizada por estes alunos foi insuficientemente compreendida uma vez que se mostraram incapazes de obter a expressão geradora através da relação entre as duas colunas (ordem e termo da sequência). Mas, não menos importante do que a qualidade das conversões, a escolha do tratamento a efetuar a determinada representação, neste caso à representação visual fornecida tornou-se determinante no sucesso da conversão, tendo subvalorizado a falta de destreza no tratamento da representação em tabela. O que demonstra que as representações visuais (desenhos) podem ser muito mais do que simples apoios à explicitação de determinada situação. E daí a necessidade de o professor estar constantemente atento ao modo como os alunos registam e transformam as suas representações, pois não se garante que os alunos sejam capazes de selecionar eficazmente a representação e fazer-lhe o tratamento adequado que lhes possibilite uma conversão com um grau mais elevado de congruência "semântica". Daí a importância de uma investigação acerca do uso de diferentes representações com diferentes graus de congruência e do seu efeito na aprendizagem, num dado conteúdo matemático. O facto de se ter verificado uma ocorrência baixa da conversão de uma representação algébrica para uma representação numérica é indicador de que, neste trabalho de conversão de representações, os alunos não manifestam a competência de um grau elevado de congruência "semiótica", pois apenas se verifica conversão num sentido. Pensamos que o mesmo se deve às dificuldades dos alunos em inverter raciocínios e em registá-los, manifestadas na falta de precisão na sua escrita.

Referências bibliográficas

Altay, M. K., Akyüz, E. Ö., & Erhan, G. K. (2014). A study of middle grade students' performances in mathematical pattern tasks according to their grade level and pattern presentation context. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, *116*, 4542-4546.

Akkan, Y. (2013). Comparison of 6th-8th graders' efficiencies, strategies and representations regarding generalization patterns. [Estudo comparativo da eficácia de estratégias e representações usadas por estudantes da escola básica em problemas relativos à generalização de padrões]. *Bolema*, *27*(47), 703-732.

Barbosa, A. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2.º ciclo do ensino básico*. Tese de Doutoramento. Braga: Universidade do Minho.

Barbosa, A., Vale, I., & Palhares, P. (2012). Pattern tasks: thinking processes used by 6th grade students. *RELIME*, *15*(3), 273-293.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Borralho, A., Cabrita, I., Palhares, P., &Vale, I. (2007). Os padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs), *Números e Álgebra* (pp. 193-211). Lisboa: SEM-SPCE.

Borralho, A., & Barbosa, E. (2009). Exploração de padrões e pensamento algébrico. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.), (2009). *Patterns-Multiple Perspectives and Contexts in Mathematics Education* (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo – Projecto Padrões.

Callejo & Zapatera (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de Educación Secundaria. *Bolema*, Rio Claro (SP), *28*(48), 64-88.

Canavarro, A. P. (2007) O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81-118.

Cohen, L., Manion, L., &, Morrison K. (2007). *Research methods in education*. New York: Routledge.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic Issues forLearning. In *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for thePsychology of Mathematics Education* 21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Duval, R, (2009). *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais* (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física.

Duval, R, (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semióticas*. Organização Tância M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. S. Paulo: PROEM.

Duval, R., & Moretti, T. M. T. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 266-297.

Duval, R., Freitas, J., & Rezende, V. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *2*, 10-34.

Faria, R. (2012). *Resolução de problemas com padrões numéricos*. Tese de mestrado. Braga: Universidade do Minho.

Gillies, R. M. (2003). Structuring cooperative group work in classrooms. *International Journal of Educational Research*, *39*(1), 35-49.

Goldin (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for research in mathematics education*, *38*(3), 258-288.

Lopes, J. B., Silva, A. A., Cravino, J. P., Santos, C. A., Cunha, A., Pinto, A., Silva, A., Viegas, C., Saraiva, E., & Branco, M. J. (2014). Constructing and using multimodal narratives to research in science education: Contributions based on practical classroom. *Research in Science Education*.*44*, 415-438.

ME. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação-DGIDC.

MEC. (2013). *Programas e Metas curriculares de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Merino, E., Cañadas, M. C., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. Edma 0-6: *Educación Matemática en la Infancia*, *2*(1), 24-40.

Moyer-Packenham, P. S. (2005); Using virtual manipulatives to investigate patterns and generate rules in Algebra. *Teaching Children Mathematics,11*(8), 437-444.

NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ross, K. M. (2011). *Fifth graders' Representations and reasoning on constant growth function problems: Connections between problem representations, student work and ability to generalize*. Tese de Doutoramento. University of Arizona.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reformed classrooms. *American educational research journal*, *33*(2), 455-488.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171-185.

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS E SUA TRANSFORMAÇÃO NA APRENDIZAGEM DE MÉTODOS FORMAIS ALGÉBRICOS

Sandra Nobre
Agrupamento de Escolas Professor Paula Nogueira, Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa e Bolseira da FCT
sandraggnobre@gmail.com

Nélia Amado
FCT, Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: Neste artigo apresentamos alguns resultados de uma experiência de ensino com alunos do 9.º ano, no estudo do tópico “Sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas”. Procuramos analisar as representações matemáticas utilizadas e perceber o papel da transformação das representações matemáticas durante a atividade de resolução de problemas na aprendizagem do método de substituição de resolução de sistemas. A análise de dados incide nas produções de uma aluna e nos diálogos que ocorrem durante a resolução de problemas, no estudo do tópico e numa entrevista realizada posteriormente. Verificamos que a atividade de resolução de problemas, tanto no ambiente digital da folha de cálculo, como com papel e lápis, promove o uso de uma diversidade de representações matemáticas bem como a sua transformação permanente, o que leva a aluna à compreensão dos processos formais para a resolução de sistemas bem como a uma utilização mais fluente da linguagem algébrica na resolução dos problemas propostos.
Palavras-chave: Representações matemáticas; Transformação de representações; Resolução de problemas; Método de substituição; Folha de cálculo.

Introdução

A aprendizagem de métodos formais constitui um marco no progresso na aprendizagem da Álgebra. A sua utilização permite aos alunos resolver problemas, levando-os rapidamente à solução e libertando-os de procurar estratégias alternativas. No entanto, a passagem dos métodos informais aos formais não é fácil para a maioria dos alunos. As dificuldades que surgem com a aplicação dos métodos formais podem estar relacionadas com o ritmo a que os tópicos são estudados, bem como à abordagem predominantemente formal com que são apresentados (Herscovics & Lincheviski, 1994). Embora o objetivo seja a aprendizagem dos métodos formais, é importante envolver os alunos em experiências informais antes da manipulação algébrica formal, nomeadamente através da resolução de problemas. Desde modo, na aprendizagem da Álgebra manifestam-se muitas tensões entre uma abordagem informal e a formal, uma vez que o desenvolvimento de procedimentos formais acarreta muitos riscos, apesar de ser uma ferramenta bastante útil, pela sua eficiência.

Interessa então perceber como é que os alunos expressam as suas ideias matemáticas e como evoluem na aprendizagem de métodos formais, num contexto de trabalho baseado na resolução de problemas. Para isso, é essencial olhar para as representações matemáticas, uma vez que a forma como as ideias matemáticas são representadas é fundamental para a forma como são usadas e entendidas (NCTM, 2007). Assim, nesta comunicação analisamos as representações matemáticas utilizadas e tentamos compreender o papel da transformação das representações matemáticas na atividade de resolução de problemas na aprendizagem do método de substituição de resolução de sistemas.

A resolução de problemas na aprendizagem da Álgebra

A resolução de problemas é uma atividade importante no estudo da Álgebra, por facilitar o desenvolvimento de processos algébricos (NCTM, 2007). Koedinger, Alibali e Nathan (2008) indicam que a resolução de problemas ajuda os alunos a utilizar os seus próprios conhecimentos, baseados em operações com números, sem a preocupação de memorizar como manipular os símbolos. Os autores afirmam ainda que os alunos, numa fase inicial, têm melhor desempenho na resolução de problemas do que na resolução de exercícios envolvendo equações.

Windsor (2010) destaca igualmente a resolução de problemas que encara como uma oportunidade para enriquecer e transformar o pensamento dos alunos, permitindo ao professor incentivá-los a pensar algebricamente ao invés de os influenciar simplesmente a recorrer a uma determinada estratégia ou procedimento. Este autor salienta ainda que é através da discussão do processo de resolução que pode ser desenvolvida uma perspetiva algébrica da Matemática. Considera ainda que é fundamental que os alunos reflitam acerca das suas estratégias e partilhem as suas experiências de modo a desenvolverem diferentes formas de entender e abordar os problemas.

Kieran (2006) afirma que, na resolução de problemas verbais algébricos, os alunos preferem frequentemente recorrer a métodos aritméticos, mostrando dificuldade em utilizar equações. Embora à primeira vista o pensamento aritmético possa parecer um obstáculo para o desenvolvimento do pensamento algébrico, ele também pode ser visto como uma via para esse desenvolvimento. Entre os processos aritméticos mais utilizados neste tipo de problemas, destacam-se as estratégias de tentativa e erro e de desfazer (*unwind*). Outra estratégia consiste em atribuir um valor a uma quantidade desconhecida e verificar a sua exatidão, usando um raciocínio funcional, isto é, reconhecendo a relação existente entre as variáveis, mesmo que essa relação não seja expressa através de linguagem algébrica formal (Johanning, 2004).

Os ambientes digitais, como a folha de cálculo, permitem a exploração e resolução de problemas de modo informal. A folha de cálculo acentua a necessidade de identificar todas as variáveis relevantes no problema e, além disso, estimula a procura de relações de dependência entre as variáveis. A definição de relações intermédias entre as diversas variáveis por meio de fórmulas, isto é, a decomposição de uma relação de dependência em relações mais simples é um dos aspetos a salientar nesta ferramenta, com consequências decisivas no processo de resolução de problemas (Carreira, 1992; Haspekian, 2005). O reconhecimento dos elementos envolvidos num problema e o estabelecimento de relações entre eles constitui um passo fundamental para utilizar a Álgebra na resolução de problemas. Como referem Dettori et al. (2001), este processo pode ser facilitado pela folha de cálculo que consideram ajudar os alunos a compreenderem o que significa resolver uma equação mesmo antes da aprendizagem formal. Contribui ainda para a seleção da informação relevante na resolução de um problema e promove as capacidades de generalização, abstração e síntese, fundamentais na Álgebra.

A resolução de problemas na folha de cálculo permite o estabelecimento de relações entre a linguagem neste ambiente digital e a linguagem algébrica, com papel e lápis, e pode ser vista como um meio para preencher a lacuna entre o pensamento algébrico e a capacidade de usar a notação algébrica para expressar tal pensamento, como é descrito em Carreira, Jones, Amado, Jacinto e Nobre (2015).

Representações matemáticas

Sem as representações matemáticas não é possível pensar sobre os objetos matemáticos. Duval (2011) salienta que as representações não se devem confundir com o próprio objeto e aponta que o uso de uma diversidade de representações é necessária para que seja possível aceder ao objeto, uma vez que "elas estão no 'lugar dos' objetos ou os 'evocam', quando esses não são imediatamente acessíveis" (p. 23). Além disso, de servirem para comunicar com os outros acerca de um problema ou de uma ideia, as representações permitem compreender uma propriedade ou um conceito (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987).

Friedlander e Tabach (2001) consideram que a capacidade para trabalhar com várias representações permite eliminar as desvantagens de cada uma, tornando o processo de aprendizagem da Álgebra mais significativo e efetivo. Estes autores defendem a necessidade de propor tarefas que exijam que os alunos recorram a várias representações, estabelecendo relações entre elas e atribuindo-lhes significado. Numa perspetiva semelhante, Tripathi (2008) salienta que a compreensão de um conceito apenas emerge quando este é observado de diferentes perspetivas. Assim, as diferentes representações podem ser entendidas como uma variedade de lentes que permitem uma compreensão mais ampla e profunda de um conceito. A autora frisa que um discurso em torno do uso de múltiplas representações enriquece a cultura de sala de aula e simultaneamente ajuda os alunos a participar ativamente no processo de aprendizagem. Argumenta, ainda, que as representações dos alunos e sua capacidade de transferir ideias de uma representação para outra são indicadores de sua compreensão.

De acordo com Duval (2011), as representações semióticas e a conversão das representações são fundamentais na aquisição do conhecimento matemático, sendo que nenhuma atividade matemática pode ser realizada sem usar um sistema de representação semiótico, porque o processo matemático envolve sempre a substituição de uma representação semiótica por outra. Para este autor, um objeto matemático apenas é identificado a partir de diferentes registos semióticos e devem analisar-se detalhadamente as transformações de registos de representação. Distingue entre tratamentos (transformações dentro de um registo) e conversões (transformações que resultam em uma representação em outro registro), processo que considera fundamental na construção de conhecimento. No entanto, a realização de conversões não é uma atividade simples e imediata para a maioria dos alunos.

Na aprendizagem da Álgebra, o uso de representações mais elementares como representações pictóricas, numéricas e a linguagem é particularmente útil na ajuda à resolução de problemas algébricos simples (Koedinger, Alibali, & Nathan, 2008). Esta prática pode revelar-se facilitadora na transição para um pensamento mais abstrato necessário, por exemplo, para compreender equações (Koedinger & Nathan, 2004).

No processo de aprendizagem é importante incentivar os alunos a representar as suas ideias matemáticas de forma que façam sentido para eles, mesmo que essas representações não sejam convencionais. No entanto, é igualmente importante que os alunos aprendam as formas estabelecidas de representação que servem de base à atividade matemática e à comunicação das ideias matemáticas. A resolução de problemas pode ser um bom veículo para estimular o uso de uma grande diversidade de representações. Além disso, possibilita o estabelecimento de conexões entre diferentes tipos de representação e a passagem de umas representações para outras, ampliando o conhecimento matemático dos alunos (Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987).

De acordo com Hiebert e Carpenter (1992) o uso de representações simbólicas não deve ser exigido aos alunos numa fase inicial. Primeiramente, os alunos devem ser envolvidos em experiências com múltiplas representações para que possam fazer conexões entre elas e os símbolos surjam de forma natural. Estes autores consideram que os alunos que não têm oportunidade de explorar representações para além das simbólicas podem desenvolver uma compreensão incompleta. Apesar daqueles que usam apenas representações simbólicas conseguirem usar os símbolos e regras para encontrar a solução de problemas, uma compreensão mais profunda e completa de um procedimento matemático deve ter por base o conhecimento conceptual apoiado em representações mais intuitivas. Numa perspetiva semelhante, Ponte e Quaresma (2014) consideram que um raciocínio formal com compreensão deve basear-se num raciocínio informal, apoiado em representações intuitivas. Pelo seu lado, Kieran (2013) argumenta que uma técnica não se deve assumir como uma pura manipulação simbólica e que as técnicas não devem ser apenas consideradas no seu aspeto rotineiro, uma vez que desempenham um papel importante na aprendizagem por contribuírem para a compreensão dos objetos a que respeitam e proporcionam uma reflexão acerca dos conceitos.

A aprendizagem do método de substituição de resolução de sistemas de equações implica o conhecimento de vários conceitos, a começar pela noção de equação. Os alunos devem também ter destreza e compreender a manipulação simbólica envolvendo representações algébricas. Outra ideia fundamental na aprendizagem do método é a ideia de substituição. Apesar dos alunos já terem contactado com estas noções e propriedades, não significa que já se tenham apropriado delas. Uma questão importante diz respeito à compreensão do sinal de igual que pode ter ou não o significado de equivalência. Este símbolo surge na Aritmética como um sinal de operação que indica a necessidade de fazer algo. Contudo, quando é usado em equações, significa equivalência entre os dois membros (Kieran, 1981). Para uma interpretação adequada da estrutura de uma equação é necessária uma compreensão da simetria e da transitividade da igualdade. Filloy, Rojano e Solares (2004) indicam que certos alunos resolvem equações com uma incógnita, mas não resolvem problemas com duas incógnitas, manifestando dificuldades na aplicação da transitividade da relação de igualdade, quando se depararam com duas equações como $4x-3=y$ e $6x+7=y$.

Experiência de ensino e metodologia de investigação

Para o estudo do tópico são propostas oito tarefas (tabela 1). As tarefas são de natureza diversa (Ponte, 2005), embora a resolução de problemas assuma o papel central. A tarefa inicial é de diagnóstico tendo em vista obter elementos sobre os conhecimentos dos alunos e assim melhor ajustar a sequência de tarefas a propor. Em determinados momentos, são propostos problemas para resolver na folha de cálculo, como ponto de partida para a aprendizagem formal. Em cada tarefa são promovidos momentos de discussão e de síntese, estabelecendo uma ponte entre este trabalho e o realizado com o simbolismo algébrico, sempre que possível a partir das propostas dos alunos.

Tabela 1: Tarefas e recursos.

Tarefas	A1 Diagnóstico	B1 Adivinhar o dia de aniversário	C1 O peso das 3 irmãs	D1 O valor dos animais	E1 A corrida de cavalos	F1 Coelhos e galinhas	G1 Miscelânea	H1 Tarefa de investigação
Recursos	Papel e lápis	Folha de cálculo	Folha de cálculo	Papel e lápis	Folha de cálculo	Papel e lápis	Papel e lápis	Papel e lápis

No trabalho com papel e lápis, consideramos os seguintes registos de representações: linguagem natural, sistema de notação numérica (SNN), sistema de notação algébrica (SNA), pictóricas e gráficas. Na folha de cálculo consideramos: a linguagem natural, *input* de valores numéricos, geração de sequências numéricas, geração de variáveis-coluna, representações gráficas e formatação condicional (Haspekian, 2005). No ambiente da folha de cálculo usamos também as noções de conversão e de tratamento propostos por Duval (2011).

Atendendo à natureza do estudo, a metodologia adotada é essencialmente qualitativa seguindo um paradigma interpretativo. Esta investigação segue um *design* de experiência de ensino com recurso a um estudo de caso, assumindo a primeira autora o duplo papel de professora da turma e investigadora. Debruçamo-nos sobre o caso de Gabriela, uma aluna com 14 anos, interessada e participativa nas aulas, habitualmente sem dificuldades em Matemática. A aluna tem vindo a utilizar a folha de cálculo para resolver problemas nas aulas de Matemática como relatado em Nobre, Amado e Ponte (2012). Durante essas aulas, o trabalho é, por vezes, realizado em colaboração com uma colega.

Procedemos à recolha das produções da aluna na sala de aula, à captura dos ecrãs dos computadores, à gravação áudio dos diálogos e à observação participante registada em notas de campo. Após o estudo do tópico realizámos uma entrevista clínica (E1) à aluna com o objetivo de obter mais informações sobre a sua aprendizagem. A análise de dados tem por base a análise de conteúdo (Bardin, 1977) a partir das produções da aluna, das transcrições das gravações áudio das aulas, dos registos da sequência de *frames* no Excel e da entrevista.

Resultados

Apresentamos o trabalho de Gabriela em alguns problemas propostos em diferentes momentos do estudo do tópico, que se destacam por darem evidências da evolução da aluna na aprendizagem do método de substituição. Analisamos as representações que utiliza, bem como a forma como as coordena, ou seja, as transformações que efetua.

Problema "Adivinhar o dia de aniversário"

A Sofia gosta muito de colocar desafios aos colegas. Logo na primeira aula de Matemática, apresentou a seguinte proposta:

- Para descobrires o meu dia de aniversário basta multiplicares o dia do meu nascimento por 12 e o mês por 30 e adicionares os dois valores obtidos. Se o resultado for 582 é esse o dia e o mês do meu aniversário!

Consegues descobrir o dia do aniversário da Sofia?

Figura 1: Enunciado do problema (Tarefa B1).

Na resolução do problema (figura 1), no início do estudo do tópico, Gabriela e a colega convertem a informação do enunciado para a folha de cálculo. As alunas recorrem às funcionalidades desta ferramenta, organizam os dados em colunas, geram sequências numéricas e variáveis-coluna para o estabelecimento de relações (figura 2). Nomeiam a coluna C como "dia do nascimento" e constroem uma coluna de números entre 1 e 31, por arrastamento. Na coluna D apresentam o produto dos valores da coluna C por 12, conforme a condição do enunciado. Seguidamente, iniciam um processo para determinar o produto dos diferentes meses por 30 e as respetivas somas com o valor obtido na coluna D. As alunas conseguem expressar relações intermédias, efetuando os cálculos para cada um dos meses separadamente e procurando na coluna da soma o valor 582. Contudo, a determinado momento param por sentirem insegurança relativamente à eficácia do procedimento escolhido para a resolução do problema e aguardam pela discussão na turma.

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	12	1	30	42		2	60	72
2	24	1	30	54		2	60	84
3	36	1	30	66		2	60	96
4	48	1	30	78		2	60	108
5	60	1	30	90		2	60	120

C	D	E	F	G	H	I	J	K
dia do nascimento		mês do meu nascimento/Janeiro		Soma		Fevereiro		Soma
1	=1*12	1	=1*30	=D3+F3		2	60	=60+D3
2	=2*12	1	=1*30	=F4+D4		2	60	=J4+D4
3	=3*12	1	=1*30	=F5+D5		2	60	=J5+D5

Figura 2: Produção de Gabriela.

Na discussão surge a ideia de construir uma tabela de dupla entrada e a fórmula para obter o valor pretendido:

Professora: Será que nós aqui conseguíamos escrever uma relação entre o 582 e o dia e o mês de aniversário?

Carolina: Então é a fórmula! [da folha de cálculo]
[…]
Professora: Então, vamos lá ver… Vamos supor assim… Vamos pensar que o dia em que ela faz anos é d e que m é o mês [escreve a legenda no quadro]
Tatiana: Então é dia vezes 12… E mês vezes 30.
Carolina: Mais.
Professora: Está aqui a Carolina a acrescentar "mais".
Tatiana: Mês vezes 30.
Professora: E depois?
Alguns alunos: Igual a 582.
Professora: Olhem lá, isto [a expressão algébrica] que nós temos aqui, isto é o quê?
Tatiana: É a fórmula.
Maria Inês: É aquela função… Expressão...
Professora: Pode ser considerada a expressão analítica… É a condição que traduz o enunciado do problema. E esta condição tem quantas soluções?
Filipe: 3.

A discussão permite concluir a existência de três datas possíveis para o aniversário de Ana, sendo impossível determinar o dia certo. A discussão incentiva os alunos à escrita da relação entre o dia e o mês, $12d + 30m = 582$, agora no SNA. Por fim, é feita a verificação das soluções encontradas.

Na resolução deste problema as transformações das representações utilizadas pela aluna estão esquematizadas na figura 3.

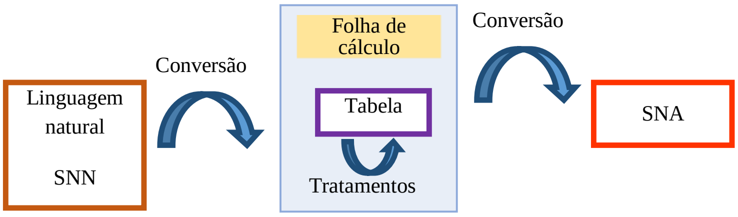


Figura 3: Atividade de Gabriela nas transformações das representações.

Gabriela converte a informação do enunciado para a folha de cálculo, onde efetua tratamentos para gerar sequências numéricas e variáveis-coluna. Apesar de não ter concluído a sua resolução e não ter tido intervenções, a aluna assistiu com atenção à discussão e síntese onde foi feita a conversão para o SNA, levando à escrita da equação com duas variáveis.

Na aula seguinte foi proposta a resolução de outro problema na folha de cálculo que inclui o trabalho com várias condições e o estabelecimento de relações entre diferentes variáveis. Da discussão e síntese surge a escrita das condições do problema na forma de sistema de equações e a formalização do termo “sistema de equações”.

Problema “O valor dos animais”

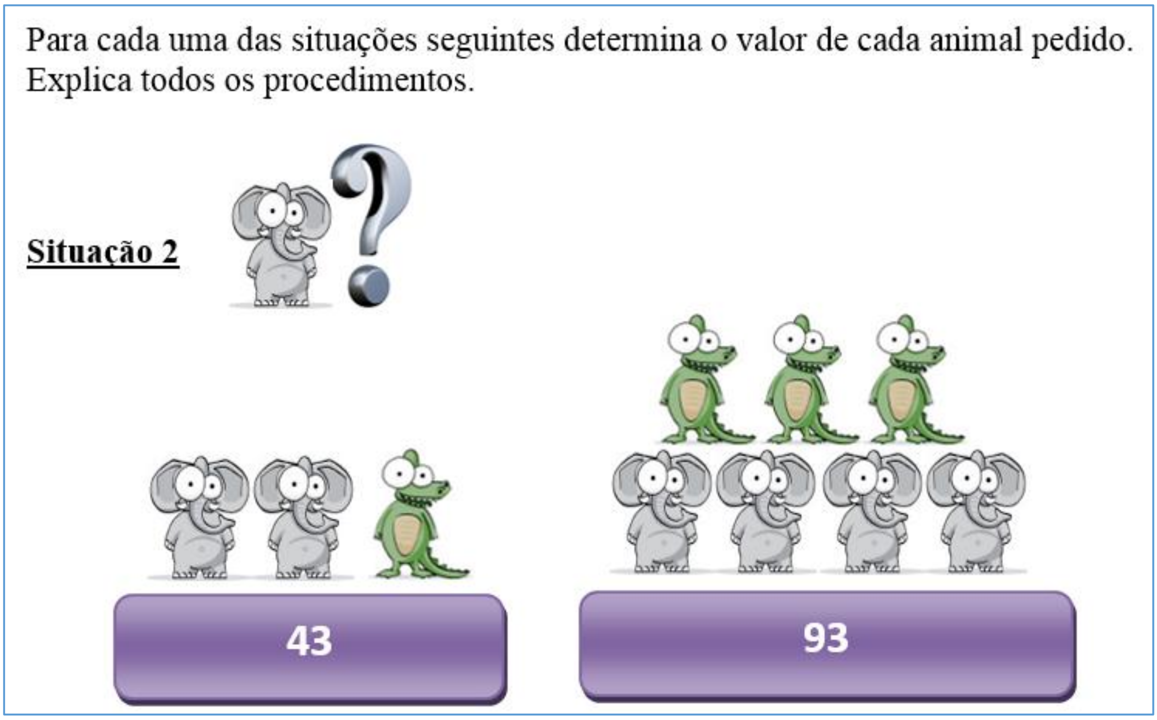
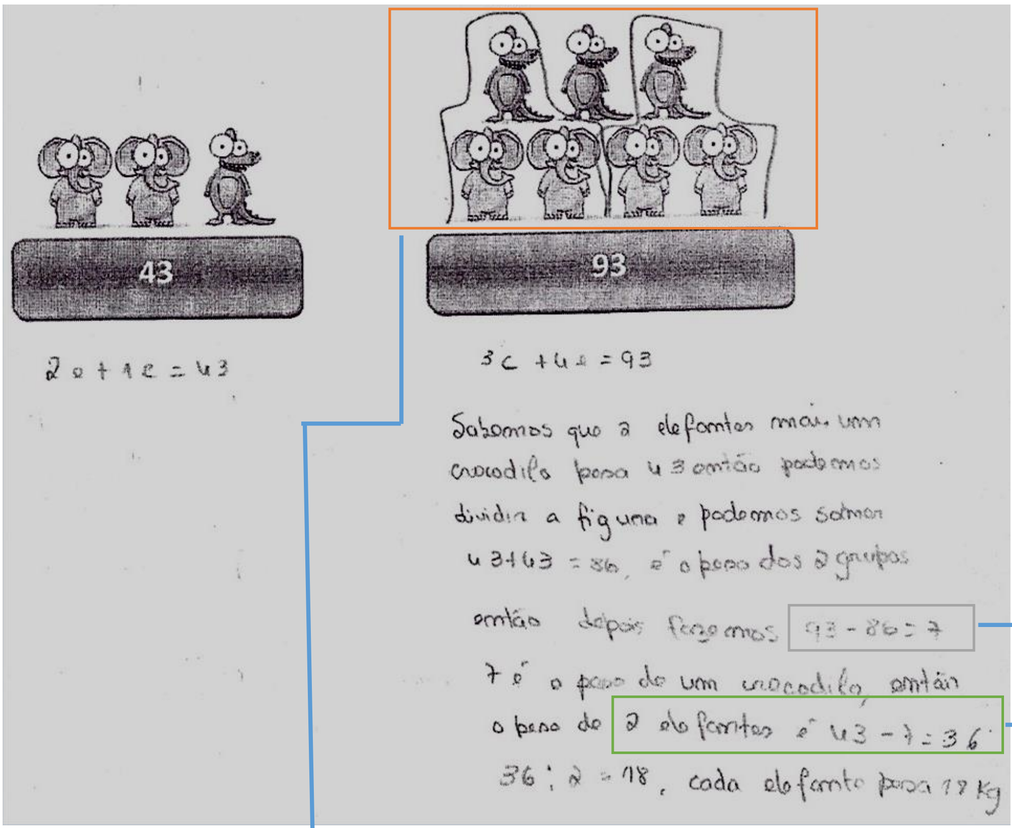


Figura 4: Enunciado do problema (Tarefa D1).

Neste problema são propostas quatro situações com nível crescente de complexidade. Na segunda situação (figura 4), Gabriela recorre a diversas representações: em linguagem natural, no SNA e no SNN. A aluna enceta a resolução com a escrita de equações (SNA) que representam as relações apresentadas em cada figura, no entanto, não chega a usar essas representações. Quando questionada (E1), diz:

> **Gabriela**: Pois, eu ainda não sabia o que estava a fazer…

Gabriela procede depois à delimitação dos grupos de animais. Neste procedimento, utiliza a informação de uma das imagens e forma conjuntos na outra, o que lhe permite descobrir, através de tratamentos no SNN, o valor de uma das incógnitas, para depois obter a solução (figura 5). Este processo evidencia claramente a ideia de substituição, fundamental na resolução de sistemas de equações. Apesar de a aluna recorrer apenas a representações no SNN para resolver o problema e não utilizar um método formal, os seus procedimentos, suportados por tratamentos no SNN, são análogos à utilização do método de substituição (figura 5).



$$\begin{cases} 2e + c = 43 \\ 3c + 4e = 93 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e + c = 43 \\ \boxed{43 + 43 + c = 93} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e + c = 43 \\ \boxed{c = 93 - 86} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e + c = 43 \\ c = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{2e = 43 - 7} \\ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 36:2 \\ c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = 18 \\ c = 7 \end{cases}$$

Figura 5: Correspondência ente a resolução de Gabriela e o método de substituição.

Quando questionada na entrevista (E1) acerca desta tarefa, Gabriela refere:

> Gabriela: Neste aqui [problema 2] foi por conjuntos…
> […]
> Professora: O que é que aprendeste com esta tarefa?
> Gabriela: A partir daí aprendi sistemas de equações que foi… Que vão ser importantes na resolução de exercícios… De resto, acho que não aprendi mais nada… Porque eu com a forma como fiz é uma forma mais antiga de resolução…

Este excerto evidencia a importância dos problemas para Gabriela iniciar a resolução de sistemas de equações pelo método formal de substituição. Como a aluna refere "A partir daí aprendi sistemas de equações" não propriamente pelo seu método de resolução ser "uma forma mais antiga de resolução", um método que não é formal, mas certamente pela discussão que foi promovida e pelas ideias que foram partilhadas por outros colegas de turma. Na resolução deste problema as transformações das representações utilizadas pela aluna podem ser esquematizadas como mostra a figura 6.

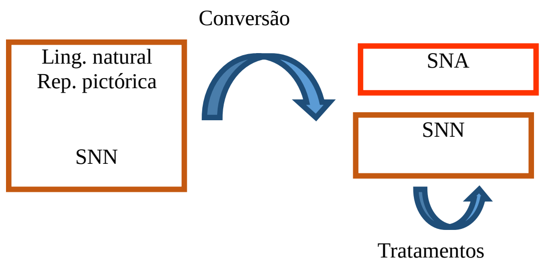


Figura 6: Atividade de Gabriela nas transformações das representações.

Gabriela converte a informação do enunciado para o SNA. Embora não utilize esta transformação para resolver o problema, ela é importante na medida em que é uma conversão essencial para a resolução de problemas através do método de substituição.

A aluna recorre a tratamentos no SNN para a resolução do problema. As operações inversas no SNN, na realidade correspondem aos procedimentos formais do método de substituição.

Problema "Galinhas e coelhos"

Numa quinta há galinhas e coelhos. Ao todo são 212 cabeças e 700 patas.

Quantas galinhas e quantos coelhos existem na quinta?

Figura 7: Enunciado do problema *"Galinhas e coelhos"* (Tarefa F1).

O problema (figura 7) é proposto para explorar na folha de cálculo. Gabriela começa por escolher a variável independente (número de coelhos) e estabelece, em seguida, as relações entre essa variável e as restantes. A variável dependente "Soma das patas" serve como dispositivo de regulação para encontrar a solução (figura 8).

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	4	422	426
2	210	212	8	420	428
3	209	212	12	418	430
4	208	212	16	416	432
5	207	212	20	414	434
6	206	212	24	412	436
136	76	212	544	152	696
137	75	212	548	150	698
138	74	212	552	148	700
139	73	212	556	146	702
140	72	212	560	144	704

Coelhos	Galinhas	Soma das Cabeças	Coelhos	Galinhas	Soma das patas
1	211	212	=F4*4	=G4*2	=L4+K4
2	210	212	=F5*4	=G5*2	=L5+K5
3	209	212	=F6*4	=G6*2	=L6+K6
4	208	212	=F7*4	=G7*2	=L7+K7
5	207	212	=F8*4	=G8*2	=L8+K8
6	206	212	=F9*4	=G9*2	=L9+K9
136	76	212	=F139*4	=G139*2	=L139+K139
137	75	212	=F140*4	=G140*2	=L140+K140
138	74	212	=F141*4	=G141*2	=L141+K141
139	73	212	=F142*4	=G142*2	=L142+K142
140	72	212	=F143*4	=G143*2	=L143+K143

Figura 8: Produção de Gabriela.

Na discussão da tarefa, com o auxílio da professora, é feita a tradução algébrica do trabalho na folha de cálculo para papel e lápis, através do questionamento aos alunos. Nesta fase, o objetivo é estabelecer a relação entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o método de substituição de resolução de sistemas (figura 9).

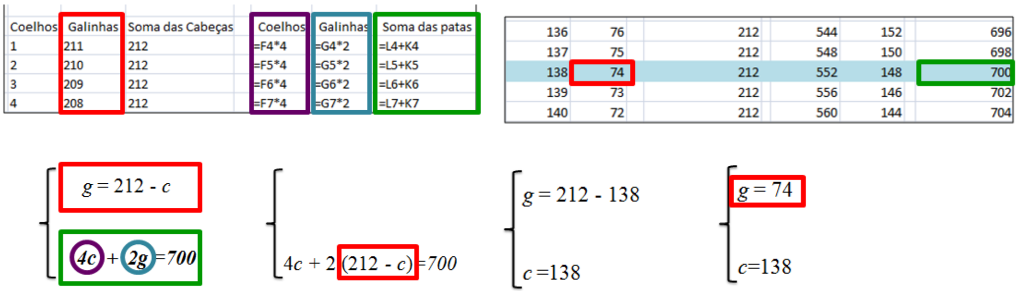


Figura 9: Correspondência entre a resolução de Gabriela e o método de substituição.

A primeira coluna, nomeada “Coelhos”, é a variável independente e a segunda coluna, “Galinhas”, é uma variável dependente. Gabriela constrói a segunda coluna através de uma sequência numérica com incremento fixo (-1). No trabalho com papel e lápis, a letra g designa o número de galinhas e a c de coelhos, $g = 212 - c$. A quarta coluna “Coelhos” (corresponde ao número de patas dos coelhos) e a quinta “Galinhas” (corresponde ao número de patas das galinhas) surgem como dependentes das duas primeiras, respetivamente. A sexta coluna (correspondente ao total de patas dos animais) surge como outra relação de dependência das duas anteriores. A esta última coluna cabe o papel de dispositivo de regulação para a procura da solução, ou seja, no trabalho com papel e lápis procuramos valores de g e c, onde c representa o número de coelhos, tais que $4c + 2g = 700$. Obtemos assim as duas equações que constituem o sistema. Através do arrastamento, a folha de cálculo efetua automaticamente os cálculos que correspondem à substituição dos valores correspondentes em cada célula de acordo com a fórmula inserida, levando assim à solução. Este trabalho de conversão da folha de cálculo para o SNA é fundamental para que os alunos se apropriem do significado de cada coluna construída na folha de cálculo e tenham oportunidade de compreender a correspondência que existe entre os procedimentos habituais na folha de cálculo e o método de substituição na resolução de sistemas de equações.

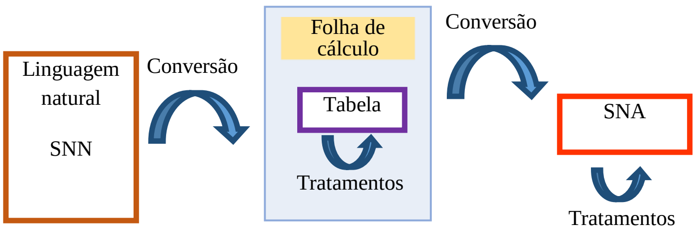


Figura 10: Atividade de Gabriela nas transformações das representações.

A atividade de Gabriela está esquematizada na figura 10. Neste problema a professora considera oportuno o estabelecimento da relação entre os dois ambientes e assim formaliza os procedimentos (tratamentos no SNA) do método de substituição.

Noutra aula é proposta a tarefa G1 que envolve a resolução de problemas e exercícios pelos métodos estudados, a escrita de sistemas na forma canónica, a verificação de soluções de um sistema, a classificação de sistemas sem efetuar cálculos e ainda a escrita do enunciado de um problema. Na resolução desta tarefa, Gabriela apenas utiliza representações no SNN para verificar soluções através de cálculos por substituição. Nas restantes situações, recorre a representações no SNA conjugadas com a linguagem natural para responder às questões e para explicar os seus procedimentos. Reconhece a importância da realização desta tarefa na entrevista (E1) "foi muito importante professora, porque quando eu comecei a resolver esta ficha eu não conseguia resolver sistemas com fluência…". Questionada acerca do significado que atribui à palavra fluência, explica: "é saber resolver. Sabe, assim rápido, sem pensar e demorar muito tempo".

Na entrevista (E1) foram propostas algumas tarefas. A figura 11 ilustra a resolução de um problema onde Gabriela identifica as incógnitas, traduz o enunciado para o SNA, através de um sistema de duas equações e resolve-o pelo método de substituição (tratamentos no SNA). Verificamos que a aluna consegue fazer manipulações formais na resolução do sistema de equações, que articula com os significados que atribui às variáveis e expressões.

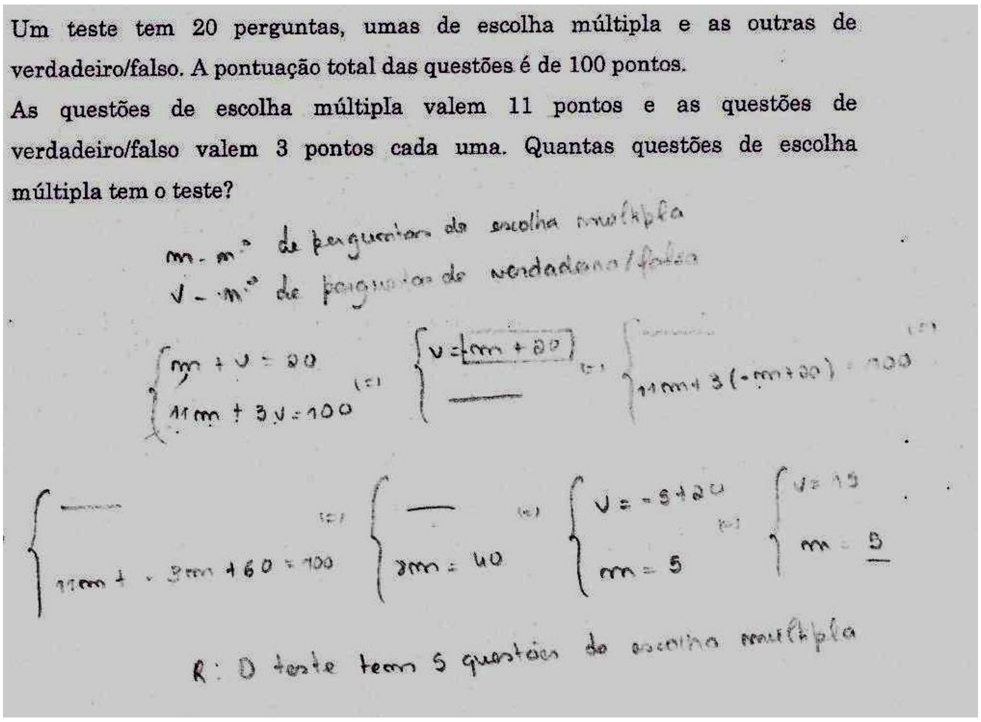


Figura 11: Produção de Gabriela, E1-P1.

Na esquematização da atividade de Gabriela (figura 12) verificamos que após o estudo do tópico, a aluna efetua uma conversão direta do enunciado para o SNA seguida de tratamentos neste sistema de notação, neste caso decorrente da utilização do método de substituição.

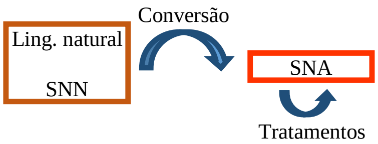


Figura 12: Atividade de Gabriela nas transformações das representações.

Gabriela explica a sua resolução afirmando: "Quando eu li o enunciado achei que como tínhamos duas incógnitas e como elas se relacionavam entre si de duas formas podia obter duas equações e a partir daí fazer um sistema". Neste excerto, evidencia reconhecer situações em que pode utilizar um sistema de equações para resolver um problema.

No final da entrevista, questionada acerca da utilidade do estudo de sistemas de equações, a aluna hesita, pensa um pouco e responde:

> Para que é que isto serve?… Para quando temos… Eu acho que isto na vida não me é muito útil… Eu não percebo a utilidade no dia-a-dia mas, por exemplo, para resolver problemas de Matemática, quando temos duas igualdades com duas incógnitas e precisamos de saber o valor das incógnitas talvez os sistemas sejam interessantes para ajudar a resolver… Mas para o dia-a-dia não vejo onde podemos utilizar.

Mesmo sem compreender a utilidade do estudo deste tópico, Gabriela mostra perceber que perante situações com determinadas condições é útil recorrer a um sistema de equações para resolver problemas.

Contudo e apesar das evidências de que Gabriela sabe utilizar o método de substituição na resolução de sistemas, a aluna ainda não se mostra completamente segura na sua utilização para a resolução de problemas, conforme admite:

> A técnica do erro… Mesmo demorando mais tempo a chegar ao resultado, eu vou ter a certeza que está certa. Por exemplo, se for um problema, eu posso fazer tentativa e erro … Mas posso utilizar um sistema de equações… Mas não sei se o sistema está bem ou não está e se me vai dar o valor certo. Então, se eu fizer com tentativa e erro dá sempre certo, porque bate com as condições todas do problema…

A aluna encontra, em alternativa, à utilização de um sistema de equações, segurança no método de tentativa e erro.

Conclusões

Ao longo do estudo do tópico Gabriela tem a oportunidade de contactar com uma variedade de representações fundamentais para a aprendizagem como defendem Dufour-Janvier, Bednarz e Belanger (1987), Friedlander e Tabach (2001), e Tripathi (2008). Inicialmente, a aluna começa por resolver um problema na folha de cálculo que a incentiva ao estabelecimento de relações entre duas variáveis. Apenas consegue construir parte das relações intermédias e não chega a completar a sua resolução. No entanto, assiste atentamente à discussão onde observa outras resoluções e os alunos são conduzidos à escrita da respetiva equação, tópico onde muitos deles manifestam dificuldades (Kieran, 1981). Posteriormente são formalizados a escrita e o conceito de sistema de equações.

Na resolução de outro problema, no ambiente de papel e lápis, Gabriela recorre a tratamentos no SNN onde predomina a ideia de substituição. Apesar de a sua resolução assentar no uso do SNN, estabelece as relações e efetua os cálculos necessários para obter a solução, o que vem ao encontro das ideias de Kieran (2006) no que respeita às representações no SNN selecionadas pelos alunos.

Na discussão de outro problema, resolvido com a folha de cálculo, é estabelecida a ponte entre o trabalho com esta ferramenta e o trabalho com papel e lápis sendo formalizado o método de substituição. Este problema constitui uma oportunidade para os alunos converterem para o SNA as relações estabelecidas na folha de cálculo, bem como a relação entre os procedimentos neste ambiente e o método formal de substituição. Nesta fase inicial, as conversões para o SNA são assim apoiadas pela folha de cálculo. Este ambiente é propício à realização de experiências informais antes da aprendizagem formal (Dettori et al., 2001; Haspekian, 2005) e, por outro lado, permite o estabelecimento de relações entre esta linguagem digital e a linguagem no SNA (Carreira, Jones, Amado, Jacinto & Nobre, 2015).

Tal como refere Duval (2011) a conversão é uma transformação que não é imediata para os alunos. Devido às dificuldades inerentes ao trabalho no SNA, as conversões para este sistema de notação tornam-se menos apelativas. Contudo consideramos que a resolução de problemas com recurso à folha de cálculo, a par do SNN e/ou representações pictóricas, associada às discussões em sala de aula, é uma atividade que incentiva Gabriela na transição para um pensamento mais abstrato (Koedinger & Nathan, 2004) e a desenvolver uma perspetiva algébrica das resoluções (Windsor, 2010).

No final do estudo do tópico, através da resolução de vários problemas e exercícios, Gabriela vai ganhando fluência no uso do método. Por fim, na entrevista, ao ler um enunciado, a aluna avalia-o e, se este tem duas condições, converte-o diretamente para o SNA. Através de tratamentos neste sistema de notação, utiliza o método de substituição para resolver o problema. No entanto, no final do estudo a aluna ainda demonstra alguma insegurança no uso do método, talvez por ser uma aprendizagem recente, mostrando maior confiança no uso da estratégia alternativa de tentativa e erro (Johanning, 2004).

Quanto aos tratamentos, numa fase inicial, Gabriela apenas recorre a tratamentos no SNN, mas ao longo do processo de aprendizagem do método de substituição começa cada vez mais a fazer tratamentos no SNA em detrimento dos tratamentos no SNN. Os tratamentos no SNA, decorrentes da utilização do método de substituição são importantes, pois permitem aos alunos uma compreensão dos conceitos e ideias envolvidos nesses procedimentos (Kieran, 2013).

Assim, constatamos que a resolução de problemas constituiu um contexto de trabalho que incentiva Gabriela a fazer transformações de representações, tanto conversões como tratamentos, essenciais na construção do conhecimento (Duval, 2011; Kieran, 2013). Neste caso, a resolução de problemas foi decisiva para a aprendizagem do método formal de substituição para a resolução de sistemas.

Referências bibliográficas

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Carreira, S. (1992). *A aprendizagem da trigonometria num contexto de aplicações e modelação com recurso à folha de cálculo* (Tese de Mestrado). Lisboa: APM.

Carreira, S., Jones, K., Amado, N., Jacinto, H., & Nobre, S. (2015). *Youngsters solving mathematical problems with technology: The results and implications of the Problem@Web Project*. New York, NY. Springer.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma*: *Entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas*. São Paulo: PROEM.

Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland et al. (Eds), *Perspectives on school algebra* (pp. 191-208). Dordrecht: Kluwer.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Filloy, E., Rojano, T., & Solares, A. (2004). Arithmetic/algebraic problem solving and the representation of two unknown quantities. In M. Johnsen Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of PME 28* (Vol. 2, pp. 391-398). Bergen University College.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A.A. Cuoco & F.R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Hiebert, J., & Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York, NY: Macmillan.

Johanning, D. (2004). Supporting the development of algebraic thinking in middle school: a closer look at students' informal strategies. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 371-388.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 317-326.

Kieran, C. (2006) Research on the learning and teaching of algebra. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 11-50). Roterdham: Sense.

Kieran, C. (2013). The false dichotomy in mathematics education between conceptual understanding and procedural skills: An example from algebra. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions in mathematics educations research* (pp. 153-171). New York, NY: Springer.

Koedinger, K.R., Alibali, M.W., & Nathan, M.J. (2008). Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving. *Cognitive Science*, *32*, 366-397.

Koedinger, K.R., & Nathan, M.J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representation on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences*, *13*, 129-164.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nobre, S., Amado, N., & Carreira, S. (2012). Solving a contextual problem with the spreadsheet as an environment for algebraic thinking development. *Teaching Mathematics and its Applications*, *31*, 11-19.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2014). Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória. *BOLEMA*, *28*(50), 1464-1484.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

Windsor, W., (2010). Algebraic thinking: A problem solving approach. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.). *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd MERGA Conference* (pp. 665-672). Fremantle, WA: MERGA.

RACIOCÍNIO QUANTITATIVO ADITIVO DE ALUNOS DE 2.º ANO: A IMPORTÂNCIA DAS REPRESENTAÇÕES

Margarida Rodrigues
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
margaridar@eselx.ipl.pt

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo: Neste artigo, pretendemos identificar tipos de representação usados pelos alunos na resolução de duas tarefas que apresentam problemas de transformação, e através da sua análise, discutir o seu papel bem como alguns dos aspetos do raciocínio quantitativo aditivo dos alunos. Começando por discutir o que se entende por raciocínio quantitativo aditivo e por representação matemática, apresentamos depois alguns resultados empíricos no contexto de uma experiência de ensino desenvolvida numa escola pública. Os resultados evidenciam a complexidade inerente ao raciocínio inversivo presente nas duas situações propostas aos alunos. A maioria dos alunos utiliza preferencialmente a representação simbólica, recorrendo também à linguagem oral e escrita como forma de exprimir o significado atribuído às suas resoluções. A representação icónica foi usada apenas por um par de alunos, parecendo ter sido utilizada numa situação inicial de incompreensão do problema, e após registos simbólicos iniciais apagados pelos alunos em causa. O uso da linha numérica vazia e a disposição tabelar constituíram modelos de pensar auxiliando a lidar com a transformação inversa. As representações assumiram um duplo papel, o de serem meios de compreensão do raciocínio dos alunos, e também suportes do desenvolvimento do seu pensamento matemático.

Palavras-chave: representações matemáticas, problemas de transformação, raciocínio quantitativo aditivo, aprendizagem matemática.

Introdução

Esta comunicação insere-se no Projeto *Pensamento numérico e cálculo flexível: Aspetos críticos* que está a ser desenvolvido por docentes das Escolas Superiores de Educação de Lisboa, Setúbal e Portalegre. Tem como objetivo identificar tipos de representação matemática usados pelos alunos e analisar o seu papel, nomeadamente na compreensão de alguns aspetos do raciocínio quantitativo aditivo de alunos de 2.º ano, evidenciado na resolução de duas tarefas, concebidas com o propósito de desenvolver esse tipo de raciocínio, que apresentam problemas de transformação inseridos nas classes de procura do estado inicial (Vergnaud, 2009). Foram propostas na mesma aula de Matemática e constituíram as últimas tarefas de uma sequência de seis tarefas que foi aplicada no contexto de uma experiência de ensino desenvolvida numa escola pública de Lisboa.

O raciocínio quantitativo no âmbito da estrutura aditiva foca-se sobretudo nas relações entre quantidades (Thompson, 1993). As representações estão interligadas ao raciocínio dada a relevância do seu papel na compreensão do raciocínio dos alunos (NCTM, 2007). Por outro lado, as representações também assumem um papel importante na aprendizagem dos alunos, constituindo meios cognitivos com que os mesmos desenvolvem o seu pensamento matemático (Gravemeijer, 2004; NCTM, 2007; Ponte & Serrazina, 2000). Assim, a análise de dados empíricos incidente nas representações visa apoiar a discussão das inferências que fazemos do raciocínio dos alunos mas também o seu papel no desenvolvimento pelos alunos desse mesmo raciocínio.

Raciocínio quantitativo aditivo

Enfatizando a distinção entre quantidade e número, Thompson (1993) define o raciocínio quantitativo como a análise de uma situação numa estrutura quantitativa, envolvendo as relações entre quantidades. Segundo o autor, uma quantidade é compreendida pelo indivíduo concebendo uma qualidade de um objeto de tal modo a compreender a possibilidade de a medir, mesmo na ausência de valores numéricos resultantes dessa medição. O autor clarifica, ainda, a noção de estrutura quantitativa enquanto uma rede de quantidades e de relações quantitativas.

Focando as operações quantitativas da estrutura aditiva, Thompson (1993) refere a comparação aditiva de duas quantidades para encontrar o excesso de uma em relação à outra, sendo que o resultado dessa operação constitui a diferença quantitativa, isto é, o excesso obtido. Trata-se de operações conceptuais intimamente ligadas ao raciocínio ancorado no significado (Thompson & Saldanha, 2003).

Esta perspetiva enquadra-se na investigação desenvolvida por outros educadores matemáticos, entre os quais se inclui Vergnaud (2011, 2009, 1996) que, no âmbito da sua teoria dos campos conceptuais, enquanto conjuntos de situações e de conceitos, apresenta uma categorização de relações aditivas bastante diversas e com diferentes graus de dificuldade: (i) composição; (ii) transformação; (iii) relação; (iv) composição de duas transformações; (v) transformação de uma relação; e (vi) composição de duas relações. De acordo com Vergnaud (1996), a partir destas seis relações é possível criar todos os problemas envolvendo a adição e a subtração da aritmética comum. No que respeita à relação de transformação de uma quantidade inicial, que envolve a dimensão temporal (presente nas situações de ganho ou perda de dinheiro, de berlindes, gasto de dinheiro em compras, etc.), podem ser criadas seis classes de problemas, visando encontrar: (i) o estado final, aumentando a quantidade inicial; (ii) o estado final, diminuindo a quantidade inicial; (iii) a transformação, quando o estado final é maior do que o inicial; (iv) a transformação, quando o estado final é menor do que o inicial; (v) o estado inicial, aumentando o estado final; e (vi) o estado inicial, diminuindo o estado final (Vergnaud, 2009).

Segundo Vergnaud (2011), a procura de um estado inicial é uma situação delicada para muitas crianças até aos 8 anos de idade por implicar uma transformação inversa. Nunes, Bryant, Evans, Bell e Barros (2012) distinguem entre cálculo numérico e cálculo relacional. Consideram como Vergnaud (2009) que cálculo relacional significa a transformação e composição de relações dadas numa situação. Por exemplo, as duas situações exigem o mesmo cálculo numérico (24-6) e só a segunda exige efetivamente um cálculo relacional: "Tinha 24 euros, gastei 6. Quantos euros tenho agora?" e "A minha avó deu-me 6 euros e eu fiquei com 24 euros". Quantos euros tinha eu antes?". A primeira situação corresponde a "retirar" e normalmente exige pouco ou nenhum cálculo relacional. A segunda corresponde a um raciocínio aditivo e para os alunos a perceberem como um problema de subtração, têm de pensar na transformação que teve lugar (a minha avó deu-me 6 €) e considerar qual a transformação que repõe a quantidade de dinheiro no estado inicial, isto é, a transformação inversa. Nunes et al. (2012) consideram que a relação inversa entre adição e subtração é um aspeto importante quer do cálculo numérico quer do relacional. Também Greer (2012) sublinha a importância central da inversão na aritmética dos números naturais e das quatro operações básicas envolvendo estes números.

Representações matemáticas

Em sentido amplo, uma representação é uma configuração que pode representar alguma coisa de alguma forma (Goldin, 2008). O termo "representação" refere-se tanto ao processo de representar como ao resultado desse processo. Em educação matemática, as representações são ferramentas privilegiadas para os alunos exprimirem as suas ideias matemáticas, funcionando ainda como auxiliares na construção de novos conhecimentos (NCTM, 2007). Contudo, uma representação matemática não pode ser compreendida ou interpretada isoladamente, pois apenas faz sentido enquanto parte integrante de um sistema mais abrangente e estruturado no qual diferentes representações estão relacionadas (Goldin & Shteingold, 2001).

De acordo com Stylianou (2010), a forma como as representações são usadas na sala de aula tem impacto na aprendizagem dos alunos e isso depende em grande medida do papel do professor. Esta ideia é reforçada por Ponte e Serrazina (2000) quando afirmam que o modo como as ideias matemáticas são representadas influencia de maneira profunda a forma como elas são compreendidas e usadas. Por exemplo, segundo Vergnaud (2009), a transformação inversa pode ser representada por duas representações simbólicas -- a algébrica (Se $T(I)=F$ então $I=T^{-1}(F)$[6]) e o diagrama de setas -- considerando, no entanto,

[6] T - Transformação; I - Estado Inicial; F - Estado Final; T^{-1} - Transformação Inversa.

que enquanto a representação algébrica não é adequada para crianças do ensino elementar, o uso pelo professor da representação do diagrama pode ajudar os alunos a ligar, de imediato, os diferentes componentes da relação, nomeadamente a transformação direta e a transformação inversa, e a conferir significado ao movimento temporal de ir para a frente e para trás. A Figura 1 apresenta um diagrama de setas representativo de subtrair 7 ao estado final na situação "João acabou de ganhar 7 berlindes ao jogar com a Maria; agora ele tem 11 berlindes; quantos berlindes ele tinha antes de começar a jogar?" (Vergnaud, 2009, pp. 86-87). No entanto, apesar de reconhecer a importância desta representação, o autor refere que a compreensão de que +7 e -7 são inversos um do outro passa pela exploração de diversos exemplos de situações deste tipo que permita a consciência da reciprocidade das transformações.

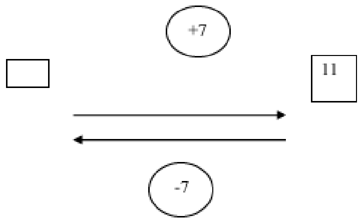


Figura 1: Diagrama de setas (Vergnaud, 2009, p. 87).

Para Ponte e Serrazina (2000), as principais formas de representação usadas no 1.º ciclo do ensino básico são: (i) a *linguagem oral e escrita*; (ii) *representações simbólicas*, como os algarismos ou os sinais das quatro operações e o sinal de igual; (iii) *representações icónicas*, como figuras, gráficos ou diagramas; e (iv) *representações ativas*, como os materiais manipuláveis ou outros objetos. É através da análise das representações usadas pelos alunos que o professor se pode aperceber do raciocínio dos alunos e ajudá-los na construção das representações próprias da linguagem matemática.

Gravemeijer (2004) sustenta que o professor deve ajudar os alunos a modelar a sua atividade matemática informal e que os modelos usados pelos alunos devem evoluir de *modelos de pensar* para *modelos para pensar*, possibilitando um raciocínio matemático mais formal. Na sua perspetiva, modelos são representações usadas para resolver problemas ou explorar relações. Enquanto o modelo de pensar constitui a representação das ações das crianças, apresentando elementos contextuais da situação, o modelo para pensar é um modelo generalizado de estratégias focado nas relações matemáticas. A linha numérica vazia é um exemplo de um modelo para pensar, na medida em que pode funcionar como um modelo para um raciocínio matemático mais sofisticado em que os números deixam de estar ligados a itens específicos contáveis ou a distâncias identificáveis para passarem a ser vistos como objetos matemáticos cujo significado deriva do seu lugar numa rede de relações numéricas. Por exemplo, os alunos podem usar diferentes representações na resolução do seguinte problema: "Um autocarro parte de uma paragem com 2 pessoas. Na paragem seguinte entram 3, na seguinte 2, depois quatro e na última sai uma. Quantas pessoas continuam a viagem no autocarro?" (Figura 2). Enquanto a primeira imagem é um exemplo de um modelo de pensar, representando a situação concreta, a terceira imagem é um exemplo de modelo para pensar, na medida em que a linha numérica constitui um modelo generalizado de estratégias, independentemente da situação concreta de saídas e entradas de pessoas num autocarro, prevalecendo as relações numéricas.

Confrontando a classificação de representações proposta por Ponte e Serrazina (2000) e a proposta por Gravemeijer (2004), poderemos considerar que um modelo de pensar pode ser uma representação ativa (se envolver a manipulação de objetos) ou icónica (como exemplificado na primeira imagem da Figura 2), usando a terminologia de Ponte e Serrazina (2000). Quanto ao modelo para pensar, exemplificado pela linha numérica, consideramos tratar-se de uma representação simbólica.

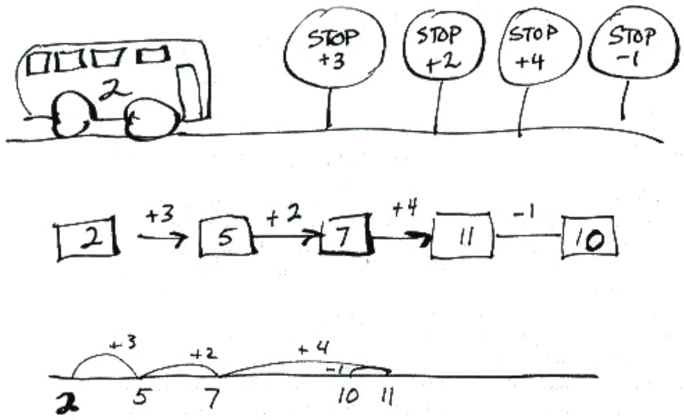


Figura 2: Exemplos de diferentes representações na resolução de um mesmo problema (Fosnot & Dolk, 2001, p. 84).

O NCTM (2007) ressalta ainda o papel das representações idiossincráticas construídas pelos alunos quando estão a resolver problemas e a investigar em matemática, na medida em que podem ajudá-los na compreensão e na resolução de problemas e proporcionar "formas significativas para registar um método de resolução e para o descrever aos outros" (p. 76). Observando estas representações, os professores e os investigadores podem compreender os modos de interpretar e de raciocinar dos alunos.

Metodologia

Este estudo segue uma abordagem qualitativa de caráter interpretativo. A sua metodologia de *design research* inscreve-se numa perspetiva de design da aprendizagem, visando produzir teorias locais de ensino e sequências de ensino que sejam recursos e referenciais disponíveis para informar as práticas dos professores e investigadores (Gravemeijer, 2015).

Os dados foram recolhidos numa turma do 2.º ano numa escola pública de um dos bairros da periferia de Lisboa. A equipa do projeto definiu uma sequência de tarefas com o objetivo de desenvolver a flexibilidade de cálculo em problemas de adição e subtração. O processo de elaboração das tarefas incluiu a testagem prévia de algumas (nomeadamente as focadas nesta comunicação), através de entrevistas clínicas, a alunos do mesmo ano de escolaridade. A sequência de tarefas foi previamente discutida e analisada em encontros com a professora da turma, tendo sido feitos pequenos ajustes.

A recolha de dados foi feita através de gravação em vídeo, posteriormente transcrita, e da observação participante das autoras deste artigo, que elaboraram notas de campo. Foram ainda recolhidos os registos escritos dos alunos. Todos estes dados foram analisados e triangulados.

Por razões éticas, os nomes dos alunos foram alterados, de modo a garantir a confidencialidade.

Nesta comunicação, analisamos a realização de duas tarefas (Figura 3) propostas na mesma aula aos alunos e apresentadas na mesma folha de papel, com espaço para a respetiva resolução. Não foram dispensados aos alunos materiais nem os alunos manifestaram vontade de os usar.

Jogo de berlindes I

A Ana e o Luís jogaram um jogo de berlindes juntos. No início, tinham ambos o mesmo número de berlindes.
A Ana ganhou 3 berlindes do Luís e ficou com 7.
Quantos berlindes tinha o Luís no final do jogo, sabendo que ele não ganhou berlindes?

Jogo de berlindes II

A Ana e o Luís fizeram um jogo de berlindes.
A Ana ganhou 6 berlindes do Luís e ficou com 10 berlindes no final do jogo.
O Luís não ganhou nada e ficou com 3 berlindes no final do jogo.
Compara o número de berlindes da Ana e do Luís antes do jogo e no final do jogo.

Figura 3: Tarefas realizadas.

Estas foram as últimas tarefas de uma sequência de seis tarefas exploradas pelos alunos. Com a exploração anterior de outras tarefas, os alunos já tinham trabalhado a relação entre ganhos e perdas no decurso de um jogo de berlindes, compreendendo que o que um jogador ganha, o outro perde. Todas as tarefas começaram por ser resolvidas a pares. Nesta aula, após todos os pares terem resolvido as duas tarefas, a professora promoveu uma discussão coletiva com toda a turma, a partir das resoluções de seis pares (três em cada tarefa) a quem propôs que fossem ao quadro apresentar os seus trabalhos.

Realização das tarefas

A professora distribuiu a folha com as tarefas pelos alunos e de seguida leu *Jogo de berlindes I* em voz alta. Perguntou depois aos alunos se tinham compreendido. Logo o Alexandre reagiu:

> Alexandre: Não pode ser! Não faz sentido.... tem uma rasteira.

Esta reação inicial do Alexandre pode dever-se à estranheza de se desconhecer o número inicial de berlindes.

A professora voltou a ler de forma pausada e propôs aos alunos que resolvessem a tarefa a pares. Os alunos começaram a trabalhar.

Relativamente ao par formado pelo Alexandre e pela Rosa, estes alunos usaram representações simbólicas, começando por registar linhas numéricas representativas do ganho ou perda de berlindes respeitantes a cada um dos jogadores e depois as operações envolvidas na sua disposição horizontal. Alexandre usou as representações reproduzidas na Figura 4, captadas pelo registo vídeo. Rosa fez o mesmo, seguindo tudo o que fora registado pelo Alexandre.

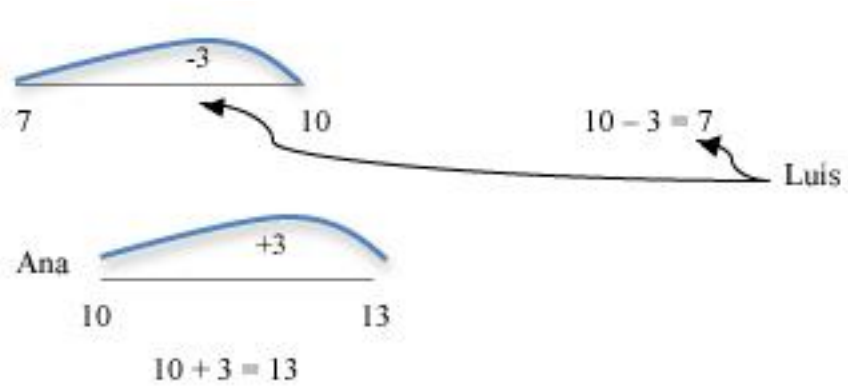


Figura 4: Primeiras representações simbólicas usadas pelo Alexandre em *Berlindes I*.

A resolução deste par evidencia a inversão do raciocínio como aspeto crítico. O facto de terem começado pelo registo referente ao jogador Luís pode dever-se à questão do problema focada no número de berlindes do Luís no final do jogo. Assim, embora iniciando o registo pelo Luís, provavelmente começaram por interpretar os dados relativos à jogadora Ana, assumindo 10 berlindes iniciais para ambos os jogadores a partir da soma de 3 (berlindes ganhos) com 7. Ou seja, operaram os dados contidos na frase "A Ana ganhou 3 berlindes do Luís e ficou com 7" de um modo linear, não mobilizando um raciocínio inversivo para determinarem o número inicial de berlindes. De referir ainda que embora as curvas representativas dos ganhos ou perdas não contenham setas, elas são assumidas pelos alunos com uma dada orientação já que os números são colocados pela ordem crescente: orientação da direita para a esquerda no caso da subtração e o inverso para a adição.

Ao serem interpelados pela professora, os dois alunos apagaram tudo e fizeram novo registo nas suas folhas de trabalho e que apresentaram no quadro durante a discussão (Figura 5), realizada no final da aula após a realização pelo par das duas tarefas:

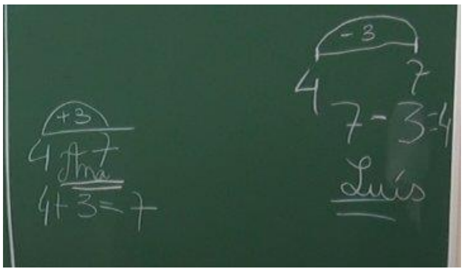


Figura 5: Representação simbólica apresentada no quadro.

Esta nova representação é reveladora da inversão necessária à determinação do número de berlindes iniciais, tendo os alunos conseguido determinar que o número inicial de berlindes era 4 para o caso da Ana. Parecem ter esquecido que o número inicial de berlindes era o mesmo para ambos os jogadores pois na representação alusiva ao Luís, são retirados 3 berlindes a 7. A situação alusiva ao Luís foi retificada no quadro pelo Alexandre, por sua iniciativa, após a apresentação de outros dois pares, apagando a linha alusiva ao Luís e colocando "4-3=1" enquanto explicava oralmente. O facto de ele ter conseguido explicitar à turma de forma clara mostra ter compreendido o problema.

Após algum tempo de exploração da primeira tarefa, a professora pediu a uma aluna para ler a tarefa seguinte *Jogo de berlindes II*, lendo-a também ela própria, e disse para os pares a realizarem assim que acabassem a anterior.

Alexandre e Rosa leram este problema. O Alexandre, olhando para a Rosa, disse:

Alexandre: O Luís começou com 9 e a Ana começou com 4.

De imediato, começaram a registar a resolução, utilizando o mesmo tipo de representação, e de novo começando pelo Luís:

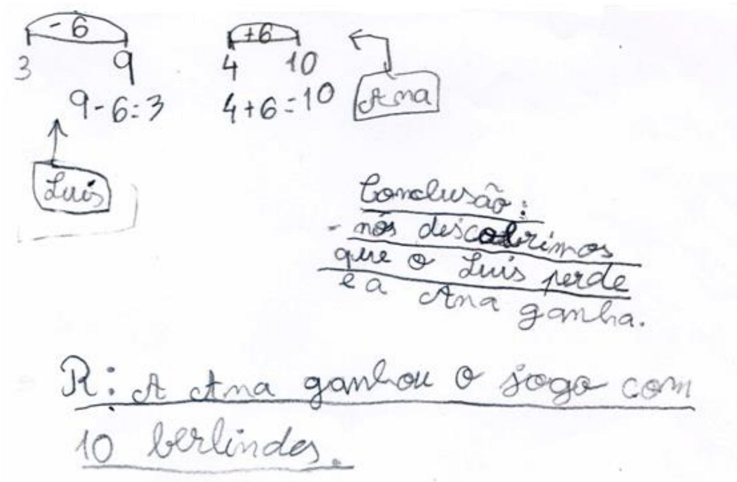


Figura 6: Representação simbólica usada pelo Alexandre em *Berlindes II*.

Enquanto o Alexandre, no primeiro problema, parece reagir à quantidade inicial desconhecida afirmando que não fazia sentido, após ter compreendido o primeiro problema, a quantidade inicial desconhecida do segundo já parece não o perturbar, resolvendo, de modo imediato e mentalmente o problema, através do raciocínio inversivo. Volta a colocar o número inicial de berlindes à direita para o Luís e à esquerda para a Ana. A resposta dos alunos ao pedido de comparação enunciado no problema encontra-se focada no número absoluto de berlindes final da Ana.

O par formado pelo Ricardo e pela Anabela também foi alvo de registo vídeo durante a exploração das tarefas. Usou representações simbólicas em *Berlindes I* apresentando as operações envolvidas na sua disposição horizontal (Figura 7) e uma representação mista em *Berlindes II* apresentando a resolução com recurso à linguagem escrita bem como as disposições horizontais das operações (Figura 8).

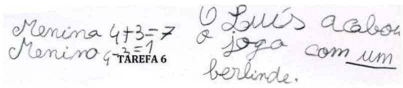


Figura 7: Representação simbólica usada pela Anabela em *Berlindes I*

No primeiro problema, após algum tempo sem nada realizarem, Anabela escreveu uma expressão simbólica cujo registo vídeo captou ter sido iniciada por 10 e terminando com "=4". Esta expressão foi apagada. O 10 indicia que, tal como o par anterior, Anabela começou por fazer uma transformação direta e não inversa com os dados do problema. Durante a interpelação da professora, também Ricardo refere que "é uma rasteira" mas ambos respondem que os dois jogadores tinham 4 berlindes no início do jogo. Anabela regista uma nova expressão simbólica que apaga e é Ricardo que começa por escrever "Menina", sendo secundado pela Anabela. Nesse momento, terminam a tarefa rapidamente, dando resposta à questão enunciada no mesmo.

No segundo problema, quando a professora passou por perto, o Ricardo disse:

Ricardo: O Luís tem 6, tem 3 e vai perder 6.

O tempo futuro usado pelo Ricardo ("vai perder 6") é revelador da dificuldade associada à transformação inversa, tratando o 3 como estado inicial e não estado final. Após diálogo com a professora, que os questionou sobre o número inicial de berlindes, Anabela começou a redigir a resposta constante na Figura 8, sendo secundada pelo Ricardo.

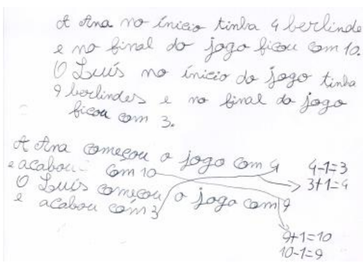


Figura 8: Representação mista usada pela Anabela em *Berlindes II*.

Enquanto a primeira parte da sua produção, expressa em linguagem escrita apresenta a solução do segundo problema, a segunda parte, em que setas foram colocadas para fazer corresponder as representações escritas às representações simbólicas, apresenta a resposta ao pedido de comparação. Assim, estes alunos compararam o número de berlindes inicial da Ana com o número final do Luís e também o número final de berlindes da Ana com o número inicial do Luís, mostrando que em ambas as situações, existe a mesma diferença quantitativa de um: a Ana tem mais um berlinde do que o Luís em ambas as situações. Usaram traços para unir os elementos que escolheram para comparar.

Passamos a apresentar as representações de outros pares da turma com base nas produções entregues, sendo que não possuímos registos vídeo que documentem o seu processo de resolução.

O par formado pelo Rui e António usou representações simbólicas em *Berlindes I* apresentando uma linha numérica com duas curvas representativas da inversão das operações adição e subtração bem com as operações envolvidas na sua disposição horizontal (Figura 9).

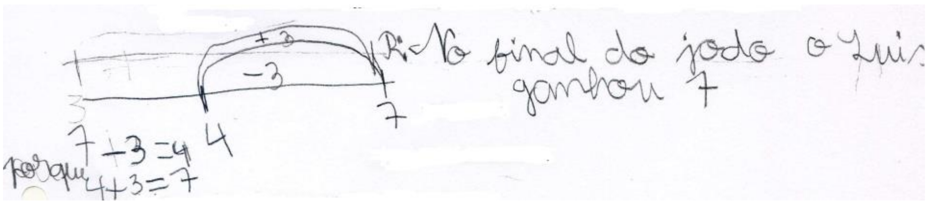


Figura 9: Representação simbólica usada pelo Rui em *Berlindes I*.

Esta representação parece evidenciar a modelação encontrada para a situação da Ana, mostrando o raciocínio inversivo. É de referir a inclusão do termo narrativo "porque", explicitando a inversão usada para determinar o número de berlindes inicial e de certa forma, justificando-a com a inversão das operações adição e subtração. A ordem pela qual foram colocadas as operações na sua disposição horizontal evidencia o processo do raciocínio inversivo: primeiro, determinaram o número inicial de berlindes, compreendendo que, no início do jogo, a Ana teria menos 3 berlindes e depois justificam (ou comprovam) essa inversão com a ordem sucessiva do jogo, representando simbolicamente o ganho de 3 berlindes da Ana relativamente aos 4 iniciais, ficando no final com 7 berlindes. Assim, as curvas com -3 e +3 parecem representar a transformação temporal dos 3 berlindes ganhos da Ana, do final para o início do jogo e do início para o final do jogo, respetivamente. No entanto, aparentemente, assumem aquela modelação também para o caso do Luís, já que respondem "No final do jogo o Luís ganhou 7". É de destacar o facto de o termo "ganhou", na sua resposta, significar o número absoluto de berlindes no final do jogo e não uma diferença quantitativa.

Este par foi o único que, na turma, incluiu uma representação icónica em *Berlindes II*. O par usou uma representação mista apresentando uma representação icónica, uma representação em linguagem escrita e também uma representação simbólica com a operação na disposição horizontal (Figura 10).

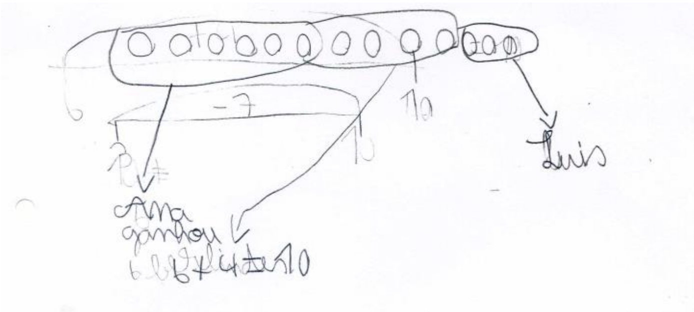


Figura 10: Representação mista usada pelo Rui em *Berlindes II.*

Esta produção apresenta duas linhas numéricas que foram apagadas e que reproduzimos em baixo (Figura 11):

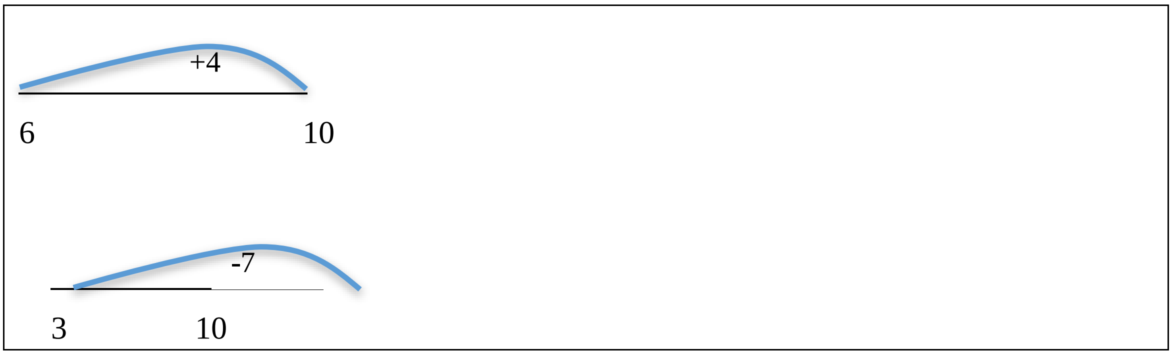


Figura 11: Representações simbólicas apagadas pelo Rui em *Berlindes II.*

A primeira linha parece representar a situação da Ana. Enquanto em *Berlindes I*, as curvas representam as transformações, tanto a direta como a inversa, em *Berlindes II*, a curva representa a adição efetuada para encontrar o estado inicial, tendo os alunos colocado o 6 relativo à transformação à esquerda da linha. A segunda linha tanto pode ser a representação da situação alusiva ao Luís como a da comparação dos números finais de berlindes dos dois jogadores. Deve ter sido a dificuldade em lidar com a situação do Luís que terá motivado os alunos deste par a apagar estes registos e a enveredar por uma representação mais informal, a representação icónica.

Na representação icónica, Rui começou por representar os 6 berlindes ganhos pela Ana, circundando-os com uma linha e explicitando, narrativamente, com uma seta, serem os berlindes que a Ana ganhou. Depois, representou pictoricamente os 4 berlindes iniciais da Ana, circundando-os também com uma linha e apontando com uma seta para a representação simbólica da adição de 6 com 4. É de notar que a ordem das parcelas tem uma ligação estreita com a representação icónica, e consequentemente, com o seu processo de resolução. Depois, Rui representa pictoricamente os 3 berlindes finais do Luís mas a sua resolução termina aqui, não conseguindo inverter o raciocínio e determinar o número inicial de berlindes do Luís.

O par formado pelo Tiago e pelo João usou uma representação mista em ambas as tarefas, envolvendo representações simbólicas e em linguagem escrita, sendo que apenas o Tiago apresentou as operações com uma disposição vertical em *Berlindes II* (Figura 13). Durante a discussão desta tarefa, a professora interpelou-o onde é que ele tinha aprendido a fazer aqueles algoritmos, o que vários alunos da turma confirmaram que nunca faziam aquela representação na aula.

Em *Berlindes I* (Figura 12), na representação colocada à esquerda, o par usou uma disposição em tabela, com as colunas para cada um dos dois jogadores e as linhas para os diferentes momentos do jogo, a linha de cima para o início e a de baixo para o final. Foi o único par, na turma, que estabeleceu a diferença entre os números finais de berlindes, apesar de não solicitado no enunciado do primeiro problema.

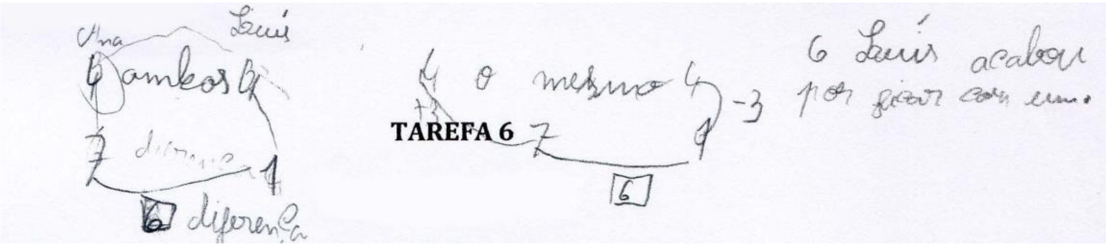


Figura 12: Representação mista usada pelo Tiago em *Berlindes I*.

Em *Berlindes II*, nas disposições horizontais das operações, Tiago circunda os números para lhes atribuir significado, registando narrativamente o jogador e o momento do jogo a que dizem respeito (Figura 13).

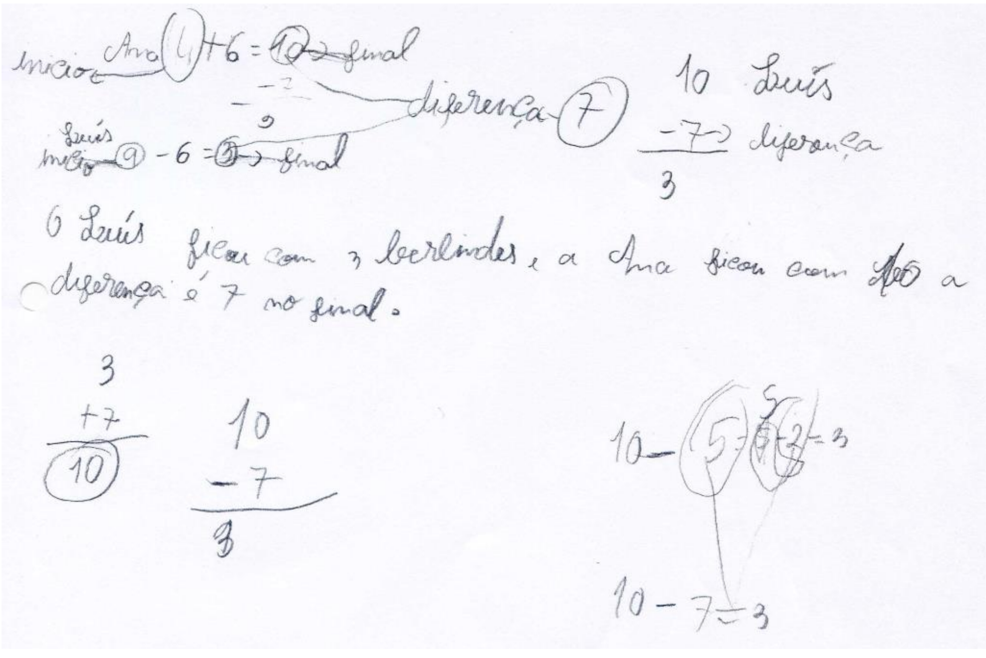


Figura 13: Representação mista usada pelo Tiago em *Berlindes II*.

A ordem com que colocou os termos nas operações seguiu, pois, a ordenação temporal do jogo. Para exprimir a comparação aditiva dos números finais de berlindes usa disposições verticais tanto da subtração (10-7=3) como da adição (3+7=10), explicitando que "a diferença é 7 no final" aglutinando, assim, numa mesma expressão representativa da diferença quantitativa, tanto o excesso de 7 para a Ana como o défice de 7 para o Luís, o que revela compreensão dessa situação inversa. Embora não exista registo vídeo do trabalho deste par que suporte a interpretação da representação colocada pelo Tiago em baixo à direita, esta parece indicar a sua preocupação em relacionar as comparações aditivas do final e do início do jogo, já que no início do jogo, é o Luís que tem mais 5 berlindes do que a Ana.

O par formado pelo Vítor e pela Joana conseguiu inverter o raciocínio para o caso da Ana mas a sua resposta indicia falta de compreensão da situação alusiva ao Luís (Figura 14), em *Berlindes I*.

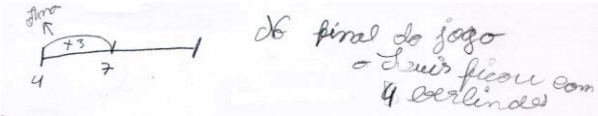


Figura 14: Representação simbólica usada pelo Vítor em *Berlindes I*.

Em *Berlindes II*, este par usou a representação da linha e, contrariamente ao que foi feito pelos colegas da turma, a ordenação seguiu o critério temporal do jogo e não a ordenação crescente dos números na reta (Figura 15).

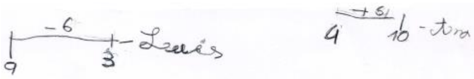


Figura 15: Representação simbólica usada pelo Vítor em *Berlindes II*.

Ambos os alunos deste par começaram a redigir de forma narrativa a sua resposta à solicitação da comparação aditiva mas acabaram por optar por apagar esses registos.

Conclusões

A transformação inversa foi um aspeto crítico na resolução da primeira destas duas tarefas, convergindo com o referido por Vergnaud (2009). Assim, as primeiras representações usadas pelo Alexandre, um dos alunos do par objeto de registo vídeo, em *Berlindes I*, mostram um raciocínio associado a situações prototípicas da adição que propõem a procura de estados finais e não iniciais. Nesta tarefa, Alexandre usou o 7 final como se se tratasse de um estado inicial, fazendo corresponder a adição à ideia de ganhar berlindes, o que o fez obter 10 e ao qual lhe atribuiu depois um significado de estado inicial comum aos dois jogadores, concluindo, naquela tarefa, que o Luís teria ficado no final com 7 e a Ana com 13 berlindes. No entanto, os alunos parecem lidar mais facilmente com este tipo de transformação na segunda tarefa *Berlindes II* após terem compreendido a inversão envolvida em *Berlindes I*. Exemplo disso é o caso do Alexandre que conseguiu ultrapassar o obstáculo da inversão na segunda tarefa resolvendo-a mentalmente de modo muito rápido.

Apesar da dificuldade inerente à transformação inversa presente nos problemas, as produções dos alunos da turma revelam uma compreensão generalizada de um dos elementos do raciocínio inversivo: o que um jogador ganha, o outro perde. De acordo com Vergnaud (2009), nesta situação, é também importante que os alunos tenham consciência da aplicação da inversão temporal relativamente a cada jogador: "tu perdes o que acabaste de ganhar ou ganhas o que acabaste de perder" (p. 87). Este tipo de consciência tem de ser desenvolvido com uma multiplicidade de situações contextuais, como por exemplo, a consciência de que um crédito é o inverso de um débito, ou o número de passos para a frente é o mesmo dos dados para trás, etc.

Os alunos parecem ter privilegiado essencialmente duas formas de representação (Ponte & Serrazina, 2000): linguagem oral e escrita e representação simbólica. Apenas um par de alunos utilizou a representação icónica como apoio à representação simbólica. Talvez por se tratar de alunos do 2.º ano, ninguém recorreu à representação ativa.

Entre as representações simbólicas usadas, existiu um predomínio das disposições horizontais dos cálculos, embora o uso da linha numérica vazia tivesse também tido uma expressão significativa. O uso desta última representação parece corresponder ao modelo para pensar proposto por Gravemeijer (2004), aproximando-se do diagrama de setas de Vergnaud (2009), uma vez que as curvas que apresentam correspondem às transformações. A linha numérica vazia foi usada para ajudar a raciocinar sobre as transformações envolvidas nos problemas. Dada a reduzida grandeza dos números envolvidos, os cálculos em si não ofereciam dificuldades e os alunos não precisariam de representar os saltos na linha numérica vazia para efetuar os cálculos. Precisaram desta representação para conseguirem pensar os ganhos e as perdas e a inversão temporal. Enquanto o diagrama de setas apresenta o quadrado do estado inicial sempre à esquerda, na linha numérica vazia, este tanto pode estar à esquerda como à direita, já que os números são colocados pela sua ordenação crescente. Exceção a esta situação é o diagrama usado pelo par Vítor e Joana em que a ordenação dos números na linha seguiu o critério temporal. O uso da disposição em tabela também parece ter constituído um modelo para pensar para o par formado pelo Tiago e pelo João ajudando-os a estruturar e a relacionar os diversos elementos do problema: os dois jogadores e os dois momentos temporais do jogo.

Da análise das produções dos alunos, podemos inferir diferentes níveis de raciocínio quantitativo aditivo. Enquanto a maior parte dos alunos focou as quantidades absolutas de berlindes nas suas respostas, alguns incidiram nas diferenças quantitativas enquanto resultados das operações quantitativas de comparar aditivamente duas quantidades para encontrar o excesso de uma em relação à outra (Thompson, 1993).

As representações usadas pelos alunos tiveram um duplo papel. Por um lado, constituíram janelas para interpretarmos o seu raciocínio. Por outro lado, foram andaimes que os auxiliaram a pensar matematicamente situações exigentes do ponto de vista cognitivo, atendendo às suas idades. Tal como afirmado por Vergnaud (2009), o desenvolvimento de um campo conceptual envolve não só situações e esquemas mas também instrumentos simbólicos de representação.

Referências bibliográficas

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense. Addition, and subtraction*. Heinemann: Portsmouth.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 176-200). London: Routledge.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.*), Roles of representations in school mathematics – 2001 Yearbook* (pp. 1-23). Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 105-128.

Gravemeijer, K. (2015). Design research as a research method in education. In A. A. V. Pereira, C. Delgado, C. G. da Silva, F. Botelho, J. Pinto, J. Duarte, M. Rodrigues, & M. P. Alves (Coords.), *Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar práticas em contexto* (pp. 5-19). Setúbal: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal.

Greer, B. (2012). Inversion in mathematical thinking and learning. *Educational Studies in Mathematics Education, 79,* 429-438.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (Tradução de Principles and Norms of School Mathematics). Lisboa: APM.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., Bell, D., & Barros, R. (2012). Teaching children how to include the inversion principle in their reasoning about quantitative relations. *Educational Studies in Mathematics*, *79,* 371-388.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13,* 325-343.

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics Education*, *25*, 165-208.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.*), Research companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 95-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceptuais. In J. Brun (Ed.), *Didáctica das Matemáticas* (pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget.

Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development, 52,* 83-94.

Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*, *1*, 15-27.

DESVENDANDO O MISTÉRIO DA VÍRGULA: AS REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS DECIMAIS NUMA TURMA DE 4.º ANO

Cília Cardoso Rodrigues da Silva
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
ciliacr@gmail.com

Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação de Lisboa
UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo: Esta comunicação relata um estudo preliminar a uma investigação mais alargada que vem sendo realizada numa Escola Pública do Distrito Federal, em Taguatinga, Brasília-Brasil, numa turma de 4.º ano, com vista à elaboração da tese de doutoramento em processo de desenvolvimento no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, na Didática da Matemática. O estudo aqui relatado é de natureza qualitativa e teve como objetivo compreender o modo como os alunos do 4.º ano evoluem nas representações dos números decimais. Procura responder à seguinte questão: Que estratégias os alunos utilizam para representar os números decimais na resolução de tarefas que envolvem estes números? Os dados foram recolhidos por observação participante, diário de campo, fotografias, vídeo-gravações e registros dos cadernos dos alunos. O enquadramento teórico está baseado nas representações semióticas propostas por Duval (2012) e na compreensão do número racional, especificamente, do número decimal (Behr et al. 1983; Post et al. 1993; MacCloskey & Norton 2009). Os resultados apontam que os alunos evoluíram nas representações dos números decimais, ou seja, desvendaram o mistério da vírgula. Sugerem ainda que essa evolução se deu a partir das ações pedagógicas do professor em sala de aula, que buscou articular a dimensão pedagógica com a dimensão de conteúdo e com a dimensão da avaliação.
Palavras-chave: Representações, Números racionais, Números decimais.

Introdução

Os números decimais aparecem, culturalmente, em variados contextos da vida cotidiana dos nossos alunos: em jornais, encartes, rótulos, culinária etc. Os alunos demonstram facilidade em dizer “eu tenho um metro e quinze”; “tenho dois reais e trinta centavos”; etc. e nem sempre conseguem compreender o “porquê do uso da vírgula em certos números”. Estes exemplos envolvem conceitos e significados complexos dos números racionais e, geralmente, de difícil compreensão para eles.

A escola, institucionalizada para promover o conhecimento, deve propor situações-problema que proporcionem a construção do conceito do número racional com compreensão e significado. Alguns aspectos são essenciais para a construção destes conceitos. A começar pela organização do trabalho pedagógico que se inicia no espaço da coordenação pedagógica onde os professores discutem, refletem e planejam as ações que serão desenvolvidas em sala de aula. O planejar envolve dimensões importantes para esse processo, podemos destacar três dimensões: (i) a dimensão pedagógica que se refere ao como ensinar, que ações o professor irá desenvolver para que possam ocorrer avanços no processo de aprendizagem; (ii) a dimensão de conteúdo que se relaciona com o aprender, ou seja, que conteúdos, a partir do currículo, serão propostos para ampliar o conhecimento dos alunos e, (iii) a dimensão da avaliação que se articula com as duas dimensões anteriores, e se traduz no conhecimento que o professor tem da turma e do aluno para realizar as suas intervenções e no conhecimento que o aluno tem da sua própria aprendizagem (o que sabe e/ou o que falta saber).

Este estudo faz parte de uma investigação que está a ser realizada numa turma do 4.º ano de uma Escola Pública do Distrito Federal, em Taguatinga, Brasília-Brasil, com vista ao desenvolvimento de uma tese de doutoramento, pela primeira autora, no Instituto de Educação da Universidade de Lisboa na área de Didática da Matemática. Nesta comunicação é apresentado um estudo preliminar cujo objetivo é compreender o modo como os alunos do 4.º ano evoluem nas representações dos números decimais, procurando responder à seguinte questão: Que estratégias os alunos utilizam para representar os números decimais na resolução de tarefas que envolvem estes números?

Os números decimais

Os números racionais são o primeiro conjunto de números que aparece na experiência da criança que não são baseados na contagem. Assim, procedimentos de contagem (para a frente, para trás, saltar, etc.) que, no caso dos números naturais podem ser utilizados para resolver problemas, tornam-se um obstáculo quando estes envolvem números racionais (Behr & Post 1992). Estes autores afirmam que esta alteração no modo de pensar leva a que muitos alunos enfrentem dificuldades ao tentarem aplicar procedimentos de contagem pois nos números racionais não conseguem identificar o número seguinte.

A complexidade da aprendizagem dos números racionais é ilustrada por MacCloskey e Norton (2009) quando definem cinco ações mentais usadas pelos alunos na resolução de tarefas com números racionais: (i) *unitizing:* trata o objeto ou uma coleção de objetos como uma unidade ou como um todo; (ii) *partitioning*: ação através da qual se divide a unidade/o todo em partes iguais; (iii) *disembedding:* supressão de uma fração ao todo mantendo o todo intacto e inalterado ; (iv) *iterating:* repetição de uma parte para produzir partes iguais a ela e (v) *spliting:* composição simultânea de *partitioning* e de *iterating.* Pode-se dizer que estes são esquemas mentais que contribuem para a construção do conceito de número racional, tendo como ponto de partida seus significados (razão, operador, quociente, medida e parte-todo).

Também Frobisher et al. (2002) alertam que a abordagem aos números naturais pressupõe que haja sempre um número precedente e um posterior e há uma perda de sentido ao falar do número seguinte na introdução dos números racionais. Segundo eles, este é um passo significativo na compreensão do sistema numérico, pois a existência de, pelo menos um número entre dois números, altera também a concepção de linha numérica. No caso particular dos decimais apontam ainda a confusão provocada pela própria linguagem que envolve os decimais, por exemplo “décima” é similar a “dez”, “centésima” a “cem” e “milésima” a “mil”. Acresce que para Behr e Post (1992) os números decimais podem ser vistos como extensão do sistema de base dez, mas são números racionais, podendo ser identificadas características semelhantes quer dos números inteiros quer dos fracionários. Para Hiebert e Wearne (1986) observar os alunos a trabalharem com os números decimais é observar alunos a lutar contra símbolos escritos que eles não compreendem, pois os símbolos decimais são percebidos como novos símbolos, com novas regras e representam novos conceitos

Mestre (2009) relata que muitos dos erros que os alunos cometem ao trabalhar com os números decimais têm relação com a forma como estes são introduzidos. A autora refere que muitas vezes eles são introduzidos através da medida, mas uma medida representada por um número decimal pode facilmente converter-se num número inteiro através da referência a outra unidade do mesmo sistema de medida (1,5 m converte-se em 15 dm).

Silva (2011) ao realizar uma investigação sobre a construção de grandezas e medidas identificou os seguintes registros de escrita feitos pelos alunos: 1m 35cm – 1ME:48 – 1 metro e 58,5 – 1, 58,30. Estes exemplos apontam, apesar da escrita não estar totalmente correta em relação às formas social e cientificamente utilizadas, que os alunos parecem compreender que existe o inteiro e uma parte desse inteiro, que precisa ser separada da outra, quer seja pela letra “e” ou pelo “dois pontos” ou pela “vírgula”. Vergnaud (2009) diz que para este tipo de medida, não há um fim, ou seja, isso se deve ao fato de que entre dois comprimentos sempre se pode encontrar um intermediário, o que nos leva necessariamente à introdução de uma nova categoria de números, os números decimais, ou números com “vírgula”.

Behr et al. (1983) referem ser fundamental que o ensino dos números decimais leve em consideração: (i) os conhecimentos anteriores dos alunos; (ii) as inter-relações entre os vários significados de número racional; (iii) que os algoritmos das operações devem ser atrasados no tempo e antecedidos pela compreensão das relações de ordem e de equivalência; e (iv) que o ensino deve ser feito baseado em modelos educativos que reforcem as relações entre conceitos e procedimentos, bem como as conversões dentro e entre as diferentes representações. Ou seja, o papel do professor é ajudar os alunos a construir pontes entre as suas próprias representações e as representações convencionais, ajudando-os a ver as semelhanças entre os múltiplos contextos do problema, pois a criação de representações matemáticas envolve a abstração e a generalização (Quaresma, 2010).

As representações dos números decimais

Os alunos chegam à escola com algumas noções como representar as suas ideias matemáticas, fruto do convívio e da experiência com o meio cultural e social em que vivem. Nem sempre essas representações fazem sentido para eles, pois muitas vezes utilizam-nas sem compreender o seu significado. Por exemplo, no dia a dia, representam metade como ½ ou R$0,50 ou 50% etc., sem saber de facto o que significa cada um destes símbolos.

As normas de conteúdo para os números e operações do 3.º ao 5.º ano, apresentadas nos *Princípios e normas para a matemática escolar* do NCTM (2007) descrevem explicitamente o que os alunos devem aprender. Associadas a estas normas de conteúdos estão as normas de processo (Resolução de Problemas, Raciocínio e Demonstração, Comunicação, Conexões, Representação) que dão ênfase às maneiras de adquirir e utilizar os conhecimentos sobre os conteúdos referidos. Os alunos destes anos deverão recorrer à utilização de modelos e outras estratégias para representarem e estudarem os números decimais, e ainda investigar a relação entre frações e decimais focando a sua atenção na equivalência. Desta forma, de acordo com este documento, os alunos deverão ter oportunidades para: (i) criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas; (ii) selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas e (iii) usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos. E os professores podem e devem enfatizar a importância de representar as ideias matemáticas sob uma diversidade de formas, estimulando o uso e a análise das representações, discutindo os motivos pelos quais algumas representações são mais eficazes que outras em determinadas situações, promovendo uma discussão a partir de escolhas estratégicas de algumas representações, etc.

Para Duval (2012) os objetos matemáticos não devem ser confundidos com a representação que se faz deles. Como exemplo ele cita que uma escrita, uma notação, um símbolo, representam: um número, uma função, um vetor..., ou seja, um objeto matemático. Segundo o autor, isto é um paradoxo cognitivo do pensamento matemático em que de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível. Assim, os objetos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, portanto, é preciso utilizar representações. Resumindo, a apreensão ou a produção de uma representação semiótica (semiose) é inseparável da apreensão conceitual de um objeto (noesis). O autor apresenta três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: (i) ***Formação de uma representação identificável*** que implica seleção de relações e de dados no conteúdo a representar: enunciação de uma frase, composição de um texto, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, desenho de uma figura geométrica etc.; (ii) ***Tratamento de uma representação*** é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada: cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...); (iii) ***Conversão de uma representação*** é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial: cálculo numérico. Para esta última atividade cognitiva, Duval (2012) exemplifica que os alunos podem efetuar a adição de dois números na sua expressão decimal e na sua expressão fracionária e não pensar em converter a expressão decimal de um número na sua expressão fracionária (e reciprocamente), ou mesmo não conseguir realizar essa conversão. Por exemplo, 0,25 (0, 25 + 0,25 = 0,5) e ¼ (¼ + ¼ = ½) representam o mesmo número, mas cada um tem uma significação operatória, ou seja, para a expressão de um número é preciso distinguir a significação operatória ligada ao significante em virtude das regras do sistema de expressão escrita. Na atividade matemática é essencial poder mobilizar muitos registros de representações semióticas (figuras, gráficos, escrita simbólica, língua natural etc.) o que leva à escolha de um registro no lugar do outro e, que os objetos matemáticos não se confundam com suas representações, sendo assim reconhecidos em cada uma das suas representações. Duval (2012) aponta que não é possível negligenciar ou descartar a linguagem natural no ensino da matemática, afirmando que ela é um registro tão fundamental quanto os outros registros, particularmente aqueles em que os tratamentos de cálculo são possíveis.

No que se refere à conversão consideramos também as ideias de Post et al. (1993), que sinalizam que a compreensão do número racional – e aqui damos ênfase ao decimal – está relacionada com três características do pensamento dos alunos: (i) a flexibilidade na conversão entre as diferentes representações de número racional; (ii) a flexibilidade nas transformações dentro de cada representação; e (iii) a independência cada vez maior das representações concretas. Estes autores afirmam que se os alunos forem capazes de aplicar a composição, decomposição e os princípios da conversão das representações na resolução de problemas aritméticos, tanto aditivos como multiplicativos eles serão flexíveis com o conceito de unidade.

Algumas dificuldades reveladas pelos alunos são também referidas por Monteiro e Pinto (2007) que consideram como as mais frequentes as seguintes: (i) confusão entre décimas e centésimas (exemplo: 2,5 com 2,05); (ii) confusão entre o número de algarismos e a quantidade (exemplo: 1,456 é maior que 1,5); e, por fim, (iii) a ideia que entre 0,1 e 0,2 não existem números decimais. Consideram ainda que estas dificuldades podem estar relacionadas com a não compreensão dos conceitos e significados envolvidos na aprendizagem dos números decimais.

Ainda no que se refere às representações dos números decimais consideramos também as representações pictóricas (traços, rabiscos, desenhos, figuras) as quais podem mostrar como os alunos estão elaborando os esquemas mentais para resolução de um dado problema. Este tipo de representações, segundo Cox (1999), apesar de serem instrumentos úteis para o raciocínio do aluno, podem sofrer influências das representações que o professor costuma utilizar na resolução dos problemas no quadro. Por isso, o autor sugere que seja dada oportunidade aos alunos para que possam construir as suas próprias representações e possam desenvolver e comunicar as suas ideias. Como já referido, o professor terá o papel de mediador conduzindo o processo de modo a que os alunos evoluam nos seus processos de representação no sentido das representações convencionais.

Metodologia

O estudo relatado nesta comunicação é um estudo de natureza qualitativa, preliminar a um estudo mais amplo que dará lugar à elaboração da tese de doutoramento da primeira autora. Para a elaboração deste texto foram observadas quatro aulas, que eram parte de um planejamento anterior entre a professora e a primeira autora (a investigadora), coincidente com a ida ao campo para organizar a experiência de ensino da investigação mais ampla que está sendo desenvolvida**.** O nosso objetivo é compreender o modo como os alunos do 4.º ano evoluem nas representações dos números decimais, procurando resposta para a seguinte questão: Que estratégias os alunos utilizam para representar os números decimais na resolução de tarefas que envolvem estes números?

O cenário de investigação aconteceu numa turma do 4.º ano do Ensino Fundamental, na escola pública do Distrito Federal, em Taguatinga, Brasília – Brasil, e incluiu 19 alunos, a professora titular e a investigadora. A recolha de dados foi realizada pela primeira autora e os instrumentos utilizados foram: observação participante de quatro aulas, fotografias dos alunos no momento de socialização no quadro, vídeo gravações, anotações de campo e análise dos registros nos cadernos dos alunos da resolução das tarefas propostas aos alunos. A opção por estes instrumentos deve-se ao fato de eles mostrarem em tempo real as falas dos alunos e o seu fazer matemático na procura de solução para as tarefas propostas. A resolução das tarefas aconteceu em dias diferentes e teve uma duração aproximada de cinco horas para cada tarefa. A nossa análise incide em duas tarefas envolvendo números decimais, a primeira da iniciativa da professora da turma, a qual chamamos “Tarefa – Leitura dos chocolates”, e a segunda proposta pela investigadora, denominada “Tarefa – Chocolate”. A segunda tarefa, aqui analisada, não estava planejada previamente e resultou da reflexão com a professora sobre as ações e respostas dos alunos após a realização da primeira tarefa, no espaço da coordenação pedagógica. Nessa reflexão concluímos que para que fosse atingido o objetivo de aprendizagem de levar os alunos a compreenderem o “porquê” do uso da vírgula em alguns números, seria necessária uma segunda tarefa que a investigadora propôs e teve o acordo da professora da turma. As aulas foram sempre ministradas pela professora da turma.

Os dados recolhidos através dos diferentes instrumentos incluindo o diário de campo da investigadora foram objeto de análise de conteúdo e triangulados.

Tarefa Leitura dos Chocolates

A professora da turma introduziu o tema números decimais a partir da pergunta feita por um aluno: *"Por que usamos a vírgula para escrever alguns números?"* (Figura 2). Destacamos que todas as perguntas que os alunos fazem são devolvidas pela professora para a turma para que eles possam fazer suas inferências sobre o assunto; algumas dessas perguntas são tornadas visíveis em cartazes e vão para o mural da sala para que os alunos lhes possam responder a partir das tarefas que são planejadas pela professora. Ela distribuiu para cada aluno folhas com desenhos de barras de chocolate (o inteiro em folha rosa e o inteiro dividido em 10 partes em folha azul – Figura 1). O objetivo da professora foi proporcionar aos alunos a compreensão dos números decimais e das relações parte/todo.

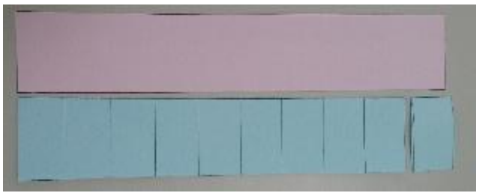


Figura 1: Barras de chocolate.

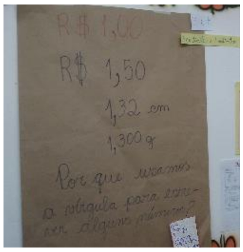


Figura 2: Pergunta do aluno.

Cada aluno recortou suas barras de chocolate e o combinado foi que as deixassem todas inteiras. A professora explorou o material com os alunos fazendo alguns questionamentos: *Quantos chocolates vocês têm? As barras têm o mesmo tamanho? O chocolate da barra azul está dividido em quantos pedaços? Duas barras têm quantos pedaços? E a metade, tem quantos pedaços? etc.* Propôs ainda os seguintes problemas: 1) *"Eu tenho onze chocolates e dez sobrinhos. Se eu distribuir os chocolates pelos meus sobrinhos, quantos chocolates cada um vai receber?* 2) *"Cinco chocolates para duas crianças, quantos chocolates e quantos pedaços cada criança poderá ganhar".* Os alunos socializaram suas soluções, no quadro, nas duas situações. Não vamos discutir estas situações por não ser o foco específico desta comunicação; vamos apenas fazer uma pequena ilustração para entendermos os processos mentais dos alunos e as suas evoluções nas representações dos números decimais. O que percebemos é que os alunos conseguem encontrar o resultado utilizando várias estratégias de cálculo e registros diferentes.

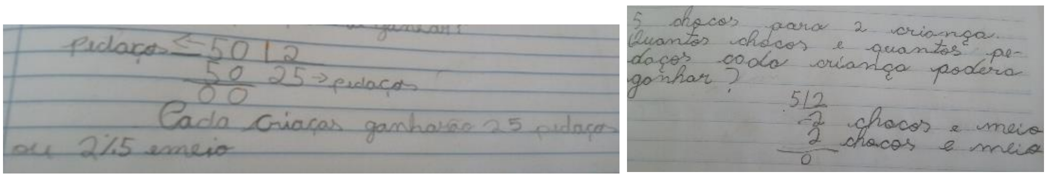


Figura 3: Representação do registro escrito.

Percebe-se, nos exemplos que apresentamos na figura 3, que os alunos utilizam números, palavras como “pedaços, metade e meio” para representar décimas; o “e” e o símbolo % para representar a vírgula. Nota-se que eles apenas ensaiam o uso da vírgula utilizando “e” e %. É perceptível nas suas soluções a compreensão dos fracionamentos, das transformações do todo (unidade) em partes.

Na aula seguinte, a professora retoma o trabalho feito anteriormente, fazendo novas explorações. Ela pede que os alunos dividam o chocolate em partes iguais sem sobrar nada. Daí aparece metade (5 pedaços); décimo (1 pedaço); quinto (2 pedaços). Então, escreve no quadro: *Vamos registrar modos diferentes de ler os chocolates: a) 1 chocolate; b) 13 pedaços; c) 2 metades do inteiro; d) 1 quinto do inteiro; e) 3 quintos do inteiro e f) 5 décimos.* É importante ressaltar que a professora utilizou na tarefa escrita no quadro os mesmos termos que apareceram na fala dos alunos (pedaço, metade, quinto, décimo). Cada aluno resolveu individualmente a tarefa, mas a professora permitiu que trocassem ideias. Enquanto os alunos resolviam as tarefas, a professora e a investigadora iam passando pelas mesas. Após realizarem a tarefa a professora abriu espaço de socialização das soluções das tarefas no quadro. A intenção da professora foi identificar os vários registros das representações dos números decimais e se os alunos já haviam compreendido a parte no todo e se iria aparecer o uso da vírgula.

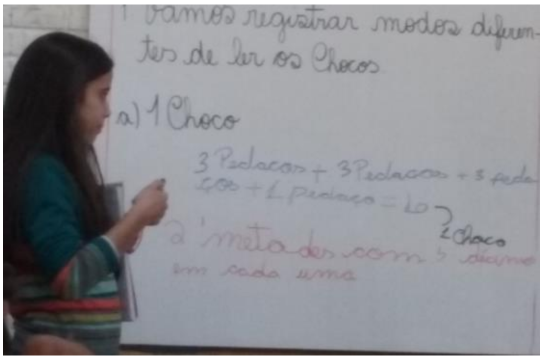


Figura 4: Representação do inteiro.

Na figura 4 percebe-se a aparição da palavra “décimo”. A aluna fez uma decomposição do inteiro em pedaços (3 pedaços + 3 pedaços + 3 pedaços + 1 pedaço = 10). A professora questionou: *“O que é esse 10?”*. A aluna “puxou um traço” e escreve 1 chocolate, dizendo: “*10 é um chocolate”*. A professora questionou: *“Tem outro jeito de ler esse 1 chocolate?”*. A aluna disse que sim e escreveu “*2 metades com 5 décimos em cada”*. No seu segundo registro apareceram os termos “metades e décimos” e a aluna começou a chamar os pedaços de décimos. Notou-se, uma **conversão da representação**, ou seja, a aluna transformou esta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial (Duval, 2012).

Na figura 5 o aluno utiliza o desenho para representar o “quinto”. Aqui, o que nos chama a atenção é que o aluno ainda não compreendeu a noção de quinta parte do inteiro, pois representa todos os quintos e ao ser questionado onde está um quinto do inteiro mostra que são todos. Podemos inferir que, apesar de aparecer o quinto, o aluno ainda não relaciona os números fracionários com os decimais, ou seja, ele não percebeu ainda a equivalência entre 1/5 e 2/10.

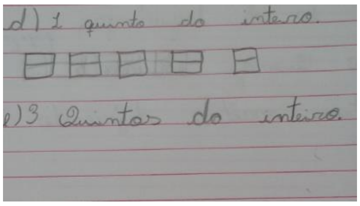


Figura 5: Representação do quinto.

A professora comentou com a investigadora que não considerava oportuno trabalhar no momento estas relações, pois não queria fugir ao seu objetivo. Assim, na continuidade, perguntou se algum aluno queria ir ao quadro mostrar o seu jeito de resolver e se tinha pensado de modo diferente. Um aluno disse: "*eu sei de um jeito diferente que não precisa usar essas palavras todas".* A professora retorquiu*: "Ah! É, então mostra como é!"* O aluno foi ao quadro e escreveu o que está na figura 6, explicando: "*Oh! Vou fazer com os 13 pedaços! O 13 é assim oh! Eu não preciso escrever 1 chocolate e 3 pedaços, porque aqui oh! Num é 1 inteiro e 3 décimos? Então, oh! Basta eu colocar o i em cima do 1 e o D em cima do 3".* O aluno não utilizou a vírgula, mas compreendeu bem o que é a parte inteira e a parte decimal. Podemos, assim, dizer que, segundo Duval (2012), este registro do aluno é uma **formação da representação identificável** que implica seleção de relações e de dados no conteúdo a representar, ou seja, o aluno relacionou números com símbolos, o que o ajudou a separar o a parte inteira da decimal.

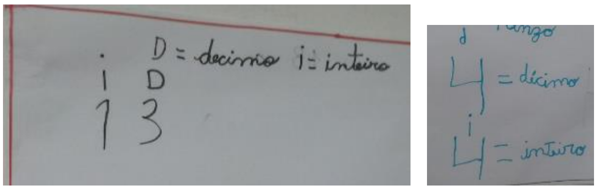


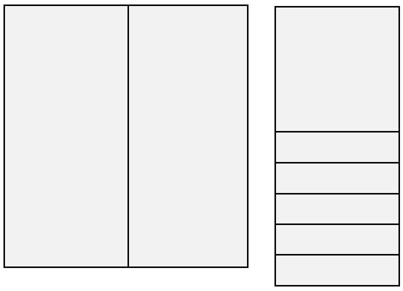
Figura 6: Representação dos décimos.

Após este registro, a professora combinou com a turma que, a partir daquele dia, pedaços iam chamar-se décimas e que para escrever os chocolates iriam usar o modo do colega. Pediu que ele fizesse um cartaz para colocar no mural da sala. Ressaltou, que para não ficar igual ao "D" de dezena, poderiam usar o "d" minúsculo de décima.

Tarefa do Chocolate

Como referido, a Tarefa do Chocolate foi uma sugestão da investigadora com o objetivo de, após a realização da tarefa anterior, verificar a compreensão dos alunos no que se refere aos números decimais e às representações destes números, especificamente, se utilizariam o "i" (para representar a parte inteira) e o "d" (para a parte decimal) e, se chegariam à representação com a vírgula.

Ajude a professora Cláudia a pensar!



Ela quer repartir estes chocolates pelos seus sobrinhos.
Quanto de chocolate cada sobrinho receberá se ela repartir com:

2 sobrinhos	3 sobrinhos	5 sobrinhos
10 sobrinhos	6 sobrinhos	4 sobrinhos

Figura 7: Tarefa do Chocolate.

Depois da realização da tarefa a professora abriu espaço para socialização. Ela disse que, pelo adiantado da hora iriam apenas socializar a repartição de chocolates por dois sobrinhos e por quatro sobrinhos. Discutimos aqui a repartição por dois sobrinhos.

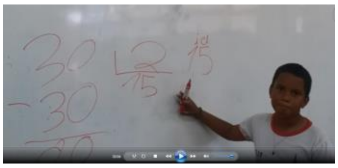


Figura 8: Repartindo chocolates por dois sobrinhos.

O aluno que foi ao quadro (Figura 8) transformou os três chocolates inteiros em 30 décimos e dividiu por dois sobrinhos. Quando foi explicar, disse: *"São 3 chocolates para 2 sobrinhos, né? Cada chocolate tem 10 décimos; então, são 30 para 2 que dá 15 décimos".* A professora perguntou se havia outro jeito de escrever 15 décimas e o aluno respondeu: "*Só se for assim".* Ele escreveu o 15 e em cima do 1, colocou "i" para inteiro e no 5 colocou "d" para décimas. E disse: *"Assim cada sobrinho ganha um e meio".* A professora perguntou onde estava o meio e ele apontou para o cinco. A professora insistiu se haveria outro jeito de escrever, mas o aluno escreveu novamente como havia escrito antes e disse: *"só sei assim".* Neste episódio o aluno realiza a ação mental de *partitioning* que é a ação através da qual se divide a unidade/o todo em partes iguais; ao explicar o que é o 15 realiza a ação mental *spliting* que é uma composição simultânea de *partitioning* e de *iterating* (MacCloskey & Norton, 2009). Com isso, ele demonstra ter compreendido o conceito parte/todo; no entanto, ainda não utiliza a vírgula para representar o decimal um e meio, que é o que cada sobrinho ganhou de chocolate.

A professora continuou a socialização com a pergunta: "alguém encontrou outra estratégia sem ser usando a letra? Sem ser usando..., usando...Vai lá mostra pra gente. Tem um jeito de escrever 15 décimas sem usar essas letrinhas?" O aluno balançou a cabeça e escreveu **1,5** (Figura 9). A professora replicou: “Ahhh! Explica pra gente o que é isso aí”.

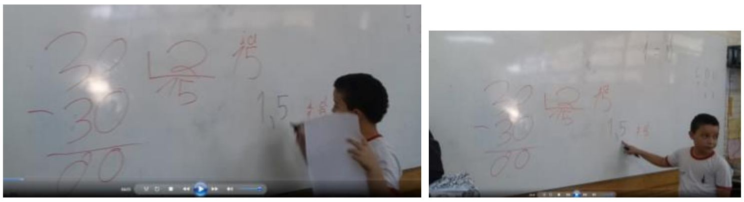


Figura 9: Representação com vírgula.

O aluno disse: “é a mesma coisa que o do colega, só que com vírgula” (Figura 10).

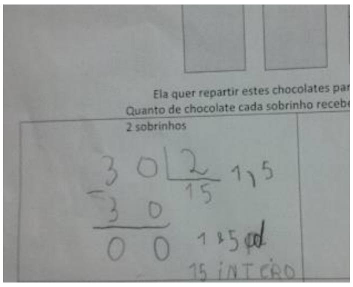


Figura 10: Representação com vírgula.

O aluno utiliza as mesmas estratégias que o aluno da figura 8 – as suas ações mentais são *partitioning* e *spliting*. E no seu registro vemos que faz vários ensaios de registro do número decimal (1 e 5 d; 15 inteiros e 1,5).

Um outro aluno logo respondeu ao anterior: “*não é, não é um inteiro esse aí”*. A professora chamou-o ao quadro para explicar e ele disse: *“não é, tudo isso aqui é décimos”*, escrevendo no quadro 15 décimos (Figura 11). Percebe-se que a ação mental utilizada pelo aluno, neste momento, é *unitizing*, pois trata o objeto ou uma coleção de objetos como uma unidade ou como um todo. Neste caso, ele junta as décimas em um todo, sem considerar que ali há um inteiro e cinco décimas. A professora pediu ao aluno para que pegasse as barras de chocolates e iniciou um diálogo com ele. O aluno reagiu: “*Ah! Sim. Tenho inteiro e metade! Mas o que eu vejo são 15 décimos”.* Nesta altura, a professora ouviu vários alunos a intervir: “*olha eu quero ouvir vocês! Aqui eu tenho uma escrita, duas escritas, 3 escritas diferentes. Elas têm alguma coisa em comum?...”*

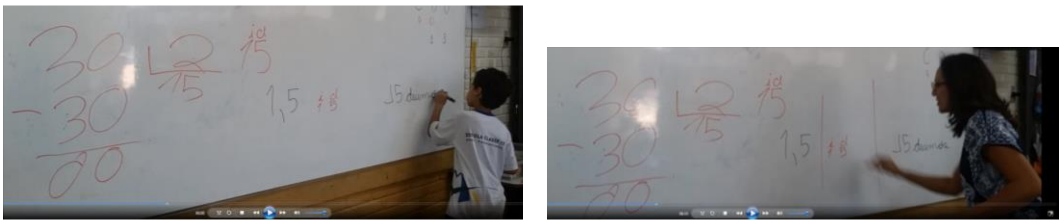


Figura11: Três tipos de escrita.

Uma aluna disse: “*Tia! tem uma coisa em comum. Todos eles têm 1 inteiro e cinco décimos!”* A professora pergunta aos alunos se eles concordavam com a aluna e em coro disseram que sim. Ela retorquiu novamente para os alunos: "*Eu acho que a gente está desvendando o mistério da vírgula, o que vocês acham?"* A mesma aluna disse: "*Tia, eu acho que a gente tá desvendando porque a vírgula, ela serve para fazer separar o número, se não tivesse vírgula ia ter que ficar igual vírgula 100 ia ter que ser 100, nunca ia ser um".* Nesta intervenção, pode-se perceber que a aluna faz uma comparação do número natural 100 com o número decimal 1,00. Podemos inferir que a sua atividade cognitiva revela uma representação mental dos números. Mas quando o número aumenta, esta aluna passa a utilizar uma representação pictórica (Figura 12).

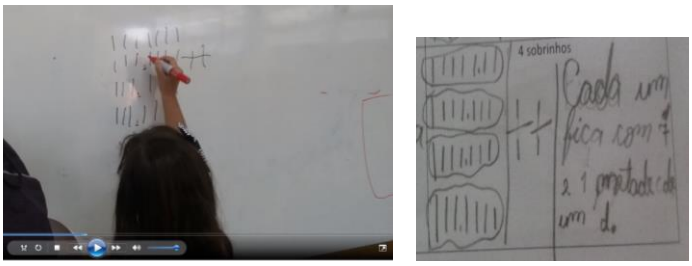


Figura 12: Representações pictóricas.

Na figura 12 a aluna mostra como encontrou o resultado para repartir os três chocolates por quatro sobrinhos. Ela explicou que fez grupos de 4, cada um ficando com 7 e uma metade de um décimo. Os pontinhos que aparecem entre os traços representam a metade do décimo. Percebe-se que é uma representação pictórica e espontânea da aluna.

Seguidamente, uma outra aluna foi até o quadro e disse: "*Tia agora eu entendi oh*!" Começou a escrever e a falar: "*11 décimos é igual 1,1; um inteiro e um décimo. 15 décimos é 1 e 5, um inteiro e cinco décimos que é o mesmo que 1, 5. 20 décimos é igual a dois inteiros que fica 2,0*" (Figura 13).

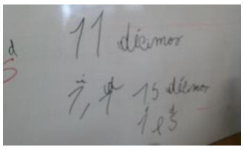


Figura 13: Desvendando o mistério da vírgula.

A professora pediu que a aluna fizesse um cartaz para colocar no mural. Assim, o mistério da vírgula foi sendo desvendado pelos alunos.

Considerações finais

Na resolução destas tarefas na sala de aula percebemos a evolução dos alunos nas suas representações dos números decimais. Eles iniciam utilizando as palavras *"chocolate"* para representar o inteiro e *"pedaços"* para representar as décimas partes, ou seja, usam a linguagem natural. Duval (2012) aponta que não é possível negligenciar ou descartar a linguagem natural no ensino da matemática, afirmando que ela é um registro tão fundamental quanto os outros registros, particularmente aqueles em que os cálculos são possíveis. Inicialmente, os alunos utilizam as palavras "*metade*" e "*meio*", mas não utilizam as representações 0,5 e/ou ½, no entanto identificam estas como parte do inteiro. Aparece, também, a palavra "*quinto*". Os alunos chegam a dividir o inteiro em cinco partes (quintos), mas parece não conseguirem, ainda, fazer a sua equivalência em décimas partes (décimos). Usam o símbolo *"e"* no lugar da vírgula e um aluno utilizou *"%"* para separar a parte inteira da parte decimal. Mais tarde, passam a utilizar as palavras *"inteiro"* e *"décimos"* para representar a parte inteira e a parte decimal de um número, socorrendo-se muitas vezes de representações pictóricas. Notámos que há uma compreensão do significado parte/todo, pois utilizam ações mentais como *unitizing; partitioning e splinting* (MacCloskey & Norton, 2009). Todavia, parece não conseguirem estabelecer relações de ordem e de equivalência em alguns casos (quinto, meio, metade).

Nota-se que os alunos transformam inteiros em decimais e vice-versa, utilizando a atividade cognitiva **conversão da representação** que, conforme Duval (2012), é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. Ficam com três formas diferentes de registrar o número decimal (1i 5d; 15 décimos e 1,5) e, chegam à conclusão que a vírgula serve para separar a parte inteira da parte decimal.

Para a evolução das representações dos números decimais parece ter tido um papel importante o questionamento da professora no decorrer da discussão das tarefas, bem como o ambiente da sala de aula permitindo que os alunos possam trocar experiências e socializar as soluções encontradas. Os alunos sentem-se livres para encontrarem as estratégias que pensam ser melhores para o problema a resolver, mas também, no momento de socialização, para apresentarem uma estratégia diferente ou um resultado diferente do previamente apresentado. O uso de material manipulável (barras de chocolate), no nível em que os alunos se encontravam, parece ter sido fundamental para a evolução das representações dos números decimais.

Concluímos que foi um conjunto de ações pedagógicas, integrando as dimensões pedagógica, de conteúdo e de avaliação, que levaram os alunos a desvendarem o mistério da vírgula, ou seja, a evoluir em suas representações dos números decimais. Podemos dizer que eles foram flexíveis na conversão e transformação dos números decimais, duas das características do pensamento dos alunos apontadas por Post et al. (1993) para a compreensão dos números racionais.

Referências

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods* (2nd ed.) (pp. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, *9*, 343-363.

Duval, R., & Moretti, T. M. T. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 266-297.

Frobisher, L., Monaghan, J., Orton, A., Orton, J., Roper, T., & Threlfall, J. (2002). Learning to teach decimals. In *Learning to teach number. A handbook for students and teachers in the primary school* (pp. 53-88). Cheltenham: Nelson Thornes Ltd.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: the acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers

McCoskey, A., & Norton, A. (2009). Using Steffe's fraction: Recognizing schemes, which are different from strategies, can help teachers understand their student's thinking about fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(1), 44-50.

Mestre, C. (2009). As tarefas de ensino e a aprendizagem dos números decimais. *Atas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vila Real, Portugal: EIEM.

Monteiro, M.C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-108.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts* (pp.327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum and Associates.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: Uma experiência de ensino* (Dissertação de mestrado). Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. Disponível em http://repositorio. ul. pt).

Silva, C. C. R. (2011). *Construção de conceitos de grandezas e medidas nos anos iniciais: Comprimento, massa e capacidade.* Universidade de Brasília, Brasília, Brasil. Disponível em http://repositorio.unb.br

Vergnaud, G. (2009). O que é aprender. In M. Bittar & C. A. Muniz (Org.), *A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais* (pp. 13-35). Curitiba, Brasil: Editora CRV.

PÓSTERES – GD1

REPRESENTAÇÕES E INTERPRETAÇÕES DE GRÁFICOS DE BARRAS, TABELAS E CASOS ISOLADOS POR ALUNOS DO 6.º ANO DE ESCOLARIDADE

Ema Mamede
CIEC, Universidade do Minho
emamede@ie.uminho.pt

Liliane Carvalho
Universidade Federal de Pernambuco
lmtlcarvalho@gmail.com

Palavras-chave: gráficos, tabelas, casos isolados.

Conteúdo do póster

Ser capaz de organizar um conjunto de dados e representá-los em tabela ou gráfico de barras é uma das ambições da aprendizagem matemática já no 1.º ciclo. Contudo, diferentes representações parecem afetar de modo distinto a interpretação de informação pelos alunos. Carvalho (2008) destaca os gráficos de barras como mais facilitadores de interpretação de informação do que tabelas ou casos isolados, com alunos do 8.º ano no Brasil. Em Portugal, os alunos iniciam o trabalho com gráficos variados e tabelas a partir de conjuntos de dados não organizados (aqui referidos como casos isolados) desde o 1.º ciclo. No entanto, pouco se sabe sobre o efeito do tipo de representação de informação na interpretação que os alunos fazem da mesma. Os casos isolados, os gráficos de barras e as tabelas são das primeiras representações de informação que os alunos aprendem no 1.º ciclo. Procura-se aqui conhecer o efeito destes diferentes tipos de representação de informação no desempenho dos alunos, tentando conhecer: 1) Que desempenhos apresentam os alunos quando a informação é representada por gráficos de barras, tabelas e casos isolados? 2) Que justificações apresentam na interpretação de informação nas várias representações?

Usou-se um inquérito por questionário para apresentar quatro problemas a alunos do 6.º ano (n=120) do centro de Braga, por se querer recolher informação sobre um tema preciso junto de uma amostra (Ketele & Roegiers, 1993). Formaram-se, aleatoriamente, três grupos (n=40 cada); cada grupo resolveu os problemas apresentados num dos modos de representação – gráficos de barras (GB), tabelas (T), casos isolados (CI). O questionário foi aplicado em cada turma, na presença do professor mas sem a sua interferência. A cada aluno foi fornecido um caderno com cada problema impresso. Cada problema foi apresentado oralmente pelas investigadoras ao grupo turma seguindo-se uma pausa para a sua resolução individual, com justificação de resposta. Em cada turma, a aplicação dos problemas levou cerca de 45 minutos. Foram apresentados a todos os alunos os mesmos problemas, pela mesma ordem, mas usando a representação de informação de acordo com a condição do grupo de trabalho. Os problemas apresentados foram adaptados de Carvalho (2008). A Figura 1 mostra exemplos de um problema apresentado com gráfico de barras, tabelas e casos isolados, respetivamente.

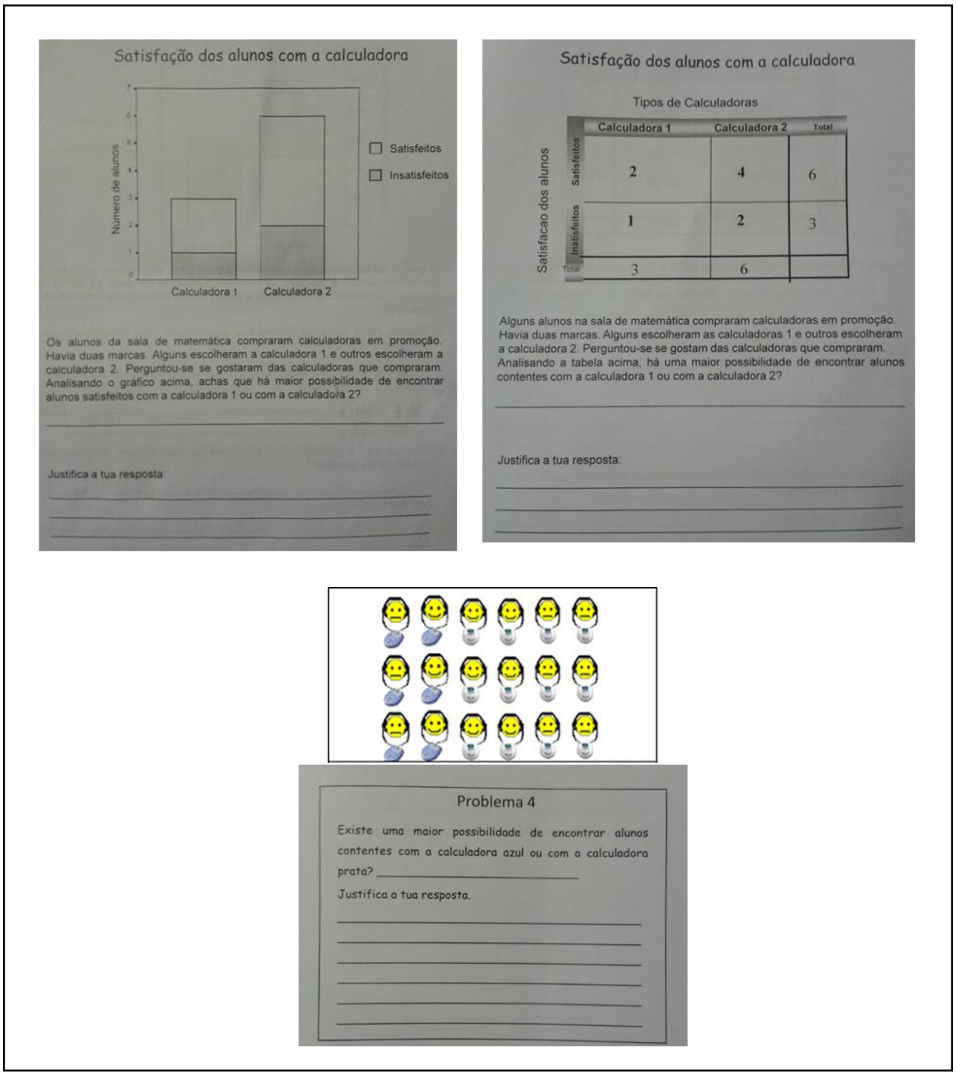


Figura 1: Enunciado de um mesmo problema apresentado aos três grupos distintos.

Fez-se uma análise descritiva dos dados. A Tabela 1 resume a média e desvio padrão do número de respostas certas por tipo de representação.

Tabela 1: Média e desvio padrão das respostas certas.

Média (desvio padrão)		
CI	GB	T
2,0 (0,75)	2.05 (0.63)	2,2 (0,76)

Há um desempenho semelhante na resolução dos problemas nos diferentes tipos de representação. A Figura 2 mostra a distribuição do número de respostas certas por tipo de representação usada nos problemas.

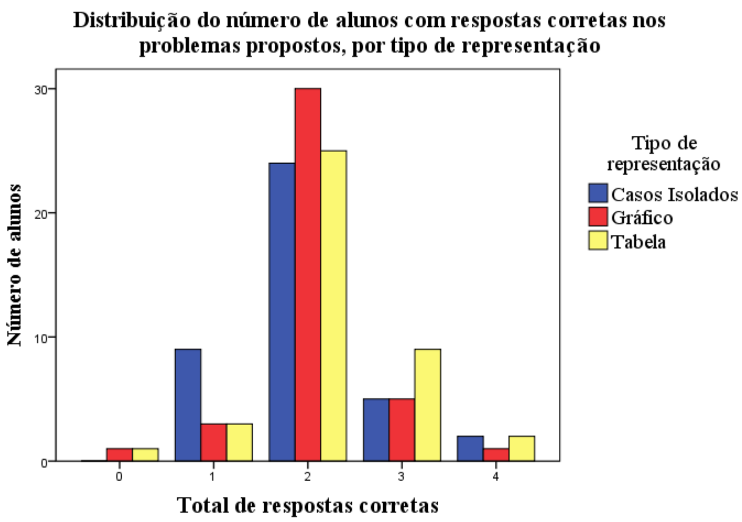


Figura 2: Respostas corretas por tipo de representação.

A Figura 3 mostra exemplos de resoluções de alunos nos problemas de representação de informação com gráfico de barras, tabelas e casos isolados.

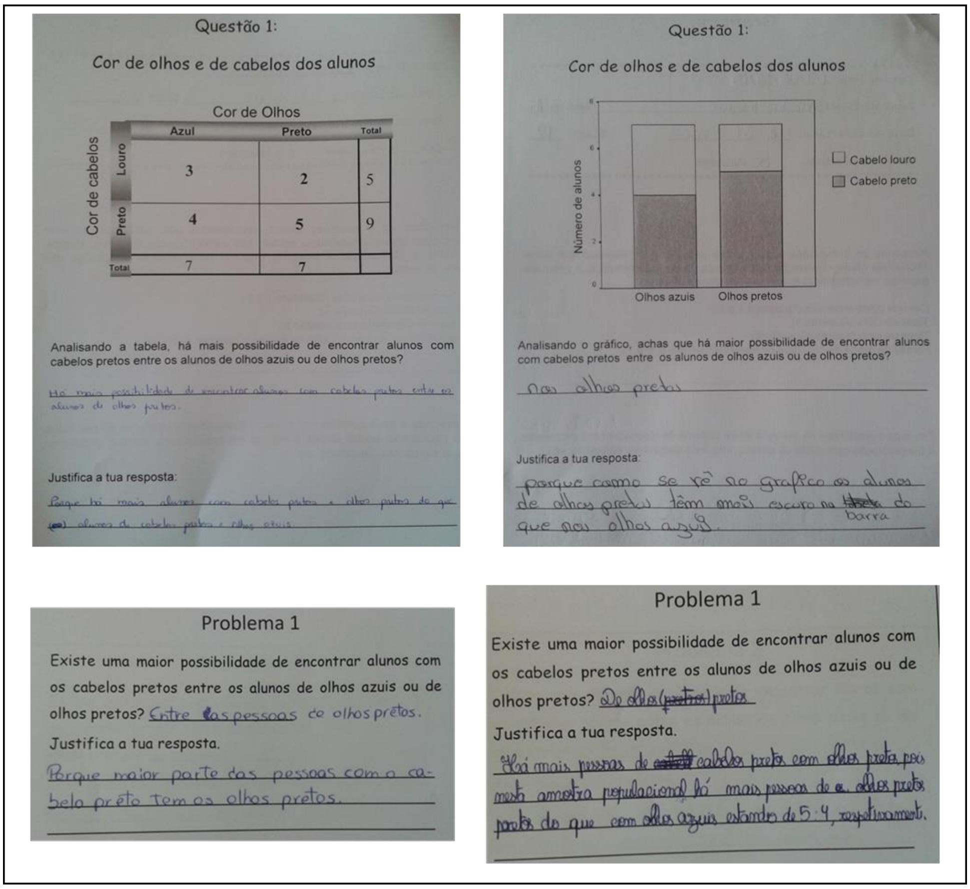


Figura 3: Respostas dos alunos a um mesmo problema com representações diferentes dos dados.

Em cada um dos grupos, há alunos com todas as respostas certas. Há um grande número de alunos que acerta dois problemas. A análise das explicações dos alunos permitiu distinguir quatro categorias: 1) válida - atende às relações entre quantidades e produz explicação certa; 2) não quantifica e produz explicação errada; 3) refere o total; 4) inconclusivo, ou ausência de resposta. A Tabela 2 resume as explicações obtidas.

Tabela 2: Explicações dos alunos (Máx. 480 respostas).

Tipo de explicação	Tipo de representação		
	CI	GB	T
Válida	119	112	114
Não quantifica	16	23	10
Refere total	-	3	10
Inconclusivo	25	22	16

Muitas das respostas dos alunos são acompanhadas de explicações válidas, sugerindo que as respostas não foram obtidas ao acaso. Divergindo de Carvalho (2008), os alunos parecem ter dificuldades na interpretação de informação apresentada em casos isolados, gráficos de barras e tabelas, pelo que maior atenção deve ser dada a estes tipos de representação de informação na aula de matemática.

Carvalho, L. M. T. (2008). *O papel dos artefactos na construção de significados matemáticos por estudantes do ensino fundamental*. Acedido a 03/01/2015, em http://www.repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/3016/1/2008_Tese_LMTLCarvalho.pdf

Ketele, J., & Roegiers, X. (1993). *Metodologia da recolha de dados*. Lisboa: Instituto Piaget.

Grupo de Discussão 2

As representações e o conhecimento profissional dos professores

AS REPRESENTAÇÕES E O CONHECIMENTO PROFISSIONAL DOS PROFESSORES

Isabel Vale

Escola Superior de Educaçao, Instituto Politécnico de Viana do Castelo

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Teresa Pimentel

Escola Superior de Educaçao, Instituto Politécnico de Viana do Castelo

terpimentel@gmail.com

Os professores, durante o processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar, devem valorizar, e encorajar os seus alunos a utilizar, uma diversidade de ferramentas de modo a promover a compreensão e a discussão dos conceitos matemáticos. Entre essas ferramentas situam-se as representações (NCTM, 1991; NCTM, 2000). De facto, entende-se que fazer matemática pressupõe o uso de várias representações de uma ideia e da resolução de um problema de modo a poder comunicar o pensamento. Toda a atividade matemática necessita de recorrer a representações, sendo estas entidades usadas para explicar algo e constituindo um importante meio para o desenvolvimento de uma aprendizagem matemática com compreensão, uma vez que facilitam o acesso, por parte de todos os alunos, a ideias abstratas, à linguagem e ao raciocínio. Assim, para facilitar a aprendizagem, os professores devem saber como interpretar e representar os conceitos matemáticos que pretendem que os seus alunos aprendam. De certo modo, pode-se dizer que as representações são a linguagem da matemática (Friedlander & Tabach, 2001) ou então que muita da aprendizagem matemática é, de fato, uma aprendizagem sobre representações (Diezmann & McCosker, 2011). A sua utilidade na aprendizagem da matemática torna-se notória se se olhar uma representação não somente como uma imagem (e.g. gráfico, tabela, diagrama) mas como um processo de iluminação de uma ideia. Em particular, a interpretação e tradução de representações são ações que promovem o pensamento dos alunos ajudando-os a construir imagens mentais dos conceitos matemáticos.

Muitos autores recomendam que se utilizem múltiplas representações desde muito cedo na aprendizagem dos conceitos, pois o uso limitado dessas representações pode conduzir a obstáculos no processo de uma aprendizagem significativa. Por exemplo, como refere Kieran (1992) isto acontece no ensino da álgebra quando se utiliza apenas expressões simbólicas.

Mais especificamente podemos referir situações em que as múltiplas representações podem promover a aprendizagem: (a) é altamente provável que diferentes representações expressem diferentes aspetos de forma mais clara e, por isso, a informação obtida a partir de representações que combinam será maior do que a que pode ser adquirida partir de uma representação única; (b) várias representações limitam-se umas às outras, de modo que o espaço para operar em cada uma torna-se menor; e (c) para relacionar múltiplas representações, o aluno tem de se envolver em atividades que promovam a compreensão.

De acordo com alguns autores (Behr, Harel, Post & Lesh 1992; Lesh, Post & Beher, 1987; Tripathi, 2008) podemos identificar cinco tipos de representações que ocorrem durante a aprendizagem matemática e a resolução de problemas e que são do tipo: contextual (situações da vida real); concreto (manipulável); semiconcreto (pictórico); verbal (linguagem); e simbólico (notação). Esta classificação ajuda a diferenciar as muitas formas de um conceito matemático, mas também indica como desenvolver as capacidades necessárias na compreensão de um conceito. Cada uma das representações é uma manifestação de um aspeto do conceito e envolve diferentes níveis cognitivos. Assim, a representação é rica se contém bastantes aspetos ligados ao conceito. Uma representação matemática apenas ilustra muitas das vezes um dos aspetos do conceito. Só temos uma imagem holística do conceito quando olharmos para essa ideia a partir de diferentes perspetivas. À medida que o número de pontos de vista aumenta desenvolvemos uma visão do conceito mais rica e profunda. Representar um conceito é criar uma imagem dele. A visualização é um dos processos pelo qual as representações mentais podem aparecer.

Os conceitos matemáticos surgem da interação entre o sistema de signo/símbolo e os contextos de referência/objetos. Esta simbologia está ligada ao que Dreyfus (1991) distingue na atividade matemática como sendo as *representações simbólicas*. Além destas, aquele autor ainda considera as *representações mentais*. Estas ocorrem quando falamos ou pensamos sobre qualquer objeto ou processo matemático e que cada um de nós relaciona com algo que tem em mente. É outra forma de utilizar os objetos matemáticos. Enquanto que a representação simbólica é escrita, ou falada, com a finalidade de facilitar a comunicação sobre o conceito, uma representação mental refere-se a esquemas internos que uma pessoa usa para interatuar com o mundo exterior e que pode diferir de pessoa para pessoa.

Sendo o professor o principal agente de mudança na sala de aula, debrucemo-nos na figura do professor. Este detém um conhecimento profissional que vai evoluindo e que está orientado para uma atividade prática – ensinar matemática. Deste modo, embora envolva vários tipos de conhecimento sobre a matemática e o seu ensino e também educacionais, interessa-nos sobretudo o que se refere à prática letiva, aquele em que se faz sentir de modo mais forte a especificidade da disciplina de matemática e que designamos por conhecimento didático (Ponte, 2008).

É consensual que os professores precisam de ter um conhecimento de conteúdo profundo uma vez que vai afetar o que ensinam e como ensinam (Ponte & Chapman, 2008). Esta ideia é também assinalada por Ma (1999) quando argumenta que para compreender e explicar os conceitos matemáticos e para estabelecer conexões para além desse conceito tem de deter um profundo conhecimento da matemática fundamental. A compreensão da relação entre ideias simples e fundamentais em matemática reflete-se num ensino unificado dos conhecimentos em vez de um ensino fragmentado de tópicos isolados. Também a consideração de múltiplas perspetivas e diferentes abordagens a ideias matemáticas conduz a uma compreensão flexível da disciplina.

No entanto, o importante não é a quantidade de matemática que se trabalha em qualquer programa de formação (inicial, contínua, etc.) mas sim as oportunidades que são dadas a esses professores de descompactar o conhecimento matemático de modo a torná-lo compreensível para os alunos. Esta ideia de descompactar o conhecimento matemático é apresentada por Hill, Ball e Schilling (2008) como forma de promover o conhecimento didático.

É aqui que se espelha a importância das representações na prática letiva. Os professores utilizam várias representações na sua prática e estas influenciam o modo como os alunos compreendem os conceitos. Para ir de encontro a uma utilização eficaz de múltiplas representações o professor deve ter um conjunto específico de tarefas e de questões para as desenvolver e aplicar.

Neste sentido, este grupo surge como um espaço onde pretendemos desenvolver uma maior compreensão sobre a investigação que incide sobre as representações matemáticas e as suas ligações com o conhecimento profissional do professor, através das discussões suscitadas pelos estudos apresentados pelos participantes.

As comunicações recebidas, em pequeno número, debruçam-se todas sobre o conhecimento matemático dos professores, com um enfoque substancial no conhecimento matemático para ensinar na linha de Ball, Thames e Phelps (2008). Distribuem-se pelos temas matemáticos da Geometria, da Estatística e dos Números Racionais. Três desenvolvem-se no âmbito da formação inicial de professores e uma abrange a formação contínua. As outras duas estudam professores em serviço. Esta disparidade dificultou a organização do grupo de discussão por temas.

Optou-se por escolher para o primeiro momento estudos no âmbito da formação inicial de professores com o tema da Geometria. O trabalho de Giraldo, Neto, Corrêa e Ribeiro incide sobre a articulação entre representações geradas por tecnologias digitais e outras formas de representações para conceitos matemáticos e o modo como o conhecimento combinado de conteúdo e tecnológico de alunos de um curso de formação inicial de professores pode auxiliar na tomada de decisões. A comunicação de Brunheira e Ponte incide numa experiência de formação com futuros professores com foco na classificação de quadriláteros, estudando a compreensão dos alunos das propriedades das figuras bem como os fatores que influenciam essa compreensão. No segundo momento conta-se o trabalho de Ribeiro e Montes em que se estudam tarefas envolvendo números racionais e a análise por futuros professores das múltiplas representações usadas pelos alunos nas respostas que dão. Por seu lado, a comunicação de Nakayama abrange alunos de cursos de Pedagogia e professores da rede pública tendo por base a identificação e análise dos mitos que sustentam as suas representações. Por fim, o trabalho de Ribeiro, Powell e Caldeira refere-se aos contributos duma formação contínua em geometria baseada na modelação para o conhecimento matemático para ensinar.

No terceiro momento, o trabalho de Duque, Martins, Coelho e Vale relata um estudo incidente em representações estatísticas de crianças do pré-escolar, com resultados sobre o conhecimento estatístico para ensinar de professores em serviço. Por último, o trabalho de Gonçalves e Gomes analisa as produções escritas de professores do primeiro ciclo, em serviço, numa prova nacional de avaliação de conhecimento, no que se refere ao tema da Geometria.

A atividade deste grupo de discussão será desenvolvida em dois momentos procurando analisar, discutir e refletir em conjunto as principais ideias presentes nas comunicações apresentadas. Almejando uma melhor compreensão da temática das representações, e com o objetivo de complementar ideias levantadas pelas comunicações apresentadas, serão lançadas à discussão questões tais como: (Q1) No conjunto das diferentes representações, qual é a importância dada pelos professores às representações visuais? (Q2) Haverá tópicos matemáticos que exigem menor recurso a múltiplas representações? (Q3) Que papel desempenham as representações digitais no desenvolvimento dos conceitos matemáticos? (Q4) Que práticas ligadas ao uso de representações são promotoras de melhores aprendizagens dos alunos? (Q5) Qual o contributo da investigação em representações para o conhecimento profissional do professor?

Referências

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 5*, 389-407.

Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing Company.

D. Diezmann, M. Carmel, & N. McCosker (2011). Reading students' representations. *Teaching Children Mathematics*, *18*(3), 162-169.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *Proceedings 15th PME Conference*, Vol I, pp. 33-48. Assis: PME.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *2001 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics: The Role of Representation in school Mathematics* (pp. 173-185). Reston, Virginia: NCTM.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan Publishing Company.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática.* Lisboa, APM/IIE, 1994].

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM. [Tradução portuguesa: *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa, APM, 2007].

Ponte, J. P. (2008). A investigação em educação matemática em Portugal: Realizações e perspectivas. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 55-78). Badajoz: SEIEM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education, 2nd Edition* (pp. 223-261). New York: Taylor and Francis.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representation. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(8), 438-445.

Comunicações – GD2

A INFLUÊNCIA DAS REPRESENTAÇÕES NA CLASSIFICAÇÃO DE QUADRILÁTEROS EM FUTURAS PROFESSORAS E EDUCADORAS

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
lbrunheira@eselx.ipl.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa

Resumo: Esta comunicação diz respeito a uma experiência de formação com futuras professoras e educadoras do 2.º ano de uma LEB, focada na aprendizagem da classificação de quadriláteros, a qual foi promovida por um ensino de natureza exploratória. Os dados apresentados, recolhidos por registos áudio e vídeo e das produções escritas das formandas, focam-se na compreensão que evidenciam sobre as propriedades das figuras e suas relações, bem como nos fatores que influenciam esta aprendizagem. Os resultados mostram que a classificação hierárquica depende principalmente da robustez do conceito-imagem, da identificação dos atributos críticos das figuras, do domínio do raciocínio dedutivo e da visualização.
Palavras-chave: geometria, raciocínio, visualização, efeito protótipo, formação inicial.

Introdução

Nas últimas décadas, a investigação em educação tem apontado para uma valorização do ensino da geometria capaz de conciliar uma vertente mais formal e dedutiva com outra que apela à intuição, à criatividade e à descoberta. Tal como destaca Abrantes (1999):

> A geometria é uma fonte de problemas de vários tipos: de visualização e representação; de construção e lugares geométricos; envolvendo transformações geométricas; em torno das ideias de forma e de dimensão; implicando conexões com outros domínios da Matemática… Apelando a processos de "organização local" da Matemática, nomeadamente de classificação e hierarquização a partir de determinadas definições e propriedades. (p. 156)

Contudo, um ensino consistente com esta visão da geometria levanta grandes desafios à formação de professores, quer no que respeita ao desenvolvimento do conhecimento matemático, quer do conhecimento didático, tanto mais que os estudos existentes em

Portugal e noutros países sobre o conhecimento geométrico de professores e futuros professores revelam muitas fragilidades (Clements & Sarama, 2011; Fujita & Jones, 2006; Menezes, Serrazina & Fonseca, 2014; Tempera, 2010). Assim, assumindo que a investigação tem um importante papel a desempenhar na melhoria destes resultados, procuramos compreender a forma como futuros educadores e professores desenvolvem o seu raciocínio geométrico e o papel da visualização espacial, no contexto de uma experiência de formação desenvolvida numa unidade curricular sobre geometria que integra o 2.º ano do plano de estudos de uma Licenciatura em Educação Básica (LEB). Neste artigo focamo-nos no desempenho de uma turma de formandas no processo de classificar, analisando ainda a influência das representações imagéticas no raciocínio geométrico.

A formação de professores dos anos iniciais em geometria

Atualmente, a perspetiva de que os futuros professores precisam de desenvolver uma compreensão profunda de ideias fundamentais da Matemática (NCTM, 1994) é uma ideia presente em muitos estudos e programas de formação, muito embora com interpretações e formas de concretizar que podem divergir bastante. Para o NCTM (1994), o conhecimento matemático necessário ao professor inclui o domínio de diferentes tipos de raciocínio matemático, formas de resolver problemas e de comunicar Matemática eficazmente, a compreensão de conceitos, de procedimentos específicos e do processo de fazer matemática. Em geometria, os professores dos anos iniciais devem compreender como ela é usada para descrever o mundo em que vivemos e resolver problemas, saber analisar figuras bi e tridimensionais, produzir argumentações e justificações e privilegiar a visualização espacial. Em Portugal, o documento produzido por Albuquerque et al. (2005) sugere que a formação dos professores inclua uma perspetiva histórica do tema, um foco na visualização e a representação espacial, o tratamento das formas geométricas básicas, suas propriedades e relações, transformações geométricas, dando igualmente atenção à comunicação. Esta formação deverá desenvolver-se em torno de atividades próprias da matemática, como a formulação e resolução de problemas, e incluir processos a ela associados: formulação de conjeturas, teste e validação, argumentação, prova e refutação, sem ignorar o recurso à tecnologia ou outras ferramentas e materiais.

No que diz respeito à abordagem metodológica, Watson e Mason (2007) sugerem que o trabalho a desenvolver deve partir de tarefas matemáticas que promovam o pensamento matemático dos futuros professores e desenvolvam a sua perceção sobre o poder dessas tarefas, uma orientação consistente com a ideia de Ponte e Chapman (2008) de que, na formação inicial, os futuros professores devem aprender segundo os mesmos métodos que se preconiza que venham a utilizar nas suas práticas. Nesta perspetiva, surge com especial interesse o ensino exploratório, um tipo de ensino assente essencialmente em tarefas de cunho exploratório e investigativo, onde cabe a quem aprende uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento, e numa dinâmica de aula em que se reserva um espaço significativo ao trabalho dos alunos sobre as tarefas, a par de momentos de discussão e negociação de significados (Ponte, 2005).

O papel das representações no raciocínio geométrico

Como afirma Duval (1998), todos os processos de raciocínio dependem da forma como a informação é apresentada e está organizada. No caso específico da geometria, essa informação é dada segundo uma organização visual a partir da qual nós podemos nomear objetos, levantar questões e conjeturas sobre esses objetos e suas relações. Também para Battista (2008), em geometria "nós raciocinamos *sobre* objetos; nós raciocinamos *com* representações" (p. 342), pelo que é fundamental ter em conta a natureza de ambos para analisar o raciocínio em geometria. Para o autor, os objetos podem físicos, como um desenho num papel ou uma construção feita num AGD, ou podem ser conceitos formais. Por seu turno, as representações podem ser internas ou externas e podem ser verbais ou imagéticas. Porém, como alerta o autor, é preciso ter em conta que a mesma entidade pode ser uma representação para uma pessoa e um objeto para outra.

Numa perspetiva semelhante, Mariotti (1992) aborda as figuras geométricas associando-lhes duas dimensões: uma dimensão figurativa (associada às representações) e uma dimensão conceptual (de natureza abstrata e estabelecida pela sua definição) que se articulam formando o que Fischbein (1983) chama de *conceito figurativo*. A articulação entre estas duas dimensões levanta várias dificuldades e conduz a erros comuns que têm sido alvo de investigação (Battista, 2007; Clements, 2003). Uma das dificuldades mais frequentes deriva de os alunos raciocinarem sobre a representação material, em vez de o fazerem sobre a figura, ou seja, o objeto teórico regido por uma definição. Este facto é explicado por Vinner (1983) ao afirmar que, quando ouvimos ou lemos o nome de um conceito que conhecemos, ou quando resolvemos uma tarefa, a nossa memória é estimulada e evoca algo. Contudo, raramente aquilo que evoca é a definição formal do conceito, mas antes um conjunto de representações visuais, imagens, propriedades ou experiências – um conjunto que constitui aquilo a que chama *conceito-imagem*. No caso dos conceitos geométricos, o *conceito-imagem* pode incluir várias representações que o indivíduo recorda como exemplos do conceito e um conjunto de propriedades a ele associadas. Acontece que os exemplos que um indivíduo recorda podem ser afetados de forma adversa por um ensino desadequado, conduzindo a vários erros comuns. As propriedades incluídas no *conceito-imagem* podem não ser todas corretas e até podem incluir propriedades físicas irrelevantes. Esta restrição dos conceitos a um conjunto de elementos que é utilizado de forma recorrente é frequentemente designada por *efeito protótipo*, tem sido estudado por vários investigadores (por exemplo, Fujita, 2012; Herskowitz, 1989; Presmeg, 1992) e será abordado adiante a propósito do processo de classificar.

O processo de classificar em geometria

Classificar consiste em declarar uma equivalência entre objetos com semelhanças entre si mas visualmente diferentes, o que implica considerar cada caso como um caso particular de uma classe de objetos. Por outras palavras, segundo Mariotti e Fischbein, "o processo de classificar consiste em identificar as propriedades comuns e relevantes que determinam a categoria" (1997, p. 244). Contudo, as classificações formais recorrem frequentemente a critérios estruturais que não são imediatamente claros e estão longe dos critérios percetuais aos quais estamos habituados a remeter a nossa atividade espontânea de classificar. Mais concretamente, Herskowitz (1989) assinala a necessidade de distinguir entre atributos críticos e atributos não-críticos: por exemplo, a congruência entre lados consecutivos é um atributo não-crítico no retângulo, pois os lados consecutivos podem ou não ser congruentes; já a congruência dos quatro ângulos é um atributo crítico, pois se o quadrilátero não tiver este atributo não pode ser um retângulo. Além disso, para Markman (1989), compreender as relações hierárquicas entre as figuras envolve os seguintes aspetos:

- Compreender que uma figura pode ser classificada de formas distintas e ser nomeada com diferentes designações;
- Compreender as relações de transitividade entre diferentes conceitos, ou seja, compreender que, por exemplo, se um quadrado é um losango e se este é um paralelogramo, então um quadrado é um paralelogramo;
- Compreender a assimetria das relações entre quadriláteros, como por exemplo, que todos os retângulos são paralelogramos, mas que nem todos os paralelogramos são retângulos;

Compreender a assimetria entre os atributos críticos dos quadriláteros: por exemplo, os atributos críticos dos retângulos estão incluídos nos quadrados, mas que os atributos críticos do quadrado não estão incluídos no retângulo.

Apesar do interesse matemático e didático da classificação hierárquica dos quadriláteros, esta é uma área em que a investigação tem mostrado existirem várias dificuldades que afetam alunos de vários níveis de ensino, bem como futuros professores, e são evidenciadas em estudos de diferentes países (de Villiers, 1994; Fujita, 2012; Fujita & Jones, 2007; Tempera, 2010). Os estudos revelam que o raciocínio geométrico é frequentemente afetado pelas imagens mentais das figuras, na maioria das vezes pouco flexíveis (efeito protótipo). Há uma percentagem reduzida de indivíduos que admite a hierarquia entre quadriláteros e, frequentemente, é capaz de estabelecer relações entre algumas figuras, mas não entre outras, um problema que afeta alunos de diferentes níveis de ensino, bem como professores (Okazaki & Fujita, 2007). Os estudos revelam ainda que o conhecimento da definição não é suficiente para a correta classificação das figuras, já que muitas vezes o raciocínio produzido não é consistente com a definição enunciada.

Para Herskowitz (1989), os indivíduos que analisam as figuras com base na figura protótipo, tendem a fazer dois tipos de "julgamentos prototípicos": 1) o exemplo protótipo é usado como base, mas o julgamento foca-se na sua representação visual; 2) o exemplo protótipo é usado como base, mas o julgamento tem por base as suas propriedades, sejam elas específicas da classe ou não. Por exemplo, neste nível de compreensão, um aluno pode afirmar que um retângulo não é um paralelogramo porque não é "inclinado" (julgamento tipo 1) ou argumentar no mesmo sentido, dizendo que o paralelogramo não tem ângulos retos (julgamento tipo 2).

Para Fujita e Jones (2007), a complexidade da classificação hierárquica entre quadriláteros resulta também da dificuldade em raciocinar dedutivamente. Na sua opinião, a questão-chave é saber como é que os indivíduos deixam de olhar para as "figuras" como objeto do seu estudo, através da análise das suas propriedades, e passam a olhar para as "propriedades geométricas das figuras" como objeto de estudo, focando-se no raciocínio dedutivo.

Metodologia de investigação

Este artigo insere-se num estudo mais amplo que visa, como já referimos, compreender a forma como os formandos de uma LEB raciocinam geometricamente. Adicionalmente, pretendemos reformular a unidade curricular de Geometria na qual decorre o estudo, concebendo estratégias e ferramentas de ensino, que são aperfeiçoadas em consonância com o conhecimento que vamos construindo. Desta forma, optámos pela metodologia de *design-based research*, na modalidade de experiência de formação (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003) em que a professora tem também o papel de investigadora. Em 2013/14, foi realizada uma primeira experiência de formação com duas turmas que resultou num estudo-piloto e, em 2014/15, uma segunda experiência, desta vez com uma turma (30 formandas), sobre a qual nos debruçaremos neste artigo.

Os dados aqui utilizados dizem respeito à primeira unidade lecionada (*Triângulos e Quadriláteros*) e foram recolhidos a partir dos registos áudio e vídeo das aulas, bem como das produções escritas das formandas na sala de aula. Foi ainda aplicado um teste diagnóstico a toda a turma no primeiro dia de aulas e, de seguida, realizadas entrevistas a quatro formandas com perfis diferentes[7].

A unidade *Triângulos e Quadriláteros* desenvolveu-se a partir de quatro tarefas, com uma orientação sequencial assente em três fases: 1) exploração/investigação sobre quadriláteros com recurso ao *Geogebra*, 2) classificação de triângulos e quadriláteros e 3) definição de quadriláteros. As tarefas foram criadas de modo a que as formandas descobrissem as propriedades invariantes dos quadriláteros e estabelecessem relações entre eles. De maneira geral, as aulas seguiram uma abordagem exploratória: a tarefa foi

[7] Foram tidos em conta o percurso escolar, o grau de dificuldade que declararam sentir em geometria e as suas intenções sobre o futuro profissional.

introduzida brevemente pela professora, seguiu-se uma fase de trabalho em pequenos grupos (podendo ser antecedida por trabalho individual), discussão das conclusões apresentadas pelos grupos e síntese final. Ao longo das aulas, a professora apoiou o trabalho dos grupos, geriu a discussão e promoveu a síntese das ideias trabalhadas.

Neste texto começamos por apresentar alguns dados recolhidos do teste diagnóstico e das entrevistas iniciais que constituem um indicador relativamente à forma como as formandas encaravam a classificação hierárquica dos quadriláteros no início da unidade curricular. De seguida, apresentamos dados recolhidos durante a realização da tarefa sobre classificação, nomeadamente, registos escritos referentes a um grupo de questões e transcrições de diálogos de um dos grupos a propósito das suas resoluções.

A análise dos dados recorre a uma metodologia mista. Para analisar a forma como os futuros professores classificam quadriláteros, recorremos a um modelo (ver Quadro 1) proposto por Fujita (2012). Do ponto de vista dos conceitos teóricos envolvidos, temos em conta a teoria dos conceitos figurativos de Fischbein (1993) e a distinção proposta por Herskowitz (1989) sobre julgamentos prototípicos. Com este quadro, pretendemos distinguir os níveis de compreensão sobre a classificação inclusiva de quadriláteros. A tabela 1 ilustra a forma como se organiza este quadro para a família dos paralelogramos mas, analogamente, podem construir-se outros quadros para a família dos trapézios ou papagaios. Nos casos da família dos retângulos ou dos losangos, o quadro tem menos uma categoria (classificação parcialmente prototípica) uma vez que o único tipo de quadrilátero pertencente àquelas classes é o quadrado. Apesar de existir uma hierarquia entre os níveis de compreensão relativos a cada quadrilátero, estes níveis são independentes quando comparamos diferentes quadriláteros.

Quadro 1: Níveis de compreensão das relações inclusivas na classe dos paralelogramos.

Nível	Descrição
Classificação Hierárquica	Os quadrados, retângulos e losangos são entendidos como paralelogramos. A “relação de sentido oposto à inclusão” é entendida.
Classificação parcialmente prototípica	Os conceitos figurativos começam a estender-se. Por exemplo, aceitam que os losangos sejam casos de paralelogramos, mas os quadrados e os retângulos não.
Classificação prototípica	Os conceitos figurativos são muito limitados. A análise que fazem das figuras é com base em protótipos, seja a partir da sua representação, seja das suas propriedades.
0	Não existe conhecimento elementar sobre paralelogramos.

Finalmente, além distinguir os desempenhos das formandas relativamente à classificação de quadriláteros, interessa-nos compreender ainda as suas estratégias de raciocínio, as quais emergiram dos dados.

Resultados

O teste diagnóstico de escolha múltipla continha uma questão relativa ao conhecimento da hierarquia entre quadriláteros, particularmente entre quadrados e retângulos. Os resultados das 28 respostas obtidas mostram que, cerca de 1/3 (9 respostas) considerava verdadeira a afirmação “todos os quadrados são retângulos”. Posteriormente, na entrevista às quatro formandas (que coincidentemente responderam bem a esta questão), percebemos que apenas uma compreendia a razão daquela relação (respondendo “porque tem quatro ângulos retos”), duas não conseguiam explicá-la e a quarta raciocinava incorretamente (“porque a partir de um retângulo posso fazer um quadrado”). Estes dados confirmam o que já havia ocorrido no estudo-piloto, ou seja, que há algumas formandas que conhecem esta relação, mas apenas como um facto e não algo que compreendam.

A tarefa relativa à classificação, sobre a qual focaremos a nossa discussão, apoiou-se significativamente na investigação anterior sobre as propriedades dos quadriláteros. Esta investigação foi realizada com recurso ao *Geogebra* e a construções dinâmicas de cada quadrilátero notável que as formandas deveriam manipular para descobrir as suas propriedades invariantes.

Na tarefa sobre classificação, as formandas preencheram um diagrama de Venn e um fluxograma (Figura 1) e responderam à questão 4 (Figura 2):

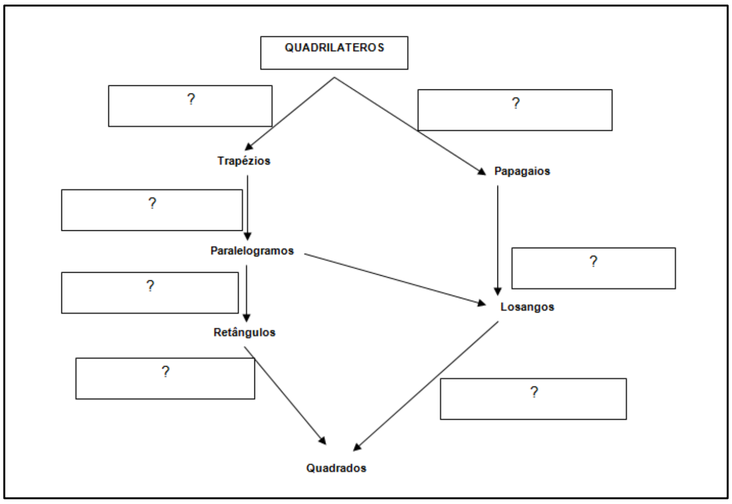


Figura 1: Fluxograma para preenchimento das propriedades em falta.

4. Analisa agora as seguintes afirmações quanto à sua veracidade. Se forem falsas apresenta um contraexemplo, se forem verdadeiras justifica-as.
   a. Todos os quadrados são retângulos;
   b. Todos os paralelogramos são retângulos;
   c. Todos os quadrados são papagaios.

Figura 2: Questão 4 da tarefa sobre classificação de quadriláteros.

Para esta pergunta, a professora pediu para que, antes de discutirem no grupo as suas ideias, registassem individualmente a sua resolução. Depois do trabalho anterior, a primeira afirmação pareceu ser de fácil resolução para toda a turma, já que as 24 formandas presentes nesse dia responderam corretamente, apresentando uma resposta com nível correspondente à classificação hierárquica. As justificações apresentadas são muito semelhantes à resposta da figura 3, havendo apenas a assinalar 3 formandas que fundamentaram a veracidade da afirmação unicamente com base na existência de quatro ângulos retos. Apenas uma formanda deu uma resposta mais superficial, dizendo que a afirmação é verdadeira porque "as propriedades do quadrado vão ao encontro às do retângulo".

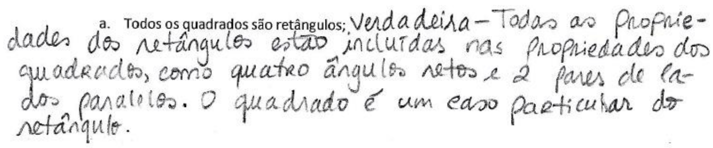

a. Todos os quadrados são retângulos; Verdadeira – Todas as propriedades dos retângulos estão incluídas nas propriedades dos quadrados, como quatro ângulos retos e 2 pares de lados paralelos. O quadrado é um caso particular do retângulo.

Figura 3: Resposta de Isabel à questão 4a.

A segunda afirmação registou um sucesso semelhante, uma vez que apenas duas formandas erraram, considerando a afirmação verdadeira. As restantes 22 respostas apresentadas são corretas, com diferentes níveis de sofisticação, potencialmente reveladoras de formas de pensar diferentes. Entre estas respostas, 14 argumentam com base nas propriedades dos paralelogramos e dos retângulos, mostrando compreender a assimetria entre os atributos críticos dos quadriláteros. Consequentemente, estas respostas revelam também a compreensão da assimetria entre as relações destes quadriláteros, como mostra a resposta apresentada na figura 4.

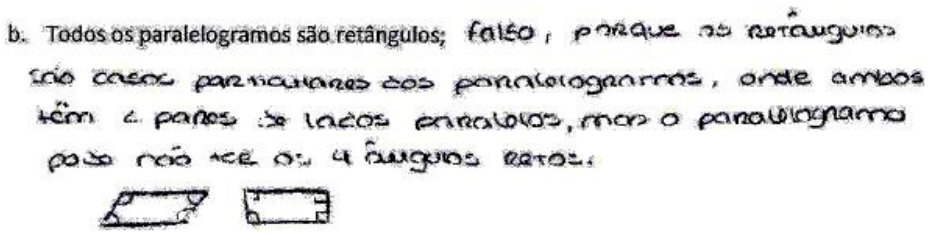

b. Todos os paralelogramos são retângulos; Falso, porque os retângulos são casos particulares dos paralelogramos, onde ambos têm 2 pares de lados paralelos, mas o paralelogramo pode não ter os 4 ângulos retos.

Figura 4: Resposta de Anabela à questão 4b.

Note-se ainda que, no entanto, nem todas as formandas demonstram o rigor apresentado na resposta anterior, onde se diz que "o paralelogramo **pode** não ter os 4 ângulos retos", afirmando em vez disso que "os paralelogramos não têm os quatro ângulos retos".

Além das 14 respostas referidas, outras 4 respostas baseiam-se apenas assimetria das relações entre o paralelogramo e o retângulo, 3 dão respostas corretas mas pouco claras.

No que diz respeito à terceira afirmação, começamos por notar que a relação entre o quadrado e o papagaio não é, ao contrário das questões anteriores, uma relação "direta" se nos basearmos na hierarquia dos quadriláteros apresentada no fluxograma da tarefa. Ou seja, neste diagrama, os quadrados relacionam-se diretamente com os losangos, e estes com os papagaios. O domínio da relação de transitividade responde facilmente à questão, no entanto, analisando o tipo de respostas obtidas (Quadro 2) vemos que o sucesso foi muito diferente:

Quadro 2: Desempenho das formandas relativamente à questão 4c.

<table>
<tr><td>Nível</td><td colspan="2">Classificação Hierárquica</td><td>Classificação parcialmente prototípica</td><td>Classificação prototípica</td></tr>
<tr><td>Frequências</td><td colspan="2">10 (42%)</td><td>7 (29%)</td><td>7 (29%)</td></tr>
<tr><td>Tipo de resposta</td><td>Recorre à transitividade
3 (12,5%)</td><td>Recorre às propriedades das figuras
7(29%)</td><td>Apenas reconhece relações “diretas”</td><td>Responde com base nas propriedades e/ou imagem da figura prototípica</td></tr>
</table>

Analisemos então algumas respostas correspondentes a estas categorias. No grupo das 10 formandas que responderam corretamente (nível de classificação hierárquica), existem três formandas que responderam diretamente usando a relação de transitividade atrás referida, sem referir quaisquer propriedades e, portanto, usando apenas raciocínio lógico. Os restantes 7 deram respostas semelhantes à apresentada na figura 5, distinguindo-se entre si pela quantidade de propriedades que mencionam verificar-se nos quadrados e nos papagaios.

c. **Todos os quadrados são papagaios.**

É verdadeiro, uma vez que, para uma figura ter a designação de "papagaio", a figura tem que ter dois pares de lados consecutivos com a mesma dimensão, condição que é satisfeita pelo quadrado, embora este seja um caso particular por ter todos os lados iguais.

Figura 5: Resposta de Carla à questão 4c.

A resposta da figura 6, perfeitamente representativa do grupo de 7 formandas que a deu, corresponde ao nível seguinte, o da classificação parcialmente prototípica. Estas formandas não revelam dúvida quanto à inclusão dos quadrados na classe dos losangos, havendo outras que referem também a inclusão dos losangos na classe dos papagaios. Contudo, parecem ter a conceção de que apenas um tipo de quadrilátero pode ser considerado caso particular de outro.

c. Todos os quadrados são papagaios. F, porque todos os quadrados são losangos. O quadrado é um caso particular do losango.

Figura 6: Resposta de Sandra à questão 4c.

Finalmente, temos um outro grupo de 7 formandas que apresenta respostas correspondentes a um nível de classificação prototípica. A resposta apresentada na figura 7 parece revelar que o raciocínio assenta quer nas propriedades, quer nas imagens prototípicas das figuras em causa. No que diz respeito às propriedades, as formandas parecem não encontrar relação entre a propriedade “quatro lados iguais” e “lados consecutivos iguais dois a dois”, ou seja, não compreendem que a primeira afirmação implica a segunda. Uma hipótese explicativa é a interpretação incorreta da propriedade “lados consecutivos iguais dois a dois”, que pode estar a ser entendida num sentido restrito, ou seja, como sendo “**apenas** lados consecutivos iguais dois a dois” o que coincide e é reforçado pela imagem da figura protótipo.

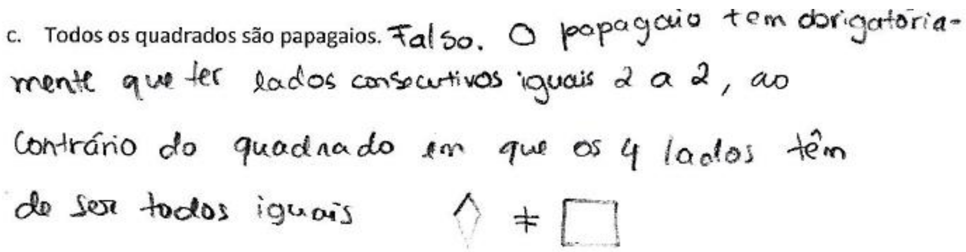

c. Todos os quadrados são papagaios. Falso. O papagaio tem obrigatoriamente que ter lados consecutivos iguais 2 a 2, ao contrário do quadrado em que os 4 lados têm de ser todos iguais ≠

Figura 7: Resposta de Anita à questão 4c.

Para melhor acedermos às razões que poderão impedir os indivíduos de admitir esta relação, analisemos o seguinte episódio decorrido durante o trabalho em pequeno grupo, no momento em que os elementos confrontavam o que cada um escreveu individualmente e discutiam entre si. No registo individual, Tita respondeu corretamente com base na relação de transitividade, Fernanda e Helena deram respostas incorretas cujo fundamento podemos perceber a partir das suas intervenções:

Tita – Os papagaios não tem lados paralelos… quer dizer… Está aqui a dizer “o quadrado é um caso particular de um losango”, se um losango é um papagaio, então… então… Vocês tinham posto falsa, a terceira?

Fernanda – Sim… O losango é um caso particular de um papagaio.

Tita – E se um quadrado é um caso particular de um losango… então é porque também é um papagaio! Ai, não percebo nada… isto não tem sentido nenhum…

Tita – [recorre à folha de registo das propriedades dos quadriláteros] Dois pares de lados consecutivos iguais, um par de ângulos opostos congruentes, as diagonais são perpendiculares, uma das diagonais bisseta a outra. Pois, porque o quadrado tem todas as características do papagaio… E mais. Portanto… tem lógica!

Entretanto, a professora passa pelo grupo e percebe a expressão confusa de Helena:

Prof^{a} – A Helena é que não está convencida… diz lá.

Helena – Não sei…
Profª – Custa-te a aceitar isso, é?
Helena – Sim! Mas acho que também é porque vemos que são tão diferentes… porque um losango e um quadrado ainda são… pronto, agora estes são tão diferentes…
Tita – Pois, para mim também não tem lógica nenhuma…

A professora deixa o grupo a refletir mais um pouco. Apesar de continuarem a pensar no assunto, as formandas continuam confusas:

Helena – Que são descendentes já percebo, só que irrita-me ver que um papagaio não tem lados paralelos, então um quadrado é um papagaio como??? Se um quadrado tem os lados paralelos!
Tita – Sim, sim, os papagaios não têm lados paralelos e os quadrados têm todos.
Helena – os opostos.
Tita – Sim. Não sei o que te diga realmente… Estou confusa.

A primeira reflexão que podemos fazer é que, apesar de Tita ter raciocinado muito bem, quer recorrendo à propriedade transitiva, quer deduzindo a relação a partir dos atributos críticos do papagaio, isso não impede que a formanda questione e se sinta perturbada com as suas conclusões. As afirmações de Helena dão-nos pistas bastante interessantes sobre os obstáculos que esta formanda encontra para aceitar que um quadrado é um caso particular de um papagaio. Por um lado, a representação imagética que Helena associa ao quadrado é muito diferente daquela que associa ao papagaio, o que nos leva à influência determinante das imagens prototípicas. Por outro lado, a análise do ponto de vista das propriedades também não a ajuda porque Helena comete um erro de raciocínio que parece ser frequente: o facto de um quadrilátero não respeitar uma propriedade, não significa que respeite a sua negação. Concretamente, se os papagaios não têm de ter pares de lados paralelos, não significa que não haja papagaios que tenham lados paralelos.

Conclusão

Os resultados apresentados confirmam que, na grande maioria dos casos, a formação no Ensino Básico e Secundário não foi suficiente para promover um conhecimento adequado sobre as propriedades das figuras geométricas. A classificação hierárquica é desconhecida de muitas formandas que naturalmente revelam dificuldade, e até algum desconforto na sua aprendizagem, decorrente da forte conceptualização de muitas das figuras com que trabalham e da sua inexperiência em classificar objetos geométricos.

Nesta fase inicial da aprendizagem sobre o processo de classificar, há vários aspetos que influenciam o estabelecimento de uma hierarquia entre as figuras. Em primeiro lugar, parece-nos claro que as relações não têm todas o mesmo grau de dificuldade: quanto mais "direta" for a relação entre as figuras, mais fácil é a aceitação de uma relação hierárquica entre si. Em segundo lugar, o estabelecimento desta relação hierárquica depende efetivamente da identificação dos atributos críticos das figuras (Herskowitz, 1989) que, por sua vez, depende do conjunto de representações imagéticas que o indivíduo associa às figuras. Em última análise, é possível deduzir toda a hierarquia entre as figuras analisando apenas o conjunto das suas propriedades, como sugerem Fujita e Jones (2007), contudo, os dados apresentados indicam que isso pode ser insuficiente se as representações mentais contrariarem tal raciocínio.

A conclusão anterior conduz-nos ao papel da visualização. Como afirma Herskotiwz (1989), por um lado não podemos formar uma imagem de um conceito sem visualizarmos os seus elementos mas, por outro, esses elementos podem limitar o conceito-imagem. Nos diálogos apresentados, parece-nos claro que existe um repertório limitado de representações que constituem o conceito-imagem de papagaio, o que impõe um obstáculo importante ao raciocínio geométrico, nomeadamente ao raciocínio dedutivo. Contudo, além da necessidade de alargar o conjunto de representações associadas ao conceito, consideramos igualmente importante a sua estruturação espacial (Battista, 2008), ou seja, o reconhecimento da forma como os elementos da figura se organizam e relacionam. Se o modelo mental que um individuo tem sobre um papagaio destacar a propriedade "dois pares de lados consecutivos iguais", podemos procurar visualizar os restantes quadriláteros destacando igualmente essa propriedade, tal como na figura 8, o que nos leva a compreender a razão pela qual as figuras pertencem todas à mesma classe. Analogamente, podemos destacar a propriedade "diagonais perpendiculares, com uma das diagonais a bissetar a outra", como mostra a figura 9.

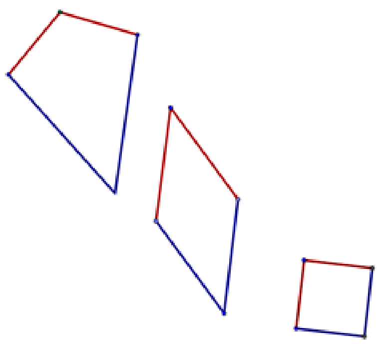


Figura 8: Família dos papagaios com as relações entre os lados destacadas.

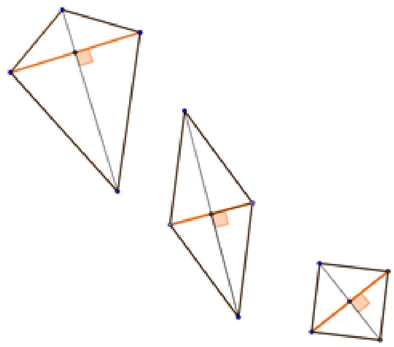


Figura 9: Família dos papagaios com as relações entre as diagonais destacadas.

Ainda no que se refere aos aspetos que influenciam o desempenho no processo de classificar, acrescentamos o domínio do raciocínio lógico, associado à interpretação da linguagem. De facto, parece-nos que afirmações como "figura com dois lados iguais" é entendida muitas vezes como tendo "exatamente dois lados iguais". Da mesma forma, dizer que "um retângulo é um paralelogramo" pode ser entendido como "ser o mesmo que", pelo que é importante a diversificação da linguagem, incluindo a ideia de classe ou de caso particular.

Finalmente, do ponto de vista da metodologia utilizada, destacamos a relevância do ensino exploratório e, em particular, de tarefas que conduzam à formação de conceitos e descoberta de propriedades, bem como a importância dos momentos de discussão, aqui retratados nos diálogos do grupo. A classificação hierárquica só pode ser verdadeiramente compreendida se houver uma participação ativa dos alunos na sua construção, se houver discussão e uma negociação de significados. Foi dessa forma que as formandas expuseram o seu raciocínio, o que tornou possível à professora entender os obstáculos que se colocaram em cada momento, para procurar dar-lhes resposta.

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 153-167). Lisboa: Projeto MPT e APM.

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Greenwich, CN: Information Age.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics: Cases and perspectives* (vol. *2*, pp. 341-362). Charlotte, NC: Information Age.

Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: NCTM.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 133-148.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 11-18.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.) *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht/Boston: Kluwer.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139-162.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(1), 60-72.

Fujita, T., & Jones, K. (2006). Primary trainee teachers' understanding of basic geometrical figures in Scotland. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Atas do PME 30* (Vol. 3, pp. 129-136). Prague, Czech Republic.

Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, *9* (1), 3-20.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry -- Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61-76.

Mariotti, M. A. (1992). Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspects. *Structural Topology, 18*, 9-18.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*(3), 219-248

Markman, E. M. (1989). *Categorization and naming in children*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Menezes, L., Serrazina, L., Fonseca, L., Ribeiro, A., Rodrigues, M. Vale, I., … Tempera, T. (2014). Conhecimento de geometria de alunos da licenciatura em Educação Básica. *Atas do XXV SIEM* (pp. 243-262). Braga.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (Tradução portuguesa da edição original de 1991).

Okazaki, M., & Fujita, T. (2007). Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Atas do PME 31* (Vol. 4, pp. 41-48). Seoul, Korea.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(6), 595-610.

Tempera, T. (2010). *A geometria na formação inicial de professores: Contributos para a caracterização do conhecimento dos estudantes* (Dissertação de mestrado, Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa), Lisboa.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4), 205-215.

REPRESENTAÇÕES ESTATÍSTICAS EM EDUCAÇÃO PRÉ-ESCOLAR: UM PASSO PARA A PARTICIPAÇÃO SOCIAL

Isabel Duque

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, DE & CASPAE - Centro de Apoio Social de Pais e Amigos da Escola N.º 10

iduque@esec.pt

Fernando Martins

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, DE, & Instituto de Telecomunicações

fmlmartins@esec.pt

Ana Coelho

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, DE, & Centro de Estudos Interdisciplinares do Século XX da Universidade de Coimbra

ana@esec.pt

Vera Vale

Instituto Politécnico de Coimbra, ESEC, DE, & Centro de Estudos Interdisciplinares do Século XX da Universidade de Coimbra

vvale@esec.pt

Resumo: A participação na sociedade está dependente da capacidade de interpretar corretamente a informação estatística que chega, muitas vezes, sob a forma de gráficos. Em áreas como na política e no marketing, a informação que chega a público, especialmente a apresentada em gráficos, é muitas vezes manipulada, o que pode condicionar as tomadas de decisão dos cidadãos/cidadãs. Considerando a importância que a estatística assume, um crescente número de investigadores tem realizado estudos em torno do processo de ensino e de aprendizagem da estatística, nomeadamente sobre os conhecimentos estatísticos necessários para ensinar e ambientes propícios ao desenvolvimento da literacia estatística (Burgess, 2009; Duque et al., 2014; Martins, Duque, Pinho, Coelho & Vale, 2015). Embora sejam escassas as pesquisas sobre a aprendizagem da estatística em educação pré-escolar, a estatística é uma área do saber contemplada, de forma implícita, nos documentos orientadores para este nível (Castro & Rodrigues, 2008; Ministério da Educação [ME], 1997). Neste sentido, com base na concetualização do conhecimento estatístico para ensinar proposto por Burgess (2009) e nas potencialidades da metodologia de trabalho de projeto para a promoção de aprendizagens significativas (Katz & Chard, 1997), o presente texto, que tem por base um estudo realizado com crianças de 3, 4 e 5 anos, tem por objetivo analisar as potencialidades da utilização da metodologia de trabalho de projeto, conciliada com o conhecimento estatístico de um(a) educador(a), na promoção da compreensão de representações estatísticas das crianças.

Palavras-chave: Representações estatísticas, literacia estatística, educação pré-escolar, metodologia de trabalho de projeto, conhecimento estatístico para ensinar.

Introdução

As Nações Unidas declararam 2003-2012 a década da literacia por a considerarem essencial à participação na sociedade. Embora existam várias definições de literacia, parece consensual que corresponde a um conjunto de competências através das quais alcançamos o conhecimento essencial a uma participação crítica na sociedade (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2000).

Numa sociedade onde a informação estatística tem um papel preponderante em diversas áreas, como na saúde, no consumo e na educação, é a literacia estatística que nos permite compreender essa informação (Steen, 2003). Trata-se da capacidade de compreender e criticar a informação estatística, e é dessa compreensão e espírito crítico que depende a sociedade democrática, na qual os cidadãos/cidadãs devem contribuir de forma esclarecida (Chan, 2013). Para comprar um bem material ou para votar num determinado partido político, como em outras áreas, é importante que um cidadão/cidadã saiba analisar as suas opções com base na informação existente. Um texto informativo sobre dados, quando complementado com uma representação gráfica, possui uma maior capacidade de transmissão da informação que se pretende divulgada (United Nation [UN], 2009). No entanto, para tomar decisões com base nessa informação, que surge de métodos e modos de pensamento estatístico, é necessário compreendê-la (Franklin et al., 2005). É a análise dessas representações estatísticas, enquanto representações visuais de informação estatística (Bruner, 1999), que subordina as tomadas de decisão, sejam elas de foro pessoal, profissional ou social. Assim, a literacia estatística, enquanto capacidade de usar corretamente conceitos e procedimentos estatísticos, promove a construção de uma sociedade na qual todos(as) têm o direito e o dever de participar de forma equitativa (Steen, 2003). Para tal, é necessário desenvolver-se a capacidade de compreender conceitos, vocabulário e símbolos estatísticos, de compreender a probabilidade como medida de incerteza e de organizar dados e saber construir e interpretar representações de dados (Garfield, delMas & Chance, 2003).

A aprendizagem da estatística, na Educação Pré-Escolar (EPE), encontra-se enquadrada nos conteúdos da Organização e Tratamento de Dados (OTD) (Castro & Rodrigues, 2008; ME, 1997). No entanto, para que as crianças desenvolvam essas aprendizagens é necessário que um(a) educador(a) possua “um conhecimento alargado, aprofundado e relacional acerca dos conteúdos cuja aprendizagem pretende promover” (Duque et al., 2014, p. 201) e que as crianças tenham oportunidade de construir o seu próprio conhecimento, em ambientes de aprendizagem capazes de as desafiar a questionar, a agir e a debater sobre temas do seu interesse.

É no sentido de analisar as possíveis potencialidades da conciliação do conhecimento estatístico de um(a) educador(a) com a metodologia de trabalho de projeto na promoção da compreensão das representações estatísticas na educação pré-escolar que o presente texto se apresenta.

Desenvolvimento da literacia estatística em EPE

O desenvolvimento da literacia estatística depende da mobilização de conhecimentos fundamentais, sem os quais a capacidade de interpretar informação estatística fica comprometida. Gal (2002) denomina esse conhecimento por conhecimento estatístico fundamental à literacia estatística, que inclui: (i) compreender a necessidade dos dados e como esse podem ser produzidos, (ii) conhecer conceitos básicos de representações de dados, (iii) saber interpretar informações em gráficos e tabelas, (iv) compreender noções básicas de probabilidade e (v) saber como são realizadas as inferências estatísticas. Este conhecimento estatístico envolve modos de pensamento e de raciocínio estatísticos, cujo seu desenvolvimento se tem demonstrado um desafio para os(as) profissionais de educação (Burgess, 2009).

É do pensamento estatístico e do raciocínio estatístico que depende a resolução de problemas cuja solução apela aos métodos estatísticos. Promover o desenvolvimento da literacia estatística em ambiente educativo depende, pois, do desenvolvimento do pensamento estatístico e do raciocínio estatístico dos profissionais de educação. É o pensamento estatístico que permite compreender as ideias-chave que estão na base das investigações estatísticas e de como essas investigações são desenvolvidas (Garfield, delMas & Chance, 2003). O raciocínio estatístico é o que permite compreender as fases que envolvem uma investigação estatística (Ben-Zvi & Garfield, 2004) e assenta em quatro dimensões do pensamento estatístico (Wild & Pfannkuch, 1999): i) Tipos fundamentais de pensamento estatístico (reconhecimento da necessidade dos dados, transnumeração, variação, raciocínio com modelos e integração da estatística e do contexto); (ii) ciclo interrogativo; (iii) ciclo investigativo, e (iv) disposições. São estas dimensões do pensamento estatístico reconhecidas como fundamentais à realização, compreensão e explicação de uma investigação estatística e, portanto, que se pretendem ver desenvolvidas em ambiente educativo, desde a EPE.

Conhecimento estatístico na promoção de aprendizagens

Estando as aprendizagens das crianças dependentes dos conhecimentos dos(as) profissionais de educação, vários investigadores têm analisado os tipos de conhecimentos necessários para promover aprendizagens (Ball, Thames & Pheps, 2008; Burgess, 2009; Henriques & Oliveira, 2013; Pires, Martins & Barros, 2015). Iniciada por Shulman da década de 80, esta linha de investigação tem sido seguida por autores como Groth (2007, citado por Henriques & Oliveira, 2013) e Ball, Thames e Phelps (2008), que apresentam vários estudos acerca do conhecimento matemático para ensinar matemática. Assim, Ball, Thames e Phelps (2008) propõem um modelo de análise dos conhecimentos matemáticos para ensinar (*Mathematical Knowledge for Teaching*) (Figura 1).

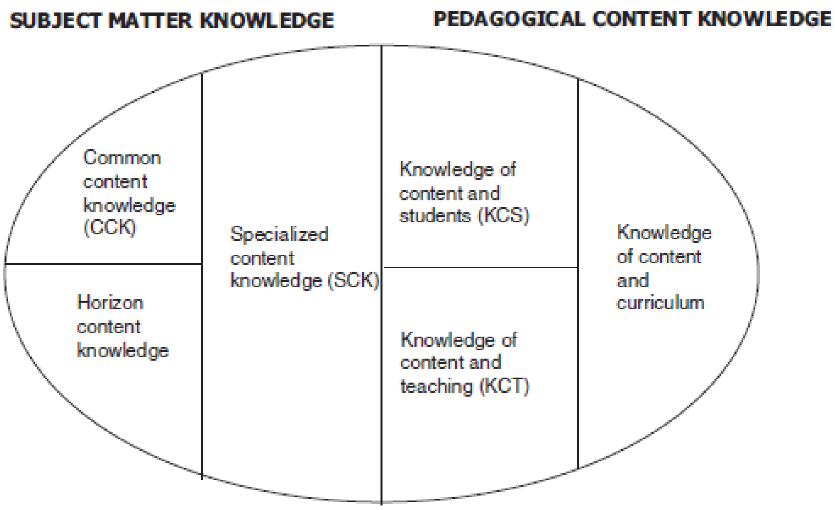


Figura 8: Domínios do conhecimento matemático para ensinar (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 403).

Combinando o modelo de Ball, Thames e Phelps (2008) com os tipos de pensamento estatístico apresentados por Wild e Pfannkuch (1999), Burgess (2009) criou uma matriz de análise dos conhecimentos estatísticos para ensinar (*Statistical Knowledge for Teaching [SKT]*). De acordo com esta matriz, o conhecimento estatístico para ensinar inclui quatro dimensões, que são examinadas relativamente aos tipos de pensamento estatístico, aos ciclos investigativo e interrogativo e disposições (Figura 2) (Burgess, 2009): (i) conhecimento comum do conteúdo, (ii) conhecimento especializado do conteúdo, (iii) conhecimento do conteúdo e dos alunos e (iv) conhecimento do conteúdo e do ensino.

		Statistical knowledge for teaching			
		Content knowledge		Pedagogical content knowledge	
		Common knowledge of content (CKC)	Specialised knowledge of content (SKC)	Knowledge of content and students (KCS)	Knowledge of content and teaching (KCT)
Thinking	Need for data				
	Transnumeration				
	Variation				
	Reasoning with models				
	Integration of statistical and contextual				
Investigative cycle					
Interrogative cycle					
Dispositions					

Figura 9: Matriz de análise do conhecimento do profissional de educação para ensinar estatística através de investigações (Burgess, 2009, p. 4).

Metodologia de trabalho de projeto na promoção da aprendizagem da estatística

Por permitirem que as crianças realizem aprendizagens estatísticas significativas, isto é, duradouras e potenciadoras de novas aprendizagens, os ambientes de aprendizagem ativa, nos quais as crianças participam ativamente na construção do seu conhecimento, são apontados como os mais eficazes (Franklin et al., 2005). As metodologias ativas, nas quais se inclui a Metodologia de Trabalho de Projeto (MTP), criam condições para que a criança aprenda a aprender (Katz & Chard, 1997). A opção pela MTP possibilita a criação de ambientes de aprendizagem nos quais a criança desenvolve o seu conhecimento de forma integrada e contextualizada, visto que apela à integração de todas as áreas do saber com o quotidiano da criança (Duque et al., 2014; Martins et al., 2015). Trata-se de uma metodologia que possui três fases essenciais, durante as quais as crianças são convidadas a serem investigadoras de temas do seu interesse (Katz & Chard, 1997): (i) fase de planeamento e arranque, (ii) fase de desenvolvimento do projeto e (iii) fase de reflexões e conclusões. Implementada por Dewey e Kilpatrick no início do século XX, a MTP baseia-se no princípio de que a criança aprende melhor quando envolvida em assuntos do seu interesse, quando realiza estudos alargados de temas que têm significado para si, num ambiente transdisciplinar (Duque, 2014).

O enquadramento é importante numa investigação estatística, tal como na promoção de aprendizagens significativas de qualquer área do saber (Martins et al., 2015). Os dados são utilizados para atribuir significado a situações associadas a um ambiente e é esse enquadramento que dá significado aos dados (Steen, 2003). Optar pela MTP para a promoção da literacia estatística permite partir do quotidiano da criança, trabalhar sobre ele e aplicar o conhecimento adquirido nesse ambiente. De forma contextualizada, a MTP possibilita às crianças experimentarem o ciclo investigativo, já que as convida a formular um problema, a traçar um plano, a recolher dados e a analisá-los de modo a encontrar respostas ao problema inicial (Duque et al., 2014; Martins et al., 2015).

Representações em EPE

Rede de conhecimentos

Um instrumento comummente utilizado durante a aplicação da MTP, pela possibilidade que oferece às crianças de relembrar e compreender a construção do seu conhecimento, é a *rede de conhecimentos*. Baseada no conceito de mapa conceptual, proposto por Novak (1998), a rede de conhecimentos é um instrumento que permite representar as relações entre os conhecimentos. Quando utilizada com as crianças durante o desenvolvimento de um projeto, esta permite registar os conhecimentos prévios das crianças e estabelecer relações com todas as aprendizagens que se desenvolvem ao longo do processo (Duque, 2014). Como um mapa conceptual, a construção de uma rede de conhecimentos têm início com a questão inicial/conceito que se pretende aprofundar. Partindo daí, diariamente, as crianças acrescentam as novas informações, aliadas a imagens, desenhos e/ou palavras que as próprias consideram essenciais à compreensão dos conhecimentos adquiridos. Sendo o “registo da história que se constrói diariamente” (Elias, 1997, citado por Oliveira-Formosinho, Kishimoto & Appezzato, 2007, p.163), é um instrumento que fomenta a compreensão das relações entre os conhecimentos prévios e os que se adquirem, mas também das relações entre várias áreas do saber. Promovendo a continuidade das aprendizagens as crianças têm a possibilidade de lembrar e constatar a sua própria evolução. É essa inter-relação entre as diferentes áreas do saber e entre os conhecimentos prévios com os novos conhecimentos que possibilita a aprendizagem significativa, o desenvolvimento do raciocínio e da memória (Oliveira, 1999). Como refere Bruner (1977, p. 39), “aprender deve permitir-nos continuar mais tarde esse caminho” e, de facto, conciliar com a MTP a este instrumento, que estrutura uma sequência de vivências, aprendizagens e conhecimentos, permite às crianças compreender como se aprende, como se constrói o seu conhecimento (Duque, 2014).

Representações estatísticas

Na etapa da EPE, as crianças estão aptas a realizar atividades de recolha, organização e representação de dados em gráficos e tabelas (Gattuso, 2006). No entanto, para representar dados é necessário realizar todo um processo que lhes permita compreender de onde surgem e, principalmente, para que servem esses dados. Promover a compreensão de dados é, no fundo, envolver as crianças na recolha, organização, categorização e representação simbólica dos dados (National Coucil of Teachers of Mathematics [NCTM], 2009). Por esse motivo, é essencial que elas possam conhecer cada fase do processo de uma investigação estatística, agindo sobre cada uma delas, compreendendo-as (Franklin et al., 2005): (i) formulação de questões, (ii) recolha de dados, (iii) análise de dados e (iv) interpretação dos resultados. Partindo de questões emergentes do quotidiano das crianças, estas devem ter oportunidade de recolher e organizar dados de modo a obterem respostas às questões colocadas (Duque et al., 2014; Martins et al., 2015). Através da construção e sequente interpretação das representações gráficas as crianças têm a oportunidade de compreender o significado dos dados e de reconhecer que o conhecimento estatístico pode ser aplicado a situações do seu quotidiano (Duque, Pinho & Carvalho, 2013; Rodrigues & Cordeiro, 2015).

Para que os dados representados sejam significativos para as crianças eles devem *contar uma história* (*estatística*) baseada no conhecimento sobre os dados e sobre o tema em estudo, sob pena de serem encarados como números sem significado (UN, 2009). As representações são uma forma de organizar e apresentar informação de forma clara e é importante que as crianças tenham a oportunidade de as compreender como veículo de comunicação eficaz (Fernandes & Cardoso, 2009). Para tal, é necessário criar situações que as incentivem a procurar nos dados as respostas às suas questões, após a sua recolha e organização (Castro & Rodrigues, 2008; Choate & Okey, 1981).

A formulação de questões e a organização e o tratamento de dados é um processo que incorpora ações mentais, como a formação de conjuntos (NCTM, 2008; Kilpatrick, Swafford & Fidell, 2009). Como tal, terminada a recolha de dados, é necessário registá-los e organizá-los. Nesta fase, as crianças devem ter oportunidade de os agrupar de acordo com propriedades que identificam, o que lhes permite compreender a noção de variabilidade (Duque et al., 2013). Na EPE, esses agrupamentos podem ser representados utilizando o *tally chart* (esquema de contagem gráfica) (Martins & Ponte, 2010), o diagrama de *Venn* e/ou tabelas, permitindo a organização dos dados de forma simples, realçando os critérios que fundamentam a organização (Duque et al., 2013). Partindo desta organização as crianças podem ser desafiadas a encontrar representações mais eficazes, sendo o pictograma o mais propício à aquisição de conhecimentos essenciais à construção de outras representações, como os gráficos de barras. Castro e Rodrigues (2008) e Choate e Okey (1981) referem ainda que as crianças devem compreender a necessidade de atribuírem um título à representação gráfica, comparar as diferentes representações utilizadas, quanto às suas vantagens e desvantagens, e procurar as respostas às suas questões nessas representações, debatendo as suas interpretações.

Contexto e método

Este estudo teve a participação de 24 crianças de 3, 4 e 5 anos, uma educadora e foi desenvolvido em jardim-de-infância. Por questões éticas (British Educational Research Association, 2011; Comissão Europeia, 2013), os nomes apresentados são fictícios e, além das autorizações necessárias à realização de um estudo desta índole, a sua preparação envolveu a realização de um diálogo com as crianças, através da qual foi obtido o seu consentimento informado.

Este estudo permitiu recolher informações sobre as diferentes fases que envolvem o ciclo investigativo (problema, plano, dados, análise e conclusão) (Burgess, 2009). O conjunto de tarefas apresentado foi desenvolvido em ambiente natural, com participação da totalidade dos envolvidos. A planificação foi desenhada pela educadora e crianças, de acordo com a MTP. Trata-se de um estudo que concilia a metodologia qualitativa, de índole interpretativa, a um *design* de estudo de caso de caráter descritivo. A recolha de informação da sessão foi realizada por meio de registo vídeo e áudio, tendo as transcrições sido analisadas de modo interpretativo. A frequência do ambiente educativo pela investigadora, por um período de cerca de 8 semanas, permitiu considerar outras informações na análise, nomeadamente referentes às crianças, educadoras e projeto em desenvolvimento (Bassey, 1999; Bogdan & Biklen, 1994). Com este estudo, pretendemos analisar as potencialidades de conciliar a MTP com os conhecimentos estatísticos dos(as) educadores(as) na promoção da compreensão das representações estatísticas nas crianças.

O estudo foi realizado durante o desenvolvimento de um projeto de educação financeira, que se vinha a desenvolver há várias semanas e que incluiu a construção de duas novas áreas na sala – uma loja e um banco -, para a qual foram realizadas visitas de recolha de informação à comunidade. À data da realização do estudo, as crianças tinham visitado vários estabelecimentos comerciais. O percurso foi acompanhado com a construção de uma rede de conhecimentos, realizada pelas crianças, na qual estavam registados os resultados das visitas e informações associadas a profissões, lojas de comércio de bens e serviços.

De uma questão à construção e interpretação de um pictograma

Durante o desenvolvimento do projeto de educação financeira, aquando da comemoração do dia da mãe, foi contada uma história às crianças que evidenciava várias caraterísticas atribuídas a um pai e a uma mãe. Findo o conto, foi iniciada uma conversa, através da qual os elementos do grupo partilharam as caraterísticas das suas mães. Surgiu assim um debate sobre o comprimento do cabelo das mães. Num ambiente transdisciplinar, as crianças partilharam os seus conhecimentos sobre as medidas dos cabelos e a profissão de cabeleireiro, relembrando, através da consulta à rede de conhecimentos afixada numa parede da sala, o estabelecimento comercial que já conheciam. Encarando o momento como uma oportunidade, foi colocada a questão ao grupo: *há mais mães de cabelo curto, ou comprido?* – Estava lançada uma questão para a qual era necessário recolher dados. Muito embora ainda não sabendo como, as crianças, de um modo geral, mostraram querer saber a resposta.

Inicialmente, as crianças foram referindo se a sua mãe tinha o cabelo curto ou comprido sem ser feito qualquer registo. No entanto, rapidamente algumas perceberam que deveria ser feito o registo da informação. Assim, foi proposto que se registassem os dados numa tabela, já que este era um modo de registo que era familiar às crianças, por o terem utilizado noutras situações. No quadro, foi desenhada uma tabela com três colunas (Figura 3): (i) nomes das mães, (ii) cabelo curto e (iii) comprido. Foi ainda definido o critério de curto e comprido, exemplificando com casos de comprimentos de cabelos de alguns elementos do grupo:

> Educadora: Se tiver o cabelo mais curto do que a Maria, que tem o cabelo pelo queixo, em que coluna vamos assinalar?
> Maria: Na coluna do cabelo curto.
> Educadora: Então, se tiver mais comprido, vamos assinalar...
> Carlos: Na coluna do cabelo comprido.

Uma a uma, as crianças foram ao quadro. A educadora colocou na tabela os nomes das mães e as crianças completaram colocando uma cruz na coluna correspondente, respeitando a posição do nome da respetiva mãe.

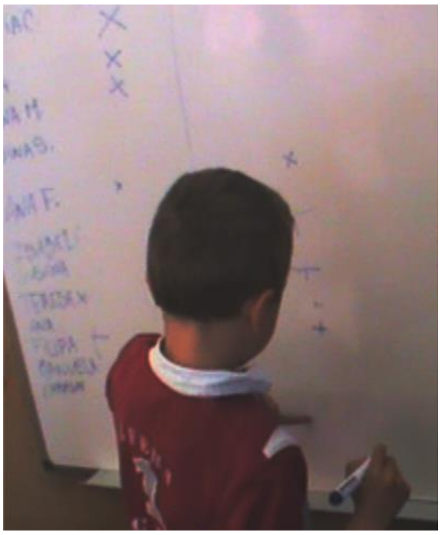


Figura 10: Criança de 3 anos a preencher a tabela.

Uma das crianças apresentou dificuldade com a noção de comprimento:

> Educadora: A tua mãe tem o cabelo curto ou comprido?
> Filipe: Tem o cabelo liso.

Para apoiar a criança, foram comparados diferentes casos, observando e caraterizando, quanto ao comprimento, os cabelos dos(as) presentes na sala. A criança referiu quais eram lisos e os que não eram e comparou diferentes comprimentos. Mediante essas comparações, a criança chegou à conclusão que o cabelo da sua mãe era comprido. Outras crianças, na grande maioria de 3 anos, apresentaram alguma dificuldade em decidir se as suas mães tinham o cabelo curto ou comprido. Individualmente, foi utilizada a mesma estratégia de comparação.

Pelo elevado número de nomes de mães a assinalar e por dificuldade de gestão de espaço, deixou de ser possível escrever mais nomes na tabela, pelo que foi feita outra coluna para o efeito.

> Educadora: Estamos sem espaço para escrever os nomes das mães que faltam. Como vamos fazer?
> João: Fazemos outra fila ao lado.
> Educadora: E depois onde colocamos as cruzes?
> João: Fazemos como fizemos com as outras.

A nova coluna viria a levar as crianças a colocar mais do que uma cruz em cada linha, (Figura 4). A partir desse momento, optou-se por não lembrar as crianças sobre o interesse de colocar a cruz na mesma linha em que estava escrito o nome, salientando-se, sempre que necessário, a importância de respeitar a coluna. A intenção desta mudança de estratégia prendeu-se com o facto de querer mostrar às crianças que, não se respeitando a construção, a resposta à questão inicial se tornaria menos imediata. Além disso, esta construção levaria à colocação de uma questão que poderia conduzir as crianças à construção do pictograma. Deste modo, feita a recolha de dados, que simultaneamente foi registada na tabela, foi colocada a seguinte questão: *há mais mães de cabelo comprido ou há mais mães de cabelo curto?*.

Figura 11: Colocação de várias cruzes na mesma linha da tabela.

Várias crianças participaram, umas afirmando que havia mais mães com cabelo comprido, outras indicando o oposto. Feita a partilha de opiniões, foi colocada a questão: *como é que vocês sabem?*. Como calculado pela educadora, o facto de não ter sido respeitado o parâmetro de colocar uma cruz em cada linha impediu as crianças de identificarem a resposta de forma imediata. No entanto, algumas crianças iniciaram a contagem das cruzes e uma das crianças indicou que havia 11 mães com cabelo curto.

> Educadora: Mas, está fácil de perceber, olhando para o quadro, quantas mães têm cabelo curto e quantas têm cabelo comprido? Consegue olhar-se e perceber-se logo?
>
> Beatriz: Não! Temos de contar!

Mediante esta resposta, a educadora informou as crianças que havia outras formas de representar os dados e que, pela observação dessa representação, poderiam obter resposta à questão sem contagem. De seguida, foi apresentado o material necessário: (i) cartões com caras sorridentes, todos do mesmo tamanho; (ii) uma folha de papel cenário e (iii) uma caneta. Na folha já estava desenhada uma linha horizontal e, abaixo dessa, os mesmos desenhos representativos do cabelo curto e comprido usados na tabela. O título também já estava escrito: *O comprimento do cabelo das mães*. As crianças foram convidadas a explorar o material e partilharem as suas ideias sobre como poderiam representar os dados com o material disponível. Com a participação das crianças, chegámos à conclusão que cada um dos cartões iria “valer” (representar) uma mãe, informação que foi acrescentada no cartaz (Figura 5).

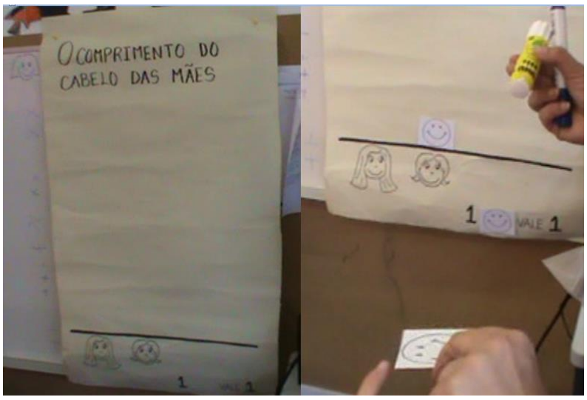


Figura 12: Pictograma, antes e depois de colocada a informação do valor de cada cartão.

As crianças foram questionadas sobre o local onde deveriam colar os cartões. Algumas pediram para participar e uma delas foi ao quadro exemplificar. Informaram-se as crianças que, para representar a informação corretamente, deveriam colar os cartões juntos e manter a distância entre as colunas. Foi explicado que, caso não o fizessem, não iriam conseguir responder à questão inicial sem contagem. Neste momento, uma das crianças lembrou o que havia acontecido com a construção da tabela. De um modo geral, as crianças identificaram o motivo da dificuldade que haviam tido para interpretar a informação constante na tabela. Concluiu-se que, se voltássemos a colocar os símbolos sem uma determinada organização, iriamos ter o mesmo problema. Uma a uma, cada uma das crianças foi colar a figura, sendo confrontada a informação com a indicada na tabela. Sem exceção, todas as crianças colaram os cartões respeitando as indicações (Figura 6).

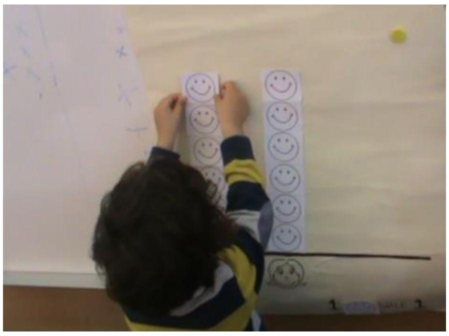


Figura 13: Criança de 3 anos a colar o cartão na coluna das mães de cabelo comprido.

Como resultado, foi obtido um pictograma que as crianças analisaram. Durante essa análise as crianças foram questionadas sobre a possível generalização deste estudo:

Educadora: Se na sala ali ao lado fizessem um pictograma ficaria igual a este?
Maria: Sim.
Educadora: Sabes como é o cabelo das mães dos teus amigos e das tuas amigas daquela sala?
Maria: Não. Pois, não sei.

Educadora: Podia ficar igual, mas também podia ficar diferente. Como é que podíamos saber isso?

João: Pois, só se fores lá fazer é que sabes.

Podemos verificar que, muito embora de forma informal, esta criança, como outras que partilharam de um discurso idêntico, compreendeu o conceito de variabilidade. Deste modo, as crianças, de um modo geral, compreenderam que aquele pictograma dizia respeito às suas mães, motivo pelo qual o título foi completado. Como é possível observar na Figura 7, também o resultado da investigação foi registado no Pictograma, através do código escrito e de um desenho feito por uma das crianças: *Na turma A há mais mães de cabelo comprido*.

Figura 14: Pictograma – O comprimento do cabelo das mães da Turma A.

Por fim, foi feita a relação entre o pictograma construído com as personagens da história lida no início da sessão, a profissão de cabeleireiro e o estabelecimento comercial onde se corta o cabelo, através da rede de conhecimentos, onde foi acrescentada a conclusão da investigação (Figuras 8 e 9). Lembrou-se que se tivesse sido escolhida outra caraterística das mães, como a cor dos olhos, o resultado poderia ter sido diferente.

Figura 15: Conclusão da investigação.

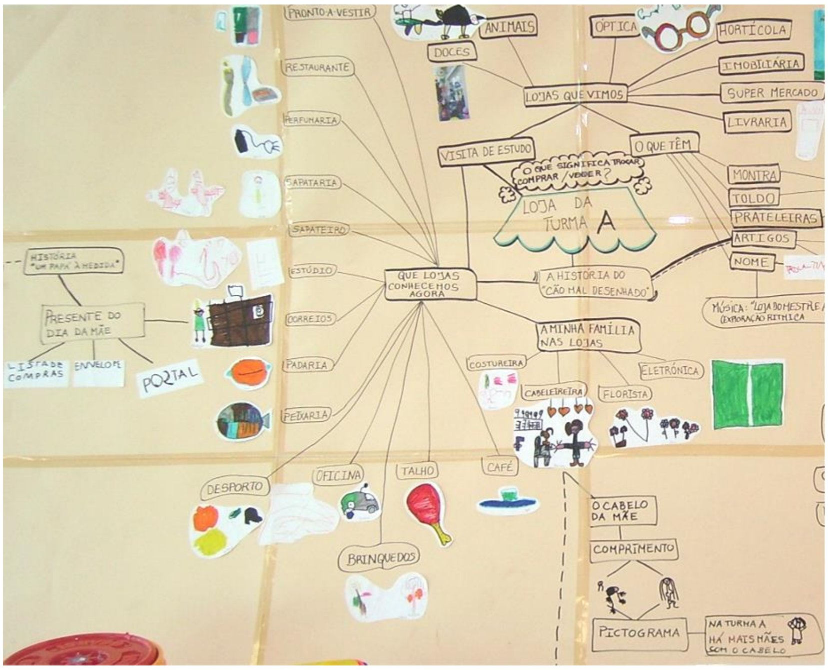


Figura 16: Rede de conhecimentos com o registo do resultado da investigação.

Analisando a experiência apresentada podemos compreender que a MTP permitiu criar uma situação através da qual as crianças puderam realizar uma investigação sobre um tema que lhes era significativo. Esta é, de facto, a base da MTP: proporcionar oportunidades às crianças para que possam investigar temas do seu interesse (Katz & Chard, 1997). Através dessa investigação, que partiu de uma questão que as crianças queriam ver respondida, o grupo vivenciou todo o ciclo investigativo. O conhecimento foi construído pelas crianças, num ambiente de cooperação, de partilha e de integração dos conhecimentos prévios, do seu quotidiano, dos conhecimentos que foram construindo e das diferentes áreas do saber.

Os conhecimentos mobilizados pela educadora foram analisados utilizando a matriz proposta por Burgess (2009) (Figura 10).

		Statistical knowledge for teaching			
		Content knowledge		Pedagogical content knowledge	
		Common knowledge of content (CKC)	Specialised knowledge of content (SKC)	Knowledge of content and students (KCS)	Knowledge of content and teaching (KCT)
Thinking	Need for data		(II)		(XI)
	Transnumeration		(III)	(IX)	
	Variation		(IV)		(XII)
	Reasoning with models		(V)	(X)	(XIII)
	Integration of statistical and contextual		(VI)		(XIV)
Investigative cycle			(VII)		
Interrogative cycle			(VIII)		
Dispositions			(I)		

Figura 17: Análise do conhecimento estatístico para promover aprendizagens, mobilizado pela educadora durante a sessão apresentada (adaptado de Burgess, 2009).

Podemos verificar que foram mobilizados diferentes domínios do conhecimento, além do conhecimento comum do conteúdo (sendo este obrigatório, assume-se como adquirido e não consta na análise apresentada), durante a dinamização da sessão, nomeadamente: (I) na identificação da situação enquanto oportunidade de realizar uma investigação estatística; (II e XI) na identificação da adequabilidade da questão que motivou a investigação; (III e IX) no recurso ao uso de uma tabela como forma de registo dos dados, partindo dos conhecimentos prévios das crianças, e (V e X) e na identificação do erro nessa representação como oportunidade; (V e XIII) na opção pela representação dos dados num pictograma, na preparação do material e (X) durante a sua construção e análise; (IV e XII) quando a educadora desafiou as crianças a pensar sobre uma possível generalização dos resultados; (VI e XIV) no momento de relacionar a investigação feita com o quotidiano das crianças, e durante a orientação e apoio prestados no desenvolvimento da investigação realizada pelas crianças (VII e VIII).

Considerações finais

Existem evidências de que é necessário que os(as) educadores(as) aprofundem os seus conhecimentos, nomeadamente para a promoção do desenvolvimento da literacia estatística (Burgess, 2009). É importante que um(a) educador(a) conheça todas as etapas que envolvem uma investigação estatística e qual a melhor forma de a desenvolver com as crianças (Burgess, 2009). O contexto tem um papel essencial numa investigação estatística, visto que os dados estão intimamente ligados ao contexto em que são recolhidos. A MTP permite desenvolver uma investigação estatística de forma significativa, já que a questão surge com as crianças, de forma contextualizada e integrada com outras áreas do saber (Martins et al., 2015). Num ambiente de integração dos saberes, pela partilha, as crianças recorreram aos seus conhecimentos e, sob a orientação da educadora, levaram a cabo todo um processo de recolha de dados, adquirindo conhecimentos estatísticos, desenvolvendo o seu pensamento estatístico e o seu raciocínio estatístico. No entanto, existem evidências que nos permitem compreender que esta experiência apenas foi possível devido aos conhecimentos estatísticos do educador, conhecimentos que vão além dos conhecimentos necessários aos cidadãos comuns para interpretarem informações estatísticas, ou seja, conhecimentos especializados necessários para promover aprendizagens.

Podemos compreender que uma das principais potencialidades da conciliação da MTP com os conhecimentos estatísticos da educadora para ensinar foi o facto de as crianças compreenderem o significado de recolher, organizar, representar e interpretar dados. Entendemos que as crianças, de um modo geral, com base no erro calculado pela educadora durante a construção da tabela, demonstraram compreender a existência e necessidade do respeito pelos parâmetros essenciais à representação dos dados em tabelas e pictogramas. A interpretação do pictograma, bem como a sua análise e representação das conclusões na rede de conhecimentos, foi realizada pelas crianças que, de um modo geral, compreenderam as representações realizadas, associando-as ao seu quotidiano. Através da conciliação da MTP com um conhecimento sólido, alargado e relacional, ao nível do conteúdo e pedagógico do conteúdo, a educadora pode agir com intencionalidade educativa, promovendo aprendizagens com e para a compreensão.

Agradecimentos

Este estudo foi realizado no âmbito do R&D Unit 50008, financiado pelo UID/50008/2013.

Referências bibliográficas

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special?. *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings.* Buckingham: Open University Press.

BERA (2011). *Ethical guidelines for educational research.* Acedido a 17 de agosto de 2013, em http://www.bera.ac.uk/wp-content/uploads/2014/02/BERA-Ethical-Guidelines-2011.pdf

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals, definitions, and challenges. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking*, (pp. 3-16). Dordrecht: Kluwer.

Bogdan, R., & Briklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Bruner, J. (1977). *O processo da educação*. Lisboa: Edições 70.

Bruner. J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D'Água.

Burgess, T. (2009). Teacher knowledge and statistics: What types of knowledge are used in primary classroom? *The Montana mathematics Enthusiastics*, *6*(1&2), 3-24.

Duque, I., Pinho, L., & Carvalho, P. (2013). Organização e tratamento de dados na educação pré-escolar: Uma primeira aproximação. *Exedra*, *7*, 86-99.

Duque, I. (2014). *Ambiente democrático em educação*. Relatório final de mestrado em Educação Pré-Escolar e Ensino do 1.º CEB. Coimbra: IPC/ESEC.

Duque, I., Pinho, L., Carvalho, P., Martins, F., Coelho, A., & Vale, V. (2014). Formação de conjuntos em educação pré-escolar: Uma primeira experiência, um ponto de partida. *Exedra*, *9*, 198-207.

Castro, J., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados: textos de apoio para educadores de infância.* Lisboa: ME.

Chan, V. (2013). Promoting statistical literacy among students. In S. Forbes & B. Phillips (Eds.), *Proc of the joint IASE/IAOS satellite conference*. Hong Kong: IASE.

Choate, L., & Okey, J. (1981). Graphically speaking: primary-level graphing experiences. In A. Shulte & J. Smart, *Teaching statistics and probability* (pp. 33-41). Virginia: NCTM.

Comissão Europeia/Direção Geral de Pesquisa e Inovação (2013). *Ethics for researches*. Acedido a 17 de agosto de 2013, em ftp://ftp.cordis.europa.eu/pub/fp7/docs/ethics-for-researchers.pdf

Fernandes, D., & Cardoso, A. (2009). *Experenciar a cidadania com tabelas e gráficos no jardim-de-infância*. Lisboa: APM.

Franklin, C., Horton, N., Kader, G., Moreno, J., Murphy, M., Snider, V., & Starnes, D. (2005). *GAISE report: a pre-k–12 curriculum Framework*. Virginia: ASA.

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-51.

Garfield, J., delMas, R., & Chance, B. (2003). The web-based artist: assessment resource tools for improving statistical thinking. *Symposium paper: Assessment of statistical reasoning to enhance educational quality*. Chicago: NSF.

Gattuso, L. (2006). Statistics and mathematics: Is it possible to create fruitful links?. In *Proc of the* 7th *ICOTS* 7. Bahia: IASE.

Henriques, A., & Oliveira, H. (2013). O conhecimento de futuros professores sobre as investigações estatísticas a partir da análise de episódios de sala de aula. In J. A. Fernandes, F. Viseu, M. H. Martinho & P. F. Correia (Orgs.), *Atas do III encontro de probabilidades e estatística na escola*. Braga: CIEUM

Katz, L., & Chard, S. (1997). *Abordagem de projeto na educação de infância*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Fidell, B. (2009). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press.

Martins, M., & Ponte, J. (2010). *Organização e tratamento de dados.* Lisboa: ME.

Martins, F., Coelho, A., Vale, V., Duque, I., & Pinho, L., (2015). Statistical literacy in preschool education. In *Proc of the ICTDIK: new opportunities for statistics education* (p. 143). Lisboa: UL.

ME. (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: ME/DGIDC.

NCTM. (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston: NCTM.

Novak, J. (1998). *Aprender, criar e utilizar o conhecimento:Mapas concetuais™ como ferramentas de facilitação nas escolas e empresas*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas.

OECD (2000). *Literacy in the information age: Final report of the international adult literacy survey*. Paris: OECD.

Oliveira, C. C. (1999). *A educação como processo auto-organizativo: fundamentos teóricos para uma educação permanente e comunicatória*. Lisboa: Instituto Piaget.

Oliveira-Formosinho, J., Kishimoto, T., & Appezzato, M. (2007). *Pedagogia(s) da infância: dialogando com o passado, construindo o futuro.* Porto Alegre: Artmed.

Pires, M., Martins, C. & Barros, P. (2015). Reflection on practices as teachers educators in statistics. In *Proc of the ICTDIK: new opportunities for statistics education* (p. 148). Lisboa: UL.

Rodrigues, M., & Cordeiro, S. (2015). Interpreting represented data: an early childhood study. In *Procs of the ICTDIK: new opportunities for statistics education* (p. 148). Lisboa: UL.

Steen, L. (2003). Data, shapes, symbols: Achieving balance in school mathematics. In NCED (Ed.), *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 53-74). Princeton, New Jersey: NCED.

UN (2009). *Making data meaningful – Part 2: A guide to presenting statistics.* Geneva: UN.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *IntemutionulStaristicul Review*, 67(3), p. 223-265.

UMA REINTERPRETAÇÃO À LUZ DO TPACK: COMO O CONHECIMENTO COMBINADO DE TECNOLOGIA E CONTÚDO AUXILIA NA TOMADA DE DECISÕES DIANTE DE UMA SITUAÇÃO DE CONFLITO

Victor Giraldo
Universidade Federal do Rio de Janeiro
victor.giraldo@ufrj.br

Cleber Dias da Costa Neto
Universidade Federal do Rio de Janeiro
cleberneto@gmail.com

Bruna Moustapha Corrêa
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
bruna.correa@uniriotec.br

Alessandro Jacques Ribeiro
Universidade Federal do ABC
alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo: Neste trabalho, discutimos o papel da articulação entre representações geradas por tecnologias digitais e outras formas de representações para conceitos matemáticos como um aspecto do *Technological Pedagogical Content Knowledge* (Koehler e Mirsha, 2008). Investigamos o caso de representações para funções reais de variável real, e analisamos dados empíricos de dois episódios de entrevistas semiestruturadas baseadas em tarefas, com um grupo de estudantes de um curso de formação inicial de professores de matemática em uma universidade brasileira. Essas tarefas foram especialmente desenhadas para gerar situações de conflito a partir de características particulares das representações envolvidas. Argumentamos que as explorações promovidas por esse tipo de situações podem mobilizar, conjuntamente, conhecimentos sobre o conteúdo matemático e conhecimentos sobre como as representações são geradas pelo computador, além de motivar reflexões sobre a adequação dessas representações a cada contexto pedagógico.
Palavras-chave: *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPACK); Formação Inicial do Professor de Matemática; Situações de Conflito; Representações Matemáticas.

Introdução

Nas últimas décadas, a utilização de recursos digitais tem sido frequente na prática profissional em diversas áreas. Isso ocorre a partir da nova dinâmica de comunicação, estabelecida através do intenso processo de informatização da sociedade e do constante surgimento e aprimoramento de ferramentas tecnológicas que dão suporte a tais práticas profissionais. O domínio desses recursos digitais e a discussão sobre sua utilização vêm ganhando importância na escola e na formação inicial de professores, estando em processo de consolidação como um campo de pesquisa acadêmica.

No ensino de matemática isso é ainda mais evidente, pois, como destacam Maschietto e Trouche (2010), os processos por meio dos quais a matemática é produzida, praticada e ensinada sempre foram determinados pelos tipos de ferramentas usadas, tais como: o ábaco, o lápis, o papel e, mais recentemente, as calculadoras e os computadores. Assim, acredita-se que a inserção de novas tecnologias digitais, bem como o aprimoramento da utilização das antigas, tem potencial para transformar a estrutura da sala de aula de matemática, além de exigir a modificação dos currículos e metodologias de ensino na formação inicial do professor de matemática.

Com isso, as experiências vivenciadas pelo futuro professor de matemática em toda a formação inicial são determinantes para sua prática docente, afetando diretamente o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos dos alunos da escola básica, como indicam vários trabalhos (e. g. Moreira & Ferreira, 2013; Fiorentini & Oliveira, 2013). Neste trabalho, a partir de situações propostas com o auxílio de ferramentas tecnológicas a estudantes ingressantes em um curso de formação inicial de professores de matemática no Brasil, avançaremos sobre as discussões relativas às diferentes representações matemáticas, com ou sem a utilização de recursos digitais. Trata-se de uma reinterpretação dos resultados obtidos no contexto da pesquisa de doutoramento do primeiro autor. Os aportes teóricos e o detalhamento da questão de pesquisa serão apresentados nas seções seguintes.

Referências teóricas de nossa pesquisa

As preocupações com questões em torno da formação de professores têm levado pesquisadores a adotar o conceito de *conhecimento de base*, que, em termos gerais, se refere ao conhecimento que os professores devem possuir para realizar um bom ensino. Dentre esses pesquisadores, Shulman (1986, 1987) consolidou a corrente do *knowledge base*, a qual busca compreender como os conhecimentos dos professores são adquiridos e como os *novos* conhecimentos se combinam com os *velhos*, para formar uma base de conhecimentos. Shulman (1986) diferencia três categorias de conhecimentos que compõem a base para o ensino: o conhecimento específico do conteúdo (*subject knowledge matter*); o conhecimento pedagógico do conteúdo (*pedagogical knowledge matter*) e o conhecimento curricular (*curricular knowledge*).

O conhecimento específico do conteúdo refere-se às compreensões do professor sobre a estrutura da disciplina, à forma como ele entende o conhecimento que será objeto de ensino. Essa compreensão não se restringe apenas a fatos e conceitos relativos à disciplina, mas também, à compreensão dos processos de sua produção, de representação e de validação epistemológica, o que requer entender a estrutura da disciplina compreendendo o domínio atitudinal, conceitual, procedimental, representacional e validativo do conteúdo.

O conhecimento pedagógico do conteúdo se refere aos modos de formular e apresentar o conteúdo, para torná-lo compreensível aos alunos. A comunicação do professor deve prever a diversidade de alunos e ser flexível, para conceber explicações alternativas de conceitos e princípios. Em outras palavras, deve incluir analogias, ilustrações, exemplos, explanações e demonstrações. Deve também reconhecer o que facilita ou dificulta o aprendizado de um determinado conteúdo; os erros conceituais que os alunos apresentam com frequência; e as implicações desses erros na aprendizagem.

A terceira categoria de Shulman (1986), o conhecimento curricular, diz respeito ao conhecimento dos programas de ensino. Abrange o conjunto de programas elaborados para o ensino; os recursos didáticos que podem ser utilizados; o conhecimento das relações entre conteúdos e contextos, dentro da mesma disciplina ou não; e a familiaridade com os outros tópicos desse conteúdo que já foram ou serão estudados na mesma disciplina nos anos anteriores e posteriores. O conhecimento curricular serve como indicação e contraindicação do uso de um determinado material em circunstâncias particulares. Os trabalhos de Shulman (1986, 1987) influenciaram diversos autores (e. g. Ball, Thames & Phelps, 2008; Mishra & Koehler, 2006; Koehler & Mishra, 2008; Niess et al., 2009), que desenvolveram incrementos às categorias propostas inicialmente.

Mishra e Koehler (Mishra & Koehler, 2006; Koehler & Mishra, 2008) propõem, a partir de um desdobramento das pesquisas desenvolvidas por Shulman, um modelo teórico para o uso pedagógico das tecnologias digitais. Este referencial envolve uma complexa e situada forma de corpos de conhecimentos que os autores denominam *conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo* (CTPC ou TPACK, do termo original em inglês *Technological Pedagogical Content Knowledge*). Veja na Figura 1.

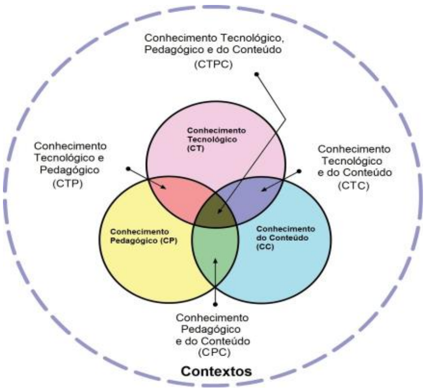


Figura 1: Diagrama[8] ilustrativo do quadro conceitual TPACK.

[8] O diagrama está reproduzido com permissão da editora, © 2012 por tpack.org, e a tradução é do autor.

Para Koehler e Mirsha (2008), em lugar de ser uma coisa dada e determinada que uma pessoa descobre e contempla, o conhecimento é visto como um corpo de proposições e habilidades que uma pessoa constrói e exerce. Na Figura 1 cada círculo representa um corpo de conhecimento. O círculo azul representa o corpo de conhecimento do conteúdo, que corresponde a saber o assunto a ser aprendido ou ensinado, o que é essencial para um professor ministrar uma disciplina. Esse mesmo corpo inclui, segundo Shulman (1986), o conhecimento sobre os conceitos, teorias, ideias, estruturas organizacionais, o conhecimento de evidências e provas, bem como as práticas estabelecidas e abordagens para o desenvolvimento de tal conhecimento.

Além de saber a disciplina, um professor precisa ter conhecimento pedagógico. Na Figura 1 isso é representado pelo círculo amarelo. Esse corpo de conhecimentos inclui saber os processos, as práticas, os métodos de ensino e de aprendizagem, os propósitos gerais de educação, valores e objetivos. Também, o professor deve compreender como os alunos constroem conhecimentos, adquirem habilidades mentais e desenvolvem disposições positivas para a aprendizagem. O professor deve compreender as capacidades cognitivas, sociais e teorias de desenvolvimento de aprendizagem e como estas se aplicam aos alunos em sala de aula. Além disso, deve entender as habilidades gerais de gerenciamento de sala de aula, planejamento de aula e avaliação do aluno.

Com o advento das tecnologias digitais, um professor dispõe também desses recursos para a construção de novos conhecimentos na sua área acadêmica. Isso nos leva ao corpo de conhecimentos, representado pelo círculo rosa na Figura 1. Segundo Koehler e Mishra (2008), o conhecimento tecnológico corresponde ao entendimento de que cada tecnologia tem possibilidades e restrições. Esse corpo de conhecimento possibilita ao professor aplicar a tecnologia produtivamente para o trabalho e para o ensino, reconhecendo quando esta auxilia ou dificulta a realização de um objetivo, além de reforçar a necessidade de adaptação contínua às mudanças das tecnologias de informação e comunicação. O conhecimento de novas tecnologias se desenvolve por meio da interação com essas tecnologias.

Como indicado na Figura 1, Koehler e Mishra (2008) sugerem que essas três categorias de conhecimentos se combinam entre si, determinando novas categorias. Neste trabalho, detemo-nos ao conhecimento correspondente à interseção das três categorias: *conteúdo*, *pedagogia* e *tecnologia*. Seguindo os autores, entendemos que um professor atuando com TPACK reconhece que não há uma única maneira para engajar seus alunos e que cada uso da tecnologia no ensino precisa ser pensado e aplicado com a especificidade do contexto da disciplina e da turma (Koehler & Mirsha, 2008). Por isso, na Figura 1, os corpos de conhecimentos de TPACK são situados dentro de uma área da circunferência, que representa o *contexto*.

No caso da Educação Matemática, o TPACK resulta da interseção entre conhecimentos tecnológico, pedagógico e do conteúdo matemático. Embora exista, entre os três corpos de conhecimentos, um equilíbrio dinâmico, há uma tensão essencial, não-separável (Mishra e Koehler, 2006). Porém, para fins de análise, é conveniente considerá-los separadamente ou em pares. Então, dentro desta perspectiva conceitual, como se pode ver na Figura 1, podemos também focar nos três componentes: conhecimento tecnológico e pedagógico (TPK, do termo original em inglês *Technological Pedagogical Knowledge*), conhecimento tecnológico e do conteúdo matemático (TCK, do termo original em inglês *Technological Content Knowledge*) e conhecimento pedagógico e do conteúdo matemático (PCK, do termo original em inglês *Pedagogical Content Knowledge*).

A investigação

Neste trabalho, discutimos o papel da articulação entre representações geradas por tecnologias digitais e outras formas de representações físicas[9] como um aspecto do TPACK. A habilidade de articular diferentes representações para um objeto dado, reconhecendo que propriedades recebem mais ou menos destaque por cada uma delas, é uma componente importante do conhecimento pedagógico de conteúdo, uma vez que possibilita ao professor avaliar que representações são mais apropriadas a cada contexto pedagógico. Por exemplo, o gráfico de uma função polinomial esboçado para valores "pequenos" das variáveis pode dar mais destaque aos extremos locais da função (Figura 2, à esquerda); enquanto que o gráfico da mesma função esboçado para valores maiores das variáveis pode dar mais destaque ao seu comportamento assintótico (Figura 2, à direita).

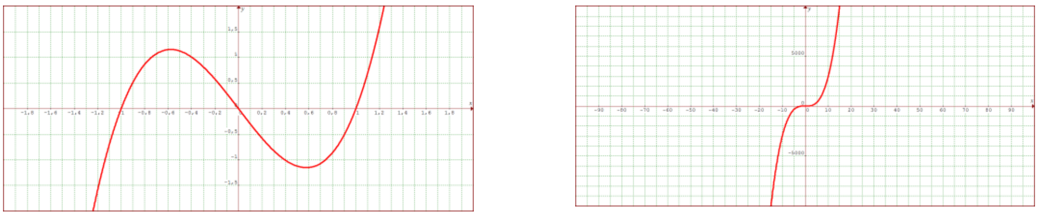


Figura 2: O gráfico da função $f(x) = 3(x^3 - x)$, esboçado para valores diferentes da variáveis.

Tecnologias digitais podem ser usadas para gerar representações com certas características particulares (Giraldo, Caetano & Mattos, 2013, p. 114). Em primeiro lugar, diferentemente do que ocorre com papel e lápis, representações geradas por tecnologias digitais podem, em um certo sentido, "reagir" à forma como são construídas e às ações do usuário. Por exemplo, no desenho de um quadrado construído em papel e lápis, suas propriedades (lados congruentes e ângulos retos) podem ser usadas na construção ou simplesmente indicadas por meio de registros no desenho; enquanto que na construção de um quadrado em um ambiente de geometria dinâmica, essas mesmas propriedades são

[9] Neste trabalho, tratamos exclusivamente de representações exteriores, isto é, representações para objetivos matemáticos dados, construídas em meios físicos.

parte da própria construção e se preservam na ação de arrastar lados e vértices do quadrado (Figura 3).

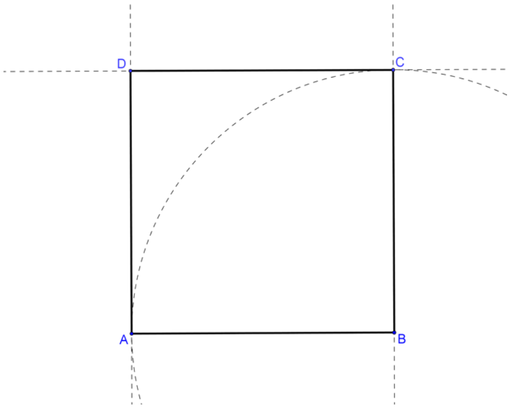


Figura 3: Um quadrado construído no software *GeoGebra*.

Em segundo lugar, como tem sido amplamente documentado pela literatura de pesquisa (e.g. Laborde, 2000), a característica dinâmica de representações geradas por tecnologias digitais permite a exploração de propriedades que são preservadas mediante ações do usuário. Além disso, essa característica possibilita ao usuário manipular representações e observar dinamicamente, como consequência de suas ações, certas propriedades ganharem ou perderem destaque. Por exemplo, no caso do exemplo ilustrado na Figura 2 acima, o usuário pode alterar gradativamente os valores que determinam as janelas gráficas e observar os extremos locais perderem destaque enquanto o comportamento assintótico ganha destaque. Esse exemplo, em particular, será foco do primeiro episódio relatado neste artigo.

Levando em conta essas características particulares, argumentamos, portanto, que a habilidade de articular representações geradas por tecnologias digitais – bem como articular estas com outras formas de representação – é um componente crucial do TPACK. Entendemos por representações digitais aquelas geradas por meio de softwares computacionais e visualizadas pelo sujeito na tela do computador, tais como gráficos de funções, construções geométricas ou cálculos simbólicos. Uma característica importante de representações digitais é o fato de que elas reagem às intervenções do sujeito. Essa característica oferece possibilidades de exploração de propriedades matemáticas dos objetos representados.

Quando representações digitais de objetos matemáticos são manipuladas dinamicamente, o entendimento sobre que propriedades desses objetos são preservadas, que propriedades ganham destaque e que propriedades perdem destaque, demanda a articulação entre conhecimentos de conteúdo matemático e conhecimentos sobre como essas representações são geradas pelo computador – por exemplo, conhecimentos sobre como a natureza dos processos e dos algoritmos envolvidos pode ter efeitos nos aspectos das representações geradas. Além disso, conhecimentos de natureza pedagógica entram em jogo na avaliação da adequação do destaque adquirido pelas diferentes propriedades a cada situação de ensino. Assim, entendemos que o *conhecimento, tecnológico e pedagógico do conteúdo* (TPACK) deve estar presente e deve ser estimulado em situações especialmente desenhadas para estimular articulações entre representações digitais – e, em particular, conflitos associados a essas articulações –, podendo ser empregadas na formação inicial e continuada de professores para contribuir para a construção dessas habilidades.

Ilustramos nossos argumentos com dados empíricos obtidos originalmente como parte da tese de doutoramento de um dos autores (Giraldo et al, 2003; Giraldo, 2004), sobre o caso de funções reais de variável real. Parte desses dados são aqui reinterpretados à luz da teoria TPACK (Mishra & Koehler, 2006; Koehler & Mishra, 2008). Na ocasião da elaboração da tese, a análise se baseou na noção de *imagem de conceito* proposta por Tall e Vinner (1981). Consideramos que a análise desses dados com base na teoria TPACK possa contribuir com a discussão sobre possibilidades de uso de tecnologias digitais na formação inicial de professores de matemática, uma vez que que considera os conhecimentos necessários ao futuro professor para a ação docente com o uso dessas tecnologias.

Método

Na pesquisa de doutoramento, participaram 6 estudantes de um curso universitário de formação inicial de professores de matemática (Licenciatura em Matemática) em uma universidade pública brasileira, identificados pelos pseudônimos: Antônio, Carlos, Francisco, Júlio, Marcelo e Tiago. Os dados empíricos foram coletados durante o ano de 2001, quando os participantes cursavam o primeiro ano do curso de graduação. Neste trabalho, restringimos as nossas análises a dois episódios envolvendo os participantes Francisco e Carlos. Consideramos ilustrativos do argumento que pretendemos desenvolver.

Os dados foram coletados por meio de uma série de entrevistas individuais semiestruturadas, em que foram propostas aos participantes tarefas matemáticas envolvendo representações para funções reais geradas por tecnologias digitais que apresentavam aspectos aparentemente contraditórios com outras formas de representação. Assim, essas tarefas foram intencionalmente desenhadas para destacar aspectos das representações computacionais que potencialmente gerariam situações de conflito com outras formas de representação.

O objetivo das tarefas era, portanto, identificar estratégias e reações dos participantes frente a tais situações, além de suas possíveis preferências por determinados tipos de representações ao buscarem garantias de validade para os resultados. Ao longo do desenvolvimento das tarefas, os participantes manipulavam livremente as representações digitais inicialmente apresentadas, por exemplo, alterando parâmetros para a visualização de gráficos. Desta forma, a ferramenta tecnológica desempenhava um papel central na exploração das situações de conflito. Assim, justifica-se a utilização do aporte teórico TPACK, uma vez que os conhecimentos tecnológico e de conteúdo foram mobilizados e articulados pelos participantes constantemente durante a realização das tarefas. Neste artigo, consideramos *situação de conflito* como “a percepção, por parte do estudante, de uma aparente contradição motivada pelas limitações de uma descrição, ou pelo confronto de mais de uma descrição” (Giraldo, 2004, pp. 74 e 75).

As sessões, que tiveram durações variando entre 30 e 60 minutos, contaram com a participação do entrevistado e do pesquisador apenas, e transcorreram em uma sala com um computador à disposição. Durante as entrevistas, os participantes eram livres para usar o computador, manipulando o software que gerou a representação em questão, bem como registros em papel, e eram encorajados a explicar e justificar oralmente seus procedimentos e estratégias.

Em cada uma das entrevistas foi permitido, em um primeiro momento, que os participantes se engajassem no que Goldin (2000, p. 520) descreve como *resolução livre de problemas*, para que se pudesse observar seu comportamento espontâneo e as razões para suas escolhas espontâneas. Entretanto, nos casos em que as contradições aparentes entre as representações não foram percebidas em absoluto pelo entrevistado, interviu-se com frases do tipo “você não acha que há alguma contradição aqui?”. Tal procedimento foi adotado visto que o objetivo original do estudo era, em linhas gerais, compreender o papel pedagógico da articulação entre representações digitais e não digitais (especialmente em situações de conflito) na construção do conhecimento sobre os conceitos matemáticos envolvidos.

Todas as entrevistas foram audiogravadas e transcritas em totalidade. Durante a realização das entrevistas foram tomadas ainda notas de campo, as quais tinham por objetivo registrar as ações não verbais dos participantes que fossem relevantes para a compreensão de seu comportamento ou suas estratégias durante as sessões.

Passamos a relatar e analisar os resultados de dois episódios, transcorridos em duas entrevistas, designados por entrevistas T1 e T2.

Resultados

Entrevista T1 – Comportamento Assintótico

Foram apresentadas aos participantes duas representações para a função $h(x) = \sqrt{x^2+1}$: (a) a expressão algébrica; (b) o gráfico, gerado pelo software *Maple V* na janela gráfica $[-100, 100] \times [0, 100]$ (Figura 4, a seguir). Devido a escolha da janela gráfica, a imagem do gráfico da função na tela adquiria o aspecto da função módulo (na verdade, de duas assíntotas inclinadas). É importante frisar que, no início da entrevista, chamou-se atenção dos participantes para as características das representações apresentadas: a janela gráfica em que o gráfico foi traçado no software, e o fato de que aquele gráfico correspondia à função cuja expressão algébrica também era dada. Desta forma, foi dado considerável destaque às contradições aparentes entre as representações. A tarefa proposta consistia em verificar se h era ou não derivável.

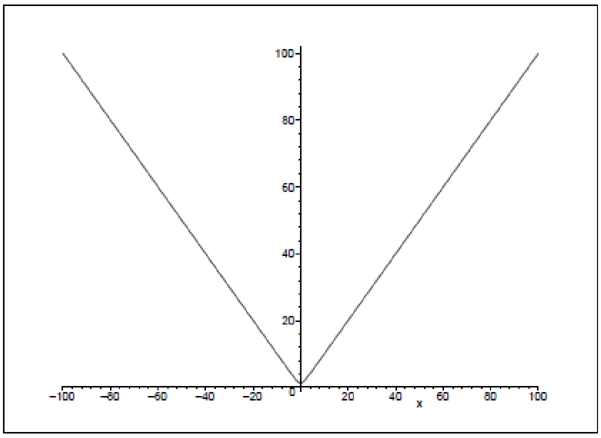


Figura 4: O gráfico da função $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ esboçado na janela gráfica $[-100, 100] \times [0, 100]$.

Episódio 1: Francisco

Francisco afirma, olhando para a fórmula da função, que ela deveria ser derivável, e que, portanto, o "bico" mostrado na tela do computador não seria na realidade um bico, mas uma curva suave. Ele aproxima o rosto da tela do computador e, sem mudar a janela gráfica, comenta:

> Visualmente, no visual, ali não é o bico, então, teria derivada. Estou falando em termos visuais. Agora vamos falar algebricamente.

Ele olha novamente para a expressão algébrica e verifica que seria possível aplicar as fórmulas usuais de derivação, logo a função tem que ser derivável. Em seguida, Francisco volta a atenção para a tela do computador e efetua o "zoom". Ao ver a nova imagem, ele comenta:

> É, parece uma parábola. Dando um zoom aí, você percebe nitidamente como é que ela é derivável.

Francisco conclui desta forma a tarefa proposta. Entretanto, ele se engaja espontaneamente em uma segunda investigação. Ele observa que, mesmo na nova janela gráfica, em que o aparente "bico" havia desaparecido, o gráfico parece ser formado por duas semirretas unidas (suavemente) por uma curva nas proximidades do ponto $(0, 1)$, embora a expressão algébrica da função não seja, aparentemente a equação de uma reta. Ele comenta:

> Agora está aí, uma boa questão. [...] A fórmula não parece de uma reta. Mas isso aqui [*aponta para o trecho do gráfico que parecia ser uma semirreta] tende a ser uma reta*, mas não é uma reta? [...] Aí, agora, me pegou!

Depois de pensar alguns segundos, Francisco exclama:

> Espera! Eu sei que é derivável! Deixa eu ver. Eu sei que ela é derivável. [...] Aí, eu vou ter que derivar ela para pensar se é uma reta ou não.

O participante calcula a derivada, obtendo o resultado:

$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ele conclui que como a derivada não é constante em nenhum intervalo, a função não pode ser linear em nenhum intervalo:

> Olha! Essa função é derivável, mas vai ter uma inclinação diferente para cada ponto. Não é como a função módulo que não é derivável no ponto $(0, 0)$, mas que tem a mesma derivada do lado x positivo e mesma derivada do lado x negativo para todos os pontos. Essa função não, ela vai se aproximar no $+\infty$ e $-\infty$ da função $|x|$. Vai se aproximar, mas para cada ponto vai ter uma derivada diferente.

Ele ainda explica em que sentido a função h se aproxima da função módulo:

> Entendo por que. Vamos colocar um x bem grande, um $x = 100$. Se fosse a função $\sqrt{x^2}$, seria $\sqrt{100^2}$. Mas qual é a diferença entre $\sqrt{100^2}$ e $\sqrt{100^2+1}$? É muito pequena. E quanto maior for o x, menor vai ser essa diferença, ou seja, ela vai tender a encostar nessa reta, que é a $\sqrt{x^2}$.

Verificamos que Francisco vivenciou duas situações de conflito. Na primeira, ele percebe que o aparente "bico" mostrado na tela não seria compatível com a expressão algébrica da função. Como ele está convencido de que a função seria derivável, não experimenta qualquer confusão ou dúvida. Mesmo assim, esta primeira situação de conflito o motiva a compreender mais profundamente a relação entre as representações computacional e algébrica. De fato, ele alterna sua atenção entre as duas representações diversas vezes antes de confirmar finalmente sua afirmação inicial sobre a diferenciabilidade de h. Na segunda situação de conflito, Francisco propõe a si mesmo uma questão: *o gráfico seria formado por semi-retas ou não*? Ele fica inicialmente em dúvida e estabelece uma estratégia algébrica para concluir: *se a derivada de uma função não é constante em um dado intervalo, a função não pode ser linear no intervalo*.

Assim, Francisco verifica que o gráfico mostrado na tela e a expressão algébrica da função h sugerem coisas diferentes e decide investigar algebricamente se h é ou não linear quando restrita a algum intervalo. Para tal, ele recorre à estratégia de verificar se a derivada da função é ou não constante em algum intervalo, o que mostra que já é de seu conhecimento o fato de a derivada ser constante estar relacionado com a primitiva ser linear. Cumpre salientar que foi o conflito gerado pelas duas formas de representação que levou Francisco a uma situação em que ele pôde acionar e aplicar o seu conhecimento.

Ao observar conjuntamente as duas representações (algébrica e gráfica), Francisco refletiu sobre o seu conhecimento sobre o conceito de derivada, fazendo, inclusive inferências que extrapolaram a tarefa proposta. Neste caso, a ferramenta tecnológica permitiu que o estudante observasse o gráfico a partir de uma janela gráfica que poderia induzi-lo a uma conclusão equivocada. Mas o conhecimento de Francisco sobre derivada permitiu que ele questionasse o que o gráfico estava lhe mostrando (bico). A exploração e a investigação sobre o formato (linear ou não) do gráfico também estão relacionadas ao seu conhecimento sobre o conteúdo, contudo só foram propiciadas pela ferramenta. Assim, o aprofundamento do conhecimento de conteúdo matemático de Francisco ocorreu a partir da articulação do conhecimento de conteúdo que possuía *a priori* com a exploração da ferramenta tecnológica. Nos termos de Mishra e Koehler (2006, 2008), percebemos o conhecimento tecnológico e do conteúdo, visto que a situação propiciada pelas ações de Francisco sobre o software indicam como o conhecimento sobre a tecnologia pode aprimorar o conhecimento sobre o conteúdo.

Entrevista T2 – Descontinuidades

Foram apresentadas aos participantes as seguintes funções:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-1} \qquad f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \qquad f_3(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

A tarefa foi conduzida em quatro etapas, de modo a deixar evidente contradições geradas por diferentes representações:

1. Foi pedido aos participantes que esboçassem os gráficos com papel e lápis, indicando os pontos de descontinuidade, os limites nestes pontos e no infinito.
2. Foi pedido que eles gerassem gráficos para as funções com o software *Maple V*, e que comparassem com os próprios esboços com papel e lápis.
3. Foi pedido que eles acrescentassem nos gráficos gerados com o *Maple V* um comando do software (*discont=true*) que analisa simbolicamente a expressão algébrica da função.
4. Finalmente, foi perguntado se as funções eram contínuas e o que representava melhor o gráfico, o esboço em lápis e papel ou o gráfico traçado na tela.

O gráfico de f_1 exibia uma "falsa assíntota", gerada pelo algoritmo usado pelo software. Mais precisamente, a reta vertical que aparece na imagem na tela (Figura 5, à esquerda) é gerada pela interpolação indevida de pontos no gráfico à esquerda e à direita de $x = 1$. Além disso, o gráfico de f_3 não apresentava qualquer indicação do ponto de descontinuidade (Figura 5, à direita). A análise simbólica feita com o comando *discont=true* elimina a "falsa assíntota" no gráfico de f_1, mas não tem qualquer efeito nos gráficos de f_2 e de f_3.

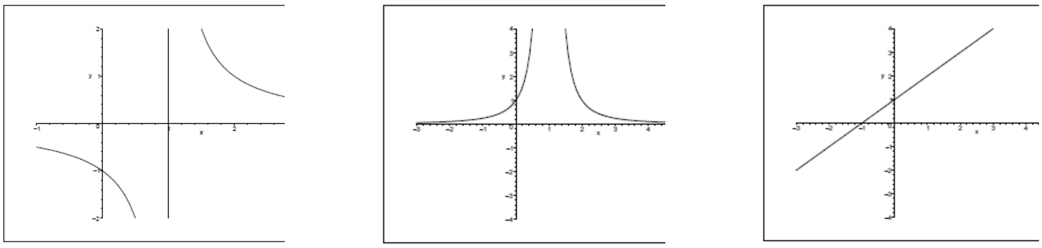


Figura 5: Os gráficos de $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$, com uma "falsa assíntota", de $f_2(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ e de $f_3(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, gerados pelo software *Maple V*.

Episódio 2: Carlos

Carlos esboça os gráficos de f_1 e f_2 no papel, identificando corretamente os limites nos pontos de descontinuidade e no infinito. No caso de f_3, ele erra ao calcular o limite em x tendendo a 1 e identifica uma assíntota em lugar de uma descontinuidade removível. Ao traçar os gráficos de f_1 e f_2 no computador, ele estranha o fato da assíntota só ser mostrada para uma das funções. Inicialmente, ele diz não entender a razão disto, mas poucos segundos depois, exclama:

> Ah, só uma coisa! [...] Na realidade, ele está considerando então que na primeira função não seria uma função. Porque o mesmo x está dando mais de um valor de y. [...] Esse gráfico aí não seria o gráfico de uma função.

Ao ser questionado sobre o motivo para tal erro, Carlos responde porque o computador liga os pontos. Em seguida, o comando *discont=true* é acrescentado e explica-se sua função. Carlos comenta que a análise simbólica evita que o computador desenhe a falsa assíntota. Passa-se, então, a analisar f_3. Ao ver o gráfico na tela, o participante imediatamente se dá conta de seu erro. Ele explica o processo de construção do gráfico pelo computador:

> Na realidade, ele resolve o quociente dos dois polinômios. Então, ele pensa que a função $\frac{x^2-1}{x-1}$ é na realidade a função $x + 1$. Então, ele considera como uma função linear. Então, por isso que ele constrói o gráfico como se fosse uma função linear. O computador não põe a bolinha, ela liga os pontos direto.

Em seguida ele volta para o desenho feito inicialmente no papel e o conserta, desenhando a 'bolinha' para indicar a descontinuidade. Ao incluir o comando *discont=true*, o participante comenta que, mesmo com a análise algébrica, o computador é incapaz de "pular" um único ponto. Finalmente, pergunta-se de que forma as funções eram melhor representadas, no papel ou no computador. Carlos responde:

> No computador ele é imperfeito porque não indica a descontinuidade. Mas na verdade o gráfico no papel também não seria perfeito, porque não dá para desenhar uma bolinha do tamanho de um ponto. [...] Imperfeito, o computador é sim, mas não dá para fazer nada totalmente perfeito. Mas é melhor do que o computador, por que pelo menos a gente indica que tem uma descontinuidade. [...] Mas ponto mesmo, a descontinuidade como sendo um ponto, ficaria somente no campo da abstração.

Nesta entrevista, Carlos vivencia espontaneamente duas situações de conflito. Na primeira, ele se dá conta de que a assíntota vertical só é mostrada em um dos gráficos. O conflito causa uma confusão muito ligeira, pois o participante compreende sua origem em poucos segundos. Neste caso, o conflito serve para confirmar o entendimento de Carlos sobre as limitações dos algoritmos computacionais para traçar gráficos de funções. Na segunda situação de conflito, Carlos percebe que o gráfico de f_3 traçado no computador está diferente daquele traçado por ele no papel. Um primeiro efeito deste conflito é a percepção pelo participante de seu próprio erro (na verdade, a rapidez com que o participante percebe o erro ao ver o gráfico na tela sugere que este não foi devido a uma deficiência conceitual de Carlos, mas a uma distração momentânea).

Mas este conflito tem um segundo – e mais interessante – efeito. De fato, ele atua chamando a atenção do participante não só para a limitação da representação digital, como também para a limitação da representação gráfica produzida por ele próprio: *não é possível desenhar uma bolinha do tamanho de um ponto*.

Carlos experimentou uma situação de conflito ao observar que o software não representava a descontinuidade da função f_3, mesmo com o comando que faz a análise simbólica da expressão. Ele compreende a situação imediatamente, atribuindo o resultado ao algoritmo computacional para traçar gráficos por interpolação. Carlos comenta também que o desenho feito por ele próprio no papel também é limitado, pois não é possível desenhar "uma bolinha do tamanho de um ponto". Isto é, o conflito detonado a princípio pela constatação de que a representação digital era limitada, quando comparada à representação gráfica produzida com lápis e papel, fez com que o estudante se desse conta não só de limitações da representação digital, mas também da representação produzida com lápis e papel.

Nesse caso, Carlos percebe que a representação gráfica a partir do recurso tecnológico em questão apresenta alguma limitação, o que é consonante com o entendimento, segundo o aporte teórico do TPACK, de que determinada tecnologia tem possibilidades e restrições. Além disso, transfere a ideia de limitação para a representação gráfica tradicional em lápis e papel. Ao articular as limitações em representações distintas, é possível inferir que o conhecimento de conteúdo – nesse caso, relativo à descontinuidade – de Carlos foi mobilizado a partir da utilização de um recurso digital. Assim, podemos admitir que a atividade apresentada possibilitou que Carlos potencializasse o conhecimento tecnológico e de conteúdo matemático, necessário a um futuro professor.

Considerações

A reinterpretação dessas situações nos mostrou como o uso da tecnologia pode ser utilizado a favor do ensino e da aprendizagem da matemática – a partir da formação inicial de professores, mas que pode ser refletida na prática docente na educação básica – e também que esse uso deve ser cuidadosamente planejado. As tarefas aqui apresentadas fizeram parte de uma pesquisa de doutorado cujo foco estava no papel de situações de conflito no desenvolvimento de imagens de conceito. Neste texto, analisamos essas situações por um outro prisma. Enfatizamos a importância de refletirmos sobre as atividades propostas aos nossos alunos em todos os níveis de ensino. No âmbito da formação de professores, levar o futuro professor a vivenciar atividades que envolvam recursos tecnológicos em disciplinas da grade curricular que visam à formação específica em matemática é uma maneira indireta de estimular o uso desse tipo de recurso na sua futura prática docente.

Em ambos os episódios foi possível perceber que as potencialidades e as limitações do recurso digital possibilitaram que os estudantes experimentassem situações que dificilmente poderiam ser tratadas em um curso de funções sem o uso desse tipo de ferramenta. Por mais que nos dois episódios os conhecimentos tecnológico e de conteúdo matemático tenham sido claramente acionados, acreditamos que o fato de o estudante vivenciar tais situações em diversos momentos da formação inicial o estimula em sua futura prática pedagógica. Assim, o TPACK pode ser alcançado a partir de atividades e propostas metodológicas que considerem inicialmente os conhecimentos em pares: conhecimento tecnológico e pedagógico (TPK), conhecimento tecnológico e do conteúdo matemático (TCK) e conhecimento pedagógico e do conteúdo matemático (PCK) (Mishra & Koehler, 2006; Koehler & Mishra, 2008).

Acreditamos que atividades como as descritas neste artigo podem contribuir para que estudantes que as vivenciem transformem-se em professores capazes de transpor tais experiências, seja com novas ferramentas, seja com ferramentas já conhecidas utilizadas em outras áreas. O conhecimento tecnológico, pedagógico e do conteúdo construído a partir dessas atividades pode formar uma base que permita, por exemplo, que tais professores utilizem o *GeoGebra* para fazer explorações gráficas de funções na Educação Básica ou que utilizem planilhas eletrônicas para estudos relacionados à Matemática Financeira, mesmo que não tenham tido uma experiência de utilização dessas ferramentas durante a sua formação inicial. Ressaltamos, ainda, que a manipulação dinâmica de representações digitais propicia uma articulação entre conhecimentos de conteúdo matemático e conhecimentos tecnológicos. Contudo para promovermos situações de aprendizagem é essencial uma avaliação pedagógica das ferramentas tecnológicas em sala. O professor tem, portanto, um papel fundamental. Assim, acreditamos no papel do TPACK na formação de professores, dado que ele aciona e articula os aspectos tecnológico, pedagógico e do conteúdo.

Finalmente, é importante destacar que a situação de conflito por si só não é suficiente. O conhecimento sobre o conteúdo aliado à tecnologia, o conhecimento tecnológico do conteúdo (Mishra & Koehler, 2006), permite a transposição de uma situação de conflito, culminando num aprimoramento de seus conhecimentos. Foi isso que aconteceu com Carlos e Francisco. Como Mishra e Koehler (2006) enfatizam, o TPACK pode auxiliar ou dificultar, isto é, não basta, simplesmente, que a tecnologia esteja presente, é preciso que o seu uso seja planejado e que o professor tenha consciência das suas potencialidades e das suas limitações.

Referências bibliográficas

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Fiorentini, D., & Oliveira A. T. (2013) O lugar das matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? *Bolema, Rio Claro (SP), 27*(47), 917-938.

Giraldo, V., Carvalho, L. M., Tall, D. (2003). Using theoretical-computational conflicts to enrich the concept image of derivative. *Research in Mathematics Education*, *5*, 63-78.

Giraldo, V. (2004). *Descrições e conflitos teórico-computacionais: O caso da derivada*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Giraldo, V., Caetano, P., & Mattos, F. (2013). *Recursos computacionais no ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (4254 pp.).

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-base interviews in mathematics education research. Chapter 19 in A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, pp. 517-545.

Koehler, M. J., & Mishra, P. (2008). Introducing TPCK. In AACTE Committee on Innovation and Technology (Ed.), *Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge for Educators*. New York: Routledge.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 151-161.

Maschietto, M., & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: The productive notion of mathematics laboratories. *ZDM, 42*.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054.

Moreira, P C., & Ferreira, A. C. (2013) O lugar da Matemática na licenciatura em Matemática. *Bolema, Rio Claro (SP), 27*(47), 981-1005.

Niess, M. L., Ronau, R. N., Shafer, K. G., Driskell, S. O., Harper, S. R., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S. A., & Kersaint, G. (2009). Mathematics Teacher TPACK Standards and Development Model. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, n.1.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in the teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, Cambridge, 57*(1), 1-22.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

REPRESENTAÇÕES "ALTERNATIVAS" E CONHECIMENTO INTERPRETATIVO DO PROFESSOR

C. Miguel Ribeiro

Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidade do Algarve

cmribas78@gmail.com

Miguel Montes

Universidade de Huelva

miguel.montes@ddcc.uhu.es

Resumo: No contexto de um projeto que tem como um dos seus objetivos conceptualizar tarefas para a formação de professores recorrendo a múltiplas representações, neste texto apresentamos e discutimos como uma tarefa específica nos fornece oportunidades de aceder e desenvolver o conhecimento interpretativo de futuro professores dos primeiros anos. Em particular, discutimos o conhecimento dos futuros professores ao analisarem (atribuírem sentido a) diferentes representações utilizadas na resposta a um problema no contexto dos números racionais. Os resultados revelam algumas problemáticas tanto no atribuir sentido às resoluções e representações de outros, como no navegar entre representações – aspetos essenciais do trabalho do professor que pretende que seus alunos entendam os porquês matemáticos do que fazem. Estes resultados, e o processo de análise associado permitem, por um lado, obter uma mais ampla compreensão da natureza do conhecimento do professor, na perspectiva do *Mathematical Knowledge for Teaching* e, por outro, delinear algumas possíveis linhas de trabalho futuro.

Palavras-chave: Representações matemáticas; tarefas; conhecimento interpretativo; racionais; formação de professores.

Introdução

Um dos objetivos delineados no Horizonte 2020 (EU, 2011) refere-se à capacidade de adaptação dos indivíduos a uma multiplicidade de situações e de resolução de problemas diversos, cuja diversidade acompanha as constantes mudanças na sociedade atual. De forma a permitir que a escola forme indivíduos com essa capacidade, competências e conhecimento (em particular, matemático), torna-se essencial que o professor detenha um conhecimento (matemático e didático) que possibilite que os seus alunos experienciem um conjunto diversificado de experiências que possam ampliar a sua visão (conhecimentos e capacidades) de resolver e formular problemas (Ribeiro & Amaral, 2015), bem como de atribuírem sentido a respostas de outros aos problemas propostos/formulados.

O conhecimento matemático é exteriorizado pelas representações utilizadas, tornando-se estas fundamentais para possibilitar o desenvolvimento conceptual dos alunos (Duval, 2006). Amplificando este papel da capacidade de recorrer a múltiplas representações, e navegar entre elas (Ribeiro, 2011), como uma forma de desenvolver um conhecimento matemático profundo (no sentido de Ma, 1999), torna-se assim essencial que o “aprendente” amplie o seu próprio espaço de soluções, permitindo-lhes atribuir também sentido a representações alternativas, ou pouco comuns, conferindo-lhes significado. Sendo detentores de um conhecimento destas especificidades, papel das representações e multiplicidade de formas (matemáticas e didáticas) de as encarar nas, e para as, aprendizagens dos alunos, tornará possível que os professores preparem e desenvolvam situações de aprendizagem que permitam, por um lado, trabalhar de forma integrada imagem e definição dos conceitos (no sentido de Vinner, 1991; Tall, 1988). Por outro lado sustentará um *feedback* (Santos & Pinto, 2009) construtivo que permita partir da própria resposta dos alunos, e da matemática envolvida, para a construção de uma visão mais ampla e imbrincada de diferentes conceitos – que podem, à primeira vista, não se considerar necessariamente relacionados.

Uma vez que o conhecimento do professor desempenha um papel essencial na prática (e.g., Llinares & Krainer, 2006; Nye, Konstantopoulos, & Hedges, 2004), afetando, assim, as aprendizagens atuais e futuras dos alunos, tal conhecimento (matemático), necessariamente influenciará a forma como diferentes representações são utilizadas (entendidas), bem como os objetivos perseguidos (Ribeiro, Carrillo, & Monteiro, 2009). Considerando que o conhecimento matemático especificamente relacionado com a atuação docente pode ser ensinado (Hill & Ball, 2004), e que um conhecimento específico sobre múltiplas e diversificadas representações é um dos pilares sustentadores de uma abordagem integrada aos diferentes conceitos matemáticos, torna-se essencial um entendimento sobre alguns dos aspectos que possam ser matematicamente críticos para os futuros professores, entendendo a formação inicial como o primeiro passo no desenvolvimento profissional do professor.

Nesse sentido, neste texto focamo-nos no conhecimento de futuros professores[10] dos primeiros anos ao responderem a um problema para alunos do 6.º ano de escolaridade (no contexto das frações), e ao analisarem respostas de alunos a esse mesmo problema. A escolha do conteúdo de frações sustenta-se no fato de este ser transversal a vários outros conteúdos (ainda que frequentemente de forma apenas implícita); de ser um tema em que alunos (e professores) revelam dificuldades (e.g., Kieren, 1976; Pinto & Ribeiro, 2013) e onde a multiplicidade de representações assume um relevância significativa (e.g., Ball, 1993; Pinto & Ribeiro, 2013). Para o processo de análise, e atendendo à especificidade do conhecimento do professor, recorremos à conceptualização do *Mathematical Knowledge for Teaching – MKT* (Ball, Thames, & Phelps, 2008) focando especificamente os subdomínios do conhecimento do conteúdo (matemático) do professor.

[10] Quando nos referimos a futuros professores será utilizada, maioritariamente, a expressão estudantes.

Algumas notas teóricas

Quando pensamos em, ou sentimos a necessidade de representar algo, essa representação advém do fato de o que pretendemos mostrar não se encontrar diretamente acessível. Essa inacessibilidade ocorre, em particular, no contexto da matemática e dos seus objetos (entes matemáticos), daí que surja a necessidade de recorrer a representações (Duval, 2006), especialmente no caso das frações (D' Amore, 2009). Mas essas representações, independentemente do seu tipo (e.g., pictóricas, simbólicas, interativas, mistas) são sempre, cada uma delas, incompletas, focando somente determinados aspetos do ente (objeto) matemático que pretendem representar. Nesse sentido um conhecimento de uma multiplicidade de representações (tanto em forma como em tipo e características nucleares) torna-se fulcral aquando da aquisição e desenvolvimento de um mais profundo conhecimento matemático relacional. O conhecimento associado a esta multiplicidade de visões, e aos motivos matemáticos que as sustentam, torna-se, assim, essencial para a preparação e implementação de tarefas desafiadoras (Charalambous, 2008), bem como para a atribuição de significado às respostas de outros – mesmo, e essencialmente, quando distintas das esperadas e conhecidas pelo próprio professor. O conteúdo e natureza do conhecimento dessa multiplicidade de representações associa-se ao equacionar o tipo, forma e conteúdo do *feedback* a fornecer – que conhecimentos matemáticos sustentam as opções a tomar e porquê.

O conhecimento do professor é considerado, aqui, na perspetiva do MKT também pelo fato de o trabalho do professor ser (ou dever ser) frequentemente distinto do de outros que utilizam a matemática em outros contextos que não o processo de ensino e aprendizagem – apenas como instrumento, sustentando num saber fazer. Uma dessas diferenças refere-se a que o professor deverá desenvolver o que Ball et al., (2008) denominam de tarefas de ensinar, incluindo nestas “avaliar explicações matemáticas” e “avaliar a plausibilidade das afirmações dos alunos”. Estas duas tarefas de ensinar, quando consideradas de forma conjunta, relacionam-se, de modo imbricado, com o conhecimento associado ao recurso de múltiplas representações, bem como à atribuição de sentido a representações alternativas. Este conhecimento que permite ao professor atribuir sentido às diferentes representações (respostas) dos alunos, e sustentar um *feedback* construtivo, é denominado de conhecimento interpretativo (Jakobsen, Ribeiro, Mellone, 2013), correspondendo a um aspeto particular do *Specialized Content Knowledge* (SCK).

O MKT efetua uma distinção entre o *Common Content Knowledge* (CCK) e o SCK, considerando que o CCK se encontra relacionado com os tópicos que se abordam (explicitamente) na tarefa, sendo um requerimento para a resolver. Corresponde, assim, a um conhecimento matemático utilizado tanto no ensino como noutros contextos (e.g., engenheiros apenas necessitam um conhecimento que lhes permita encontrar a resposta para as questões formuladas). Complementar a este CCK o professor para interpretar e/ou avaliar (e fornecer *feedback*) o trabalho dos alunos, entendendo um conjunto diversificado de representações e navegando de forma frutífera entre elas (Ribeiro, 2011), necessita de um conhecimento matemático que se considera parte do SCK. Assim, para além de saber encontrar a resposta a determinado problema, conhecer a definição de um conceito ou determinar o resultado de determinada operação, é essencial que os professores detenham também conhecimentos matemáticos que lhes permitam entender o raciocínio matemático que sustenta determinados cálculos, definição ou estratégias de resolução de problemas – SCK (Thames & Ball, 2010).

Nesse sentido, os professores deverão ser detentores de um amplo conhecimento de exemplos, estratégias e representações associadas à resolução (e formulação) de problemas, o que lhes permitirá, também, entender/atribuir significado a soluções que sejam distintas das suas próprias, podendo estas incluir representações alternativas – tanto em forma como em termos de processos e raciocínio associado. A atribuição de sentido a essas representações que se encontram fora do seu "próprio espaço solução" para o problema proposto configura-se como um aspeto essencial no conhecimento do professor, implicando também as posteriores escolhas das estratégias a seguir, recursos a utilizar e *feedback* a fornecer – a escolha dessas estratégias, recursos e *feedback* (sua adequação e forma) sustentam-se na especificidade do conhecimento matemático do professor que molda o seu conhecimento didático (Baumert, Kunter, Blum, et al., 2010). Note-se que este espaço de soluções é encarado de forma complementar ao assumido por Leikin e Lev (2007), uma vez que não se considera como a multiplicidade de soluções apresentadas por um grupo de especialistas, mas sim possíveis diferentes formas de representar a solução do problema e/ou diferentes estratégias – situações envolvendo uma única solução, ao contrário dos problemas propostos por Leikin e Lev (2007).

Assim, a ampliação do próprio espaço de soluções requer, e sustenta-se, por um lado, nas diferentes abordagens, raciocínios e representações utilizadas para encontrar a solução de um problema – onde um conhecimento integrado de imagem e definição dos conceitos (Vinner, 1991; Tall, 1988) envolvidos se torna essencial –, mas também no conhecimento matemático que sustenta atribuir sentido às soluções apresentadas por outros (alunos). O conhecimento matemático envolvido na atribuição de sentido de tais representações, essencialmente quando alternativas e fora do nosso próprio espaço solução (conhecimento interpretativo – Jakobsen, Ribeiro, & Mellone, 2014) é, portanto, substancialmente mais complexo, profundo e amplo do que apenas saber resolver o problema proposto (saber fazer) ou pensar em possíveis soluções ou estratégias, evolvendo, assim, um conhecimento relacional que permita expandir as fronteiras do espaço de soluções de cada indivíduo.

A utilização de representações no ensino é encarada, desde há várias décadas, como um aspeto essencial, considerando os professores a sua importância como aspeto motivacional, mas relegando para segundo plano o seu papel para a aprendizagem conceptual (Ball, 1993). Por outro lado, o tema das frações é um dos temas em que o recurso a múltiplas representações assume uma importância significativa para as aprendizagens dos alunos (e.g., Siegler et al., 2010). Considerando que o conhecimento do professor é um dos fatores cruciais nessas aprendizagens (e.g., Llinares & Krainer, 2006; Nye, et al., 2004) e que a formação inicial deverá contribuir para desenvolver esse conhecimento específico (interpretativo) que permita entender uma multiplicidade de representações para um mesmo ente/conceito matemático e/ou resposta a um problema, torna-se essencial uma abordagem específica ao recurso das representações como forma de alcançar esse objetivo. Dessa forma sustentar-se-á o desenvolvimento de um conhecimento que possibilite, posteriormente, conceptualizar e implementar tarefas que desenvolvam nos alunos um conhecimento conceptual.

Contexto e método

Este texto é parte de um projeto mais amplo que tem como um dos seus objetivos conceptualizar tarefas que permitam aceder e desenvolver o conhecimento matemático de alunos e professores (atuais e futuros), sendo que o recurso a representações alternativas se configura como um dos aspetos centrais. Apesar de terem sido recolhidas informações em diversos países (e.g., Itália, Noruega, Brasil) em contextos de formação inicial e contínua de professores (licenciaturas e mestrados) bem como em programas de doutoramento, aqui o foco de atenção são as informações recolhidas numa Instituição de formação de professores em Portugal e, em particular, as respostas fornecidas por 20 estudantes do 3.º ano de uma Licenciatura em Educação Básica (LEB) onde o primeiro autor era o docente responsável.

As informações constam das respostas dos estudantes a uma tarefa no âmbito das frações, tendo esta sido aplicada e discutida durante duas aulas (3 horas cada) de uma disciplina de opção, onde o foco era o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado do professor. Complementarmente foram realizadas também entrevistas clínicas a alguns estudantes e todas as aulas foram gravadas em áudio e vídeo, o que permitiu, também, posteriormente, uma reflexão e discussão focada nas representações utilizadas, nos argumentos apresentados e no *feedback* que forneceriam (uma das questões da tarefa), tendo como foco os aspetos matemáticos que sustentam tais opções.

A tarefa que se discute aqui encontra-se dividida em duas partes e inicia-se com uma questão "típica" para alunos do 2.º Ciclo, mas situada num contexto de prática:

> *A professora Maria pretende explorar com os seus alunos algumas noções associadas ao conceito e natureza das frações, tendo com esse intuito preparado um conjunto de tarefas envolvendo cinco barras de chocolate iguais. Abaixo encontra-se a tarefa que preparou para os seus alunos:*
>
> *Que quantidade de chocolate receberão seis alunos se dividirmos igualmente entre eles cinco barras de chocolate?*

Na primeira parte da tarefa solicitava-se que os estudantes apresentassem uma resposta ao problema (*Responde ao problema colocado pela professora Maria – deves responder para ti próprio e não como um aluno*), correspondendo a um conhecimento que se supõe um aluno do 6.º ano detenha sendo, portanto, considerado incluído no CCK.

Com a segunda parte da tarefa tinha-se por objetivo aceder, discutir e desenvolver o conhecimento matemático especializado associado a uma multiplicidade de representações apresentadas como respostas de alunos ao problema inicialmente proposto.[11] Pretendia assim mobilizar os seus (possíveis) conhecimentos associados conjuntamente às frações (conteúdo matemático) e múltiplas representações; navegar entre múltiplas representações (sendo o seu conhecimento matemático especializado o ambiente que proporciona tal navegação); as perspetivas de representação numérica (aritmética e algebraica) versus representações pictóricas, e o papel atribuído às representações, bem como obter informações sobre aspetos do *feedback* a fornecer (ainda que de forma indireta e inexplícita).

A questão colocada foi a seguinte:

> *Para cada uma das respostas dos alunos indica se a consideras matematicamente correta (adequada) ou não, justificando a tua resposta. Nos casos em que consideres as respostas inadequadas, regista um possível feedback a fornecer ao aluno de modo a auxiliá-lo no desenvolvimento do seu conhecimento matemático.*

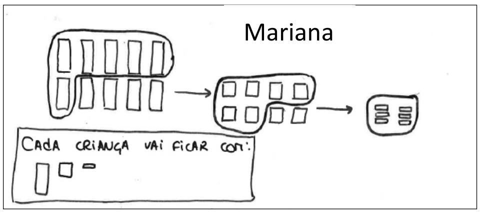


Figura 1: Resolução da Mariana, exclusivamente pictórica

Madalena

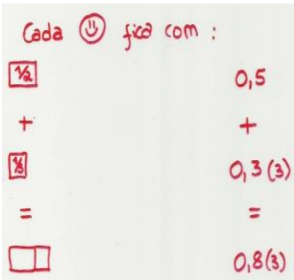


Figura 2: Resolução da Madalena conjugando representação pictórica e numérica (fracionária e decimal)

Também pelo contexto em que a tarefa foi explorada (unidade curricular onde se pretendia de forma explícita, desenvolver o conhecimento matemático especializado do professor)[12], a sua conceptualização, e a escolha das representações a incluir, tinham dois objetivos principais associados. Por um lado possibilitar que os estudantes fossem confrontados com situações emergentes da prática – que podem ocorrer durante a sua

[11] Da tarefa faziam parte sete diferentes resoluções, porém, aqui apenas duas delas são apresentadas.

[12] Os estudantes referem, tanto nas entrevistas como durante a exploração da tarefa, que em outras unidades curriculares o tema das frações e das representações tinha já sido abordado, mas que as situações propostas foram exploradas "*somente em como encontrar a resposta para os problemas, sendo que muitos deles eram de manuais do 5.º ou 6.º anos*" (entrevista).

atividade enquanto professores – e, por outro lado, discutir também as suas próprias crenças e conhecimento associado tanto aos aspetos didáticos como matemáticos[13]. Assim, a própria conceptualização da tarefa pretendia possibilitar aceder e desenvolver o conhecimento especializado dos futuros professores no contexto dos racionais e em situações envolvendo múltiplas representações. Pretendia-se desenvolver conhecimentos e habilidades em trabalhar e navegar entre representações algébricas de números racionais, as suas representações pictóricas e as respetivas respostas escritas – navegar entre diferentes linguagens. É de salientar que as representações incluídas na tarefa são consideradas matematicamente ricas pois permitem aceder, discutir e desenvolver o conhecimento dos resolutores relativamente a diferentes aspetos, tais como seja, averiguar se detetam respostas incorretas; se consideram como (in)adequadas respostas envolvendo apenas representações pictóricas; se entendem o raciocínio e a matemática subjacente à multiplicidade de representações.

A análise foi elaborada em duas etapas. Primeiramente centrou-se na identificação dos conhecimentos matemáticos revelados pelos estudantes ao responderem ao problema (para si próprios) – que tipo de respostas apresentavam (corretas ou não) e que representações eram utilizadas. Posteriormente focaram-se as justificações apresentadas ao interpretarem, e atribuírem sentido às diferentes representações apresentadas na segunda parte da tarefa. Note-se que o foco não é na falta de conhecimento revelado mas sim na obtenção de um mais amplo entendimento dos motivos matemático que poderão sustentar o próprio entendimento das representações pelos estudantes, de forma a melhorar as tarefas com que são confrontados e a forma como são exploradas – contribuindo, assim, para um incremento do seu conhecimento matemático especializado e para a melhoria da formação.

Resultados e discussão

Ao responderem à primeira parte da tarefa (fornecer a resposta ao "problema"), a maioria dos estudantes optou por recorrer à combinação de representações gráficas e numéricas. Uma resposta típica dos estudantes contém uma representação pictórica das cinco barras de chocolate, dividindo-as em seis partes (supostamente iguais), recorrendo a essa representação para fornecerem a sua resposta final: (a) *cada aluno fica com cinco partes*; (b) *cada aluno fica com* $\frac{5}{6}$ *de cada barra*. Estas respostas revelam o entendimento dos estudantes relativo, por um lado, ao papel do todo (unidade) mas também, relativo aos diferentes significados das frações (dificuldades em resolver problemas envolvendo-os – Pinto & Ribeiro, 2013). Revelam também dificuldades em sair do corpo dos inteiros, apesar de o contexto do problema o situar, explicitamente, num contexto de frações. Estas

[13] Apesar de ser uma unidade curricular da Licenciatura, incluída na área da matemática, considerando o contexto da formação de professores, um dos aspetos essenciais de todas as unidades curriculares de que o primeiro autor é responsável nesta área assumem como ponto de referência as especificidades do conhecimento matemático do professor.

dificuldades dos estudantes são, só por si, preocupantes pois este configura-se como um problema para alunos dos anos iniciais – seus futuros alunos; os estudantes encontram-se já no terceiro ano da sua formação inicial, e tiveram já pelo menos uma unidade curricular onde os racionais, e em particular as frações foram abordadas[14]; o espaço de respostas fornecido, e as representações utilizadas (semelhantes a de alunos) problematiza o ponto de partida para o desenvolvimento do seu conhecimento interpretativo – e, portanto parte do conhecimento especializado do professor.

Das respostas dos 20 estudantes ao analisarem a solução proposta pela Mariana (Figura 1), apenas um desses estudantes apresentou um possível raciocínio correto associado à representação apresentada, assumindo os restantes que a solução apresentada estava incorreta e referindo, explicitamente, que não entendiam o que a Mariana tinha feito. Alguns dos argumentos apresentados:

> Rita: Não entendo o raciocínio. Entendo qual o objetivo mas ela não foi capaz de mostrar o que fez, nem sequer o raciocínio que seguiu, portanto a solução está incorreta, e não é, de todo, clara.
>
> Marta: A resposta está incorreta pois ela não apresenta nenhum número.
>
> Raquel: A solução da Mariana está incorreta pois ela representou 10 barras de chocolate mas depois apenas selecionou seis dessas barras, e não é isso que é pedido no problema. Na sua resolução não existe qualquer referência à utilização de cinco barras.

Estas respostas dos estudantes mostram a associação entre o não entenderem a representação apresentada (e, obviamente o raciocínio e aspetos matemáticos associados) e o assumirem que essa solução se encontra incorreta, não podendo, portanto ser aceite. Este não entendimento da representação apresentada como solução associa-se, por um lado ao papel que atribuem à(s) representação(ões) numérica(s) e, assim, tanto à Aritmética como à Álgebra. Por outro lado associa-se ao fato de este tipo de representação se encontrar fora do seu próprio espaço solução e à dificuldade (incapacidade) em construírem conhecimento a partir de uma sua análise. Também a dificuldade em interpretar a representação das barras de chocolate como $\frac{10}{2}$ das cinco barras é reveladora de uma problemática em navegar entre diferentes representações, mesmo quando estas se encontram inseridas num mesmo tema matemático e envolvendo apenas metades. A importância atribuída ao papel da Álgebra, e necessidade da presença de “números” nas respostas aos problemas encontra-se, ainda, de tal forma imbuída nos estudantes que mesmo o único estudante que tinha previamente explicado de forma correta o raciocínio associado à representação da Mariana considera que a resposta não poderá ser aceite como correta.

[14] Referido explicitamente no programa de estudos de LEB, bem como na ficha curricular da unidade curricular, e pelos estudantes nas próprias aulas e nas entrevistas.

Dina: Apesar de o raciocínio se encontrar correto, não existe referência a qualquer número e, portanto, não podemos aceitar esta resposta como correta.

Esta argumentação justifica a necessidade de identificar as situações matematicamente críticas, assumindo-as como ponto de partida para a preparação e implementação de tarefas que permitam desenvolver o conhecimento especializado do professor (Ribeiro & Carrillo, 2011). Estes resultados salientam, também, a necessidade de uma alteração de foco na formação de professores – de um saber resolver os problemas (do nível dos alunos) a um conhecimento que lhes permita fornecer um *feedback* construtivo, assumindo o navegar entre múltiplas representações um aspeto essencial nessa alteração de foco.

A solução apresentada pela Madalena (Figura 2) foi incluída na tarefa pois a aluna recorre a duas formas de representações "distintas" para indicar a quantidade de chocolate que cada aluno receberia. Estas representações, complementam a efetuada pela Mariana (Figura 1), permitindo explorar a complexidade da(s) relação(ões) entre a representação fracionária e decimal (e em particular à representação de dízima infinita periódica), bem como outras formas diferentes de representar algebricamente a quantidade que cada criança receberá $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=0,5+0,(3)\right)$.

Ao analisarem a resposta da Madalena os estudantes aparentemente não atribuem sentido à correspondência entre a representacao pictórica e numérica, nem ao significado matemático do que corresponde 0,8(3) enquanto dízima infinita e quantidade de chocolate a distribuir[15] (mais de metade dos estudantes associam esta representação a uma divisão com resto diferente de zero).

Joana: As operações estão corretas mas não podem ser utilizadas neste problema pois é dito que não sobra nada, e neste caso ficamos com algo a sobrar.

Anabela: A Madalena efetuou corretamente a operação, mas a divisão em partes iguais do chocolate não está correta pois a divisão deverá ser exata, não sobrando nada. Neste caso ela distribui 0,8 mas (3) ficam de fora.

Este tipo de respostas (assumindo a correção da operação mas a inadequação da resposta) é simultaneamente problemático e potente. Problemático pois o tema das dízimas infinitas é parte do currículo do 8.º ano de escolaridade (MEC, 2013) tendo sido também um dos temas abordados numa unidade curricular da LEB. Potente porque permite refletir e discutir sobre aspetos relacionados com a multiplicidade de conexões (e seus tipos) entre

[15] Esta correspondência e existência de tal quantidade foi um dos aspetos discutidos posteriormente. Para mais informações sobre os aspetos do conhecimento do professor associado a um conhecimento da História da Matemáticos e da Educação Matemática consultar, por exemplo, Ribeiro (submetido).

diferentes representações e não apenas sobre as representações em si (conexões entre, por exemplo, $\sqrt{2}$, continuidade, funções, noções de infinito(s)) – efetuando, sempre, uma abordagem considerando a prática como ponto de partida e de chegada, assumindo a investigação, seus processos e resultados, como a ponte entre estes dois contextos.

Comentários finais e perspetivas futuras

Os resultados deste trabalho relativo ao conhecimento especializado de futuros professores relativamente à multiplicidade, diversidade e possibilidade de navegação entre diferentes representações (no âmbito das frações, mas também expandindo-o) permitem identificar um conjunto de aspetos essenciais para a formação (inicial) de professores. Esses aspetos referem-se tanto a pré-requisitos como necessidades de mudança de foco e objetivos, de modo a que esta não se limite, quando o caso, a explorar diferentes representações de fração associando-as "apenas" aos seus distintos significados.

Note-se que, apesar de o foco da investigação não ser a identificação de dificuldades, a obtenção de um conjunto de exemplos, e um mais amplo entendimento dos porquês matemáticos associados, configura-se também como um ponto de partida para a conceptualização de tarefas que envolvam múltiplas representações e permitam desenvolver o conhecimento matemático especializado dos (futuros) professores, contribuindo para erradicar essas dificuldades. Podemos constatar também como as tarefas propostas permitem mobilizar e desenvolver tanto o conhecimento matemático dos resolutores, como também mobilizar as suas crenças sobre que representações se podem utilizar em matemática, relacionadas com o tipo de trabalho matemático específico envolvido e potenciado em cada representação.

Considerando que o conhecimento matemático específico para a atuação docente pode ser ensinado (Hill & Ball, 2004), é essencial que os (futuros) professores experienciem na formação situações semelhantes às que poderão encontrar na prática (Carless, 2003; Pinto & Ribeiro, 2013). Essa relação com a prática, e a discussão de múltiplas representações, originárias nas respostas de outros a um determinado problema, configura-se como um dos aspetos essências para o desenvolvimento de um conhecimento especializado (interpretativo) que permitirá fornecer *feedbacks* construtivos e evitar que os números racionais continuem a ser um dos temas mais problemáticos tanto para os alunos como para os futuros professores (pelo menos) dos anos iniciais (e.g., Newstead & Murray, 1998; Pinto & Ribeiro, 2013).

A dificuldade destes futuros professores em deixarem o seu próprio espaço de soluções, adequando e transformando o seu conhecimento matemático (esperado) num conhecimento matemático situado num contexto de prática (a natureza da tarefa), leva-nos a refletir sobre as suas próprias experiências matemáticas anteriores, em particular no que concerne à formação de professores, e ao tipo, natureza, forma e objetivos associados às tarefas com que terão sido confrontados – e, portanto o nosso próprio papel enquanto formadores. Ampliando essa reflexão, e necessidade de mudança, salientam-se as potencialidades das tarefas que envolvem racionais e suas diferentes representações (associadas tanto aos sentidos como às resoluções de problemas e raciocínio associados) no sentido de potenciar a emergência de discussões relativas a outros conceitos, permitindo que os resolutores (alunos, estudantes, professores) desenvolvam uma familiaridade com a disciplina (Jakobsen, Thames, & Ribeiro, 2013). Uma possível linha de trabalho nesse sentido será a de considerar a efetiva inclusão da História da Matemática e da Educação Matemática na formação de professores (não como conteúdo mas como contexto), de forma a que estes possam obter também uma visão mais ampla, e conhecimento associado, sobre de onde vimos e para onde vamos, de forma a que os erros (do passado) sejam efetivamente uma fonte de aprendizagem (Ribeiro, submetido) e entendam a necessidade de ensinar de forma distinta da que foram ensinados.

Procurando complementar as informações e resultados obtidos é essencial desenvolver novas tarefas aprofundando o âmbito dos racionais, mas também abordando outros conceitos (e.g., probabilidade, medida, infinito), de forma a contribuir para um mais amplo entendimento do conteúdo do conhecimento do professor, e seu papel ao recorrer a, e navegar entre, múltiplas representações, desenvolvendo o seu conhecimento interpretativo (Jakobsen et al., 2014) – tanto de uma forma local como global, considerando as conexões tanto explícitas como implícitas.

Agradecimentos:

O trabalho apresentado neste texto forma parte do projecto “Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas” (EDU2013-44047-P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad Español e foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia através do projeto UID/SOC/04020/2013 e SFRH/BPD/104000/2014.

Referências bibliográficas

Ball, D. (1993). Halves, pieces, and twoths: Constructing representational contexts in teaching fractions. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 157-196). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Ball, D., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Carless, D.R. (2003). Factors in the implementation of task-based teaching in primary schools. *System, 31*, 485-500.

Charalambous, C. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the unfolding of tasks in mathematics lessons: Integrating two lines of research. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), Atas do *PME* 32 (Vol. 2, pp. 281-288). Morelia, Mexico: PME.

D' Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas e el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica, 11*, 150-164.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

European Union (2011). *Horizon 2020 – The Framework Programme for Research and Innovation*. Bruxelas, Bélgica: EU.

Hill, H.C., & Ball, D. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *JRME, 35*(5), 330-351.

Jakobsen, A., Thames, M.H., & Ribeiro, C.M. (2013). Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematics teaching. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), Atas do *CERME 8*, (pp. 3125-3134), Antalya: ERME.

Jakobsen, A., Ribeiro, C.M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus: ERIC/SMEAC.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Atas do PME 31* (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul: PME

Llinares, S., & Krainer, K. (2006), Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In Gutierrez A. & Boero, P. (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (429-459). Dordrecht: Sense Publishers.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US*. Mahwash, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Newstead, K., & Murray, H. (1998). Young students' constructions of fractions. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Atas do PME 22* (Vol. 3, pp. 295-303). Stellenbosch: PME.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis, 26*(3), 237-257.

Pinto, H., & Ribeiro, C.M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 85-105.

Ribeiro, C.M. (2011). Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma "eficaz navegação" entre representações. *Educação e Pesquisa, 37*(2), 407-422.

Ribeiro, C.M. (submetido). Conhecimento interpretativo e História da (Educação) Matemática: contributos para a Formação de Professores.

Ribeiro, C.M., & Carrillo, J. (2011). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring Data analysis. In B. Ubuz (Eds.). *Developing Mathematical Thinking*, Atas do *PME 35* (vol. 4, pp. 41-48). Ankara: PME.

Ribeiro, C.M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis y influencia en la práctica de una maestra. In M. J.

González & J. Murrillo (Eds), *XIII Simposio de la SEIEM, Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 415-423). Santander: SEIEM e Universidad de Cantabria.

Santos, L., & Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Atas do PME 33* (vol. 5, pp. 49-56). Thessaloniki: PME.

Siegler, R.S., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction: A practice guide*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance.

Thames, M., & Ball, D. (2010). What mathematical knowledge does teaching require? *Teaching Children's Mathematics, 14*(4), 220-229.

Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. In J. de Lange & M. Doorman (Eds.), Senior secondary mathematics education (pp. 37-41). Utrecht: OW & OC.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

PÓSTERES – GD2

O CONHECIMENTO MATEMÁTICO DE PROFESSORES DO 1.º CICLO EM PORTUGAL

Catarina Vasconcelos Gonçalves
Escola dos Gambozinos, Porto
catarinavasconcelosgoncalves@gmail.com

Alexandra Gomes
CIEC/IE, Universidade do Minho
magomes@ie.uminho.pt

Palavras-chave: Representações matemáticas; geometria elementar; professores do 1.º CEB; conhecimento matemático.

Neste póster apresentamos uma parte de um projeto de Doutoramento, que ainda está na sua fase inicial e no qual se pretende investigar sobre o conhecimento matemático de professores do 1.º ciclo, em Portugal. Nesse âmbito, definiram-se quatro questões de investigação: (1) O que se avalia nos docentes de 1.º ciclo em Portugal? (2) Como se caracteriza o conhecimento matemático de professores de 1.º ciclo em Portugal até 5 anos de serviço? (3) Que conhecimentos matemáticos revelam os professores de 1.º ciclo sobre conceitos de geometria elementar? (4) Quais os obstáculos na construção de conceitos geométricos elementares por parte de professores de 1.º ciclo? Recorreremos a uma metodologia mista envolvendo métodos qualitativos e quantitativos. Relativamente às questões (1) e (2) destaque-se, como instrumentos de recolha de dados, as Provas de Avaliação de Conhecimentos e Capacidades – Componente Específica – Matemática nível 1 e respetivos resultados. Quanto à recolha de dados para dar resposta às questões (3) e (4), será feita a partir de um questionário, aplicado a aproximadamente uma centena de Professores ou futuros professores, da zona Norte, e, posteriormente, a entrevistas a alguns destes professores (aproximadamente uma dezena). Neste póster debruçar-nos-emos apenas sobre as questões (3) e (4) pois é precisamente na procura de respostas para essas questões que irão ser estudadas as representações matemáticas. Ao caracterizar os conhecimentos geométricos dos professores de 1.º ciclo identificando-se os obstáculos de natureza cognitiva na construção de conceitos geométricos elementares, analisar-se-á, entre outros aspetos, o papel das representações na formação destes conceitos geométricos.

Desde os anos 80, que as representações matemáticas têm vindo a ganhar cada vez mais importância no campo da investigação matemática. Por sua vez, na área do currículo de

Matemática, têm tido destaque, ao nível internacional, desde que foram incluídas como um dos "*process standards*" pelo NCTM (2007). Em Portugal, também ganharam destaque, desde que surgiram no Programa de Matemática de 2007 (ME, 2007) como uma orientação metodológica geral e como uma recomendação específica na abordagem dos diversos conceitos e tópicos.

Os conceitos matemáticos caracterizam-se, segundo Dehaene (1999), como objetos mentais para o agente cognitivo de cada indivíduo. Assim, dada a natureza abstrata dos objetos matemáticos, só é possível trabalhá-los através de representações.

Relativamente aos conceitos geométricos, em destaque neste trabalho, apesar de apresentarem qualidades concetuais, também refletem propriedades espaciais. Assim, segundo Fischbein (1993), no caso especial do raciocínio geométrico, lida-se com objetos mentais que possuem simultaneamente propriedades concetuais e figurativas.

Em Geometria, conforme o tipo de figura, pode-se ter diferentes níveis de representação. Parzysz (1988) identifica dois níveis distintos de representação de figuras geométricas. O nível 1, intitulado de *representação próxima*, a representação tem a mesma dimensão da figura geométrica. Há apenas uma mudança do abstrato para o concreto. Relativamente, ao nível 2 – *representação distante* – a dimensão da representação é inferior à da figura. Parzysz (1991) refere que as representações gráficas, em Geometria, têm as seguintes funções: ilustram definições ou teoremas, agrupam um complexo conjunto de informação, ajudam a elaborar conjeturas, ajudam a demonstrar.

Num estudo realizado por Gomes (2003), verificou-se que os sujeitos têm dificuldades na representação de conceitos, dada a sua definição e por outro lado, tendem a basear-se nas representações para definir o conceito e para retirarem propriedades deste. Notou-se também, nesta investigação (Gomes, ibidem), que os participantes preferem usar representações em vez de definições, o que leva a que possam criar imagens limitadas dos conceitos.

Stylianou (2010) estudou as conceções dos professores sobre representações, concluindo que apesar de utilizarem vários tipos de representações no seu ensino, os professores não o fazem conscientemente e com uma intenção definida. Definem representações como produto (desenhos, tabelas, diagramas) e não tanto como processo (isto é, o processo de representar objetos e ideias matemáticas). Tendem a encarar as representações dos alunos como modelos visuais informais de reduzido valor e não como representações verdadeiramente matemáticas.

Referências bibliográficas

Dehaene, S. (1999). *The number sense*. London: Penguin Books.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139-162.

Gomes, A. (2003). *Um estudo sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores de 1.º ciclo. O problema dos conceitos fundamentais em Geometria*. Braga.

MEC. (2013). *Programa e Metas Curriculares Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME.

NCTM. (2007). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM/IIE.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "Seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 79-92.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational studies in Mathematics, 22*, 575-593.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 325-343.

SABERES E PRÁTICAS DOCENTES PARA OENSINO DE GEOMETRIA NOS ANOS INICIAIS: DAS REPRESENTAÇÕES ÀS (RE) SIGNIFICAÇÕES DE VOZES E OLHARES

Bárbara Cristina Moreira Sicardi Nakayama
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar
barbara@ufscar.br

Palavras-chave: saberes docentes, ensino de geometria, representações de aula, anos iniciais.

Para formar docentes para atuar na Educação Básica numa perspectiva consoante com as indicações das atuais tendências propostas pelas Diretrizes Curriculares Nacionais de Formação de Professores é preciso agregar conhecimentos (disciplinares, pedagógicos e didático-pedagógicos da matéria de ensino) e atitudes que possibilitem que os profissionais sejam capazes de entender a necessidade de atuar neste cenário de maneira a transformá-lo. Assim, é imprescindível que estes sujeitos reconheçam que irão atuar como autores de suas práticas educativas que possam atribuir sentido à aprendizagem. No Brasil encontramos relatos de pesquisas (Curi, 2004; Pires, 2008) que indicam que a disciplina "Metodologia e Prática do Ensino de Matemática" seja ministrada nos cursos de Pedagogia com uma carga horária restrita e sempre marcada por crenças e estereótipos que vinculam a imagem da matemática e do professor como sendo os vilões responsáveis por histórias de fracasso e evasão escolar.

O presente trabalho trata de um projeto de investigação que integra as atividades do Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre Narrativas Educativas, Formação e Trabalho Docente. A pesquisa teve início no interior de uma ACIEPE (Atividade Curricular de Integração Ensino Pesquisa Extensão) ofertada a alunos dos cursos de Pedagogia e a professores da rede pública de ensino municipal e estadual da região Sorocaba, interior do Estado de São Paulo e voltada ao estudo das possibilidades didáticas para o ensino e a aprendizagem da matemática nos anos iniciais. No trabalho realizado no decorrer de dois semestres, as representações sobre o processo educativo em matemática dos participantes da ACIEPE serviram de subsídios para a reflexão e a partir de então delineamos alternativas didáticas para redimensionar o ensino desta disciplina.

As produções dos participantes da ACIEPE foram tomadas como objeto de investigação e selecionamos um recorte do estudo abordando a problemática do ensino de geometria para apresentar no Encontro de Investigação em Educação Matemática. Nesta perspectiva, o trabalho proposto para este evento considera os aspectos pedagógicos e epistemológicos das representações de aulas dos participantes, enfatizando a complexidade presente no processo educativo da geometria.

O trabalho que aqui se apresenta propõe-se, portanto investigar as possíveis mudanças conceituais nas dimensões disciplinares, pedagógicas e didático-pedagógicas relacionadas ao ensino de geometria por que passaram os participantes da ACIEPE, tendo por base a identificação e análise dos mitos que sustentam suas representações. Para tanto, foi desenvolvido um Estudo de Caso, com enfoque qualitativo que toma como dados de análise os próprios registros dos participantes focalizando o ensino de geometria.

Os referenciais que sustentaram o trabalho com os participantes da ACIEPE envolveram os próprios documentos oficiais nacionais que orientam as práticas educativas e especialmente as contribuições de Passos (2000), Fidalgo & Ponte (2004), Pais (1996) e Pavanello (2004). Considerando ainda o modelo de Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico (Crowley, 1994) foram discutidos nos encontros os procedimentos dos participantes da ACIEPE para trabalhar em sala de aula com sólidos geométricos no plano e no espaço, assim como as dificuldades no reconhecimento de representações planas de objetos tridimensionais assim como as relações entre representação, visualização, a familiaridade com o desenho, as convenções e o vocabulário próprios da geometria. Também foram analisadas as produções relacionadas ao entendimento dos participantes sobre o processo educativo em geometria e a maneira que o organizam.

A análise dos dados mostrou a importância da visualização e da representação geométricas no processo educativo que os professores conduzem. Foram destacadas considerações didático-pedagógicas que poderão constituir-se em contribuições para desencadear reflexões sobre o ensino de geometria e para a melhoria do trabalho em sala de aula assim como se evidenciou a importância da superação de certos mitos, crenças, valores e falsas ideias com vistas a uma transformação na ação pedagógica.

Referências bibliográficas

Curi, E. (2004). *Formação de professores polivalentes: uma análise de conhecimentos para ensinar matemática e de crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos*. (Tese Doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Crowley, M. L. (1994). O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In M. Lindquist & A. P. Shulte, (Orgs.), *Aprendendo e ensinando geometria*. São Paulo: Atual.

Fidalgo, A., & Ponte, J. P. (2004). Concepções, práticas e reflexão de futuros professores do 1.º ciclo do ensino básico sobre o ensino da Matemática. *Quadrante*, *13*(1), 5-29.

Pais, L. C. (1996). Intuição, experiência e teoria geométrica. *Zetetiké*, *4*(6).

Passos, C. L. B**. (**2000). *Representações, interpretações e prática pedagógica: a geometria na sala de aula*. (Tese de Doutorado em Educação). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Pavanello, R. M. (2004). A geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: contribuições da pesquisa para o trabalho escolar. In R. M. Pavanello (Org). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula*. São Paulo, Biblioteca do Educador Matemático: Coleção SBEM. Volume 2.

Pires, C. M. C. (2008). Pesquisas sobre a formação do professor que ensina matemática por grupos de pesquisa de instituições paulistas. *Educação Matemática e Pesquisa*, *10*, 151-189.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.

REPRESENTAÇÕES, MODELAGEM MATEMÁTICA E CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO NA FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÃTICA NOS ANOS INICIAIS

Rogério Marques Ribeiro[16]

Universidade Federal de São Carlos/Rutgers University-Newark

rogeriomarques@me.com

Arthur Belford Powell

Rutgers University-Newark

powellab@andromeda.rutgers.edu

Ademir Donezeti Caldeira

Universidade Federal de São Carlos

mirocaldeira@gmail.com

Palavras-chave: Conhecimento Matemático para o Ensino; Formação Docente; Modelagem Matemática; Ensino e Aprendizagem da Geometria; Representações Matemáticas.

No presente trabalho está em foco a formação continuada de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais. Esta formação, que aconteceu na rede pública de São Paulo, Brasil, teve como temática a prática de Modelagem Matemática como um ambiente de aprendizagem e que se configurou como o cenário de investigação à esta formação. Esta formação foi realizada em encontros semanais presenciais, aos sábados, e contou com uma duração total de quarenta horas e se constituiu no que podemos chamar de um ambiente de aprendizagem (Barbosa, 2002), palco de nosso estudo, e que é caracterizado por ser a etapa em que o pesquisador teve a oportunidade de interagir com os sujeitos envolvidos na investigação.

Neste ambiente, oferecemos situações de aprendizagem para que os professores pesquisassem, analisassem e descobrissem relações entre objetos matemáticos, procurando identificar as propriedades inerentes aos mesmos, articulando conceitos, procedimentos e representações matemáticas. As atividades propostas nos permitiram realizar uma leitura sobre o conhecimento matemático do professor, bem como observar

[16] Bolsista da CAPES – Brasil.

suas concepções sobre as representações matemáticas no processo de ensino e aprendizagem, o que nos foi importante na hora de decidir sobre as possíveis inferências a serem realizadas ao longo das discussões dentro do grupo.

A referida formação continuada norteou-se pelo quadro teórico proposto por Ball (2000), Ball, Hill e Bass (2005), Hill, Rowan e Ball (2005), Ball, Thames e Phelps (2008) e Ball, Hill e Shilling (2008) que tem como foco o Conhecimento Matemático para o Ensino, assim como pelas perspectivas sobre Modelagem Matemática discutidas por Barbosa, (2001, 2002) e Caldeira (2009). Dessa forma, as ações e atividades propostas aos professores tiveram a intenção de promover reflexões sobre a prática deles, bem como fomentar discussões sobre os conhecimentos para o ensino.

Alguns elementos destacados por Ball e seus colaboradores como necessários e fundamentais ao conhecimento matemático para o ensino mostraram-se fortemente presentes ao longo da formação oferecida, como por exemplo, a escolha de uma melhor representação para uma ideia matemática específica, a partir das representações propostas pelos professores, buscando caminhos para tornar o conteúdo mais compreensível para os alunos. Concordamos com Stylianou (2010) que as representações matemáticas são "uma parte vital na explicação que os professores fazem de novos conceitos, ilustrações nos processos de resolução de problemas e na criação de ligações entre conceitos" (p. 329), e o entendimento do professor sobre as representações matemáticas influencia sua prática de sala de aula, o que implica na aprendizagem dos alunos.

Nossa pesquisa, está alicerçada pelos princípios da pesquisa-ação (Sandín Esteban, 2010) e, para a produção de dados, usamos as gravações em vídeo dos encontros, questionários e entrevistas com os participantes. Em relação ao conteúdo específico de Matemática, uma de nossos objetivos foi o de fomentar uma discussão sobre o ensino e aprendizagem da Geometria. Assim, essa investigação possibilitou investigar o conhecimento dos professores em relação a este conteúdo, bem como compreender o que eles *fazem* ao ensinarem esse conteúdo e de que forma *fazem*, considerando suas escolhas metodológicas, suas percepções e concepções em relação ao ensino, em relação as representações matemáticas, suas estratégias de ensino, seu conhecimento matemático, entre outros elementos que sejam essenciais para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

Para a análise dos dados utilizamos o método da análise de conteúdo. Os resultados parciais apontam que por meio da Modelagem Matemática na formação do professor foi possível que identificássemos não apenas os conhecimentos matemáticos mobilizados pelos professores em relação aos conteúdos matemáticos que estavam sendo discutidos, ou mesmo como eles revelam suas concepções acerca das representações matemáticas, mas também que compreendêssemos como estes professores reconhecem os problemas que envolvem esses conteúdos e suas representações. Estes resultados apresentam, ainda, evidências de que uma formação continuada sob a ótica da Modelagem Matemática contribui para o Conhecimento Matemático para o Ensino.

Referências bibliográficas

Ball, D. L.(1991). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education.* Tese. Michigan State University. Disponível em: http://www.personal.umich.edu/~dball/. Acesso em 02 fev. 2013.

Ball, D.L. (2000). Bridging practices: intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

Ball, D.L., Hill, H.C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D.L., Hill, H.C., & Schiling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teacher's topic specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Ball, D.L.; Thames, M.H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. Bolema, Rio Claro, 15.

Barbosa, J. C. (2002). Modelagem matemática e os futuros professores. In *Reunião Anual da ANPED, 25, Anais...*Caxambu.

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*, 371-406.

Caldeira, A. D. (2009). Modelagem matemática: um outro olhar. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 33-54.

Gonçalves, J., & Simões, C. (1991). O desenvolvimento do professor numa perspectiva de formação permanente. *Inovação, 4*(1), 135-147.

Sandín Esteban, M. P. (2010). *Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições*. Tradução de Miguel Cabrera. Porto Alegre: AMGH.

Stylianou, D. A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*, 325-343.

Grupo de Discussão 3

As representações e as práticas de ensino e recursos

AS REPRESENTAÇÕES E AS PRÁTICAS DE ENSINO E RECURSOS

Nélia Amado
Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

Susana Carreira
Universidade do Algarve e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
scarrei@ualg.pt

Muitas das representações matemáticas que hoje utilizamos resultam de um trabalho contínuo de transformações ao longo de séculos. No entanto, a investigação sobre a importância das representações na aprendizagem da matemática é relativamente recente, tendo surgido na literatura associada à forma como os alunos compreendem as ideias e os conceitos matemáticos e à resolução de problemas. Atualmente, a introdução, uso e exploração de representações matemáticas fazem parte de uma perspetiva didática empenhada em desenvolver a compreensão, a construção de significado matemático, a flexibilidade de raciocínio matemático e a pluralidade de modos de pensar matematicamente. Associadas a estas intenções pedagógicas e verdadeiras metas educativas no ensino da matemática, a importância das tarefas e dos materiais e recursos a integrar na sala de aula torna-se central. Muitos dos recursos a que hoje o professor de matemática tem acesso são de natureza tecnológica ou multimédia. E estes novos recursos trazem novas formas de representar conceitos, processos e mesmo objetos matemáticos (contrariando cada vez mais a ideia de que os objetos matemáticos apenas se podem imaginar) que vêm, por seu turno, provocar mudanças nas práticas de ensino. Por isso, parece-nos ter todo o sentido pensar e discutir as representações matemáticas nas práticas de ensino e nos recursos didáticos.

Este grupo de discussão é composto por cinco comunicações e um póster que se distribuem entre os recursos materiais e as práticas dos professores, no que se refere ao tema central deste Encontro: ***as representações matemáticas***.

As comunicações propostas neste grupo debruçam-se, particularmente, sobre as representações matemáticas presentes em diversos recursos, tais como manuais escolares, e sobre a forma como os professores recorrem a diferentes representações para apoiar as aprendizagens matemáticas dos seus alunos.

Para discutir as transformações que as diferentes representações matemáticas têm sofrido ao longo dos tempos, temos neste grupo as comunicações de Isabel Teixeira, Cecília Costa, Paula Catarino e Maria Manuel Nascimento sobre *As representações matemáticas nos sistemas de equações: análise de três manuais escolares de épocas diferentes* e a comunicação de Maria Manuel, Paula Catarino e Helena Campos sobre as *Representações matemáticas no ensino da "geometria" da 3.ª e 4.ª classes do ensino primário elementar de 1938 a 1941: um estudo descritivo de dois livros.*

Na primeira comunicação as autoras apresentam uma análise de três manuais escolares de três épocas distintas, no mesmo tópico matemático – sistemas de equações. São apresentados exemplos da forma como este tema é tratado ao longo dos três manuais, tal como as representações mais salientes em cada um. As autoras mostram que com o decorrer dos anos se regista o recurso a uma maior diversidade de representações. Atendendo ao facto de se tratar de um tópico matemático atual, será interessante confrontar os resultados deste estudo com os manuais atuais.

A segunda comunicação proporciona-nos uma viagem aos anos letivos de 1938-1939 e de 1940-1941. Nesta comunicação as autoras propõem-se analisar o tipo de representações matemáticas existentes em cada um dos manuais escolares em vigor nos anos letivos referidos. Os manuais selecionados para este estudo apresentam a mesma designação do tema que abordam – Geometria – e destinam-se aos alunos do ensino primário elementar. Esta comunicação constitui uma excelente oportunidade para discutir a evolução das representações e alguns conceitos relacionados com as representações matemáticas.

O surgimento das novas tecnologias teve como consequência natural o aparecimento de novas formas de representação. Os computadores e as calculadoras gráficas vieram mudar a forma como os alunos pensam e constroem os seus conhecimentos. Por exemplo, as potencialidades das calculadoras gráficas permitem uma ampliação do conjunto de representações possíveis de uma função. A facilidade com que um aluno pode ampliar ou reduzir, inverter ou esticar um gráfico, permite um conjunto de representações que se distinguem das convencionais com recurso ao papel e lápis.

A comunicação proposta por Helena Rocha oferece-nos uma oportunidade para discutir a importância das *Múltiplas abordagens, múltiplas representações: um contributo para incrementar a relevância da representação algébrica.* A autora destaca as representações possibilitadas pela tecnologia, em particular pela calculadora gráfica, que de outra forma não seriam possíveis e que permitem uma aprendizagem mais significativa e efetiva. Nesta comunicação, é ainda destacada a desvantagem da utilização de um único tipo de representação na aprendizagem. Deste modo, é recomendável que os professores promovam o estabelecimento de relações entre os vários tipos de representações disponíveis pelas calculadoras, nomeadamente numéricas, algébricas e gráficas. É ainda destacada a importância da escolha de tarefas que façam emergir múltiplas e diversificadas representações. Esta comunicação é um importante contributo para a discussão em torno das representações possibilitadas pelo uso das tecnologias.

A forma como o professor integra as diversas representações matemáticas nas suas práticas é abordada por João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma e Joana Mata-Pereira numa comunicação intitulada: *Representações matemáticas e ações do professor no decorrer de uma discussão matemática*. Os autores analisam as representações utilizadas pelos professores nas suas práticas, tendo em vista promover o raciocínio e a compreensão dos conceitos matemáticos. Destacam ainda a relevância do uso de múltiplas representações simbólicas que possibilitem aos alunos uma aprendizagem significativa, ao invés da memorização de procedimentos e definições. Neste contexto, apresentam quatro episódios relacionados com a resolução de uma tarefa sobre frações. Os vários episódios ilustram a forma como a professora promove o surgimento e as conexões entre diversas representações. O estudo mostra como o tipo de tarefa escolhido se revela decisivo, tal como o tipo de comunicação promovida pela professora, marcada pelo incentivo à participação dos seus alunos.

As práticas são também abordadas na comunicação de Nádia Ferreira e João Pedro da Ponte intitulada O *papel das representações na prática letiva: três futuras professoras e suas práticas de ensino nos números racionais.* Esta comunicação introduz a formação inicial de professores neste grupo de discussão. Assim, os autores procuram compreender a visão que futuros professores do 2.º ciclo têm sobre o papel de diferentes representações dos números racionais e analisar as suas práticas, focando a atenção no tipo de representações que exploram e quando as usam. O tema apresentado nesta comunicação é claramente oportuno na medida em que o futuro professor necessita de ser preparado para dar valor e importância ao uso de múltiplas representações e de tomar consciência das potencialidades e das limitações da utilização das representações.

Douglas da Silva Tinti e Ana Lúcia Manrique apresentam num póster intitulado *Estudo de um contexto formativo desencadeado a partir resolução de problemas e do conceito de frações,* no qual destacam a utilização de várias representações distintas na abordagem das frações.

Comunicações – GD3

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES NA PRÁTICA LETIVA: TRÊS FUTURAS PROFESSORAS E SUAS PRÁTICAS DE ENSINO NOS NÚMEROS RACIONAIS[17].

Nadia Ferreira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
nadiadferreira@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt

Resumo: As representações são ferramentas fundamentais para exprimir ideias matemáticas-chave no processo de ensino e aprendizagem. Aos futuros professores, no ensino dos números racionais, coloca-se o desafio de propor tarefas onde se representem situações matemáticas e não matemáticas de diferentes formas, de modo a promover a compreensão de conceitos fundamentais. O objetivo deste artigo é compreender a visão que os futuros professores do 2.º ciclo têm sobre o papel de diferentes representações dos números racionais (ativas, icónicas e simbólicas) e analisar nas suas práticas, focando a atenção no tipo de representações que exploram e quando as usam. Para tal, analisamos três casos de futuras professoras que reconhecem a importância de explorar diferentes representações dos números racionais no processo de ensino e aprendizagem mas fazem-no de modo diferente. Por fim, discutimos a importância dos futuros professores explorarem diferentes representações dos números racionais de modo a promover a compreensão, dispondo para tal de um conhecimento profundo da Matemática escolar e da sua didática, reconhecendo a complexidade destes constructos.
Palavras-chave: Representações; Números racionais; Prática supervisionada; Conhecimento de futuros professores.

Introdução

O conhecimento que os futuros professores desenvolvem durante a sua formação inicial constitui um campo de muitas dúvidas e controvérsias (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ponte & Chapman, 2015; Shulman, 1986). É necessário compreender qual é o conhecimento para ensinar Matemática dos futuros professores, à entrada, durante e no final da sua formação (Ponte & Chapman, 2015). Em particular, consideramos importante entender o conhecimento dos futuros professores no momento da sua prática supervisionada, assumindo que tal conhecimento é nessa altura sujeito a circunstâncias que permitem a perceção de debilidades e da eventual necessidade de reforço e

[17] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de uma bolsa atribuída à primeira autora (referência SFRH/ BD/99258/2013).

desenvolvimento. Centramos a nossa atenção no conhecimento dos números racionais dado ser um tema que levanta dificuldades na aprendizagem dos alunos, desafia os professores no que diz respeito ao conhecimento e às suas práticas e tem grande relevância nos programas do 2.º ciclo. Um aspeto que contribui para a complexidade destes números é o facto de admitirem várias representações, nomeadamente, decimal, fracionária, percentagem e pictórica. A representação pictórica destes números é por vezes menorizada, mas o seu uso pode iluminar questões de natureza conceptual para alunos e professores (Cox,1999; Ponte & Quaresma, 2011).

Os professores enfrentam o desafio de escolher as representações a usar nas tarefas e também explorar ideias matemáticas a partir de representações elaboradas pelos alunos (NCTM, 2007). Assim, importa compreender como é que futuros professores fazem uso das diferentes representações (formais e informais) dos números racionais e a importância que lhes atribuem. O objetivo deste artigo é compreender a visão de três futuras professoras do 2.º ciclo sobre o papel das representações dos números racionais (ativas, icónicas e simbólicas) e analisar as suas práticas focando a atenção no tipo de representações que exploram e no modo como as usam.

O conhecimento didático e o papel das representações na prática letiva de futuros professores

As representações na prática letiva dos professores

Podemos dizer que uma representação "é uma configuração que está no lugar de algo, de alguma forma" (Goldin, 2008, p. 180). Na literatura encontramos diferentes categorizações das representações usadas por alunos e professores. Para Bruner (1999), as representações ativas estão associadas à ação e manipulação direta de objetos do quotidiano ou estruturados didaticamente e pela simulação de situações reais; as representações icónicas remetem para uma organização visual, usando figuras, imagens, esquemas, diagramas ou desenhos para ilustrar conceitos, procedimentos ou relações entre eles; as representações simbólicas traduzem em linguagem simbólica situações e objetos, de modo oral ou escrito. Pelo seu lado, Bishop e Goffree (1986) categorizam as representações em símbolos matemáticos, linguagem verbal, figuras e objetos.

As representações podem ser entendidas como ferramentas fundamentais para pensar sobre conceitos, procedimentos e relações entre eles (NCTM, 2007). É importante que o percurso de aprendizagem seja construído estabelecendo ligações entre o significado dos conceitos e a linguagem natural, caminhando do informal para o formal (Boavida et al., 2008) e estabelecendo relações entre diferentes representações de uma mesma ideia matemática. Nos números racionais, os alunos devem compreender que um número pode ter várias representações: fração, numeral decimal, percentagem, linguagem natural e pictórica.

As representações podem ser exploradas em diferentes momentos da prática letiva. Podem ser usadas na fase inicial da resolução de problemas para organizar a informação e durante a resolução para manipular a informação, de modo a alcançar o objetivo pretendido. No final do trabalho, as representações permitem partilhar estratégias e apreciar novas ideias. O modo como os professores valorizam as representações e o modo como as usam e relacionam, influencia a capacidade dos alunos de comunicar ideias matemáticas através de diferentes representações (Stylianou, 2010). Podem identificar-se diferentes papéis das representações na prática letiva, como são usadas na prática e quando são úteis. Stylianou (2010) analisou as conceções de professores sobre o uso de representações como um processo de "fazer Matemática" e o seu papel no processo de ensino-aprendizagem, concluindo que a visão sobre o papel das representações influencia o seu uso no ensino. Velez e Ponte (2015) analisaram as ações dos professores no quadro do ensino-aprendizagem exploratório e identificaram ações como promover a escolha de representações adequadas, sugerir e apoiar os alunos na construção de determinadas representações e promover a conexão entre representações. Para tal o professor deve questionar e desafiar os alunos a comunicar claramente o que querem representar.

O conhecimento do futuro professor

O conhecimento do futuro professor pode ser considerado sob distintas perspetivas. Dois dos seus campos fundamentais são os conhecimentos matemático e didático que, na prática letiva, surgem de forma integrada. O conhecimento didático ou conhecimento para ensinar Matemática diz respeito ao modo de ensinar e é decisivo para que o professor possa exercer cabalmente o seu papel (Shulman, 1986). Envolve ideias gerais sobre a Matemática, o ensino da Matemática, o papel do professor e do aluno e as potencialidades de determinadas tarefas no ensino-aprendizagem da Matemática (Shulman, 1987).

Na prática letiva intervêm duas dimensões essenciais do conhecimento didático: o conhecimento sobre as tarefas e o conhecimento sobre os alunos. No que diz respeito às tarefas, os professores devem ser capazes de selecionar, desenhar e sequenciar tarefas, explorar as estratégias dos alunos para a construção de ideias matemáticas, estabelecendo uma sequência de ensino e reconhecendo que estas opções influenciam as oportunidades de aprendizagem (Chapman, 2013; Serrazina, 2012). Relativamente ao conhecimento sobre os alunos, os professores devem ser capazes de antecipar e identificar as suas dificuldades e erros comuns, quando ouvem e interpretam os seus pensamentos incompletos. Devem também saber antecipar as resoluções dos alunos em tarefas específicas e o que os alunos consideram desafiante e interessante ou confuso (Ball et al., 2008; Son & Crespo, 2009).

Relacionados com estas duas dimensões do conhecimento didático (sobre tarefas e sobre os alunos), emergem aspetos relativos à comunicação. Um deles é a exploração de representações que apoiem a resolução de tarefas de modo a construir ou ilustrar objetos, conceitos e situações matemáticas, por exemplo, fazendo a correspondência entre representações pictóricas, ativas e simbólicas (Serrazina, 2012). No caso dos números racionais, é importante saber como os alunos usam várias representações (pictórica, verbal, fração, numeral decimal, percentagem) e as relações que estabelecem, desenvolvendo uma compreensão dos objetos matemáticos e do conjunto numérico na sua globalidade (Barnett-Clarke et al., 2010). Assim, quando exploram tarefas, os professores devem reconhecer os prós e contras da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem e saber aproveitar as estratégias e representações dos alunos para promover ideias matemáticas (Ball et al., 2008; Isiksal & Cakiroglu, 2011; Lo & Luo, 2012; Stylianou, 2010).

Metodologia de investigação

Esta comunicação insere-se num estudo que assume uma abordagem qualitativa e interpretativa, seguindo um design de estudo de caso (Stake, 1995). Selecionaram-se três futuras professoras de duas escolas superiores de educação. Este estudo centra-se nos processos e significados na ação das futuras professoras quando lecionam quatro aulas sobre números racionais. Estas aulas foram observadas e videogravadas para posterior análise. Foram ainda analisadas as entrevistas semiestruturadas realizadas no início e no final do estágio (EI; EF), as entrevistas realizadas antes e depois da aula (EAAi; EPAi) e ainda as planificações (P) e reflexões escritas (RE). A análise dos dados assume um cunho descritivo e interpretativo procurando (i) caracterizar a prática letiva relativamente aos momentos e ao modo como as professoras usam as diferentes representações dos números racionais e suas operações e (ii) responder ao porquê de se terem realizado determinadas ações procurando identificar as suas reflexões sobre o papel das representações no ensino-aprendizagem dos números racionais. Deste modo procuramos evidenciar o conhecimento na prática letiva, com atenção ao conhecimento didático sobre as tarefas e alunos, e iluminando aspetos relativos à comunicação.

Berta tem 23 anos e antes de ingressar no ensino superior na ESE A estudou Matemática 12 anos. Mostra segurança relativamente ao que pretende realizar na sua prática, que prepara cuidadosamente. A sua segurança é coerente com o seu percurso de excelência ao longo da sua formação inicial. Vê a Matemática como uma ciência centrada na resolução de problemas e considera que é importante que os alunos compreendam os conceitos. Para tal, defende uma abordagem de natureza exploratória, valorizando a exploração de tarefas de natureza aberta com situações contextualizadas e reais.

Ana tem 24 anos e estudou Matemática 12 anos antes de ingressar no ensino superior na ESE B. Mostra insegurança relativamente ao que pretende realizar na sua prática, sentindo-se dividida entre as abordagens do ensino direto e do ensino exploratório. Considera-se e é considerada como uma boa aluna mas por vezes com dificuldades em executar os seus propósitos. Vê a Matemática como uma ciência e também como uma ferramenta a usar no quotidiano e considera que é importante que os alunos compreendam os conceitos. Nesta unidade começa por selecionar exercícios em conjunto com Glória e depois, autonomamente, seleciona problemas que permitam explorar conceitos usando diferentes estratégias.

Glória tem 47 anos e antes de ingressar na formação inicial de professores na ESE B, estudou no ensino secundário primeiro na área de ciências e posteriormente na área de humanidades, licenciou-se em Geografia e trabalhou em diferentes profissões e países. Lecionou 6 anos Geografia no ensino secundário e dá aulas particulares num centro de estudos. Mostra muita segurança sobre o que pretende realizar na sua prática. A sua segurança é coerente com o percurso de excelência nas áreas de formação geral, em especial nas unidades curriculares de Matemática. Vê a Matemática como uma ferramenta para o futuro académico dos alunos e para o quotidiano. Considera que é importante que os alunos compreendam os conceitos abordados mas antes disso precisam de ser eficientes nos procedimentos.

Três futuras professoras e o papel das representações na sua prática letiva

Berta

Na ESE A Berta teve várias experiências que cruzavam Matemática e Didática. Relativamente ao ensino e aprendizagem dos números racionais, recordou que "com a Didática da Matemática [explorámos] várias representações e também com as tiras..." (BEI). O seu principal propósito para o ensino dos números racionais foi estabelecer relações entre diferentes representações destes números pois os seus alunos não têm "o sentido de número racional" (BEF). Na sua reflexão escrita sublinhou que "No que se refere ao trabalho com números racionais, o docente deve valorizar a leitura dos números, as representações e as relações entre si" (BRE). Assim, nas quatro aulas que lecionou usou representações simbólicas e pictóricas e, por vezes, relacionou-as em diferentes momentos. Nas suas planificações podemos encontrar a preparação de representações pictóricas para apoiar os alunos na compreensão das situações colocadas e representações pictóricas que pretendem sintetizar as ideias matemáticas a compreender numa determinada aula.

Berta construiu uma sequência de quatro tarefas para as aulas que lecionou sobre números racionais, com o propósito de desenvolver e consolidar o sentido de número racional através da resolução de problemas. Numa tarefa de partilha equitativa, em que 3 pizas são distribuídas por 4 crianças, focou-se na representação fracionária e explorou as representações pictóricas construídas pelos alunos. Na discussão final propôs uma representação pictórica (representação circular) com a qual fez a síntese das principais ideias. Esta aula revelou-se uma surpresa, tendo a tarefa suscitado algumas dificuldades a si própria relativas ao estabelecimento de relações entre as representações simbólica e pictórica e ao estabelecimento da unidade de referência. Concluiu que:

> Podemos trabalhar um pouco das duas formas, mas temos é que ter em atenção aquilo, mesmo, que acabamos por dizer porque, realmente cada amigo come ¾ de uma piza, e daí a confusão de ontem… Mas se nós estivermos a considerar o total, portanto as 3 pizas, nós aqui já consideramos os 3/12…

No enunciado da tarefa da segunda aula, Berta usou a representação pictórica de modo a apoiar os alunos na compreensão da questão principal, mas durante a discussão em grande grupo, em conjunto com os alunos, acrescentou novas representações. A figura 1 mostra as representações adicionais registadas (percentagens e frações) percebendo-se que a futura professora concretizou o propósito da aula.

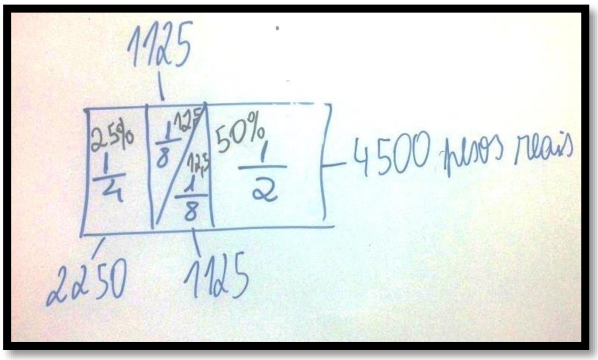


Figura: Esquema que apresenta relações entre representações.

No final, Berta fez uma síntese da última situação recorrendo a um esquema, sem que tenha sido preparado anteriormente, por considerar "que nem todos os alunos tinham entendido a estratégia de resolução do colega" (BRE). Para isso, utilizou uma representação complexa, com elementos pictóricos e de tabela (figura 2).

40 % (filha)		60 % (três filhos)		
40 %: porque é o dobro		20 %	20 %	20 %
5 anéis	5 anéis	5 anéis	5 anéis	5 anéis

Figura 2: Reprodução de um esquema feito no quadro.

Berta comentou

> Considero que os alunos compreenderam o que era solicitado, pois perceberam que se a filha tinha a receber 40%, então os outros três filhos tinham a receber a restante parte de anéis em parte iguais, pelo que concluíram que cada um desses filhos ficaria com 20% dos anéis. Como a um dos filhos couberam 5 anéis, cada um dos outros dois tinha a receber 5 anéis, ou seja, partes iguais. Sendo que a filha tinha a receber o dobro, então ficaria com 10 anéis. (BRE)

Berta constituiu uma sequência de tarefas com o propósito de desenvolver e consolidar o sentido de número racional através da resolução de problemas. Numa primeira fase explorou a representação fracionária numa situação de partilha equitativa, em seguida apresentou uma tarefa onde se relacionam as três representações e terminou com uma tarefa onde explorou o conceito de percentagem relacionando a representação de percentagem com a representação decimal. Apresentou nos enunciados de algumas tarefas representações pictóricas para apoiar a compreensão dos problemas com "situações reais", explorou as representações pictóricas construídas pelos alunos e explorou representações pictóricas de modo a constituir a síntese dos conceitos trabalhados nas tarefas propostas. Nem sempre o estabelecimento de relações entre representações simbólicas e pictóricas foi bem-sucedido mas, cuidando da sua antecipação, foi melhorando este aspeto na sua prática letiva.

Relacionando estas duas dimensões do conhecimento didático, sobre tarefas e sobre os alunos, emergem aspetos relativos à comunicação. Um aspeto importante da comunicação é a exploração de representações a usar na resolução de tarefas, sejam ou não construídas pelos alunos, de modo a construir ou ilustrar objetos, conceitos e situações matemáticas. Neste domínio, promoveu a representação de ideias matemáticas de diferentes formas evidenciando conhecimento didático ao apoiar os alunos na exploração das várias representações dos racionais, permitindo-lhes desenvolver uma compreensão do conjunto numérico na sua globalidade. Ao preparar e explorar as tarefas, reconheceu as vantagens e limitações do uso de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem apesar de ter tido dificuldade em perceber a ineficácia da cartolina no último problema. Foi capaz de aproveitar as estratégias e representações dos alunos para promover ideias matemáticas.

Ana

Ana referiu bastantes experiências vividas na ESE mas sentiu que estas experiências não a ajudaram o suficiente sobre "como ensinar". Considera importante que os alunos compreendam os conteúdos sem que para tal tenha que os apresentar e explicar logo de início. Na primeira entrevista refere a importância das representações pictóricas, dizendo "É mais a questão de ter algo visual para eles perceberem!" (AEI). Considera importante usá-las quando quer fazer uma explicação a um aluno que tem dificuldades.

Ana lecionou oito aulas sobre números racionais, sendo quatro delas de introdução a novos conceitos. Na aula sobre inverso de um número, Ana começou por pedir aos alunos que calculassem as operações colocadas simbolicamente, podendo usar "desenhos" obter a solução. Para a correção podemos ver que utiliza uma tabela que evidencia a regra operatória (fig. 3) e explorou as diferentes situações recorrendo às representações pictórica e simbólica, estabelecendo equivalências. Na terceira situação, podia ter recorrido a quantidades contínuas e explorado a representação retangular da multiplicação de números racionais na forma fracionária mas optou pela representação na figura de modo a ilustrar as operações simbólicas ilustrando as quantidades envolvidas como quantidades discretas. Esta situação tornou-se uma tarefa complexa para os alunos compreenderem e a futura professora sentiu muitas dificuldades em usar as representações da sua tabela.

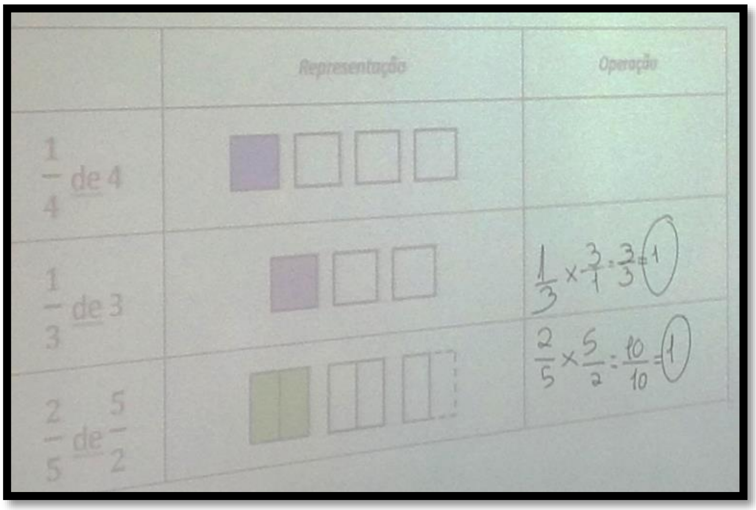


Figura 3: Tabela projetada no quadro branco.

No final do estágio, comentou abertamente o que aconteceu e o que pretendia referindo:

> Vai além do procedimento e pode gerar algum conflito de ideias. De ideias… conflito de ideias é bom, para discutir. No entanto, baralhar os alunos é outra coisa completamente diferente. E aí eu acho que foi mais isso, baralhar os miúdos. Porquê? Todos os outros, eles perceberam muito bem sem problema nenhum. No entanto aí, como o que era pedido já ia um bocadinho além do que estávamos a trabalhar, a falar, já exigia um pouco mais e eles acabaram por se sentir assim um bocadinho "o que é que agora aconteceu aqui?! … [Na realidade] são metades de 5. Foi esse o problema… Na altura esclareci a dúvida...

Para a última aula sobre divisão de números racionais, na sua planificação, Ana descreveu as ações que iria tomar. Incluiu aí as representações pictóricas que pretendia explorar. Percebemos que pretende que os alunos comuniquem as suas ideias matemáticas recorrendo a diferentes representações:

> Ao longo desta tarefa os alunos podem recorrer a cálculos, desenhos ou esquemas, sendo as estratégias aplicadas posteriormente discutidas … descobrir as regularidades da divisão de números racionais, descobrindo que para dividir dois números racionais multiplica-se o dividendo pelo inverso do divisor.

Na discussão dos problemas, Ana pretendia usar representações pictóricas e simbólicas e relacioná-las. Durante a aula, na fase de discussão das resoluções explorou as respostas dos alunos. Durante a discussão teve oportunidade de sublinhar a unidade de referência (1/3) e de enfatizar a ideia de metade expressa por (: 2), por (× 1/2) e por (0,5), relacionando as diferentes representações e significados. Na figura 5 também observamos que relembrou a propriedade do inverso de um número e usou uma representação retangular para explorar a divisão de números racionais sob a forma de fração.

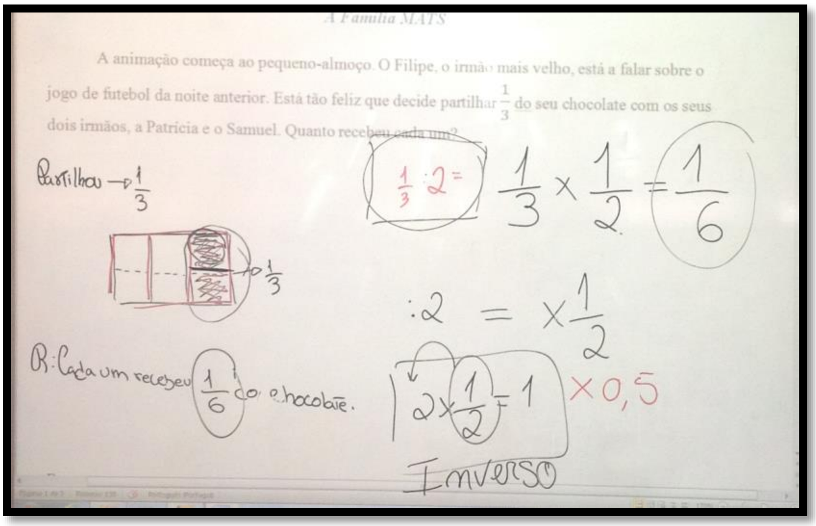


Figura 4: Antecipação da Ana para aula da divisão.

Ana lecionou várias aulas sobre números racionais, tendo introduzido o conceito de inverso de uma fração e a operação divisão com frações. Numa primeira fase, apresentou o conceito de fração inversa propondo pequenos exercícios com recurso a representações pictóricas para ilustrar as situações, guiando os alunos no estabelecimento da regra operatória. Numa segunda fase, na introdução da divisão, propôs problemas simples envolvendo "situações reais" de partilha e onde os alunos deviam usar a divisão de frações. Apesar dos seus propósitos enfatizou os procedimentos das operações recorrendo a representações simbólicas e pictóricas, nem sempre as relacionando, e guiando os alunos para a regra "inverte e multiplica". Na resolução das tarefas, as representações pictóricas foram pedidas aos alunos e foram apresentadas no quadro. Note-se que não foram estabelecidas relações entre as várias resoluções. Nas várias entrevistas, valorizou o estabelecimento de relações entre as diferentes representações de números racionais mas, na sua prática letiva, não encontrou oportunidades para realizar este propósito. Ao longo da sua prática evidenciou dominar os procedimentos relativos às operações e mas teve algumas dificuldades em explorar as situações propostas com o fim de explorar os conceitos. Reconheceu as dificuldades dizendo que, para as ultrapassar, tentava preparar com maior profundidade as suas aulas. Quando antecipou possíveis representações pictóricas não ficou clara a relação entre as resoluções simbólicas e as figuras que as ilustravam o que pode ter dificultado a concretização dos seus propósitos. No final melhorou este aspeto na sua prática letiva tendo proposto representações para ilustrar situações matemáticas e apoiar os alunos na compreensão das operações. Neste sentido, evidenciou dificuldades em representar ideias matemáticas mas revelou conhecimento didático quando considera importante e investe na exploração de representações pictóricas e simbólicas, por vezes com sucesso, de modo a apoiar os alunos na exploração das várias representações dos números racionais, permitindo-lhes desenvolver uma compreensão das operações. Reconheceu os prós e contras da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem apesar de ter tido dificuldade em perceber a complexidade de alguns conceitos. Foi capaz de aproveitar as experiências vividas na prática de modo a aperfeiçoar-se.

Glória

Na sua formação inicial, Glória teve várias experiências relativamente ao ensino e aprendizagem dos números racionais, quer em unidades curriculares de Matemática, quer de Didática. No entanto, Glória valoriza mais o seu conhecimento pessoal construído ao longo da vida, nas suas diversas experiências profissionais. Num relatório escrito para a unidade curricular de prática supervisionada explica a sua visão sobre o ensino e aprendizagem onde podemos perceber que parte da sua experiência pessoal, acrescentando aqui e ali conhecimento adquirido na formação inicial. Glória escreveu: “A minha visão é alicerçada na minha experiência pessoal e profissional ... E tem como foco principal as aprendizagens dos alunos.” Logo na primeira entrevista Glória explicou o seu propósito para o ensino e aprendizagem dos racionais onde podemos perceber que aspetos considera centrais no ensino: “[O conhecimento sobre] racionais vai ser fundamental para quase todas as áreas da Matemática, com ligeiríssimas exceções. Ora, quem não percebe nem procedimentos, nem regras, nem aplicação, nem domina as operações vai ter imensa dificuldade em coisas que nunca iria ter”.

Glória lecionou nove aulas sobre números racionais tendo introduzido conceitos em cinco dessas aulas. Considera que deu bastante importância ao estabelecimento de relações entre representações dos números racionais. Nas suas aulas propôs um jogo onde as crianças selecionaram numerais que representam a mesma quantidade e apresentou as percentagens mostrando a conversão entre percentagem, numeral decimal e fração. Na discussão do jogo, colocou o foco nos procedimentos.

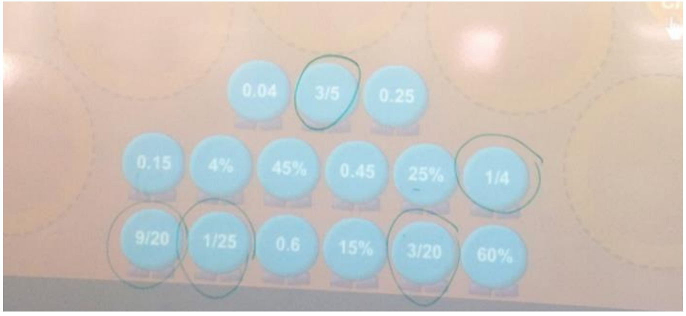


Figura 5: Jogo sobre números racionais.

Relativamente à representação pictórica e ao seu papel no ensino dos números racionais, Glória tem ideias muito bem estabelecidas. Nas entrevistas relembra que o 1.º ciclo tem outra abordagem porque as crianças são mais novas e portanto necessitam de estratégias diferentes das do 2.º ciclo:

> Eu gosto muito da representação gráfica, confesso! . . . Não quer dizer que fazer muitos bonequinhos, toda a vida, não é isso! Acho que o "concretizar", não propriamente com um exemplo concreto mas a representação é uma abstração à mesma (...) Mas o facto de eles verem qualquer coisa, no fundo passarem daquilo que está na nossa cabeça para um esquema qualquer ... Que ajuda efetivamente os alunos a organizarem o seu pensamento … Ilustra o procedimento, e acho que isto é extremamente vantajoso… (GEF)

No entanto, Glória nem sempre recorre a representações pictóricas porque, como refere, "fiz uma aposta na ideia de que alguma dose de abstração é capaz de ser bom … Se funciona melhor ou pior, é como digo, não posso saber… Agora que funciona, funciona!" (GEF).

Um dos momentos importantes na sua prática supervisionada foi a introdução da multiplicação de números racionais na forma de fração. Na sua reflexão escrita escreve:

> A compreensão das operações foi alcançada paulatinamente por analogia com os procedimentos aritméticos que os alunos já utilizavam e na extensão natural destes … Espera-se que consigam aumentar a qualidade e velocidade do seu trabalho à medida que aumentem as destrezas de cálculo para se poderem focar mais em questões de raciocínio e compreensão. [Apresentam-se diferentes tarefas] privilegiando ora consolidação de procedimentos, ora a construção de conceitos, por vezes recorrendo a representações pictóricas. (GRE)

Num dos momentos da sua aula explorou a informação da figura 7 de modo a concretizar a regra operatória entre números racionais sob a forma de fração:

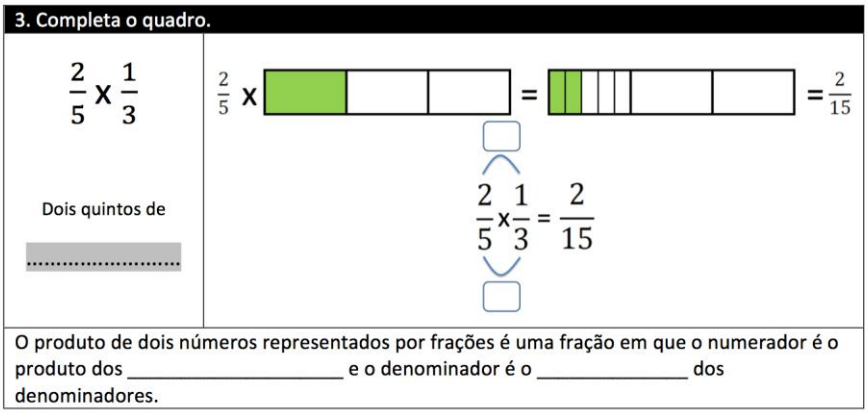


Figura 6: Exercício proposto para introdução da multiplicação.

A futura professora começa pela leitura da expressão levando os alunos a completar o espaço em branco. Em seguida, remete para a representação pictórica, questionando os alunos sobre as partes pintadas.

> Glória: E depois o quê que achaste que aquilo representa? 2/5, está cá, de 1/3. Porquê que isto para nós é 1/3?
>
> Bia: Porque está pintada uma parte de 3.
>
> Glória: Porque está pintada uma parte de 3. OK, então vamos lá ver. Se pensar neste valor e agora, e agora temos aqui de 1/3. E porquê que depois temos de pintar aquelas partes que ali estão. Porque vocês conseguem ver, na vossa ficha também se vê? Vamos pensar. Diz, Ilda ?
>
> …
>
> Bia: 5 vezes 3, 15.
>
> Glória: … Multiplicaste os denominadores.
>
> Bia: E depois multipliquei 2 vezes 1 que era 2.
>
> Glória: Que foi 2. Pronto essa operação dar-te-ia os 2/15, foi?
>
> Bia: Sim.

Em seguida inicia um diálogo semelhante, com um aluno de cada vez, e termina completando os espaços do texto. Dá assim por concluída a introdução da multiplicação de frações, passando depois à consolidação de conceitos recorrendo a exercícios e problemas de aplicação.

Glória lecionou várias aulas sobre os números racionais. Nas entrevistas e reflexões escritas evidencia a importância de trabalhar as diferentes representações destes números o que fica espelhado na escolha dos numerais envolvidos nas operações das tarefas propostas e no jogo que propôs aos alunos. Introduz os conceitos apresentando exemplos de operações, o que permitiu explorar as regras operatórias. Posteriormente, propôs "situações reais" onde se fez a consolidação e aplicação das regras apresentadas. Na introdução dos conceitos fez uso de representações simbólicas ilustradas por representações pictóricas, focando a sua atenção nas representações simbólicas das operações. Nas entrevistas evidencia valorizar o papel destas duas formas de representar ideias matemáticas mas parece não reconhecer a complexidade inerente ao uso de representações para enfatizar os processos e significados das operações. Talvez por essa razão não preveja na sua planificação ou nas representações que utiliza e nos materiais de ensino, a representação retangular para explorar a multiplicação de números racionais, usando-a apenas para representar as quantidades envolvidas. Relativamente ao conhecimento didático e a aspetos relativos à comunicação em sala de aula, nem sempre dá relevância à exploração de representações pictóricas que apoiem a resolução de tarefas, sejam representações construídas pelos alunos ou não, de modo a apoiar a sua compreensão dos conceitos. Ao preparar e explorar as tarefas, refletiu sobre os prós e contras da utilização de determinadas representações no processo de ensino-aprendizagem e optou por dar bastante relevância às representações simbólicas, usando as representações pictóricas para ilustrar os procedimentos. Ouve os alunos na "correção dos exercícios" estabelecendo repetidamente as regras para que interiorizem os conceitos. Estes aspetos são centrais no seu conhecimento didático sobre os alunos e as tarefas.

Conclusão

As futuras professoras que apresentamos neste trabalho consideram importante relacionar as diferentes representações dos números racionais mas têm visões diferentes sobre o ensino-aprendizagem destes números (Isiksal & Cakiroglu, 2011). Também se observa que todas valorizam o uso de representações pictóricas mas exploram-nas de diferentes modos e em fases distintas da prática letiva (Stylianou, 2010; Velez & Ponte, 2015). Assim, para introduzir os conceitos, Berta propõe problemas onde introduz por vezes representações pictóricas para apoiar os alunos na compreensão das situações. Glória introduz os tópicos dando atenção a regras e procedimentos usando representações pictóricas ilustrativas das regras. Por fim, Ana começa por seguir a mesma estratégia que Glória mas a meio da prática supervisionada optou por outra abordagem em que solicita aos alunos que recorram a diferentes representações, explorando representações pictóricas para os apoiar na compreensão da resolução das tarefas. Apenas Berta, realiza sínteses finais recorrendo a representações pictóricas que toma como suporte para as ideias fundamentais a aprender.

É importante que os professores escolham representações adequadas, apoiando os alunos na construção de representações pictóricas e promovendo a conversão entre representações (NCTM, 2007). Além disso, devem questionar e desafiar os alunos a comunicar claramente o que querem representar (Velez & Ponte, 2015). Estes casos mostram que, mesmo quando os futuros professores consideram importantes estas questões, nem sempre o caminho é linear e sem dificuldades. Na verdade, vemos que Berta, apesar de ter representado pictoricamente, de modo adequado, a situação das pizas, teve dificuldade em discutir a unidade de referência que era assumida na tarefa. Ana sentiu dificuldade em explicar aos alunos o produto de duas frações quando quis explorar conceptualmente a multiplicação recorrendo a uma representação pictórica. Glória procura ilustrar as regras e procedimentos com representações pictóricas que não evidenciam os processos e não antecipa a complexidade dos conceitos a explorar. Estas dificuldades podem resultar de uma planificação menos cuidada no que diz respeito à antecipação das dificuldades associadas ao uso de representações pictóricas, negligenciando a complexidade dos conceitos envolvidos. A ausência de atenção a estas questões remete para o conhecimento relativo aos alunos no que diz respeito às aprendizagens a realizar bem como relativo às tarefas. Tanto Ana como Berta, apesar de inicialmente terem dificuldades neste campo, mobilizam aprendizagens de umas aulas para outras, procurando melhorar a preparação das suas aulas. Nos casos apresentados verificamos que as três professoras têm visões diferentes sobre o papel do professor e dos alunos, advogando um papel ativo do professor (Glória) ou dos alunos (Berta e Ana) e valorizando mais a memorização (Glória) ou a compreensão (Berta e Ana). No entanto, estas visões nem sempre são fáceis de concretizar evidenciando-se dificuldades nem sempre antecipadas.

Com esta comunicação pretendemos compreender como é que futuros professores usam diferentes representações dos números racionais, a importância que lhes atribuem e que desafios se colocam quando utilizam determinadas representações. Estes três casos mostram que, para explorar diferentes representações dos números racionais de modo compreensivo, é necessário que tenham um conhecimento profundo da Matemática escolar e da sua didática reconhecendo a complexidade dos constructos envolvidos. Assim, a formação inicial enfrenta o desafio de explorar diferentes representações dos números racionais na conceptualização do conhecimento matemático e o desafio de conceptualizar didaticamente o estabelecimento de relações entre as representações dos números racionais e suas operações com foco nos processos e nos produtos construindo com os alunos as ideias matemáticas (Stylianou, 2010).

Referências bibliográficas

Ball, D.L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barnett-Clarke, C., Fisher, W, Marks, R., & Ross, S. (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A.G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Boavida, A.M., Paiva, A.L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico. Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos*. Lisboa: ME: DGIDC.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Chapman, O. (2013). Mathematical-task knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*, 166.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, *9*, 343- 363.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

Isiksal, M., & Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*, 213-230.

Lo, J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 481-500.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J.P., & Chapman, O. (2015). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.). New York, NY: Taylor & Francis.

Ponte, J.P., & Quaresma, M. (2011). Abordagem exploratória com representações múltiplas na aprendizagem dos números racionais: Um estudo de desenvolvimento curricular. *Quadrante, 20*(1), 53-81.

Serrazina, M.L. (2012). Conhecimento matemático para ensinar: Papel da planificação e da reflexão na formação de professores. *Revista Electrónica de Educação*, *6*(1), 266-283.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Researcher*, *57*(1), 1-22.

Son, J.W., & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*, 235-261.

Stake, R. (1995). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stylianou, D.A. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13*, 325-343.

Velez, I., & Ponte, J.P. (2015). Promoting the understanding of graph representations by grade 3 students. *Proceedings of 9th CERME Congress*. Charles University, Faculty of Education, Prague.

AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO DA "GEOMETRIA" DA 3.ª E 4.ª CLASSES DO ENSINO PRIMÁRIO ELEMENTAR DE 1938 A 1941: UM ESTUDO DESCRITIVO DE DOIS LIVROS

Maria Manuel Nascimento
Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
mmsn@utad.pt

Paula Catarino
Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
pcatarin@utad.pt

Helena Campos
Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
hcampos@utad.pt

Resumo: Este artigo apresenta um estudo descritivo de dois livros de Geometria, usados em Portugal, aprovados e oficialmente autorizados, um para o ano letivo 1938-1939 e outro para o ano letivo seguinte de 1940-1941, em "harmonia com os programas" de Geometria da época. O objetivo deste estudo é o de analisar e registar o tipo de representações matemáticas aí existentes, primeiro em cada um deles e depois analisando-os comparativamente. Nestes livros constam os conteúdos de geometria ensinados à época aos alunos da 3.ª e 4.ª classes do Ensino Primário Elementar e constata-se o uso sistemático, ao longo dos dois textos, de todas as representações matemáticas externas: linguagem escrita, as representações simbólicas, as icónicas e as ativas. Os dois livros são muito semelhantes, tanto na sua descrição geral, detalhada, organização e grafismo. De igual modo os conteúdos e as representações matemáticas externas analisadas se revelam similares. Nas partes dos dois livros dedicadas à 3.ª classe predominam a linguagem escrita e a representação pictórica, enquanto nas partes dedicadas à 4.ª classe, para além desses dois tipos de representação matemática externas, também se encontraram exemplos de representação simbólica.
Palavras-Chave: Ensino Primário Elementar; Geometria; Representações Matemáticas; Representações externas.

Introdução

O estudo que nos propomos apresentar surgiu de forma fortuita, fruto da descoberta dos dois livros (manuais, obras) intitulados "*Geometria*", entre documentos antigos do Pai de uma das autoras, à época, aluno de uma escola primária em Portugal Continental. De futuro será nossa intenção comparar ao longo do tempo, nos manuais que formos localizando, os conteúdos programáticos, as representações matemáticas, entre outros aspetos que ultrapassam o âmbito deste primeiro trabalho.

Os dois livros de Geometria eram usados em Portugal, aprovados e oficialmente autorizados, um para o ano letivo 1938-1939 e, o outro, para 1940-1941, "em harmonia com os programas" de Geometria da época. Os livros abarcam os conteúdos do tema Geometria para os alunos das 3.ª e 4.ª classes do Ensino Primário Elementar aprovados pelo "decreto n.º 16.370", de 13 de Abril de 1929. Este decreto (Dec.1929) aprovou os novos programas para o ensino primário elementar com o tema Geometria apenas nas 3.ª e 4.ª classes e é posterior ao Decreto n.º 16:077, de 26 de Outubro de 1928 (Dec.1928), que aprovou os programas para o ensino primário elementar e as instruções para a execução dos referidos programas.

A leitura informal destes livros permitiu constatar o uso de exercícios e problemas e o texto é complementado com figuras relacionadas com o conteúdo exposto. Também é feito o uso de diversas formas de representações matemáticas, o mote para um estudo descritivo com o objetivo de as dar conhecer neste contexto histórico. Hoje em dia, é reconhecido (e.g. Bolden, Barmby, Raine, & Gardner, 2015; Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987) que o uso de diversas representações matemáticas pode ajudar os alunos a organizar o seu raciocínio, a tornar as ideias e conceitos matemáticos mais concretos, de modo a permitir-lhes uma melhor reflexão e ajuda-los a ultrapassar muitos dos obstáculos que sentem na aprendizagem da matemática.

Recorremos à observação direta destes manuais, descrevendo o tipo de representação matemática utilizada ao longo do texto, tendo como referência Goldin (2008) e a análise das representações proposta em Ponte e Serrazina (2000).

Para a análise sumária do manual usou-se a metodologia de Ponte (2004) que, para cada obra, faz uma descrição geral, uma mais detalhada e, por fim, menciona de forma sumária os aspetos de organização e grafismo. Apresentados descritivamente os livros (Ponte, 2004), sistematizam-se as suas representações matemáticas e termina-se com uma análise comparativa das duas obras, com destaque para as respetivas representações matemáticas.

Representações matemáticas

As representações matemáticas têm vindo a ser objeto atenção de investigação em Educação Matemática. Segundo o NCTM[18] (2007), o uso das representações matemáticas assume um papel relevante para o raciocínio e as conexões matemáticas e, em particular, na ajuda que podem dar aos alunos na compreensão dos conceitos matemáticos. Mourinha, Branco e Cavadas (2014) citam Dreyfus (1991) que menciona que o uso das

[18] NCTM, *National Council of Teachers of Mathematics*

representações está intimamente relacionado com a componente abstrata da matemática e a sua compreensão.

De acordo com Duval (2009, p.13) as representações matemáticas são "(…) [s]istemas variados de escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes diagramas, esquemas, etc. (…)". Outros autores (e.g. Bruner, 1999; Dufour-Janvier, Bednarz & Belanger, 1987; Goldin, 2008; Nobre, Amado & Ponte, 2014; Ponte e Serrazina, 2000; Ponte & Velez, 2011; Tripathi, 2008) debruçaram-se sobre o estudo das representações matemáticas e da sua influência no ensino e na aprendizagem da matemática, diferenciando-as de acordo com características específicas. São várias as formas de representação matemática, símbolos, palavras, desenhos, gráficos, esquemas, objetos, entre outros. De modo geral, podemos afirmar que as representações matemáticas são registos que usamos para representar conceitos abstratos. Santos (2003, p.28) é de opinião de que essas representações "(…) não representam um conceito absoluto, pois estão agregados a determinada realidade, contexto histórico ou situação. (…)".

Goldin (2008 *apud* Ponte & Velez, 2011, p.11) afirma que uma representação é caracterizada como "(…) uma configuração que representa algo, de alguma forma. Por exemplo, uma palavra pode representar um objecto real, um numeral pode representar o número de elementos num conjunto, ou a posição de um número numa recta numérica (…)". Para Goldin (2008) existem dois tipos de representações – as externas e as internas. As representações externas têm uma presença física, seja numa folha de papel, seja num dispositivo eletrónico, quer seja num outro suporte qualquer (por exemplo, os símbolos que representam os números e suas operações, a notação algébrica, os gráficos cartesianos, diagramas diversos) e as "(…) internas não podem ser diretamente observáveis, quanto muito podem ser inferidas através de comportamentos observáveis da pessoa ou através da sua interação com as representações externas (…)" (Mourinha, Branco & Cavadas, 2014, p.34).

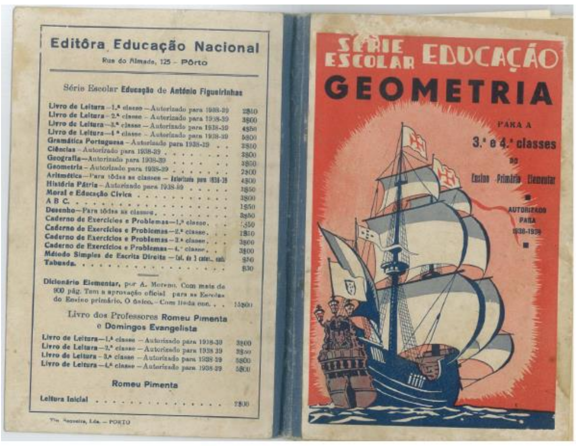
De acordo com Bruner (1999), as representações podem ser consideradas de vários tipos: ativas, icónicas e simbólicas. As representações ativas são aquelas em que embora tenhamos conhecimento de muitas coisas, é muito difícil ensiná-las através de palavras, diagramas ou imagens. As representações icónicas são aquelas que estão relacionadas com o visual e o recurso a imagens para explicar os conteúdos. Por fim, as representações simbólicas são aquelas que fazem uso de símbolos, das palavras e da linguagem. Deste modo, e de acordo com Ponte e Velez (2011), "(…) em Matemática, as representações são caracteres, símbolos, configurações pictóricas ou mesmo objectos que representam alguma ideia, objecto, ou relação matemática (…)".

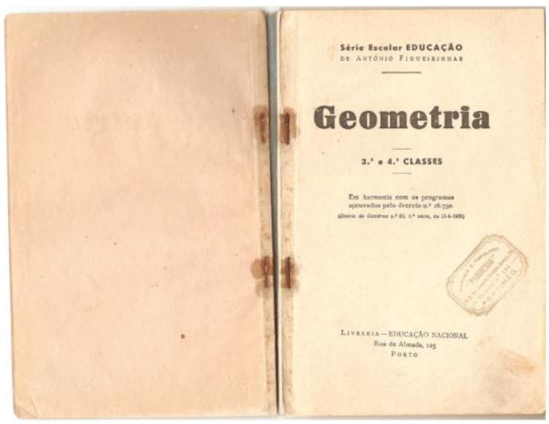
Neste estudo descritivo, vamos considerar como representações externas aquelas que podem ser observadas e registadas ao longo do texto nas páginas dos dois livros em análise e para as representações externas vamos adotar a perspetiva apresentada no trabalho de Ponte e Serrazina (2000). Neste primeiro estudo consideram-se as representações matemáticas e geométricas em paralelo, pois só agora contactámos com estes livros e procedemos ao seu estudo. Deste modo para Ponte e Serrazina (2000) existem quatro categorias de representações externas: i) A linguagem oral e escrita; ii) Representações simbólicas; iii) Representações icónicas ou pictóricas – incluindo figuras, desenhos, gráficos e diagramas; iv) Representações ativas – objetos usados ou não deliberadamente como material didático. Em nosso entender estas representações ativas tomam o significado apresentado por Salvado Sampaio (1976, p.43) ao afirmar que o ensino da "Geometria Prática (...) transmite noções que interessam a outros conhecimentos e à vida quotidiana e põem-se de parte os processos abstractos". Deste modo, tais representações ativas corresponderiam a situações práticas conhecidas e próximas do quotidiano dos alunos, à época.

Sobre o livro "*Geometria*" do ano letivo 1938-1939

Descrição geral

O livro em estudo[19] intitula-se "Geometria", é um livro destinado ao aluno do Ensino Primário Elementar, da série escolar Educação de António Figueirinhas e foi editado pela Livraria – Educação Nacional, Rua do Almada, 125 – Porto, e não é datado. É destinado aos alunos das 3.ª e 4.ª classes do Ensino Primário Elementar, frequentado por alunos com idades compreendidas entre os 8 – 10 anos (corresponderiam hoje aos 3.º e 4.º anos do 1.º Ciclo do Ensino Básico). O livro está encadernado com capa dura, com predominância da cor avermelhada, adornada com caravelas em destaque na capa. O livro possui as dimensões aproximadas de $12cm \times 18cm \times 0{,}5cm$, 48 páginas e não possui índice. À esquerda na Figura 1 apresentam-se a contracapa e a capa deste livro.





[19] O estudo apresentado apoiou-se no livro, pertença da primeira autora através do Pai.

Figura 1: Contracapa e capa (à esquerda) e folha de rosto (à direita).[20]

O livro abre com a folha de rosto na página 1 (figura 1 à direita), estando no verso desta página a indicação de que o livro está "em harmonia com os programas aprovados pelo decreto n.º 16.730 (Diário do Govêrno n.º 83, 1.ª série, de 13-4-1929) " e ainda no fundo da página a indicação da Livraria-Educação Nacional e respetiva morada. De referir que nesta folha de rosto ainda existe um carimbo da livraria de Portimão onde foi comprado. As páginas seguintes são dedicadas à exposição dos conteúdos geométricos que são separados pela 3.ª classe (da página 3 à 35, inclusive) e 4.ª classe (da página 37 até ao final do livro).

Descrição detalhada

Nesta subsecção sintetizamos as partes que constituem o livro relacionadas com as duas classes do Ensino Primário Elementar da época, 3.ª e 4.ª classes com conteúdos distribuídos pelas duas classes, separadamente. Na tabela da Figura 2 sintetizam-se os conteúdos apresentados para a 3.ª classe. No final do texto escrito, e antes de se iniciar a abordagem dos conteúdos geométricos destinados à 4.ª classe, existem 33 exercícios e problemas (da página 33 à 35, inclusive) relacionados com os conteúdos abordados na 3.ª classe.

Conteúdos
- Noções simples de volume, superfície, linha e ponto
- Linha recta, quebrada e curva
- Linha vertical, horizontal e oblíqua
- Rectas perpendiculares e paralelas
- A régua
- Ângulos
- O esquadro
- Polígonos em geral
- Triângulos
- Quadriláteros
- Polígonos regulares
- Decomposição do polígono em triângulos ou em quadriláteros e triângulos
- Circunferência. Raio. Diâmetro. Corda. Tangente. Secante
- Segmento, sector e coroa circulares
- Circunferências concêntricas e excêntricas; circunferências secantes e tangentes
- O compasso
- Exemplificações do cone, do cilindro, do cubo e da esfera

Figura 2: Conteúdos geométricos abordados na 3.ª Classe.

[20] Fonte: Propriedade da primeira autora.

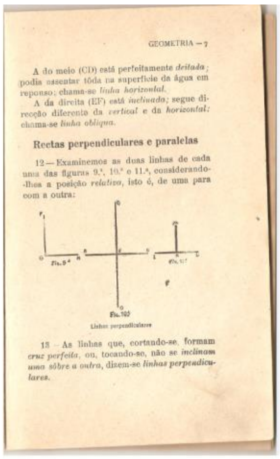
Tal como anteriormente, na tabela da Figura 3 sintetizam-se os conteúdos apresentados para a 4.a classe. Também no final do texto dedicado aos conteúdos a abordar para a 4.ª classe, existem 11 exercícios e problemas, ocupando as duas últimas páginas do livro.

Conteúdos
- Noção sumária e prática sôbre a medida dos arcos. Transferidor
- Avaliação prática da superfície dos polígonos

Figura 3: Conteúdos geométricos abordados na 4.ª Classe.

Organização e grafismo

O interior do livro é monocromático. A letra é variada no seu tipo (forma) e no seu tamanho. Ao longo do texto e para ilustrar e complementar partes do mesmo, existem várias figuras (desenhos/esquemas) como os dos exemplos da Figura 4.



GEOMETRIA — 7

A do meio (CD) está perfeitamente *deitada*; podia assentar tôda na superfície da água em repouso; chama-se *linha horizontal*.

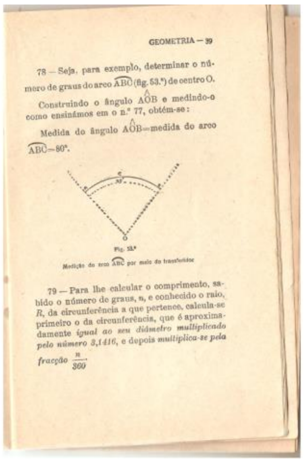
A da direita (EF) está *inclinada*; segue direcção diferente da *vertical* e da *horizontal*: chama-se *linha oblíqua*.

Rectas perpendiculares e paralelas

12 — Examinemos as duas linhas de cada uma das figuras 9.ª, 10.ª e 11.ª, considerando-lhes a posição *relativa*, isto é, de uma para com a outra:

Linhas perpendiculares

13 — As linhas que, cortando-se, formam *cruz perfeita*, ou, tocando-se, não se *inclinam uma sôbre a outra*, dizem-se *linhas perpendiculares*.



GEOMETRIA — 39

78 — Seja, para exemplo, determinar o número de graus do arco $\widehat{ABC}$ (fig. 53.ª) de centro O.

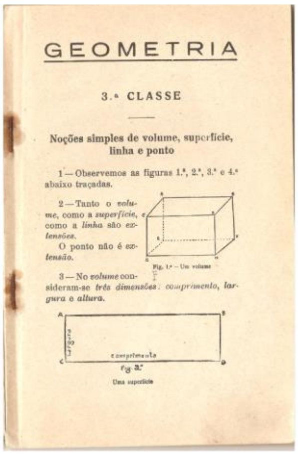
Construindo o ângulo $A\hat{O}B$ e medindo-o como ensinámos em o n.º 77, obtém-se:

Medida do ângulo $A\hat{O}B$ = medida do arco $\widehat{ABC}$ = 80°.

79 — Para lhe calcular o comprimento, sabido o número de graus, n, e conhecido o raio, R, da circunferência a que pertence, calcula-se primeiro o da circunferência, que é aproximadamente *igual ao seu diâmetro multiplicado pelo número 3,1416*, e depois *multiplica-se pela fracção* $\frac{n}{360}$.

Figura 4: Exemplos de desenhos/esquemas (p. 7 e p. 39, à esquerda e à direita, respetivamente).

O texto está organizado em duas partes como já foi referido: uma dedicada à 3.ª classe (figura 5 à esquerda) e a outra à 4.ª classe (figura 5 à direita).



GEOMETRIA

3.ª CLASSE

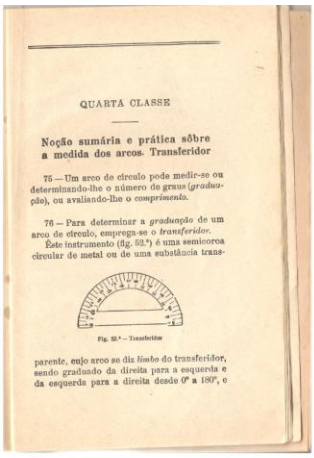
Noções simples de volume, superfície, linha e ponto

1 — Observemos as figuras 1.ª, 2.ª, 3.ª e 4.ª abaixo traçadas.

2 — Tanto o *volume*, como a *superfície*, como a *linha* são *extensões*.

O ponto não é *extensão*.

3 — No *volume* consideram-se *três dimensões*: *comprimento*, *largura* e *altura*.



QUARTA CLASSE

Noção sumária e prática sôbre a medida dos arcos. Transferidor

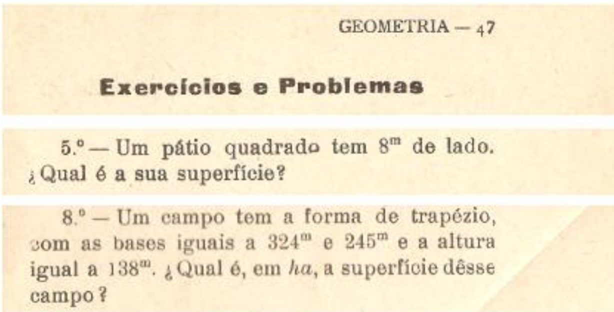
75 — Um arco de círculo pode medir-se ou determinando-lhe o número de graus (*graduação*), ou avaliando-lhe o *comprimento*.

76 — Para determinar a *graduação* de um arco de círculo, emprega-se o *transferidor*.

Êste instrumento (fig. 52.ª) é uma semicoroa circular de metal ou de uma substância transparente, cujo arco se diz *limbo* do transferidor, sendo graduado da direita para a esquerda e da esquerda para a direita desde 0° a 180°, e

Figura 5: Exemplos da página inicial da 3.ª e da Quarta Classes (p. 3 e p. 37, à esquerda e à direita, respetivamente)

Em cada uma das partes, o corpo do texto está organizado por títulos (tabelas das figuras 2 e 3) escritos a negrito e que orientam o leitor nos conteúdos expostos no texto. Dentro de cada título, o conteúdo é numerado, dando a entender a existência de uma sequência dos conteúdos. Na parte dedicada à 3.ª classe existem 74 conteúdos numerados distribuídos por 17 títulos e na parte dedicada à 4.ª classe, temos 13 conteúdos numerados distribuídos por dois títulos. Ao longo do texto, certos termos e conteúdos são realçados em itálico e outros a negrito, existindo ainda algumas observações relacionadas com o conteúdo. De notar que não são apresentados exemplos aplicados à realidade dos alunos e a alusão a algum elemento do quotidiano só existe na apresentação do segundo conjunto de exercícios e problemas, onde é feita a alusão a "um pátio quadrado", "a superfície de um campo triangular" e "um campo tem a forma de trapézio" (figura 6). Por fim, menciona-se que não existe qualquer referência a uma possível resolução destes exercícios e problemas, nem existem soluções para os mesmos.


GEOMETRIA — 47

Exercícios e Problemas

5.º — Um pátio quadrado tem 8^m de lado. ¿Qual é a sua superfície?

8.º — Um campo tem a forma de trapézio, com as bases iguais a 324^m e 245^m e a altura igual a 138^m. ¿Qual é, em *ha*, a superfície dêsse campo?

Figura 6: Extratos dos exercícios e problemas com referência à realidade.

Sobre o livro "*Geometria*" do ano letivo 1940-1941

Descrição geral

O livro em estudo[21] também se intitula "Geometria" e, tal como o anterior, é um livro para as 3.ª e 4.ª classes do Ensino Primário Elementar. Este livro é da autoria do Prof. Abílio Marques Fernandes, foi editado por Domingos Barreira, numa edição da Livraria Simões Lopes, Rua do Almada, 119 – Porto e é datado de 1940. Está encadernado com capa dura, de cor creme, adornada com gravuras ocupando os contornos da capa de cor alaranjada, lembrando uma espécie de moldura. O livro possui as dimensões aproximadas de 11*cm* × 17,5*cm* × 0,5*cm*, 48 páginas e não possui índice. À esquerda na Figura 7 apresentam-se a contracapa e a capa deste livro.

[21] O estudo apresentado apoiou-se no livro, pertença da primeira autora através do Pai.

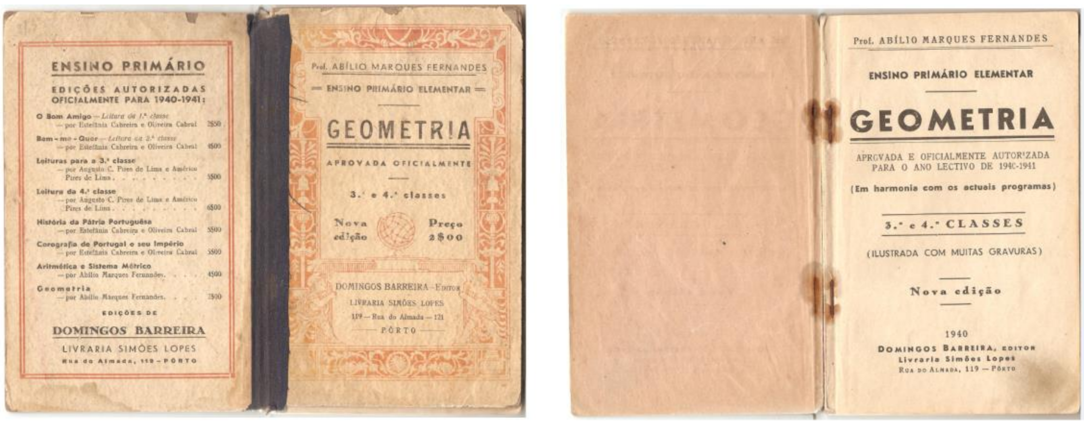


Figura 7: Contracapa e capa (à esquerda) e folha de rosto (à direita).[22]

O livro abre com a folha de rosto na página 1 (figura 7, à direita), estando no verso desta página a indicação de que o livro é "propriedade literária do editor" e ainda no fundo da página a indicação da Tipografia que é pertença de Domingos Barreira. As páginas seguintes são dedicadas à exposição dos conteúdos de Geometria que estão separados pela 3.ª classe (da página 3 até à página 34, inclusive) e pela 4.ª classe (da página 35 até ao final do livro).

Descrição detalhada

Nesta subsecção sintetizamos as partes que constituem o livro relacionadas com as duas classes do Ensino Primário Elementar da época, 3.ª e 4.ª classes de conteúdos distribuídos pelas duas classes, separadamente. Na tabela da Figura 8 sintetizam-se os conteúdos apresentados para a 3.ª classe.

Conteúdos
- Volumes, superfície, linha e ponto
- Linha curva
- Linha mista
- A régua, sua verificação e emprego
- Esquadro
- Aplicação
Traçado de perpendiculares, empregando a régua e o esquadro vulgar
Traçado de paralelas, empregando a régua e o esquadro vulgar
Traçado de paralelas, empregando sòmente o esquadro T
- Ângulos. Bissectriz
- Traçado da bissectriz
- Polígonos
- Triângulos
- Quadriláteros
- Outros polígonos
- Decomposição dos polígonos
- Combinação dos polígonos
- Exemplificação do cone, do cilindro, do cubo e da esfera
- Circunferência
- Posições relativas das circunferências
- Compasso

Figura 8: Conteúdos geométricos abordados na 3.ª classe.

[22] Fonte: propriedade da primeira autora.

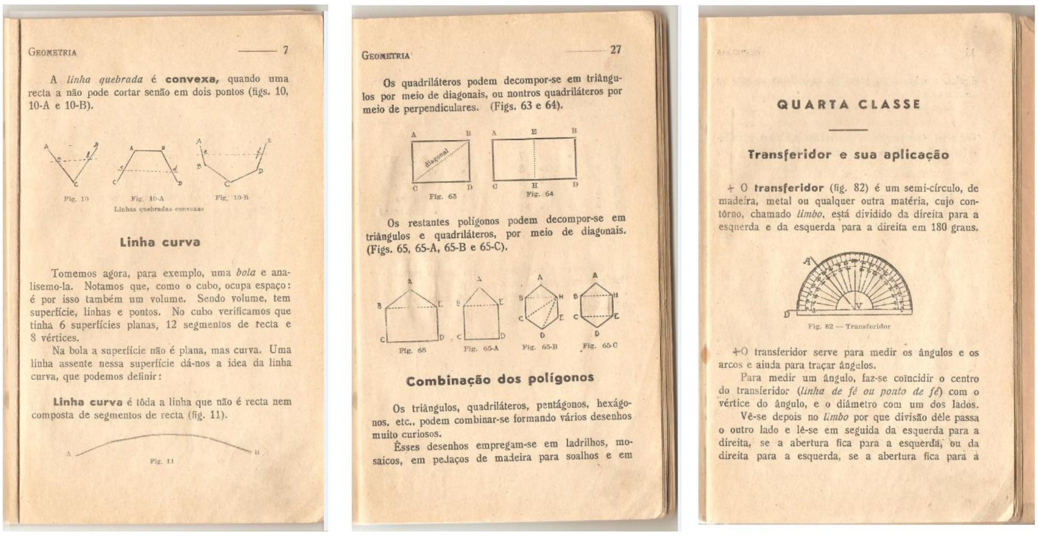
Tal como anteriormente, na tabela da Figura 9 sintetizam-se os conteúdos apresentados para a 4.ª classe. No final do texto dedicado aos conteúdos a abordar para a 4.ª classe, "Áreas dos polígonos regulares" existem 10 problemas (p.43-44); "Áreas dos polígonos irregulares" sete problemas (p.46-47); e na última página de "Volumes" cinco problemas (p.48).

Conteúdos
- Transferidor e sua aplicação
- Noção sumária e prática sobre a medida dos arcos e dos ângulos pela dos arcos correspondentes
- Avaliação da superfície dos triângulos e quadriláteros
- Áreas
• Triângulo
• Quadrado
• Paralelogramo
• Trapézio
• Losango
- Polígonos irregulares
- Áreas dos polígonos irregulares
- Volume

Figura 9: Conteúdos geométricos abordados na 4.ª Classe.

Organização e grafismo

O interior do livro também é monocromático. Do mesmo modo, a letra é variada no seu tipo (forma) e no seu tamanho. Ao longo do texto e para ilustrar e complementar partes do mesmo, existem várias figuras (desenhos/esquemas) como as dos exemplos na Figura 11.



GEOMETRIA 7

A *linha quebrada* é **convexa,** quando uma recta a não pode cortar senão em dois pontos (figs. 10, 10-A e 10-B).

Fig. 10 Fig. 10-A Fig. 10-B
Linhas quebradas convexas

Linha curva

Tomemos agora, para exemplo, uma *bola* e analisemo-la. Notamos que, como o cubo, ocupa espaço: é por isso também um volume. Sendo volume, tem superfície, linhas e pontos. No cubo verificamos que tinha 6 superfícies planas, 12 segmentos de recta e 8 vértices.

Na bola a superfície não é plana, mas curva. Uma linha assente nessa superfície dá-nos a idea da linha curva, que podemos definir:

Linha curva é tôda a linha que não é recta nem composta de segmentos de recta (fig. 11).

Fig. 11

GEOMETRIA 27

Os quadriláteros podem decompor-se em triângulos por meio de diagonais, ou nontros quadriláteros por meio de perpendiculares. (Figs. 63 e 64).

Fig. 63 Fig. 64

Os restantes polígonos podem decompor-se em triângulos e quadriláteros, por meio de diagonais. (Figs. 65, 65-A, 65-B e 65-C).

Fig. 65 Fig. 65-A Fig. 65-B Fig. 65-C

Combinação dos polígonos

Os triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc., podem combinar-se formando vários desenhos muito curiosos.

Êsses desenhos empregam-se em ladrilhos, mosaicos, em pedaços de madeira para soalhos e em

QUARTA CLASSE

Transferidor e sua aplicação

+ O **transferidor** (fig. 82) é um semi-círculo, de madeira, metal ou qualquer outra matéria, cujo contôrno, chamado *limbo*, está dividido da direita para a esquerda e da esquerda para a direita em 180 graus.

Fig. 82 — Transferidor

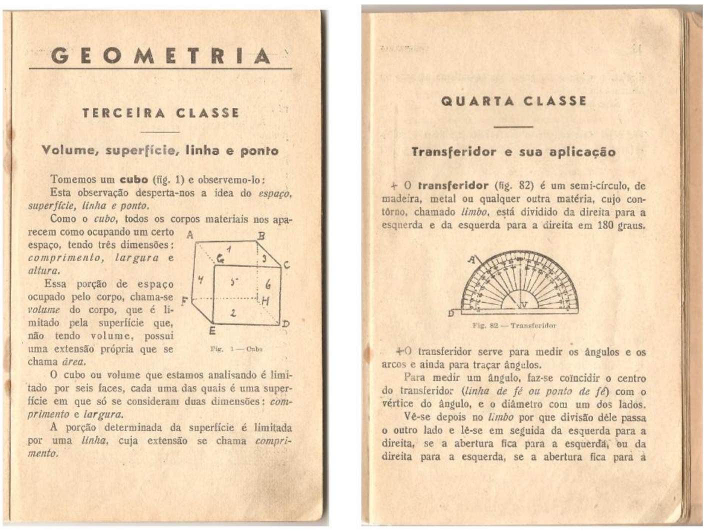
+O transferidor serve para medir os ângulos e os arcos e ainda para traçar ângulos.

Para medir um ângulo, faz-se coïncidir o centro do transferidor (*linha de fé ou ponto de fé*) com o vértice do ângulo, e o diâmetro com um dos lados.

Vê-se depois no *limbo* por que divisão dêle passa o outro lado e lê-se em seguida da esquerda para a direita, se a abertura fica para a esquerda, ou da direita para a esquerda, se a abertura fica para a

Figura 11: Exemplos de desenhos/esquemas (p. 6, p. 27 e p. 35, à esquerda, ao centro e à direita, respetivamente).

O texto está organizado em duas partes como já foi referido: uma dedicada à 3.ª classe (figura 12 à esquerda) e a outra à 4.ª classe (figura 12 à direita).



GEOMETRIA

TERCEIRA CLASSE

Volume, superfície, linha e ponto

Tomemos um **cubo** (fig. 1) e observemo-lo:

Esta observação desperta-nos a idea do *espaço, superfície, linha e ponto.*

Como o *cubo*, todos os corpos materiais nos aparecem como ocupando um certo espaço, tendo três dimensões: *comprimento, largura e altura.*

Essa porção de espaço ocupado pelo corpo, chama-se *volume* do corpo, que é limitado pela superfície que, não tendo volume, possui uma extensão própria que se chama *área.*

Fig. 1 — Cubo

O cubo ou volume que estamos analisando é limitado por seis faces, cada uma das quais é uma superfície em que só se consideram duas dimensões: *comprimento* e *largura.*

A porção determinada da superfície é limitada por uma *linha*, cuja extensão se chama *comprimento.*

QUARTA CLASSE

Transferidor e sua aplicação

+ O **transferidor** (fig. 82) é um semi-círculo, de madeira, metal ou qualquer outra matéria, cujo contôrno, chamado *limbo*, está dividido da direita para a esquerda e da esquerda para a direita em 180 graus.

Fig. 82 — Transferidor

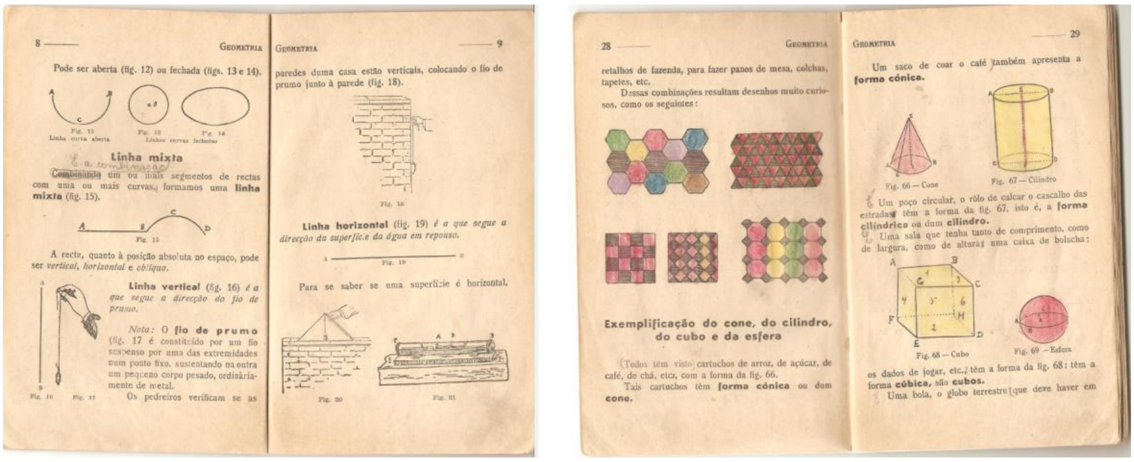
+O transferidor serve para medir os ângulos e os arcos e ainda para traçar ângulos.

Para medir um ângulo, faz-se coïncidir o centro do transferidor (*linha de fé ou ponto de fé*) com o vértice do ângulo, e o diâmetro com um dos lados.

Vê-se depois no *limbo* por que divisão dêle passa o outro lado e lê-se em seguida da esquerda para a direita, se a abertura fica para a esquerda, ou da direita para a esquerda, se a abertura fica para a

Figura 12: Exemplos da página inicial da Terceira e Quarta Classes (p. 3 e p. 35, à esquerda e à direita, respetivamente)

Em cada uma das partes, o corpo do texto está organizado por títulos em negrito para orientação do leitor. Por vezes, são apresentados exemplos aplicados à realidade dos alunos (figura 13).



8 — GEOMETRIA

Pode ser aberta (fig. 12) ou fechada (figs. 13 e 14).

Fig. 12 Linha curva aberta — Fig. 13 — Fig. 14 Linhas curvas fechadas

Linha mixta

É a combinação

Combinando um ou mais segmentos de rectas com uma ou mais curvas, formamos uma **linha mixta** (fig. 15).

Fig. 15

A recta, quanto à posição absoluta no espaço, pode ser *vertical, horizontal* e *oblíqua.*

Linha vertical (fig. 16) *é a que segue a direcção do fio de prumo.*

Nota: O **fio de prumo** (fig. 17) é constituído por um fio suspenso por uma das extremidades num ponto fixo, sustentando na outra um pequeno corpo pesado, ordinàriamente de metal.

Os pedreiros verificam se as

Fig. 16 — Fig. 17

GEOMETRIA — 9

paredes duma casa estão verticais, colocando o fio de prumo junto à parede (fig. 18).

Fig. 18

Linha horizontal (fig. 19) *é a que segue a direcção da superfície da água em repouso.*

Fig. 19

Para se saber se uma superfície é horizontal,

Fig. 20 — Fig. 21

28 — GEOMETRIA

retalhos de fazenda, para fazer panos de mesa, colchas, tapetes, etc.

Dessas combinações resultam desenhos muito curiosos, como os seguintes:

Exemplificação do cone, do cilindro, do cubo e da esfera

Todos têm visto cartuchos de arroz, de açúcar, de café, de chá, etc., com a forma da fig. 66.

Tais cartuchos têm **forma cónica** ou dum **cone.**

GEOMETRIA — 29

Um saco de coar o café também apresenta a **forma cónica.**

Fig. 66 — Cone — Fig. 67 — Cilindro

Um poço circular, o rôlo de calcar o cascalho das estradas têm a forma da fig. 67, isto é, a **forma cilíndrica** ou dum **cilindro.**

Uma sala que tenha tanto de comprimento, como de largura, como de altura; uma caixa de bolacha;

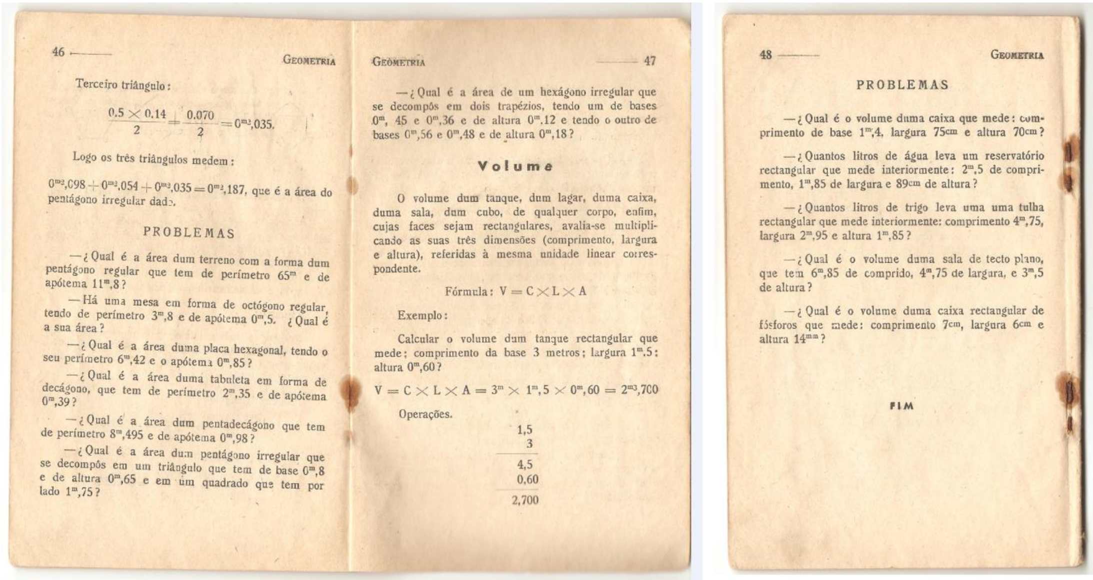
Fig. 68 — Cubo — Fig. 69 — Esfera

os dados de jogar, etc.; têm a forma da fig. 68: têm a forma **cúbica**, são **cubos.**

Uma bola, o globo terrestre que deve haver em

Figura 13: Exemplo de página de apresentação de exemplos do quotidiano de então (pp. 8-9 e pp. 28-29, à esquerda e à direita, respetivamente) e as cores foram pintadas pelo aluno possuidor do livro.

Esses formatos diferentes permitem ao autor destacar esses conceitos geométricos e realçá-los no texto escrito. Dentro de cada título os conteúdos não são numerados ao contrário do que acontece no primeiro livro descrito. Na parte dedicada à 3.ª classe existem 85 conteúdos numerados distribuídos por 18 títulos e na parte dedicada à 4.ª classe, temos 12 conteúdos numerados distribuídos por oito títulos. Ao longo do texto, certos termos e conteúdos são realçados em itálico e outros a negrito, existindo uma nota relacionada com o conteúdo (p.8). De assinalar que só no final da 4.ª classe, a terminar as "Áreas dos polígonos regulares" (p. 43-44) o texto contém uma parte dedicada a nove problemas e no fim das "Áreas e polígonos irregulares" há sete problemas (pp.46-47, figura 14). Os cinco problemas de "Volumes" (p. 48, figura 14) terminam o livro. Por fim, cabe voltar a aludir que, tal como no livro anterior, não existe qualquer referência a uma possível resolução destes exercícios e problemas, nem existem soluções para os mesmos.



46 — GEOMETRIA

Terceiro triângulo:

$$\frac{0.5 \times 0.14}{2} = \frac{0.070}{2} = 0^{m^2},035.$$

Logo os três triângulos medem:

$0^{m^2},098 + 0^{m^2},054 + 0^{m^2},035 = 0^{m^2},187$, que é a área do pentágono irregular dado.

PROBLEMAS

— ¿ Qual é a área dum terreno com a forma dum pentágono regular que tem de perímetro 65^{m} e de apótema $11^{m},8$?

— Há uma mesa em forma de octógono regular, tendo de perímetro $3^{m},8$ e de apótema $0^{m},5$. ¿ Qual é a sua área ?

— ¿ Qual é a área duma placa hexagonal, tendo o seu perímetro $6^{m},42$ e o apótema $0^{m},85$?

— ¿ Qual é a área duma tabuleta em forma de decágono, que tem de perímetro $2^{m},35$ e de apótema $0^{m},39$?

— ¿ Qual é a área dum pentadecágono que tem de perímetro $8^{m},495$ e de apótema $0^{m},98$?

— ¿ Qual é a área dum pentágono irregular que se decompôs em um triângulo que tem de base $0^{m},8$ e de altura $0^{m},65$ e em um quadrado que tem por lado $1^{m},75$?

GEOMETRIA — 47

— ¿ Qual é a área de um hexágono irregular que se decompôs em dois trapézios, tendo um de bases 0^{m}, 45 e $0^{m}.36$ e de altura $0^{m}.12$ e tendo o outro de bases $0^{m},56$ e $0^{m},48$ e de altura $0^{m},18$?

Volume

O volume dum tanque, dum lagar, duma caixa, duma sala, dum cubo, de qualquer corpo, enfim, cujas faces sejam rectangulares, avalia-se multiplicando as suas três dimensões (comprimento, largura e altura), referidas à mesma unidade linear correspondente.

Fórmula: $V = C \times L \times A$

Exemplo:

Calcular o volume dum tanque rectangular que mede; comprimento da base 3 metros; largura $1^{m}.5$; altura $0^{m},60$?

$V = C \times L \times A = 3^{m} \times 1^{m},5 \times 0^{m},60 = 2^{m^3},700$

Operações.

$$\begin{array}{r} 1,5 \\ 3 \\ \hline 4,5 \\ 0,60 \\ \hline 2,700 \end{array}$$

48 — GEOMETRIA

PROBLEMAS

— ¿ Qual é o volume duma caixa que mede: comprimento de base $1^{m},4$, largura 75^{cm} e altura 70^{cm} ?

— ¿ Quantos litros de água leva um reservatório rectangular que mede interiormente: $2^{m},5$ de comprimento, $1^{m},85$ de largura e 89^{cm} de altura ?

— ¿ Quantos litros de trigo leva uma uma tulha rectangular que mede interiormente: comprimento $4^{m},75$, largura $2^{m},95$ e altura $1^{m},85$?

— ¿ Qual é o volume duma sala de tecto plano, que tem $6^{m},85$ de comprido, $4^{m},75$ de largura, e $3^{m},5$ de altura ?

— ¿ Qual é o volume duma caixa rectangular de fósforos que mede: comprimento 7^{cm}, largura 6^{cm} e altura 14^{mm} ?

FIM

Figura 14: Exercícios e problemas com alguma referência à realidade

Representações matemáticas

Neste estudo descritivo consideraremos como representações externas aquelas que podem ser observadas e registadas nos dois livros em análise e de entre os vários tipos de representações externas adotando a perspetiva de Ponte e Serrazina (2000).

No livro "Geometria" do ano letivo 1938-1939

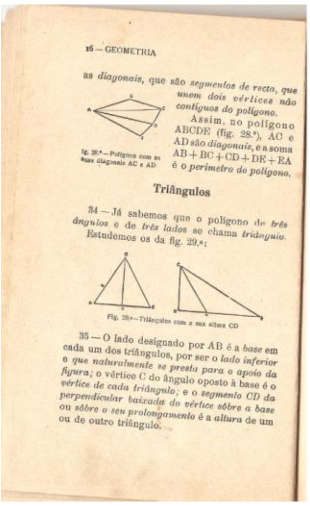
Neste livro encontramos todo o tipo de representações externas incluídas nas categorias de Ponte e Serrazina (2000) em ambas as partes, a da 3.ª classe e a da 4.ª classe. Predominam as representações pictóricas e a linguagem escrita. Quanto à linguagem escrita, a representação é discursiva: linguagem natural para apresentar conceitos geométricos. O sistema de escrita é numérico, algébrico e simbólico. Ao longo do texto, são utilizadas figuras geométricas planas e também são apresentados objetos para representar entes matemáticos (fio-de-prumo, régua, esquadro, compasso e transferidor). São usadas letras maiúsculas para representação de pontos, e.g. A, B. Também a reunião de duas letras diferentes é notação para as retas (e.g. (AB), (CD), pp.6-7). Os ângulos são notados por "ABC ou o ângulo CBA, podendo também ler-se só pela letra do vértice, quando este não é comum a outros ângulos." (pp.10-11), e os polígonos são representados por tantas letras quantos os vértices que possuem. Por exemplo, ABCDE representa um polígono com cinco vértices (p.16). O arco é representado também por três letras, abarcadas por um arco desenhado (p.39) ou escrevendo-se "arco ABC" (p.40). Note-se que na parte da 4.ª classe, a simbologia de ângulo passou a ser diferente: o ângulo, embora continue a ser representado por três letras, tem agora a particularidade de ter um acento circunflexo na letra do meio (e.g. p.39). Encontramos também a utilização de símbolos para representação de algumas unidades de medida (metros, *m*, centímetro, *cm*, centímetro quadrado, cm^2, hectare, *ha*; ainda há o grau, º, minuto, ’, e segundo, ”, denominadas “Números Complexos”, p.38). O símbolo *ha* está registado uma única vez e incluindo na lista de exercícios e problemas (p.47). Os sinais de operações utilizados são +, ×, = e de divisão através do uso do símbolo habitual de fração. Os sinais aparecem a partir da página 16 sendo depois usados com alguma frequência até ao final do texto, já o sinal = aparece pela primeira vez na página 39. A aproximação do número π é registada no texto duas vezes (pp.39-40) com o valor de 3,1416. Não se usa símbolo para o apótema de um polígono regular, definido na página 21.

Na tabela da Figura 15, sistematizam-se as representações matemáticas externas nas quatro categorias, bem como a referência ao seu registo.

Linguagem oral e escrita	**Representações simbólicas**	**Representações icónicas ou pictóricas**	**Representações ativas**
Linguagem natural (e.g. p.5) Apresentação de conceitos (e.g. p.15) Escrita numérica (e.g. p.49) Escrita algébrica (e.g. p.16) Escrita simbólica (e.g. p.39)	Letras (e.g. p.6) Algarismos (e.g. p.15) Sinal + (e.g., p.16) Sinal × (e.g. p.5) Sinal = (e.g. p.39) Frações (e.g. p.39) *m*, *cm*, (e.g. p.47 e p.40, respetivamente) cm^2 (e.g. p.41) *ha* (e.g. p.47) °, ’, ” (e.g. p.38) 3, 1416 (e.g. p.39)	Pontos (e.g. p.5) Linhas retas (e.g. p.4) Linhas quebradas (p.4) Linhas curvas (e.g. p.5) Ângulos (e.g. p.10) Polígonos (e.g. p.18) Circunferência (e.g. p.23) Segmento circular (e.g. p.25) Setor circular (e.g. p.25) Coroa circular (p.25) Cone (p.29) Cilindro (p.30) Cubo (p.31) Esfera (p.32)	Fio-de-prumo (p.6) Régua (p.9) Esquadro (vulgar, em T e de canteiro, p.14) Compasso (p.28) Para traçar circunferências no terreno (Obs., p.29) Transferidor (p.37)

Figura 15: Tabela das representações externas no livro “Geometria” do ano letivo 1938-1939.

Na Figura 16 apresentam-se mais alguns exemplos destas representações matemáticas.


16 — GEOMETRIA

as *diagonais*, que são *segmentos de recto, que unem dois vértices não contíguos do polígono.*

Assim, no polígono ABCDE (fig. 28.ª), AC e AD são *diagonais*, e a soma AB + BC + CD + DE + EA é o *perímetro do polígono.*

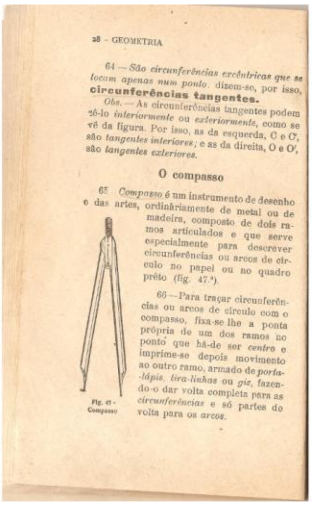
Fig. 28.ª — Polígono com as suas diagonais AC e AD

Triângulos

34 — Já sabemos que o polígono de *três ângulos* e de *três lados* se chama *triângulo*. Estudemos os da fig. 29.ª:

Fig. 29.ª — Triângulos com a sua altura CD

35 — O lado designado por AB é a *base* em cada um dos triângulos, por ser o *lado inferior* e *que naturalmente se presta para o apoio da figura*; o vértice C do ângulo oposto à base é o *vértice de cada triângulo*; e o *segmento CD da perpendicular baixada do vértice sôbre a base ou sôbre o seu prolongamento* é a *altura* de um ou de outro triângulo.


28 - GEOMETRIA

64 — *São circunferências excêntricas que se tocam apenas num ponto*; dizem-se, por isso, **circunferências tangentes.**

Obs. — As circunferências tangentes podem sê-lo *interiormente* ou *exteriormente*, como se vê da figura. Por isso, as da esquerda, C e C′, são *tangentes interiores*; e as da direita, O e O′, são *tangentes exteriores.*

O compasso

65 *Compasso* é um instrumento de desenho e das artes, ordinàriamente de metal ou de madeira, composto de dois ramos articulados e que serve especialmente para descrever circunferências ou arcos de círculo no papel ou no quadro prêto (fig. 47.ª).

66 — Para traçar circunferências ou arcos de círculo com o compasso, fixa-se lhe a ponta própria de um dos ramos no ponto que há-de ser *centro* e imprime-se depois movimento ao outro ramo, armado de *porta-lápis*, *tira-linhas* ou *giz*, fazendo-o dar volta completa para as *circunferências* e só partes de volta para os *arcos.*

Fig. 47 - Compasso

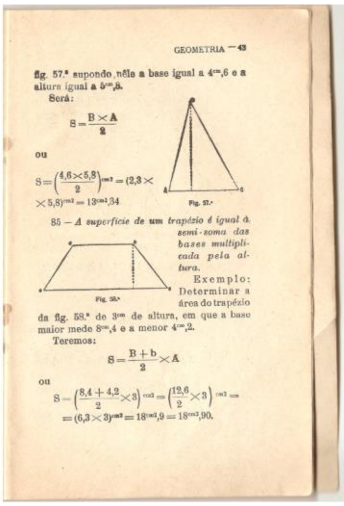

GEOMETRIA — 43

fig. 57.ª supondo nêle a base igual a 4cm,6 e a altura igual a 5cm,8.

Será:

S = (B × A)/2

ou

S = ((4,6 × 5,8)/2)cm2 = (2,3 × × 5,8)cm2 = 13cm2,34

Fig. 57.ª

85 — *A superfície de um trapézio é igual à semi-soma das bases multiplicada pela altura.*

Exemplo: Determinar a área do trapézio da fig. 58.ª de 3cm de altura, em que a base maior mede 8cm,4 e a menor 4cm,2.

Fig. 58.ª

Teremos:

S = (B + b)/2 × A

ou

S = ((8,4 + 4,2)/2 × 3)cm2 = (12,6/2 × 3)cm2 = = (6,3 × 3)cm2 = 18cm2,9 = 18cm2,90.

Figura 16: Exemplo de página de apresentação de exemplos quotidianos (p.16, p.28 e p.43, à esquerda, ao centro e à direita, respetivamente).

No livro "Geometria" do ano letivo 1940-1941

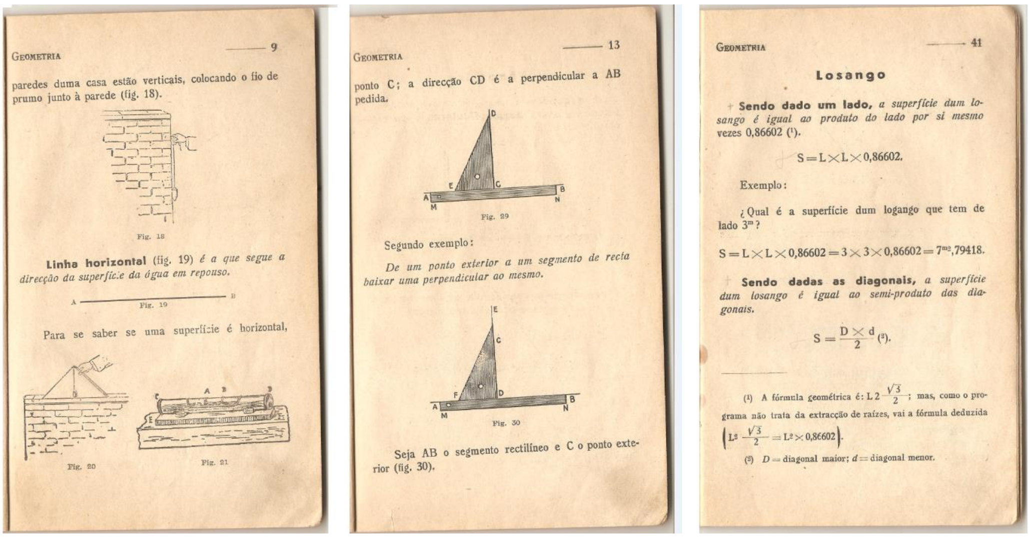
Também neste livro encontramos os quatro tipos de representações externas de Ponte e Serrazina (2000). Usa-se a linguagem natural na parte escrita, além de várias figuras geométricas a uma, duas e três dimensões, usam-se as fórmulas do cálculo das áreas dos diversos polígonos abordados e ainda se recorre a exemplos contextualizados (e.g. pp.8-9). A predominância vai para a linguagem escrita e para as representações pictóricas. Há uma representação discursiva, expositiva, listando os conceitos geométricos específicos a abordar no programa em vigor, à época. Existe também um sistema de escrita numérico, algébrico e simbólico, tal como no livro anterior. Ao longo do texto, são utilizados objetos para representar entes matemáticos (por exemplo, o fio-de-prumo, nível de pedreiro, nível de bolha de água, nível de água, régua, esquadro e transferidor). Neste livro também são usadas letras maiúsculas para representação de pontos (e.g. C, p.14), para retas, semirretas, segmentos de reta (e.g. p.5), corda (p.32) e apótema (p.25) com símbolo *Ap* (p.43). Salienta-se que a primeira vez que, por exemplo, se escreve que AB representa um segmento de reta (p.12), ainda não tinha havido qualquer alusão no texto a esta notação. Até à página 12 as letras aparecem apenas nas figuras que são apresentadas. Depois já existem várias referências às notações adotadas (e.g. pp.16-17). Os ângulos são representados por três letras maiúsculas ou apenas por uma que representa o seu vértice. Por exemplo, "Ângulo ABC, ângulo CBA, ou simplesmente ângulo B" (p. 17) são "leituras" para os ângulos. Também se usam símbolos para representar de algumas unidades de medida (metros, *m*, centímetro, *cm*, metro quadrado, m^2, e.g. pp.37-38). No texto existe referência a outras unidades de medida, sem que sejam usados quaisquer símbolos, e.g. graus, minutos, segundos (pp.31-32) e a unidade dos arcos designada de quadrante (p.36) e ainda a referência a *ares* no último problema da página 44. Os sinais de operações usados são +, ×, = e de divisão através do uso da simbologia de habitual de fração. Os sinais das operações aparecem pela primeira vez na página 37, sendo usados com alguma frequência até ao final do texto. Embora implicitamente tenha que ser usado o compasso no traçado da bissetriz de um ângulo (p.18), a referência explícita só lhe é feita na página 33. São apresentadas aplicações usando a régua e o esquadro vulgar para o traçado de perpendiculares (p.14) e aplicações da régua e do esquadro em forma de T para o traçado de paralelas (pp.15-16). A "combinação de polígonos" também é feita com exemplos do dia-a-dia e, apesar de nunca se usar o termo, introduzem-se as pavimentações como "desenhos muito curiosos (...) os ladrilhos, os mosaicos, os pedaços de madeira para soalhos, os retalhos de fazenda para fazer panos de mesa, as colchas, os tapetes, etc." (pp.27-28) Referiu-se que existem problemas contextualizados com alusão a terrenos, tabuletas, oleados, salões, mesas, tanque, lagar, caixa, sala, cubo, reservatório, tulha e caixa de fósforos (e.g. pp.43-44, pp.46 a 48), servindo para introdução de conceitos, por exemplo, no caso do "volume" (p.47). Encontramos também outras representações ativas interessantes por usarem descrições de "objetos": "um saco de coar o café também apresenta a forma cónica" (p.29); "um poço circular e um rôlo de calcar o cascalho das estradas (...) têm a forma cilíndrica (...)" (p. 29); "uma sala que tenha tanto de comprimento, como de largura, como de altura; uma caixa de bolachas; os dados de jogar (...) têm uma forma cúbica" (p. 29); "uma bola, o globo terrestre, que deve hâver em todas as escolas, os grãos de chumbo de caça, etc. são (...) esferas" (pp. 29-30). Outra menção interessante e prática refere-se à construção do "canteiro circular" (p.34). Destaque para a nota de rodapé (Figura 18, p.41) relativa à fórmula do cálculo da área de um losango. Como na definição apresentada no texto é usado o número 0,86602, a nota de rodapé explica como "aparece" este valor.

Na tabela da Figura 17, destacamos as representações matemáticas externas nas quatro categorias, bem como a referência ao seu registo.

Linguagem oral e escrita	**Representações simbólicas**	**Representações icónicas, ou pictóricas**	**Representações ativas**
Linguagem natural (e.g. p.7) Apresentação de conceitos (e.g. p.3) Escrita numérica (e.g. p.47) Escrita algébrica (e.g. p.37) Escrita simbólica (e.g. p.13)	Letras (e.g. p.5) Algarismos (e.g. p.26) Sinal = (e.g. p.40) Sinal + (e.g. p.40) Sinal × (e.g. p.40) Frações (e.g. p.40) *m, cm, mm* (e.g. p.7) m^2 (e.g. p.43) *ares* (p.44) quadrante (p.36) *Ap* (p.43) D – diagonal maior (p.41) d – diagonal menor (p.41)	Ponto (e.g. p.4) Retas (e.g. p.5) Semirretas (e.g. p.5) Segmentos de reta (e.g. p.5) Linha quebrada (e.g. p.6) Linha curva (e.g. p.7) Linha mixta (e.g. p.8) Fio-de-prumo (e.g. p.8) Imagens de uma parede com o fio-de-prumo (p.9) Imagens de uma parede com o nível de pedreiro (p.9) Imagens de um nível de bolha de ar (p.10) Imagens de um nível de água num tripé (p.10) Esquadro (e.g. p.12) Régua (p.13) Prancheta (p.15) Ângulos (e.g. p.16) Polígonos (e.g. p.19) Pavimentações (e.g. p.28) Cone, Cilindro, Cubo, Esfera (e.g. p.29) Circunferência (e.g. p.5) Círculo (e.g. p.30) Segmento e setor circular (e.g. p.31) Coroa circular (e.g. p.31) Compasso (p.33) Transferidor (p.35)	Fio-de-prumo (e.g. p.8) Nível de pedreiro (e.g. p.9) Nível de bôlha de ar (e.g. p.9) Nível de água (e.g. p.10) Régua (e.g. p.13) Esquadro (e.g. p.12) Transferidor (e.g. p.35) Problemas contextualizados (e.g. p.44)

Figura 17: Representações externas no livro "Geometria" do ano letivo 1940-1941.

Tal como foi feito no caso anterior, apresentamos na Figura 18 exemplos destas representações matemáticas.



GEOMETRIA — 9

paredes duma casa estão verticais, colocando o fio de prumo junto à parede (fig. 18).

Fig. 18

Linha horizontal (fig. 19) *é a que segue a direcção da superfície da água em repouso.*

A — B

Fig. 19

Para se saber se uma superfície é horizontal,

Fig. 20

Fig. 21

GEOMETRIA — 13

ponto C; a direcção CD é a perpendicular a AB pedida.

Fig. 29

Segundo exemplo:

De um ponto exterior a um segmento de recta baixar uma perpendicular ao mesmo.

Fig. 30

Seja AB o segmento rectilíneo e C o ponto exterior (fig. 30).

GEOMETRIA — 41

Losango

Sendo dado um lado, *a superfície dum losango é igual ao produto do lado por si mesmo* vezes 0,86602 (1).

$$S = L \times L \times 0,86602.$$

Exemplo:

¿Qual é a superfície dum logango que tem de lado 3^m?

$$S = L \times L \times 0,86602 = 3 \times 3 \times 0,86602 = 7^{m2},79418.$$

Sendo dadas as diagonais, *a superfície dum losango é igual ao semi-produto das diagonais.*

$$S = \frac{D \times d}{2} \text{ (2)}.$$

(1) A fórmula geométrica é: $L\,2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$; mas, como o programa não trata da extracção de raízes, vai a fórmula deduzida $\left(L^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = L^2 \times 0,86602\right)$.

(2) D = diagonal maior; d = diagonal menor.

Figura 18: Exemplo de página de apresentação de exemplos quotidianos (p. 9, p. 13 e p. 41 com a nota de rodapé, à esquerda, ao centro e à direita, respetivamente).

Análise comparativa dos dois manuais

No que respeita à descrição geral, detalhada, bem como à organização e ao grafismo apenas uma breve menção. Ambos os livros são de capa dura, quase com as mesmas dimensões, com o mesmo número de páginas e ambos monocromáticos. Ambos apresentam uma profusão de figuras, desenhos e esquemas como suporte do texto da apresentação dos conteúdos e os títulos e o texto são salientados com itálicos ou negritos. Ambos dividem os conteúdos das duas classes por partes e dedicam mais páginas (cerca de 63%) aos conteúdos da 3.ª classe que também são em maior número no livro de 1940-41 (18 títulos e 85 conteúdos) do que no de 1938-39 (17 títulos e 34 conteúdos); para a 4.ª classe também são em maior número no livro de 1940-41 (8 títulos e 12 conteúdos) do que no de 1938-39 (2 títulos e 13 conteúdos). No livro de 1940-41 não há problemas na parte da 3.ª classe, mas há mais problemas na 4.ª classe (21 ao todo) do que no de 1938-39 (11, que tinha 33 para a 3.ª classe). Em ambos os livros não são apresentadas, nem a resolução dos problemas, nem as suas soluções.

No que diz respeito ao objeto desta análise, as representações matemáticas externas – nas folhas de papel, páginas destes dois manuais de "Geometria" nos dois livros encontraram-se os quatro tipos de representações externas consideradas (tabelas das figuras 15 e 17, Ponte e Serrazina, 2000) nas suas duas partes, da 3.ª e 4.ª classes. As representações pictóricas e a linguagem escrita são as predominantes nos dois manuais. Nas partes dedicadas à 3.ª classe predomina a representação pictórica e a linguagem escrita, enquanto nas partes dedicadas à 4.ª classe, para além destas duas, também já se encontram exemplos de representação simbólica.

Na categoria da linguagem escrita, esta pode ser considerada discursiva, uma linguagem natural para apresentar conceitos geométricos e com escrita é numérica, algébrica e simbólica. Por vezes, nos dois manuais percebe-se a necessidade do autor quase "falar" com o leitor ao escrever todos os pormenores, por exemplo, de como se deve proceder para obter retas paralelas, para usar um transferidor ou da forma de traçar circunferências no terreno. Em suma, percebe-se o esforço dos autores para facilitar ao aluno a aprendizagem destes conteúdos de Geometria.

No que toca às representações simbólicas a maioria das representações é comum, poucas vezes há variações e as que foram dignas de nota foram assinaladas. Todavia, subsiste uma curiosidade, apenas no manual de 1937-38 se menciona a aproximação do número π. Em cada livro, e em termos comparativos é na parte da 4.ª classe que se encontra o maior número de representações simbólicas.

Já se referiu que nos dois manuais as representações pictóricas são predominantes, a par com a linguagem escrita, contudo no manual de 1940-41 o seu número ultrapassa o das do manual de 1938-39, pois também são mais os conceitos de Geometria apresentados. No manual de 1940-41 a linguagem escrita apoia-se nas representações icónicas ou pictóricas, pois inclui como parte integrante do texto da apresentação dos conteúdos figuras e desenhos. Também já se exemplificaram representações icónicas do quotidiano (de então) dos alunos que envolviam implicitamente conceitos de geometria abordados apenas de forma implícita, como o das pavimentações no manual de 1940-41. Mais uma vez se percebe o empenho deste autor em auxiliar da aprendizagem do aluno.

Nos dois manuais as representações ativas são as que existem em menor número. Apesar disso, no manual de 1940-41 o seu número ultrapassa o das do manual de 1938-39. Embora se perceba que os autores não esquecem o quotidiano (de então) dos alunos, quando se trata de conteúdos e de conceitos que requerem maior rigor de linguagem o aluno poderia perder-se. Tal é o exemplo já apresentado para o manual de 1940-41. A primeira vez que se escreve que AB representa um segmento de reta (p.12), ainda não tinha havido qualquer alusão no texto a esta notação e até a representação icónica já tinha aparecido antes (p.5).

No início deste trabalho referiu-se que ao analisar as representações matemáticas se tem que considerar o contexto histórico em que se enquadram (Santos, 2003). Uma década depois das mudanças de programas (Dec. 1928 e Dec. 1929), e continuando a decorrer outras[23], a análise destes manuais em vigor em dois anos letivos sucessivos parece refletir que o conjunto de representações matemáticas encontradas ainda não está conseguida e equilibrada. Mesmo assim, reconhece-se um certo compromisso dos autores para tentarem escrever os seus textos de modo a torná-los acessíveis ao aluno e a facilitar-lhe a aprendizagem dos conteúdos de Geometria.

[23] Rosas (2012) menciona na política educacional do Estado Novo a "[r]evisão dos programas escolares de acordo com os princípios ideológicos do regime a adopção de 'livros únicos' nas principais disciplinas formativas do ensino primário e secundário ." (p. 338).

"Enquanto objecto epistémico, cultural e pedagógico, o livro escolar tem um percurso e um tempo histórico próprios, cujos significado, sentido e evolução, representação e apropriação se documentam, compreendem, explicam e narram no quadro da história cultural" (Magalhães, 2006) o que permite perspetivar como trabalho futuro a possibilidade da análise de manuais aprovados e oficialmente autorizados para anos letivos seguintes a estes (que se consigam localizar), bem como a de uma análise comparativa dos conteúdos de Geometria dos manuais e dos programas aprovados.

Referências bibliográficas

Almeida, M. C. R. C. (2013). *Um olhar sobre o ensino da Matemática guiado por António Augusto Lopes*. Tese de Doutoramento. Lisboa: Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

Bolden, D., Barmby, P., Raine, S., & Gardner, M. (2015). How young children view mathematical representations: a study using eye-tracking technology, *Educational Research*, 57(1), 59-79.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 109-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

(Dec. 1928) Decreto n.º 16:077, de 26 de Outubro de 1928.

(Dec. 1929) Decreto n.º 16:730, DG n.º 83, I Série, de 13 de Abril de 1929.

Duval, R. (2009). *Semiósis e Pensamento Humano Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Tradutores: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física.

Fernandes, A. M. (1940). *Geometria*. Domingos Barreira editor. Porto: Livraria Simões Lopes.

Figueirinhas, A. (s.d.) *Geometria*. Série Escolar Educação. Porto: Livraria – Educação Nacional, 1938-1939.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 178-203). New York, NY: Routledge.

Loureiro, C. (2009). Geometria no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico: Contributos para uma gestão curricular reflexiva. *Educação e Matemática*, *105*, 61-66.

Magalhães, J. (2006). O Manual escolar no quadro da história cultural. Para uma historiografia do manual escolar em Portugal. *Sísifo. Revista de Ciências da Educação, 1*, 5-14.

Mourinha, A., Branco, N. & Cavadas, B. (2014). As representações externas na resolução de problemas matemáticos de alunos do 1.º ciclo. *Revista da UIIPS, 6*(2), 30-45.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and standards for school mathematics* (publicado em Português em 2007 pela APM). Reston: NCTM.

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J. P. (2014). O papel das diversas representações na resolução de problemas, em diferentes contextos, no estudo da proporcionalidade inversa. *In* Martinho, M. H., Tomás Ferreira, R. A., Boavida, A. M., & Menezes, L. (Eds.) *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 425-442). Braga: APM.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 1.º ciclo. *Educação e Matemática, 113*, 11-16.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática,* 4 (8), 149-170.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Sampaio, J. S. (1976), *O Ensino Primário 1911-1969. Contribuição monográfica,* Vol. II. Oeiras: Instituto Gulbenkian de Ciência.

Santos, A. C. C. (2003). *Recursos didáticos e representações da geometria espacial da 4.ª série do Ensino Fundamental de uma escola em Campo Grande-MS*. Tese de Mestrado. Centro de Ciências Humanas e Sociais da Universidade de Mato Grosso do Sul.

Rosas, F. (2012). *Salazar e o poder: A arte de saber durar*. Lisboa: Tinta-da-China.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438-445.

REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS E AÇÕES DO PROFESSOR NO DECORRER DE UMA DISCUSSÃO MATEMÁTICA

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ulisboa.pt;

Marisa Quaresma
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mq@campus.ul.pt;

Joana Mata-Pereira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joanamatapereira@campus.ul.pt

Resumo: Nesta comunicação procuramos analisar o modo como o professor, através das suas ações, integra no trabalho realizado na sala de aula diversos tipos de representações, tendo em vista promover o raciocínio e a compreensão dos conceitos matemáticos. O quadro concetual articula conceitos relativos às representações e raciocínio matemático, bem como às ações do professor na sala de aula. Os participantes são uma turma do 6.º ano de uma escola pública e a respetiva professora. A aula foi registada em vídeo, sendo as discussões coletivas integralmente transcritas. A professora encoraja os alunos a usarem uma variedade de representações na resolução de um problema matemático, estabelecendo conexões entre elas e valorizando as representações icónicas capazes de servir de base a raciocínios formais com compreensão. Para apoiar os alunos a apresentar os seus raciocínios a professora usa essencialmente ações de guiar, e para os levar a processos mais complexos de interpretar e raciocinar tira partido de ações de desfiar.
Palavras-chave: Ações do professor, Representações, Tarefas, Comunicação, Abordagem exploratória.

Introdução

As representações assumem um papel fundamental como suporte do pensamento humano. Dada a natureza abstrata dos objetos matemáticos, não é possível pensar sobre eles sem recorrer às suas representações. Por isso, as representações estão estritamente relacionadas com o raciocínio matemático (NCTM, 2007; Ponte, Mata-Pereira & Henriques, 2012). O sucesso da resolução de um problema decorre em grande medida de uma escolha apropriada das representações a usar. No entanto, esse sucesso depende também da interpretação (*sense making*) (NCTM, 2009) que se faz dos diferentes elementos presentes no problema e das operações que é possível fazer sobre eles com vista a chegar a uma solução.

O grande problema no ensino da Matemática é o uso de representações simbólicas sem que os alunos compreendam o seu significado, o que os leva a memorizar procedimentos e definições. Com esse tipo de ensino, muitos alunos conseguem reproduzir esses procedimentos e definições, mas não são capazes de os usar em novas situações nem para resolver problemas com alguma complexidade. Uma abordagem alternativa ao ensino da Matemática é a abordagem exploratória (Ponte, 2005), na qual se procura que os alunos assumam um papel ativo na construção do seu conhecimento. Para isso, são-lhes propostas tarefas para as quais os alunos não dispõem de um método de resolução, tendo de conceber as suas próprias estratégias, através das quais constroem novos conceitos, representações e procedimentos matemáticos.

Nesta comunicação, centramos a nossa atenção no momento de discussão coletiva, um dos momentos fundamentais de uma aula de cunho exploratório, no qual os alunos são chamados a apresentar e justificar as suas resoluções das tarefas propostas e a questionar, apresentando argumentos, as resoluções dos seus colegas. O nosso objetivo é analisar o modo como, através das suas ações, o professor integra no trabalho realizado na sala de aula diversos tipos de representações, tendo em vista promover o raciocínio dos seus alunos e a sua compreensão dos conceitos matemáticos.

Quadro concetual

Deve-se a Bruner (1999) a classificação fundamental das representações em ativas (envolvendo objetos e movimentos), icónicas (imagens, desenho e diagramas) e simbólicas (linguagem oral e escrita e símbolos). Note-se, porém, que, dentro destas grandes categorias, é possível estabelecer subcategorias, distinguindo entre diversos tipos de representação. Por exemplo, as representações icónicas podem ser imagens que representam um dado objeto com grande quantidade de detalhes ou esquemas e diagramas que representam esse objeto de forma muito abstrata. De igual modo, as representações simbólicas podem ser de diversos tipos, tendo em conta a complexidade dos conceitos que representam e a familiaridade que o indivíduo tem dessas representações. Finalmente, é de notar que podem existir representações mistas envolvendo aspetos simbólicos e icónicos, simbólicos e ativos, etc.

O raciocínio inclui o estabelecimento de estratégias para a resolução de problemas bem como fazer conjeturas e generalizações e apresentar justificações, eventualmente organizadas em cadeias de inferências (demonstrações). A formulação de estratégias, conjeturas e generalizações está mais associada ao raciocínio indutivo e abdutivo e a realização de justificações ao raciocínio dedutivo. Assumimos que o raciocínio pode assumir uma natureza formal ou informal (Ponte & Quaresma, 2014). Assim, enquanto o raciocínio formal se apoia em representações simbólicas e usa regras e procedimentos matemáticos já conhecidos, o raciocínio informal apoia-se sobretudo em representações icónicas e ativas. Além disso, o raciocínio formal pode ser realizado em duas condições: de modo mecânico, sem compreensão, por simples execução de operações memorizadas, ou com compreensão da razão de ser dessas operações e do procedimento geral que está a ser seguido. O raciocínio formal com compreensão apoia-se no raciocínio informal, enquanto o raciocínio formal sem compreensão se apoia sobretudo na memorização (Figura 1). A compreensão associada ao raciocínio formal tem por base analogias e conexões com situações bem conhecidas, sejam situações matemáticas ou do dia-a-dia do aluno. Deve ter-se em atenção que tanto um raciocínio informal como um raciocínio formal podem ser matematicamente corretos ou incorretos.

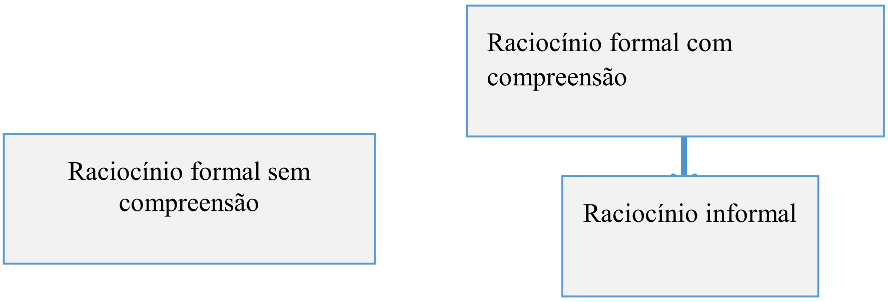


Figura 1: Raciocínio informal e formal com e sem compreensão (adaptado de Ponte & Quaresma, 2014).

A abordagem exploratória é marcada pela natureza das tarefas propostas e pelo tipo de comunicação que ocorre na sala de aula. As tarefas são de importância fundamental pela atividade dos alunos a que podem dar origem. O que os alunos aprendem na aula de Matemática resulta principalmente da atividade que eles próprios realizam e da reflexão que efetuam sobre essa mesma atividade (Christiansen & Walther, 1986). Por isso, é essencial propor tarefas apropriadas, capazes de servirem de base a uma atividade matemática rica e multifacetada por parte dos alunos, algumas das quais assumindo uma natureza desafiante para os alunos (Ponte, 2005). Além disso, a comunicação em sala de aula marca de modo decisivo as oportunidades de aprendizagem dos alunos (Bishop & Goffree, 1986; Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Menezes et al., 2014). Na abordagem exploratória, esta comunicação, em lugar de ser *unívoca*, dominada pelo professor, é *dialógica*, valorizando a contribuição dos alunos (Ponte, 2005).

É ao professor que cabe propor as tarefas a realizar e regular a comunicação, mas tem de o fazer em permanente negociação com os alunos, negociação essa que se realiza explícita ou implicitamente. Um aspeto muito importante do modo como conduz a comunicação é o modo como ajuda os alunos a apropriar-se da linguagem matemática correta, usando sobretudo processos de *"redizer"* (*revoicing*), isto é, reformulando as afirmações dos alunos numa linguagem progressivamente mais correta (Franke, Kazemi, & Battey, 2007). Para introduzir novos conceitos ou esclarecer significados que se revelam confusos, o professor pode conduzir momentos de *negociação de significados* matemáticos (Bishop & Goffree, 1986). Além disso, pode assumir em exclusivo o papel de *autoridade matemática* ou partilhá-lo com os alunos, procurando estimular a sua capacidade de raciocínio e argumentação. Uma forma particular da comunicação são as discussões matemáticas, com diversos intervenientes, que assumem, todos eles, um papel de autoridade em relação às suas ideias.

Um ponto de partida fundamental para uma discussão matemática produtiva é, evidentemente, a tarefa proposta. Embora tarefas relativamente rotineiras possam dar por vezes lugar a discussões interessantes, mais promissoras são as tarefas com caraterísticas desafiantes que propiciam uma diversidade de estratégias por parte dos alunos que possam depois ser comparadas e avaliadas. Além disso, é necessário que os alunos tenham oportunidade de trabalhar de modo ativo na tarefa, organizando as suas resoluções para apresentar aos colegas.

Nestas condições, cabe ao professor preparar o momento de discussão, aproveitando o melhor possível o trabalho realizado pelos alunos e o tempo de aula disponível. Para o efeito, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) propõem o que designam por "cinco práticas" que vão além do "mostrar e dizer": (i) antecipar as possíveis dificuldades dos alunos; (ii) monitorizar o trabalho dos alunos, recolhendo a informação necessária; (iii) selecionar os aspetos a salientar durante a discussão; (iv) sequenciar as intervenções dos alunos; e, já durante a discussão, (v) estabelecer conexões entre as diversas resoluções dos alunos. Uma preparação da discussão feita nestas condições é importante para a sua condução. No entanto, uma discussão produtiva envolve muitos aspetos para além do estabelecimento de conexões e que muitas vezes são impossíveis de prever. Daí a necessidade de olhar mais de perto para a dinâmica dos momentos de discussão. Focando a sua atenção nos momentos de discussão propriamente dita, Wood (1999) chama a atenção para as potencialidades da exploração de desacordos entre os alunos como ponto de partida para momentos frutuosos de discussão. A partir do desacordo, o professor procura que os alunos com posições diferentes justifiquem as suas posições e encoraja os restantes alunos a associarem-se à discussão. Pelo seu lado, para analisar o processo de ensino-aprendizagem na sala de aula, Potari e Jaworski (2002) propõem o modelo da tríade de ensino (*teaching triad*), tendo como elementos principais o desafio matemático, a sensibilidade aos alunos e a gestão da aprendizagem.

Mais recentemente, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) desenvolveram um quadro de análise para os momentos de discussão, que distingue entre as ações do professor diretamente relacionadas com os tópicos e processos matemáticos e ações que têm a ver com a gestão da aprendizagem (Figura 2). Centrando a sua atenção nas ações relacionadas com os aspetos matemáticos, distinguem quatro tipos fundamentais: (i) *Convidar*, ações cujo objetivo é iniciar uma discussão; (ii) A*poiar/guiar*, ações que pretendem conduzir os alunos na resolução de uma tarefa através de perguntas ou observações e que apontam, de forma explícita ou implícita, o caminho que estes podem seguir; (iii) *Informar*/*sugerir*, ações em que o professor introduz informação, dá sugestões, apresenta argumentos ou valida respostas dos alunos; e, finalmente, (iv) *desafiar*, ações em que o professor procura que os alunos assumam o papel de produzir novas representações, interpretar um enunciado, estabelecer conexões, ou formular um raciocínio ou uma avaliação. É possível identificar estes quatro tipos de ações em aulas de caraterísticas muito diversas, mas com frequência diferente e também num papel diferente que é interessante estudar.

Em qualquer destas ações podem reconhecer-se aspetos fundamentais de processos matemáticos como *representar* (tanto na mesma linguagem como mudando para outra forma de representação), *interpretar* (redizendo por palavras suas e estabelecendo conexões com outros conceitos), *raciocinar* (fazendo inferências, isto é, tirando novas conclusões, de forma fundamentada, a partir de informação já existente) e *avaliar* (fazendo julgamentos gerais sobre aspetos relacionados com a resolução da tarefa).

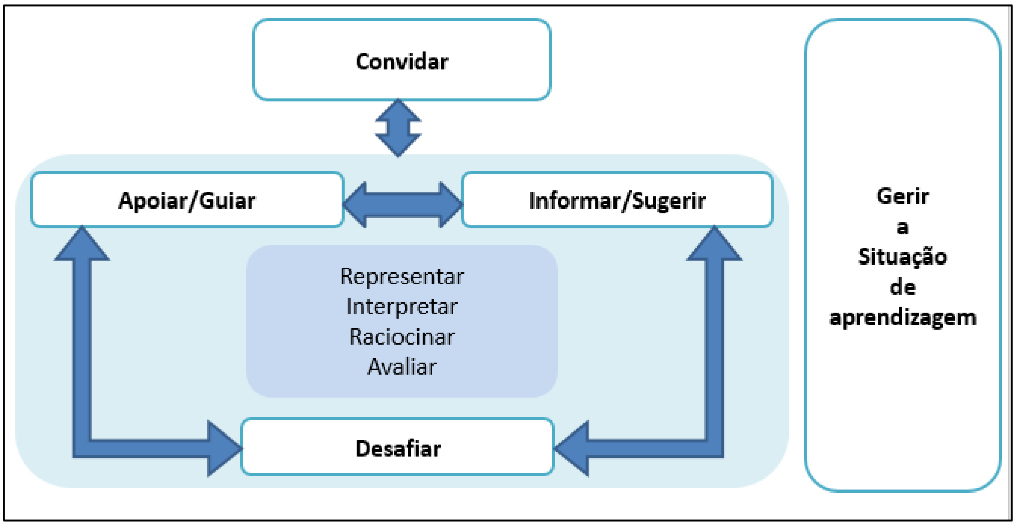


Figura 2: Quadro de análise para as ações do professor (adaptado de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma, 2013).

Metodologia de investigação

A metodologia do estudo é qualitativa e interpretativa, tendo por base observação participante (Jorgensen, 1989). Apresentamos diversos episódios da discussão de uma tarefa que visa levar os alunos do 6.º ano a desenvolver a noção de multiplicação de uma fração por uma quantidade. A professora que conduz a aula (a segunda autora desta comunicação) tem 6 anos de experiência, e procura pôr em prática nas suas aulas uma abordagem exploratória. O primeiro autor participou na aula como observador. Os alunos são de uma turma do 6.º ano de uma escola básica rural do ensino público, de uma zona considerada socialmente deprimida, a 50 km de Lisboa. Os pais dos alunos, em geral, são de classe baixa ou média-baixa com habilitações que, na sua maioria, não vão além do ensino básico. A turma tem 19 alunos, dos quais 4 já reprovaram em anos anteriores e cujas idades variam entre 12 e 17 anos, e revela reduzido empenho e poucos hábitos de trabalho. A aula foi registada em vídeo, sendo as discussões coletivas integralmente transcritas. A análise dos dados começou por identificar os episódios na discussão da resolução de cada tarefa, codificando as ações do professor de acordo com as categorias apresentadas na Figura 2. De seguida, procurámos estabelecer relações entre estas ações e eventos marcantes no que respeita às interpretações, representações e raciocínios (estratégias, generalizações e justificações) realizadas pelos alunos.

A tarefa

A tarefa que serve de base a este trabalho pretende que os alunos usem diversas frações como operador para determinar uma certa quantidade de uma dada unidade (Figura 3). Envolve portanto o significado operador num contexto relativo a grandezas discretas (quantidade de rebuçados). A informação é dada sob a forma de um enunciado verbal envolvendo números inteiros (250) e frações ($\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{10}$), sendo pedida uma justificação da resposta. Os alunos conheciam os números racionais nas suas diversas representações, já tinham aprendido a adição e subtração de números racionais mas ainda não tinham aprendido a multiplicação e a divisão de dois números racionais ou de um número racional por um número natural. Pretendia-se que os alunos dessem um sentido ao conceito de multiplicar um número racional (representado como fração) por um número inteiro. Trata-se de uma tarefa de natureza exploratória pois os alunos não tinham ainda resolvido situações análogas na aula de Matemática, pelo que teriam de dar sentido à questão e procurar uma forma de a resolver.

Tarefa. Para a sua festa de aniversário a Rita comprou 250 rebuçados para dar aos seus amigos. Decidiu dar $\frac{1}{5}$ aos colegas da natação, $\frac{3}{5}$ aos colegas da escola e guardou $\frac{2}{10}$ para dar aos convidados da sua festa de aniversário. Quantos rebuçados deu a Rita aos colegas da natação? Justifica a tua resposta.

Figura 3: Tarefa dos rebuçados da Rita.

A tarefa fazia parte de uma ficha de trabalho entregue aos alunos. A professora leu o enunciado em voz alta, procurando certificar-se que todos compreendiam o que era pedido. Durante uma parte da aula os alunos trabalharam a pares e na outra parte realizou-se a discussão coletiva.

Episódio 1 – Primeira resposta (errada)

A professora inicia a discussão coletiva convidando alunos que tinham respostas erradas a apresentarem a sua resolução. Procura, deste modo, criar oportunidades para o confronto de ideias e para o surgimento de explicações e justificações. Daniel, que tinha trabalhado em conjunto com Marco, aceita o convite e vai ao quadro apresentar a resolução. Esta consiste numa sequência de diversas operações com números inteiros (Figura 4). O aluno percebeu que deveria dividir por 5, mas fê-lo duas vezes sem se perceber porquê. A estratégia de raciocínio do aluno mostra um entendimento dos aspetos importantes da situação, mas acaba por ser mal aplicada. Note-se que esta resolução é apresentada numa representação simbólica, em que só intervêm números inteiros. Trata-se de um raciocínio formal incorreto.

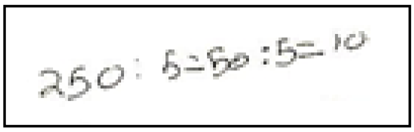


Figura 4: Resolução inicial de Daniel.

Para focar a atenção de todos os alunos, a professora recorda novamente o enunciado e pede a Daniel que explique oralmente o seu raciocínio. Este diz que "já está tudo explicado" nos cálculos registados no quadro, não conseguindo justificar melhor a sua resposta. Para ele, os cálculos continham todas as justificações necessárias. Perante isso, a professora insiste no convite, encorajando o aluno a falar, ao mesmo tempo que procura evitar que os colegas se intrometam:

> Professora: Não está aí explicado Daniel… Eu não percebo, eu olho para aí… E, preciso da tua ajuda ... Deixem lá o Daniel explicar … A forma como… Que ele pensou.
>
> Daniel: Na natação, 250 é o número dos rebuçados a dividir por 5 que é o denominador, para ver quanto é que valia, ao todo…

Daniel acaba por dizer que, para saber quantos rebuçados recebem os colegas da natação, dividiu 250 por 5. Implicitamente está a dizer que, para determinar $\frac{1}{5}$ de uma certa quantidade, tem de dividir por 5. A professora considera a explicação insuficiente, pois só corresponde à primeira parte da expressão, pelo que pede ao aluno para completar a sua representação, indicando o significado dos diferentes termos. Guiado pelas perguntas da professora, o aluno faz essa legendagem, usando um misto de linguagem verbal e simbólica (Figura 5):

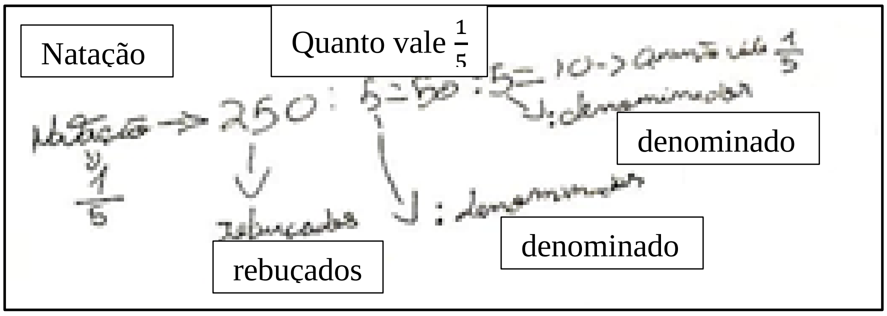


Figura 5: Resolução de Daniel, completada após as sugestões da professora.

> Professora: Então põe lá por baixo de natação, põe lá a fração, se faz favor, só para nós percebermos o que é que tu estás a dizer… Por baixo da palavra natação, mete a fração dos rebuçados que ela deu aos meninos da natação, qual foi a fração?

Alunos: $\frac{1}{5}$.

Professora: Isso, OK, só para nós percebermos do que é que tu estás a falar… Então quando tu dizes que dividiste por 5 é porque 5 é o denominador dessa fração $\frac{1}{5}$… Continua…

Daniel: E deu 50.

Professora: E o que é que representa esse 50?

Daniel: Esse 50 significa quanto é que vale este 5 (aponta para o denominador da fração $\frac{1}{5}$)… E fiz 50 a dividir por 5 outra vez por causa do denominador para ver quanto é que valia este 1. Deu 10… Então deu… Fiz… 10 vezes o numerador e deu 10, acho que deu 10 rebuçados…

A legenda feita por Daniel dá indicação do significado dos diversos elementos que surgem na expressão, exceto do valor 50, que é precisamente aquele que mais importaria interpretar. O aluno usa para tal um misto de linguagem verbal e simbólica (frações). Quando refere que obteve 50, a professora pergunta-lhe o que representa esse valor. Trata-se de uma questão muito diferente das anteriores, que assume uma natureza desafiante, pois o aluno não interpretou o 50 como o número de rebuçados que são dados aos meninos da natação e calculou novamente $\frac{1}{5}$ do valor obtido. Ou seja, Daniel não interpreta a sua resposta nos termos do contexto do problema e indica apenas os cálculos que efetuou. A sua explicação remete apenas para uma sequência de operações, sem interpretação do significado dos resultados intermédios. Além disso, o aluno não tem em atenção que 50 é o resultado da divisão de 250 por 5, e que ao voltar a operar com esse valor na continuação da mesma expressão, obtém um encadeamento de igualdades matematicamente errado.

Neste episódio a professora enfrenta três problemas. Em primeiro lugar, com que resolução começar a discussão. Em vez de escolher uma resolução correta ou deixar que os alunos se oferecessem voluntariamente, a professora escolhe deliberadamente uma resolução errada. Deste modo, cria uma situação potencialmente geradora de desacordos. Em segundo lugar, de que modo conduzir a discussão de modo a que os alunos identificassem e compreendessem o erro em causa. Para isso pede a Daniel para interpretar os diversos elementos da sua resposta. No entanto, este aluno não é explícito em relação ao significado de 50 que obteve logo na primeira divisão, pelo que não se percebe por que razão fez duas vezes a divisão por 5. Em terceiro lugar, a professora tem que decidir de que modo continuar a discussão depois da explicação inconclusiva de Daniel. Neste ponto, a professora toma uma decisão importante – em vez de corrigir o erro do aluno, desafia outros alunos da turma a tomarem posição, tendo em vista promover o aparecimento de manifestações de desacordo, o que dá origem a um novo episódio.

Episódio 2 – Duas novas respostas (corretas)

Em resposta ao desafio da professora, diversos alunos manifestam de imediato o seu desacordo, mostrando estranheza, dizendo que a resolução de Daniel está errada, ou dizendo o valor correto:

> Alunos: E deu 10 rebuçados?
> Eu acho que não…
> Eu acho que é 50 só…
> Eu também, eu acho que dá 50…
> Eu acho que também deu 50…

Um dos alunos, Jaime, pede para mostrar o seu raciocínio e a professora dá-lhe a palavra. O aluno converte $\frac{1}{5}$ para a representação decimal, obtendo 0,2, e usa este valor como operador multiplicativo (Figura 6). Afirma que o resultado de Daniel está incorreto porque não é igual ao seu, mas não indica qual é o erro do colega.

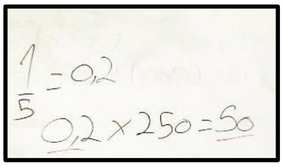


Figura 6: Resposta de Jaime.

Nenhum aluno mostra oposição à resolução de Jaime. Como os alunos já sabem que na aula de Matemática são valorizadas resoluções diferentes da mesma tarefa, um deles, Vasco, indica ter outra forma de resolver a questão. A sua resolução tem por base uma representação mista, com elementos icónicos (um retângulo dividido em "fatias") e simbólicos – a indicação da fração $\frac{1}{5}$ em cada fatia e a divisão de 250 por 5, com o respetivo resultado (Figura 7). É de notar, porém, que os elementos mais marcantes desta representação são os icónicos.

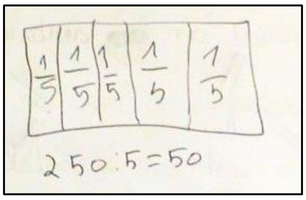


Figura 7: Resolução de Vasco.

Vasco explica que cada parte da figura representa $\frac{1}{5}$ e que, para saber o valor de cada "fatia", dividiu 250 por 5, obtendo como resultado 50 rebuçados que seriam para os colegas da natação. Deste modo, faz uma conexão entre as representações $250 \times \frac{1}{5}$ (dada implicitamente no enunciado da tarefa, e onde está implícita uma operação que os alunos não conhecem, a multiplicação de uma fração por um número natural), a representação

250 : 5 (uma operação já conhecida, envolvendo números naturais, expressa em linguagem simbólica) bem como com uma representação pictórica ilustrando o processo de dividir um todo em cinco partes iguais.

Deste modo, a apresentação de uma resolução errada cria condições para o surgimento de expressões de desacordo por parte de diversos alunos, tendo levado Jaime e Vasco a apresentarem as suas resoluções. Ambos resolvem a questão fazendo raciocínios corretos que envolvem uma mudança de representação, Jaime transformando as frações em numerais decimais e Vasco usando uma representação mista, mas onde se destacam os elementos icónicos. Esta última representação, ajuda os alunos da turma a ver que $\frac{1}{5}$ é a quinta parte da unidade, ou seja, a unidade dividida em cinco partes iguais. O raciocínio de Jaime é de natureza essencialmente formal enquanto o de Vasco é vincadamente informal. Tendo existido diversos alunos que se ofereceram para apresentar as suas resoluções, os problemas com que a professora se depara são que alunos escolher e como gerir as suas intervenções. A professora escolhe alunos que resolveram a questão usando diferentes representações. Neste episódio, as ações da professora são essencialmente de guiar os alunos, regulando a sua participação na discussão.

Episódio 3 – Confronto de respostas

Considerando que a questão pode ainda não estar completamente esclarecida para alguns alunos, nomeadamente Daniel, a professora retoma então o desacordo entre a resolução deste aluno e as de Jaime e Vasco. Faz várias tentativas para que os alunos justifiquem porque a solução correta é 50 e não 10. A certa altura interpela diretamente Jaime:

> Professora: Jaime porque é que tu achas que não é 10? E não aceito como resposta, "porque acho que é 50" ... Quero que me tentes explicar porque é que ... aquela resolução não está correta.

Perante este desafio, Jaime apresenta uma explicação tendo por base a representação feita por Vasco:

> Jaime: Não sei da minha, mas sei da do Vasco. Aquilo tudo vale ...
> Guilherme: 250.
> Jaime: Vale 250 rebuçados e cada parcela daquilo vale $\frac{1}{5}$. E aquilo depois é… Aquilo está só a pedir $\frac{1}{5}$ e a gente, vamos ver, ou seja, em número decimal quanto é que vale cada parcela daquelas e ela só pede $\frac{1}{5}$ para cada . . . Por isso, aquilo tudo ali vale 50.
> Guilherme: É só uma parcela.

Jaime introduz o termo “parcela” para se referir a cada uma das cinco partes em que o todo foi dividido, obtendo-se $\frac{1}{5}$. Guilherme ajuda Jaime na sua explicação, evidenciando concordar com o colega.

A professora lança então um novo desafio, procurando que Daniel indique as diferenças entre a sua resolução inicial e a resolução de Vasco:

> Professora: Então porque é que… Então o que é que aconteceu aqui? O que é que aconteceu aqui, Daniel [aponta para a resolução deste aluno], qual é que é a semelhança e qual é que é a diferença [em relação à resolução de Vasco]… Onde é que aconteceu aqui a diferença entre esta resolução e aquela resolução? Há ali uma diferença…
>
> Daniel: É dividir o 50 por 5.

Daniel reconhece então que a diferença está no ter dividido 50 por 5, operação que os seus colegas não fizeram.

Para finalizar esta discussão a professora promove ainda uma negociação de significado da expressão $\frac{1}{5}$ relacionando-a com a “quinta parte” e voltando a fazer referência à representação pictórica de Jaime.

> Professora: $\frac{1}{5}$. Digam lá outra forma de dizer $\frac{1}{5}$ … Como é que vocês no 1.º ciclo diziam $\frac{1}{5}$… Antigamente vocês não lhe chamavam $\frac{1}{5}$… Como é que vocês antigamente diziam a metade? Oh! $\frac{1}{2}$… Já disse já disse… Como é que vocês diziam $\frac{1}{2}$? Chamavam-lhe metade. Como é que vocês diziam $\frac{1}{3}$ no 1.º ciclo?
>
> Guilherme: Terça parte.
>
> Professora: A terça parte, OK. Então aqui quando vocês dividem por 5 o que é que vocês estão a fazer?
>
> Edgar: A quinta parte…
>
> Professora: Estão a determinar quanto é que é a quinta parte de…
>
> Aluno: 250.
>
> Professora: 250, e, perceberam… Que este todo são os $\frac{5}{5}$ e se nós dividirmos os $\frac{5}{5}$, ou seja, o todo em 5 partes iguais encontramos… A…
>
> Juliana: … A quinta parte.
>
> Professora: Ah! Descubro a sua quinta parte! Muito bem… Então eu fiz… 5 caixinhas e distribuí da mesma forma, os 250 rebuçados pelas 5 caixinhas… Sim?

Neste episódio destaca-se o modo como a professora explora o desacordo entre os alunos que apresentam duas resoluções, uma correta e outra incorreta. Para isso vai lançando desafios aos alunos para explicarem porque uma dada resposta não é correta e para identificarem as diferenças entre duas resoluções. A identificação do erro cometido por Daniel é feita com o contributo de diversos alunos. Neste episódio a professora enfrenta o problema de conseguir que todos os alunos compreendam o erro da resolução de Daniel, incluindo o próprio. Coloca-se-lhe, também o problema de clarificar o significado na expressão “quinta parte”, para o que conduz uma negociação de significados. Este episódio não faz surgir novos raciocínios, girando antes em torno da interpretação dos raciocínios já anteriormente realizados e na construção do significado de termos matemáticos.

Episódio 4 – Generalização

Depois de ter sido discutido o erro de Daniel e clarificado que determinar a quinta parte corresponde a dividir uma quantidade por 5 ou multiplicar por $\frac{1}{5}$, a professora desafia os alunos a fazerem uma generalização. Retoma por isso uma das expressões escritas no quadro [$\frac{1}{5} \times 250$] e pergunta o que aconteceria com outros valores para a fração e o número natural:

> Professora: Então vamos tentar chegar a uma conclusão mais geral, diz-me lá…
> Rui: Sempre que quisermos fazer uma conta dessas [$\frac{1}{5} \times 250$]…
> ...
> Professora: Sim.
> Rui: É só dividir o denominador pela coisa que estiver antes ... Que neste caso são os rebuçados.
> Professora: Como é que é, explica lá… Dá lá mais exemplos…
> Rui: Por exemplo, $\frac{1}{4}$, se for outro exemplo, quantos rebuçados? 150 por exemplo… Sempre que há contas dessas, eu posso fazer o 4 ou o denominador a dividir pelo número. E vai dar o resultado.

Tal como os colegas, também Rui apresenta dificuldade de comunicação, confundindo as designações dos termos da fração e da divisão. Contudo, compreende-se que pretende dizer que, para multiplicar uma fração unitária por uma certa quantidade, basta dividir a quantidade em causa pelo denominador dessa fração

Perante esta generalização, ainda que efetuada numa linguagem pouco correta, a professora desafia Rui a estender a sua generalização a frações não unitárias:

> Professora: Então agora, vou fazer-te uma pergunta… Isso aplica-se se eu tiver $\frac{2}{4} \times 150$?

O aluno não consegue responder, mas Guilherme pede para intervir:

> Guilherme: Eu acho que… Pode-se fazer da mesma maneira só que tem que se acrescentar uma coisa…

Apesar de mostrar compreender a situação em causa, também Guilherme tem dificuldade na utilização da linguagem matemática, pelo que a professora decide apoiar a sua explicação redizendo as suas afirmações de modo matematicamente mais correto:

> Guilherme: Pode-se fazer 150 a dividir por 4 . . . Podemos fazer da mesma maneira porque podemos fazer… 4 a dividir por 150 dá 37,50.
> Professora: Vá, 150 a dividir por 4, vá tomem lá atenção…
> Guilherme: 150 a dividir por 4, depois fazemos o resultado vezes o denominador.
> Professora: O de cima ou o de baixo?
> Guilherme: O de cima…
> Professora: Ah, o numerador.
> Guilherme: Numerador…
> Professora: OK, vamos então, vamos ver, vamos avançar… Então faríamos… O que é que significa fazer… Quanto é que dá 150 a dividir por 4. Primeiro eu tenho que saber o que é que significa 150 a dividir por 4… O que é que é este 37,5.
> Guilherme: É $\frac{1}{4}$ de 150.
> Professora: É $\frac{1}{4}$ de 150, OK. Então... Eu aqui quero… Quantos quartos?
> Guilherme: 2 quartos! Por isso é que vamos fazer vezes 2.

Deste modo, guiado pelas questões da professora, Guilherme amplia corretamente a generalização de Rui e responde ao desafio colocado pela professora.

Neste episódio, a professora desafia os alunos a fazerem uma generalização sobre o que poderá ser a multiplicação de uma fração qualquer por um número natural. Este episódio desenvolve-se usando representações simbólicas (frações e linguagem natural). Destaca-se ainda as questões da professora guiando os alunos para melhorarem as suas explicações bem como o modo como rediz as afirmações dos alunos levando-os a aperfeiçoar a sua linguagem matemática. A professora enfrenta o problema de levar os alunos a fazer a generalização pretendida, o que acaba por ser feito em duas etapas, primeiro relativamente a frações unitárias e depois relativamente a quaisquer frações.

Conclusão

A professora inicia a discussão coletiva analisando uma resposta errada de um aluno, que tinha previamente identificado. Nesta resposta intervêm apenas representações simbólicas, cujo significado o aluno não consegue explicar. A professora promove então o surgimento de desacordos, levando outros alunos a apresentar outras resoluções, baseadas em diferentes representações. Uma dessas resoluções, essencialmente de natureza icónica, permite uma compreensão intuitiva da situação proposta. A professora promove o estabelecimento de conexões entre as diversas representações e assume esta representação icónica para referência da discussão subsequente que leva à formulação, pelos alunos, de uma generalização relativamente ao produto de uma fração por um número natural. Deste modo, tendo por base uma variedade de representações, a professora dá grande atenção aos processos de interpretação e de raciocínio, nomeadamente promovendo o estabelecimento de justificações e generalizações. Regista-se, assim, a importância do estabelecimento de conexões, tal como sugerido por Stein et al. (2008), ao mesmo tempo que se comprova que a condução de discussões matemáticas envolve muito mais do que o simples estabelecimento de conexões.

No decurso da condução da discussão coletiva, a professora realiza diversos tipos de ações. No primeiro episódio, a maioria das suas ações têm em vista apoiar/guiar um aluno a apresentar a sua resolução. No entanto, neste episódio a professora tem duas ações de natureza desafiante que têm um papel marcante – a primeira quando pergunta ao aluno o que significa o 50 que ele obteve nos seus cálculos e a segunda quando desafia os restantes alunos a tomarem posição perante a resolução do colega. Perante raciocínios de natureza formal realizados sem compreensão, a professora assume que a ênfase tem de ser colocada na interpretação do significado dos cálculos e do valor obtido. No segundo episódio, a professora convida diversos alunos a apresentarem as suas resoluções, suscitando o surgimento de uma variedade de representações e as suas intervenções são sobretudo de apoiar/guiar. No terceiro episódio, a professora lança dois desafios aos alunos – compararem as resoluções baseadas em diferentes representações e encontrarem o erro na resolução de um aluno – e, na parte final, promove um momento de negociação do significado de "quinta parte" que envolve sobretudo interpretação – noção que está presente desde o princípio mas que nem todos os alunos parecem compreender completamente. Finalmente, no quarto episódio, a professora lança o desafio aos alunos de formularem uma generalização relativa à multiplicação de uma fração por um número natural, o que, sustentado por ações de apoiar/guiar, nomeadamente redizendo as suas contribuições, conduz os alunos à generalização pretendida, primeiro numa forma simples (para frações unitárias) e depois numa forma mais geral (para quaisquer frações). Nestes episódios importa destacar sobretudo dois aspetos: o modo como a professora promove o surgimento de uma situação de desacordo (tal como sugere Wood, 1999) e explora essa situação bem como os desafios que coloca aos alunos ao pedir-lhes diversas justificações e, por fim, uma generalização.

Os episódios analisados mostram momentos produtivos de trabalho que decorrem da abordagem exploratória seguida (Ponte, 2005). Na verdade, os alunos não tinham como resolver de uma forma imediata a questão proposta. Assim, tinham de recorrer aos seus conhecimentos anteriores relativos ao significado de fração. De notar também, que para além do tipo de tarefa é decisivo o tipo de comunicação promovida pela professora, marcada pelo incentivo à participação dos alunos, num registo essencialmente dialógico, colocando-lhes questões, valorizando as suas contribuições, redizendo as suas intervenções para os ajudar a melhorar a sua linguagem matemática e estabelecendo em momentos apropriados situações de negociação de significados.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia através de bolsas atribuídas a Marisa Quaresma (SFRH/BD/97702/2013) e Joana Mata-Pereira (SFRH/BD/94928/2013).

Referências bibliográficas

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, NJ: Sage.

Menezes, L., Tomás-Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de Matemática. In J.P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 139-168). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Henriques, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do ensino básico e do ensino superior. *Praxis Educativa*, *7*(2), 355-377.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2014). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2014). Representações e processos de raciocínio na comparação e ordenação de números racionais numa abordagem exploratória. *BOLEMA*, *28*(50), 1464-1484.

Potari, D., & Jaworski, B. (2002). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 351-380.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*, 313-340.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 171-191.

MÚLTIPLAS ABORDAGENS, MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES: UM CONTRIBUTO PARA INCREMENTAR A RELEVÂNCIA DA REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA

Helena Rocha

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

hcr@fct.unl.pt

Resumo: A tecnologia e o impacto que esta pode ter sobre as diferentes representações utilizadas e, em particular, sobre a representação algébrica são o foco deste artigo. Procura-se assim compreender como é que o professor enquadra a representação algébrica no trabalho em sala de aula e como a procura tornar relevante para os alunos num contexto de utilização da tecnologia. As conclusões alcançadas apontam para a opção por uma estreita articulação entre as representações algébrica e gráfica e para uma criteriosa escolha de tarefas, envolvendo múltiplas abordagens, onde a representação algébrica vem disponibilizar informação fundamental e tendencialmente inacessível a partir de outras representações.

Palavras-chave: diferentes representações; tecnologia; funções.

Introdução

A tecnologia é frequentemente reconhecida pelo seu potencial para o ensino e aprendizagem da Matemática. São em particular bastante valorizadas as possibilidades que esta oferece para proporcionar aos alunos a realização de um trabalho de natureza investigativa ou exploratória. Os alunos passam a poder experimentar diferentes relações matemáticas, reflectindo sobre elas enquanto procuram identificar regularidades e formular conjeturas. A facilidade e rapidez com que se torna possível observar muitos casos de determinada situação vêm, contudo, trazer a convicção quanto à veracidade da conjetura formulada e potenciar um sentimento de que nada mais é necessário para estarmos certos dela. Também a acessibilidade e simplicidade aparente da representação gráfica vem tornar o analítico em algo contornável e cuja necessidade passa a ser possível questionar. O domínio do cálculo, que numa abordagem sem tecnologia era muitas vezes a única opção possível, converte-se assim em algo dispensável. Passa a ser possível questionar o interesse de aprender e ensinar determinadas manipulações algébricas, bem como o nível de fluidez e treino que deve ser exigido aos alunos relativamente a estas. São também inevitáveis as questões em torno da forma como o professor pode mostrar aos seus alunos o interesse e a importância que a representação algébrica e a manipulação de expressões algébricas continuam a ter atualmente num contexto onde o acesso à tecnologia é uma realidade. Neste artigo abordo estas questões, procurando compreender, no âmbito do estudo das funções com recurso à calculadora gráfica:

- Como é que o professor enquadra a representação algébrica no trabalho da aula;
- Como é que o professor procura tornar relevante para os alunos o trabalho algébrico.

Quadro teórico

Uma das caraterísticas da calculadora gráfica é permitir aceder a múltiplas representações (Heid, 1995; Kaput, 1992), o que torna possível estabelecer ou reforçar ligações de uma forma que não seria possível sem o apoio da tecnologia (Cavanagh & Mitchelmore, 2003), articulando as representações numérica ou tabular, simbólica ou algébrica e gráfica (Goos & Benninson, 2008) e potenciando o desenvolvimento de uma melhor compreensão das funções, da noção de variável e da capacidade de resolver problemas (Bardini, Pierce & Stacey, 2004; Burril, 2008). Como refere Kaput (1989), a conexão entre diferentes representações cria uma visão global, que é mais do que a junção do conhecimento relativo a cada uma das representações e a tecnologia propícia uma exploração plena das abordagens numérica e gráfica de uma forma que até então não era possível, favorecendo assim uma abordagem integrada das diferentes representações e, consequentemente, o desenvolvimento de uma compreensão mais profunda. O recurso a múltiplas representações tem assim o potencial de tornar a aprendizagem significativa e efetiva (Ford, 2008).

As três representações disponibilizadas pela calculadora gráfica e usualmente utilizadas no estudo das funções têm, no entanto, caraterísticas e potencialidades diferentes, como referem Friedlander e Tabach (2001). Segundo estes autores, a representação numérica permite aos alunos o recurso a objetos familiares para demonstrar relações e analisar casos específicos. Trata-se, no entanto, de uma representação que carece de generalidade, o que pode levar a que determinados aspetos importantes não sejam detetados ou resultar num foco excessivo em casos concretos. Como tal, a sua utilidade é, por vezes, bastante limitada.

Por seu turno, a representação gráfica proporciona uma representação visual, apresentando um conjunto de casos específicos mais vasto e carateriza-se por permitir uma utilização que transcende os conhecimentos algébricos dos alunos, uma vez que a abordagem gráfica é mais universal que a algébrica, tornando possível encontrar soluções quando não se conhece uma abordagem analítica ou mesmo quando esta não existe (Friedlander & Tabach, 2001) (por exemplo, encontrar os zeros duma função polinomial independentemente do grau do respetivo polinómio). Sendo os gráficos uma representação mais intuitiva, as soluções obtidas por esta via podem, contudo, carecer de exatidão e sofrer a influência de fatores externos como os efeitos da escala utilizada sobre a interpretação que é feita (que podem mesmo ocultar, por exemplo, a existência de um zero). À semelhança do que sucede com a representação numérica também na representação gráfica apenas uma parte do domínio está visível (embora uma parte tendencialmente mais ampla), pelo que a utilidade desta representação depende também muito das circunstâncias.

Já a representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de regularidades e modelos, sendo frequentemente a manipulação algébrica o caminho mais eficaz para formular generalizações e resultados (Friedlander & Tabach, 2001). Ainda assim, o recurso exclusivo a esta representação pode dificultar a compreensão das noções matemáticas e causar dificuldades nas interpretações dos alunos. Esta dificuldade é, aliás, apontada por Quesada e Dunlap (2008), que sugerem o recurso às capacidades numéricas e gráficas das calculadoras como forma de, tirando partido das diferentes representações, conseguir uma introdução dos conceitos mais próxima daquela como foram desenvolvidos, o que, consequentemente, poderá facilitar a sua compreensão por parte dos alunos. É também nesta perspetiva que Coulombe e Berenson (2001) referem o contributo que a fluência com múltiplas representações de relações matemáticas pode dar ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Com efeito, não só é frequente que as ideias matemáticas complexas (como é o caso da noção de função) não possam ser expressas recorrendo exclusivamente a uma representação, como é ainda mais comum que não seja fácil compreendê-las dessa forma (Asp, Dowsey & Stacey, 1993). O recurso a diferentes representações permite ao aluno compreender numa outra forma aquilo que não era possível compreender na representação inicial ou, como diz Kaput (1992), é fundamental para a compreensão do conceito. Também Ford (2008) realça que é essa a importância de trabalhar com múltiplas representações. Não se trata de recorrer a elas simplesmente porque a tecnologia facilita o acesso, mas sim de o fazer porque é necessário para a compreensão dos alunos.

Apesar da importância de trabalhar com diferentes representações e desse trabalho ser muito facilitado pela utilização da calculadora gráfica, os alunos têm dificuldade em fazê-lo (Billings & Klanderman, 2000; Kieran, 2007; Ramos & Raposo, 2008; Silva, 2009) e os professores não têm dedicado a necessária atenção à flexibilidade necessária para passar de uma representação para outra e para articular a informação veiculada por estas (Even, 1998). Com efeito, embora exista alguma preocupação, por parte dos professores, em articular e equilibrar o recurso a diferentes representações, Molenje e Doerr (2006) constataram que o recurso às representações algébrica e gráfica são dominantes relativamente à representação numérica. Além disso, quando os professores efetivamente recorrem às três representações tende a existir um padrão na forma como o fazem. Assim, alguns dos professores envolvidos no estudo tendem a recorrer primeiro à representação algébrica, passando depois para a gráfica e, por fim, para a numérica, enquanto outros tendem a passar da representação algébrica para a numérica e só depois para a gráfica. Esta sequência rígida adotada pelo professor tende a ser copiada pelos alunos (Barling, 1994; Rocha, 2000) que, consequentemente, veem dificultado o desenvolvimento da desejada fluência entre as diferentes representações.

A importância da fluência representacional, segundo Zbiek *et al*. (2007), reside na sua aptidão para proporcionar o desenvolvimento da compreensão matemática, razão pela qual esta não se restringe à capacidade de passar de uma representação para outra, transportando o conhecimento de uma entidade para a outra e articulando-o com o novo conhecimento disponibilizado pela nova representação. A fluência representacional envolve também o conhecimento de qual a representação mais adequada para, em determinadas circunstâncias, ilustrar determinado conceito ou explicar determinada noção e de como as interligar de formas relevantes para fundamentar determinada afirmação. Trata-se assim não só de um conhecimento fundamental para o professor, mas também de um conhecimento com implicações sobre as aprendizagens dos alunos, em particular, quando a fluência entre as diferentes representações é alvo de alguns condicionalismos ou restrições. Como referem Almeida e Oliveira (2009), o trabalho em torno das diferentes representações com uma forte ênfase na conversão entre estas é fundamental para a compreensão do tema pelos alunos e para evitar a compartimentação do conhecimento. É assim importante, como reconhecem Molenje e Doerr (2006), que o professor tenha consciência das opções que faz a este nível.

Metodologia

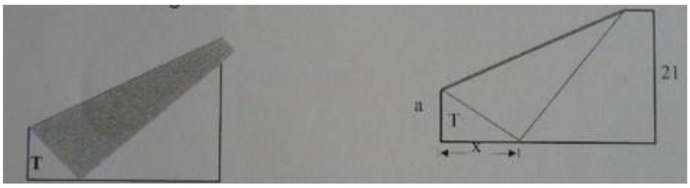
A investigação que aqui se apresenta faz parte de um estudo mais abrangente e adota uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa, envolvendo a realização de um estudo de caso sobre a professora Teresa. A recolha de dados envolveu a realização de entrevistas, a observação de aulas e recolha documental. Foram realizadas entrevistas semiestruturadas antes e depois de cada aula observada, com a intenção de conhecer o que preparara e as razões base dessas opções (entrevistas pré-aula) e o balanço que fazia da forma como a aula decorrera (entrevistas pós-aula). Tanto as entrevistas como as aulas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas. Foi ainda elaborado um diário de bordo das aulas observadas e recolhidos documentos como fichas de trabalho e outros materiais disponibilizados pela professora aos alunos. A análise de dados revestiu-se essencialmente de um carácter descritivo e interpretativo.

Teresa é uma professora com mais de 30 anos de experiência profissional, que no decorrer deste estudo lecionava o tema *Funções* na disciplina de Matemática A a uma turma do 10.º ano de escolaridade de uma escola da região da Grande Lisboa e que possui uma longa experiência de utilização de calculadoras gráficas com alunos e um profundo conhecimento do funcionamento da máquina.

Resultados

Nesta secção apresento uma das tarefas onde a professora conscientemente procura enfatizar junto dos alunos a importância da abordagem algébrica, recorrendo para o efeito a propostas de trabalho que requerem explicitamente duas abordagens diferentes.

Esta é uma tarefa que engloba duas partes distintas, com realização prevista para duas aulas de 90 minutos. O problema proposto, e que estrutura toda a tarefa, é o seguinte:

> Dobra uma folha de papel de modo a que o canto superior esquerdo toque o lado inferior da folha tal como mostra a figura.
>
> 
>
>
> Qual o triângulo (T) de maior área formado no canto inferior esquerdo da folha por efeito desta dobragem?
>
> (considera uma folha de dimensões 29 cm × 21 cm)

A proposta de trabalho apresentada aos alunos vai, contudo, para além do enunciado do problema, sugerindo duas abordagens completamente diferentes de resolução, que os alunos devem implementar. A primeira dessas abordagens, que constitui a primeira parte da tarefa, é de natureza experimental envolvendo a recolha de dados e o seu tratamento com a calculadora gráfica, que assume aqui um papel central. É assim pedido aos alunos que recolham dados reais, recorram à tecnologia para encontrar uma função que se adeqúe a esses dados e a utilizem para encontrar a resposta ao problema. A primeira parte da tarefa, tal como consta da ficha de trabalho entregue aos alunos, é a seguinte:

> Parte I
>
> Experimenta, recolhe e regista os dados da base (x) e da altura (a) do triângulo T:

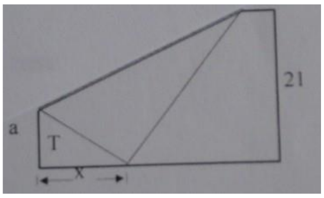
Base (x)	0	2	4	6			
Altura (a)							
Área							

> 1. Representa graficamente os dados.
> 2. Qual te parece ser o triângulo de área máxima?
> 3. Procura uma função que se ajuste ao conjunto de dados.
> 4. De acordo com essa função qual é o triângulo de área máxima?

Na segunda parte desta tarefa, é pedida a resolução do mesmo problema, igualmente com o apoio da calculadora gráfica, mas agora sem recurso a trabalho de natureza experimental:

Parte II

Considera o esquema, em que *a* representa a altura do triângulo T e x a base.



1. Exprime *a* em função de x.
2. Mostra que a área do triângulo é dada, em função de x, por
   $A = \frac{x(21-x)(21+x)}{84}$, com $x \in [0, 21]$
3. Com auxílio da calculadora estuda o máximo.

No final é ainda deixado um desafio aos alunos, relativamente a eventuais diferenças quanto ao resultado alcançado se a folha, em vez de ser considerada na horizontal, for na vertical.

O grande objetivo de Teresa com esta tarefa é proporcionar aos alunos a oportunidade de trabalhar com dados reais recolhidos pelos próprios alunos. Na sua opinião este é um aspeto muito importante, pois as funções ganham outra relevância para os alunos quando estes as veem como algo que permite, efetivamente, modelar situações reais com que contatam diretamente:

> Prof- Eu podia ter orientado a ficha para ser logo analítico, para a calculadora aparecer só como exploração da função, podia ter orientado assim. (…) Mas é também para verem ali a função como modelo de uma situação. Acho que, apesar de tudo, vê-se melhor porque eles experimentaram, recolheram os dados e tal. Percebem que se eu fizer depois a representação desses dados, é possível procurar no fundo uma função que se ajuste a este conjunto de pontos. (…) Eu acho que esta parte experimental lhes dá uma intuição para perceberem o problema, acho que dá. Pronto, eles mediram, fizeram, têm ali os resultados. Acho que é diferente ter um conjunto de valores que é o resultado dos dados que eles recolheram e depois perceberem que a função passa de facto por aqueles pontos. Acho que dá… dá mais a ideia que se está a descrever a situação, de que se não fizessem. (…) Acho que não é concebível que não se faça nenhum problema em que haja recolha. Pronto. Pelo menos algumas tarefas, acho que têm que ser feitas com dados. (pós-aula 13)

Mas Teresa também pretende incentivar a articulação entre o gráfico e o algébrico, procurando sensibilizar os alunos para a importância que este último pode ter. Na sua opinião os alunos têm geralmente uma preferência pela abordagem gráfica em detrimento da abordagem algébrica, considerando que esta última é apenas cálculo sem grande utilidade. Neste caso, contudo, como apresento mais adiante, a abordagem algébrica vem oferecer um contributo importante para fundamentar as opções e as conclusões alcançadas na abordagem de carácter experimental e de suporte essencialmente gráfico:

> Prof- Mas a intenção também é um bocadinho essa. É para perceberem que há coisas em que não é preciso irem ao cálculo, mas há outras em que o cálculo tem alguma utilidade. E este cálculo ainda é difícil para eles, não é? Mas eu prefiro ir trabalhando assim o cálculo, que é para eles perceberem que tem alguma vantagem fazer algum cálculo… (pré-aula)

Teresa começa por apresentar a tarefa, dando depois algumas indicações relativamente ao ponto até onde espera que todos consigam chegar, fazendo também referência ao que poderá ficar para a próxima aula e ao prazo e forma que terão para entregar o trabalho realizado. Enfatiza o facto de este trabalho envolver uma parte experimental e realça a importância de se organizarem para conseguirem ser eficientes e não desperdiçarem tempo de que poderão precisar depois para concluir o trabalho. Neste sentido, pouco depois dos alunos começarem a trabalhar, e perante a forma, que considera lenta, como o estão a fazer, opta por dar algumas sugestões, nomeadamente relativamente à construção de uma escala no lado mais longo da folha que estão a utilizar para recolher os dados:

> Prof- Sejam organizados. Vou dar umas dicas para serem mais rápidos aqui nesta parte. Podem marcar a folha com a régua, de dois em dois centímetros, porque depois é só deslocarem a folha para a próxima marca que fizeram. Agora, quando fazem isto, depois têm que vincar a dobra da folha porque se não vincarem depois não conseguem ver exatamente esta altura, certo? Portanto, o que é que têm que medir? Têm que medir isto e têm que medir isto (exemplifica com uma folha). Mas como há aí na tabela uma sugestão para fazerem de dois em dois centímetros, se quiserem podem fazer outros valores, mas de dois em dois parece-me bem, eu sugeria que marcassem logo na folha 2, 4, 6, 8, para ser mais rápido. Vá! (aula 13)

O trabalho prossegue com a professora a circular entre os alunos e a apoiar o seu trabalho. Na segunda aula em que os alunos trabalharam nesta tarefa, Teresa começa por fazer um ponto da situação do que já foi feito. Apoia-se concretamente nos dados recolhidos por um dos pares de alunos, começa por questionar o facto de os alunos considerarem um primeiro triângulo de base e altura nula e prossegue até à conclusão final do problema. É assim estabelecido que o triângulo de área máxima será o de base igual a 12 cm e altura igual a 7 cm. Uma conclusão que se adequa aos dados recolhidos por este grupo de alunos, mas que parece coincidir com o resultado alcançado pelos demais grupos. O trabalho prossegue, sendo a segunda parte da ficha realizada mais tarde no quadro por um aluno, que não se limita a apresentar os cálculos que efetuou, explicando também aos colegas o que fez e respondendo às dúvidas que estes lhe colocam.

A análise do problema termina com a comparação entre os valores encontrados para as dimensões do triângulo segundo as abordagens efetuadas nas duas partes e que diferem apenas de uma décima relativamente à medida da base do triângulo inicialmente encontrada.

A calculadora gráfica e a reduzida experiência de utilização das funcionalidades associadas ao trabalho com dados motivaram alguns pedidos de ajuda, mas não se revelaram propriamente problemáticas, contrariando assim, de certo modo, os receios de Teresa. O que já criou algumas situações mais delicadas foi a forma pouco cuidada como muitos alunos tenderam a efetuar as medições requeridas pela recolha de dados, embora inicialmente esta fosse mais sentida como uma dificuldade pela professora do que pelos alunos. Os alunos não estão muito habituados a fazer recolha de dados e, em particular, a fazer medições. Talvez por isso, alguns deles não valorizam muito o rigor desse trabalho ou optam simplesmente por arredondar os valores que encontram, não parecendo pensar nas repercussões que tal terá sobre o restante trabalho. Teresa tem então que ir intervindo junto destes grupos, procurando consciencializá-los da importância de serem tão exatos quanto possível. No entanto, nalguns casos a professora acha que a opção por valores inteiros no registo das medições não é uma mera imprecisão de registo ou um recurso menos adequado a arredondamentos. Na sua opinião, alguns alunos foram de certo modo influenciados pelo facto de serem inteiros os valores considerados para a base do triângulo, como ilustra a intervenção que faz junto de um dos grupos de alunos:

> Prof- Eh, não é 10. Essa aproximação…
> Aluno- Ah! 10.4.
> Prof- Pois, porque aí não é como aqui (aponta o lado mais comprido da folha). Aqui são vocês que estão a definir que vão fazer de dois em dois. Isso não é um arredondamento. Agora aí não. Têm que medir mesmo o que dá. Não pode ser 10. Têm que pôr as vírgulas. (aula 13)

O rigor da recolha de dados vai depois afetar a facilidade que os alunos terão ou não na procura de uma função adequada. E, para muitos, perceber, de entre os vários tipos de funções disponibilizados pela calculadora, qual o mais adequado para os seus dados revela-se algo problemático e “como sabemos qual a melhor função?” torna-se numa pergunta recorrente. Para alguns, uma certa imprecisão na medição durante a recolha de dados traduz-se agora na impossibilidade de encontrar uma função que efetivamente passe por todos os pontos pretendidos.

> Aluno- Oh stora, nós pusemos a quadrática, a cúbica…
> Prof- Pronto, podem fazer os registos das duas, se quiserem.
> Aluno- Não, é que era para ver se ficava em cima deste ponto, mas fica sempre acima. Deixamos assim?
> Prof- Esse ponto é um ponto experimental, quer dizer que ou mediram mal ou a curva não se ajusta muito bem. Como nós estamos a recolher dados experimentais… há erros de leitura.
> Aluno- Pois, é que há sempre, pode haver um engano na medida. E podemos pôr esta?
> Prof- Sim, deixam ficar assim. (aula 13)

No entanto, para diversos alunos, o aspeto visual da distribuição dos pontos no referencial leva-os a pensar numa função quadrática ou quártica e nunca numa função cúbica:

> Aluno- Ora, as áreas vão aumentando e depois começam a descer… com este aspeto assim. Isto é uma parábola com a concavidade virada para baixo e, portanto, vou escolher uma função quadrática (o aluno pede à calculadora gráfica a expressão da função e observa o seu gráfico sobre a nuvem de pontos). Uhm… não está muito bem. Ali devia estar mais acima… Só se… também pode ser uma de grau 4. É isso, não é?
> Prof- Não sei, vê lá.
> Aluno- Então… quártica, não é? É isto? Deixa ver. (aula 13)

Este é um aspeto interessante que o problema faz surgir e que Teresa deixa no ar até ao final da segunda parte da tarefa, altura em que os alunos já sabem que a função em causa é uma cúbica. Aproveita então a ocasião para lembrar que a calculadora gráfica apenas nos mostra o gráfico na janela de visualização e que nada nos diz relativamente ao comportamento da função fora dessa região.

Na segunda parte da tarefa, as questões têm caraterísticas bastante diferentes, mas os alunos precisam de analisar toda a situação para articularem devidamente a informação disponível e assim conseguirem estabelecer relações entre as diferentes variáveis envolvidas e encontrar a expressão da área correspondente ao triângulo em questão.

A maior dificuldade foi encontrar a expressão analítica da função e, em particular, exprimir *a* em função de x. Para Teresa esta dificuldade teve origem numa leitura parcial da figura, que impossibilitou o encontrar de uma relação e a consequente redução das variáveis envolvidas:

> Prof- Eu acho que pelo facto de a folha estar dobrada, muitos não viram logo que aquilo podia ser o 21-x e, portanto, andaram ali com três variáveis. (pós-aula 14)

Esta situação leva-a não só a tentar apoiar cada um dos alunos que evidenciou dificuldades, mas também a ressaltar junto de toda a turma alguns aspetos que considera fundamentais quando se resolvem problemas:

> Prof- Ao resolver um problema temos que ter atenção sempre às medidas que temos e às que estão relacionadas umas com as outras. (…) Isto acontece aqui com as medidas, aconteceu no problema que estivemos a resolver na outra aula, aquele do paralelogramo dentro do rectângulo, que tratava de decompor, não as medidas, os comprimentos, mas as próprias figuras. Portanto, vocês têm que olhar para as figuras sempre assim. Ver, o que é que eu conheço aqui? A figura está decomposta em que outras mais simples? Nós no 1.º período chamámos imenso a atenção para a importância dos triângulos. Em muitas figuras aparecem triângulos, nas decomposições. Paralelogramos também se podem decompor em triângulos e, portanto, temos que olhar para a figura e ver tudo o que nós conseguimos saber e não começar logo a fazer coisas ao acaso. (aula 14)

Conclusão

Esta tarefa consistia basicamente na resolução de um problema com base em duas abordagens diferentes. Na primeira parte da tarefa os alunos deviam adotar uma estratégia de caráter experimental, recolhendo diretamente os dados e apoiando-se depois na calculadora gráfica para encontrar a expressão de uma função que se adequasse aos dados. Na segunda parte seria seguida uma via com apoio na interpretação da informação disponibilizada e em trabalho mais algébrico que levaria à expressão da função correspondente à situação, após o que o recurso à calculadora gráfica permitiria encontrar a resposta ao problema. A proposta de trabalho previa assim a adoção das duas abordagens e, no final, de algum modo o confronto entre estas. Entre outros aspetos estava envolvido o confronto entre um trabalho de caráter aproximado e outro de caráter exato.

As representações gráfica e algébrica surgem em total articulação nesta tarefa. Depois de recolhidos os dados e introduzidos na calculadora gráfica, é necessário encontrar a expressão de uma função que se lhe adeqúe. Para tal é preciso olhar para a nuvem de dispersão de pontos e pensar qual o tipo de função em questão. Isto implica uma estreita articulação entre o gráfico e o analítico e, neste caso concreto, requer a capacidade de ver para além do conjunto de pontos representado. Algo que, como já referi, não foi fácil para os alunos, pois a associação que fizeram não teve em conta que a função poderia ter um comportamento bastante diferente fora daquela janela de visualização. Esta é, no entanto, uma aprendizagem rica do ponto de vista matemático e que traz para primeiro plano aspetos que num contexto isento de tecnologia tendem a ficar para além do horizonte de trabalho dos alunos. Mas é o trabalho em torno da representação algébrica que conduz à expressão da função que modela a situação. É portanto a abordagem algébrica que permite alcançar informação importante para refletir em torno da abordagem gráfica e alargar o horizonte de aprendizagens matemáticas de modo a conseguir utilizações mais consistentes em futuras abordagens gráficas.

A abordagem algébrica surge assim em articulação com a abordagem gráfica, em situações em que vem acrescentar algo ao que a abordagem gráfica já permitira alcançar (ao nível de resultado e/ou de compreensão da situação). Esta articulação passa pela realização de tarefas com base nas duas abordagens (algébrica e gráfica), decorrendo a relevância sentida pelos alunos relativamente à representação algébrica da informação adicional ou do novo olhar que esta representação vem permitir relativamente à representação gráfica.

Em tarefas criteriosamente escolhidas a opção pela adoção de múltiplas abordagens parece, perante os elementos recolhidos neste estudo, ser suficientemente rica para encerrar o potencial de mostrar aos alunos a importância de abordagens algébricas e a forma como estas podem complementar outras abordagens mesmo em contextos onde a tecnologia está disponível.

Agradecimentos

À FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho (PTDC/MHC-FIL/5363/2012)

Referências bibliográficas

Almeida, A., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem de funções no 11.º ano. *Quadrante*, *XVIII*(1/2), 87-118.

Asp, G., Dowsey, J., & Stacey, K. (1993). Linear and quadratic graphs with the aid of technology. In B. Atweth, C. Kanes, M. Carss & G. Booker (Eds.), *Contexts in mathematics education* (pp. 51-66). Brisbane, Australia: MERGA.

Bardini, C., Pierce, R., & Stacey, K. (2004). Teaching linear functions in context with graphic calculators: students' responses and the impact of the approach on their use of algebraic symbols. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*(3), 353-376.

Barling, C. (1994). Graphical calculators: potential vs practice. In T. Andrews & B. Kissane (Eds.), *Graphics calculators in the classroom* (pp. 123-126). Adelaide: AAMT.

Billings, E., & Klanderman, D. (2000). Graphical representations of speed: obstacles preservice K-8 teachers experience. *School Science and Mathematics*, *100*(8), 440-450.

Burril, G. (2008). The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics. In *Proceedings of ICME 11*. Monterrey, México: ICME. Acedido em http://www.icme11.org/tsg/show/23.

Cavanagh, M., & Mitchelmore, M. (2003). Graphics calculators in the learning of mathematics: teacher understandings and classroom practices. *Mathematics Teacher Education and Development, 5*, 3-18.

Coulombe, W., & Berenson, S. (2001). Representations of patterns and functions: tools for learning. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 166-172). Reston: NCTM.

Even, R. (1998). Factors involved in linking representations of functions. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17*(1), 105-121.

Ford, S. (2008). *The effect of graphing calculators and a three-core representation curriculum on college students' learning of exponential and logarithmic functions*. Tese de doutoramento, North Carolina State University.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston: NCTM.

Goos, M., & Bennison, A. (2008). Surveying the technology landscape: teachers' use of technology in secondary mathematics classrooms. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(3), 102-130.

Heid, M. (1995). *Algebra in a technological world*. Reston: NCTM.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston: NCTM.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York, NY: Macmillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: IAP.

Molenje, L., & Doerr, H. (2006). High school mathematics teachers' use of multiple representations when teaching functions in graphing calculator environments. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Quesada, A., & Dunlap, L. (2008). The preparation of secondary pre- and inservice mathematics teachers on the integration of technology in topics foundational to calculus. In W-C. Yang, M. Majewski, T. Alwis & K. Khairine (Eds.), *Proceedings of 13th Asian Technology Conference in Mathematics*. Bangkok: ATCM.

Ramos, C., & Raposo, L. (2008). A calculadora gráfica e as representações matemáticas: uma experiência. In A. Canavarro, D. Moreira & M. Rocha (Eds.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 196-209). Lisboa: SEM-SPCE.

Rocha, H. (2000). *A utilização da calculadora gráfica por alunos do ensino secundário*. Tese de mestrado. Lisboa: APM.

Silva, C. (2009). *Funções quadráticas no 10.º ano, usando a calculadora gráfica*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.

Zbiek, R., Heid, M., Blume, G., & Dick, T. (2007). Research on technology in mathematics education. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1169-1207). Charlotte, NC: NCTM.

AS REPRESENTAÇÕES MATEMÁTICAS NOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES: ANÁLISE DE TRÊS MANUAIS ESCOLARES DE ÉPOCAS DIFERENTES

Isabel Teixeira
Agrupamento de Escolas de Tarouca
imdbt1@gmail.com

Cecília Costa
Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, CIDTFF−Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (LabDCT da UTAD)
mcosta@utad.pt

Paula Catarino
Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, CIDTFF−Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (LabDCT da UTAD)
pcatarin@utad.pt

Maria Nascimento
Departamento de Matemática, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, CIDTFF−Centro de Investigação Didática e Tecnologia na Formação de Formadores (LabDCT da UTAD)
mmsn@utad.pt

Resumo: Neste estudo identificamos as representações matemáticas existentes na primeira abordagem aos sistemas de equações feita em três manuais escolares portugueses de épocas diferentes e destacamos as que permanecem de uns para os outros. Recorremos à análise de conteúdo dos correspondentes capítulos tendo como foco as representações matemáticas utilizadas. Verificamos a existência de representações ativas, icónicas e simbólicas, embora os manuais mais antigos tenham menos representações icónicas. Este estudo insere-se num mais profundo que investiga aspetos que perpassam na prática de ensino de uma cadeia geracional de professores de Matemática. Os três manuais analisados referem-se aos usados por cada um dos professores da cadeia num ano específico da sua prática.
Palavras-chave: Ensino da Álgebra Linear, Sistemas de Equações, Manuais Escolares, Representações Matemáticas

Introdução

Esta investigação sobre representações matemáticas é parte de uma mais ampla na qual estudamos diversos aspetos que perpassam na prática de ensino de uma cadeia geracional de professores de matemática (CGPM). CGPM significa que o professor I da cadeia lecionou a disciplina de Matemática ao professor II o qual, por sua vez, ensinou ao professor III, concretamente no que respeita ao tema de sistemas de equações. Os professores da cadeia geracional lecionaram este conteúdo em diferentes épocas, tendo por base diferentes programas e usando diferentes manuais escolares. Conscientes das muitas mudanças sofridas, procuramos o que perdurou no tempo.

Tanto quanto sabemos, conhece-se pouco sobre o modo como os sistemas de equações têm sido abordados ao longo das várias gerações de professores de Matemática, em particular nos manuais escolares usados. Partilhamos a ideia de que "Os manuais escolares são portadores de uma memória, de um conhecimento e de um projecto." (Teixeira, 2010, p. 309). No entanto sobre o modo como é feita a abordagem de outros conceitos matemáticos em manuais escolares, em Portugal são de referir os estudos (Ponte, 2004) sobre equações do 1.º grau, (Ponte, Salvado, Fraga, Santos & Mosquito, 2007) sobre equações do 2.º grau, (Aires, 2006), (Aires & Sierra Vázquéz, 2008) sobre o conceito de derivada, entre outros.

Seguindo a sugestão de Ponte (2004) relativa ao interesse em efetuar estudos análogos no que diz respeito a outros conteúdos matemáticos, dada a sua relevância escolhemos os sistemas de equações para efetuar um estudo idêntico. Os sistemas de equações constituem um tópico de ensino da álgebra escolar, ao longo de gerações de professores e com aplicação prática em várias áreas do saber.

Neste seguimento, o estudo aqui apresentado tem como objetivo caracterizar as representações matemáticas utilizadas pelos autores dos manuais escolares referidos no tema sistemas de equações. Relacionadas com o objetivo do estudo, formulamos as seguintes questões de investigação:

- Que representações matemáticas utilizam os autores dos manuais escolares quando abordam o tema sistemas de equações?
- Que representações matemáticas são comuns aos manuais escolares?

Para atingir este objetivo e responder às questões propostas, procedemos à análise dos três manuais recorrendo à metodologia indicada em (Vázquez, Astudillo & Esteban, 1999, 2003) tendo para este estudo selecionado apenas os aspetos de grafismo e didáticos que nos permitem identificar as representações matemáticas usadas pelos autores dos manuais.

Fundamentação teórica

Segundo Duval (2011) os alunos enfrentam dificuldades para conceitualizar objetos matemáticos, visto que esses objetos só são acessíveis por meio de suas representações. Por este facto, as representações matemáticas desempenham um papel relevante no ensino e consequentemente na aprendizagem da álgebra escolar e em particular nos sistemas de equações. Também enfatiza a importância da diversidade de representações matemáticas e a articulação entre elas nas atividades matemáticas (Duval, 2003).

Como se introduz na página deste encontro

> "As representações matemáticas constituem um importante meio para o desenvolvimento de uma aprendizagem matemática com compreensão, uma vez que podem potenciar o acesso de todos os alunos a ideias abstratas, à linguagem e ao raciocínio matemáticos." (EIEM, 2015)

Palavras escritas, números, gráficos cartesianos, equações algébricas, entre outos, são exemplos de representações matemáticas externas (e.g. (Goldin, 2002)). As configurações externas ao indivíduo (aluno ou professor) e geralmente observáveis no ambiente imediato, como objetos da vida real, palavras faladas ou escritas, fórmulas figuras, gráficos, figuras e gráficos. Do mesmo modo, definindo x como o número de pacotes de gelados que uma criança comeu, $x + 2$ será esse número de gelados mais dois gelados e $2x$ será o dobro dos gelados comidos. Contudo, se x for a idade do pai da criança, ou se 2 for o preço de um jogo de sorte, o significado das representações altera-se (Goldin, 2002, p. 214). Tal como referem Canavarro e Pinto (2012)

> "Aquilo que é representado pode variar de acordo com o contexto ou com o próprio uso da representação. Além disso, as representações não podem ser entendidas de modo isolado. Os sistemas externos de representação encontram-se estruturados pelas convenções que lhes servem de base e que são definidas socialmente ou por uma comunidade." (pp. 53-54)

Por exemplo, quem estudou as equações algébricas sabe quais as convenções e as regras para as resolverem, pois estas tornaram-se numa norma entre as pessoas que o fazem (Goldin, 2002).

Como referenciam Canavarro e Pinto (2012), Bruner (1999) apresenta três tipos de representações: i) representações ativas, relativas ao conjunto de ações adequadas para referir ou alcançar certo resultado (por exemplo, objetos ou acontecimentos da vida real, material didático, como o tangram ou ábaco); ii) representações icónicas, relativas ao conjunto de imagens ou gráficos que sucintamente se referem a uma certa ideia ou processo (por exemplo, figuras, desenhos); iii) representações simbólicas, relativas ao conjunto de proposições simbólicas ou lógicas extraídas de um sistema simbólico regido por regras ou leis para a formação e transformação de proposições (por exemplo, os algarismos, sinais de operações, símbolos para as variáveis, gráficos ou tabelas).

Segundo Battaglioli (2008) é relevante a representação gráfica na resolução dos sistemas de equações uma vez que contribui para a sua visualização e a compreensão.

Para Duval (2003) os conceitos matemáticos, e em particular os sistemas de equações, só são acessíveis aos alunos através das suas representações matemáticas e o professor deve proporcionar diferentes representações dos sistemas de equações e a passagem de umas para as outras (Freitas & Abar, 2013). Machado (1996) destaca que devemos trabalhar nos sistemas de equações a passagem da representação algébrica para a gráfica e vice-versa.

Para Jordão e Bianchini (2014) o ensino dos sistemas de equações que favorece a conversão e o tratamento de representações matemáticas contribui para a compreensão e aprendizagem da resolução dos sistemas de equações. Destacam, ainda, a relevância do uso da representação algébrica e gráfica simultaneamente no sentido de melhorar a compreensão e a aprendizagem dos sistemas de equações por parte dos alunos.

Metodologia

A escolha dos três manuais escolares aqui analisados é justificada pelo contexto do estudo mais amplo atrás referido. Quando o professor I lecionou ao professor II usou o manual I; o manual usado pelo professor II quando lecionou ao III foi o manual II; e o professor III usou o manual III na primeira vez que lecionou sistemas de equações.

Estes são:

Manual I. Manual escolar usado pelo professor I quando o professor II foi seu aluno no ano letivo de 1967/1968. Trata-se do *Compêndio de Álgebra*, para o 2.º ciclo do ensino liceal, da autoria de J. Jorge G. Calado (Calado, 1965), professor do Liceu Normal de Pedro Nunes (conforme é explicitado na folha de rosto do compêndio), de 1965. Foi composto e impresso nas oficinas gráficas Bertrand (Lisboa), e a depositária era a Livraria Sá da Costa (Lisboa). Trata-se de livro único numerado (número 631) e autenticado pelo Ministério da Educação Nacional[24].

Manual II. Manual escolar usado pelo professor II quando o professor III foi seu aluno no ano letivo de 1989/1990. É o livro *Matemática*, para o 8.º ano de escolaridade, cujas autoras são Ana Luísa Correia, Célia Moreira Eusébio e Teresa Olga Albuquerque (Correia, Eusébio & Albuquerque, 1988). Foi editado pelas Edições Asa. A edição que nos interessa analisar, por ter sido a usada pelo professor II quando leccionou ao professor III, foi publicada em 1988 (2.ª edição)[25].

Manual III. Manual escolar usado pelo professor III quando lecionou pela 1.ª vez sistemas de equações no ano letivo de 1999/2000. Trata-se do manual escolar *Matemática 9,* para o 9.º ano de escolaridade, das autoras Maria Augusta Ferreira Neves e Maria Luísa Monteiro Faria (Neves & Faria, 1999). Foi publicado pela Porto Editora, em 1999. Na

[24] Aprovado oficialmente como livro único pelo Ministério da Educação Nacional (Diário do Governo, II Série, n.º 46 de 14-11-1965).
[25] Dep. Leg. 23139/1988/2ed/5000ex.

capa é explicitado que se trata do livro do aluno. A edição que nos interessa analisar é a 7.ª reimpressão da 1.ª edição[26].

Tomando como ponto de partida a metodologia utilizada por Sierra, González e López (2002) analisaremos segundo as três dimensões seguintes: conceptual, didático-cognitiva e fenomenológica. A análise conceptual refere-se ao modo como os sistemas de equações se definem e organizam ao longo do texto, às representações gráficas e simbólicas utilizadas, problemas e exercícios resolvidos ou propostos, exemplos e exercícios, representações gráficas e simbólicas, aspetos materiais. A análise didático-cognitiva refere-se à explicitação dos objetivos que os autores pretendem atingir com o modo como o aluno desenvolve certas capacidades cognitivas. A análise fenomenológica refere-se aos fenómenos que se propõem nas sequências de ensino que aparecem nos manuais escolares.

Assim, fizemos, para cada manual escolar, uma descrição geral do modo como o tema é abordado, uma referência à organização e grafismo, analisamos os aspetos didáticos, incluindo as teorias de ensino e de aprendizagem subjacentes e os elementos fenomenológicos. Desta análise, neste estudo focamo-nos apenas nos aspetos de grafismo e didáticos para identificar e caracterizar as representações matemáticas usadas pelos autores dos manuais.

Utilizaremos na caracterização das representações matemáticas na análise de manuais escolares a classificação de Bruner (1999) que como já referimos as classifica em i) representações ativas; ii) representações icónicas e iii) representações simbólicas. Também Canavarro e Pinto (2012) utilizou esta categorização para caracterizar as representações que os alunos criaram.

As representações matemáticas nos manuais I, II e III

De seguida vamos identificar representações matemáticas que os autores dos manuais escolares I, II e III utilizaram na abordagem dos sistemas de equações. Posteriormente fazemos a sua caracterização de acordo com a tipologia de Bruner (1999).

Organizamos a apresentação dos resultados e respetiva análise em duas partes, uma tendo em conta o grafismo e a outra aspetos didáticos. Consideramos o grafismo porque está associado a opções de comunicação escrita, em particular de detalhes matemáticos, como veremos. No que refere aos aspetos didáticos, organizamos a sua exposição de acordo com os tópicos principais identificados neste capítulo, a saber: atividade inicial (apenas existente no manual III); introdução aos sistemas de equações (existente nos três manuais); método de substituição (existente nos três manuais); outros métodos para resolução de sistemas (existente nos manuais I e III).

[26] Dep. Legal N.º 138517/99

Grafismo

Manual I. Este manual está escrito em página total, com tamanho de letra pequeno, espaçamento simples e organizado por parágrafos (figura 1). O texto é escrito com a cor preta surgindo palavras a negrito ou itálico. O tamanho da letra varia. O texto é escrito em linguagem natural complementada com linguagem simbólica matemática. Não existem imagens, à exceção de um gráfico na página 187. É ainda de referir a existência de retângulos a contornar a equação final que permite identificar o valor da incógnita (figura 1).

(b) ...... $\begin{cases} x = 4 - y \\ 4 - y + 3y = 2 \end{cases}$

que tem, sobre o sistema proposto, a vantagem de a 2.ª equação *só conter uma incógnita* — a incógnita y. Diz-se, então, que se *eliminou* a incógnita x.

Resolvendo agora esta equação, obteremos sucessivamente

$$-y + 3y = 2 - 4$$

donde

$$\boxed{y = -1}$$

Substituindo este valor de y na equação (1), resulta

$$x = 4 - (-1)$$

ou

$$\boxed{x = 5}$$

Figura 1: Imagem ilustrativa do grafismo do Manual I.

Apenas com base no grafismo, podemos afirmar que existem maioritariamente representações matemáticas simbólicas (entre outras as letras *x* e *y* para representar as incógnitas, o sinal de chaveta para a notação de sistema de equação) e algumas poucas representações icónicas (designadamente um gráfico, retângulos para destacar equações especiais e itálicos ou negritos para realçar definições, terminologia matemática, entre outras).

Manual II. Este manual está escrito em página total, com tamanho de letra pequeno, espaçamento simples. São usadas duas cores: preto e cor de laranja. A cor preta é usada no corpo do texto onde também aparecem palavras a negrito para destacar terminologia e nos exemplos de resolução de sistemas o texto é em tipo de letra manuscrito (figura 2). A cor laranja é usada para destacar definições através de uma moldura retangular e fazer ligeiros apontamentos (figura 2). Existe um esquema na página 32 para o procedimento a usar no método de substituição (figura 10) e não existem imagens.

$$\begin{cases} 3x = 2y - 14 \\ 2y - 14 - 4y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y - 14 \\ -2y = 14 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y - 14 \\ -2y = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y - 14 \\ y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \times (-13) - 14 \\ y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -26 - 14 \\ y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -40 \\ y = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{40}{3} \\ y = -13 \end{cases}$$

A solução do sistema é o par $\left(-\frac{40}{3}, -13\right)$.

Figura 2: Imagem ilustrativa do grafismo do Manual II.

Tendo em conta o grafismo, podemos afirmar que existem maioritariamente representações matemáticas simbólicas (tal como no manual anterior, ligadas à escrita matemática) e algumas poucas representações icónicas (designadamente um esquema, pequenos traços cor de laranja para assinalar pontos que merecem atenção especial, retângulos cor de laranja para destacar definições, negritos para realçar a terminologia matemática. É usado ainda o tipo de letra manuscrito nos exemplos de resolução de sistemas de equações, sugerindo a representação a ser usada pelos alunos).

Manual III. Este manual é multicolor. As páginas apresentam uma margem vertical em cor diferente aproximadamente correspondente a um terço da página total. O texto é escrito maioritariamente a preto embora haja partes coloridas ou a negrito. Existem muitas imagens, gráficos, tabelas e outro tipo de sinais como retângulos e setas para complementar a explicação.

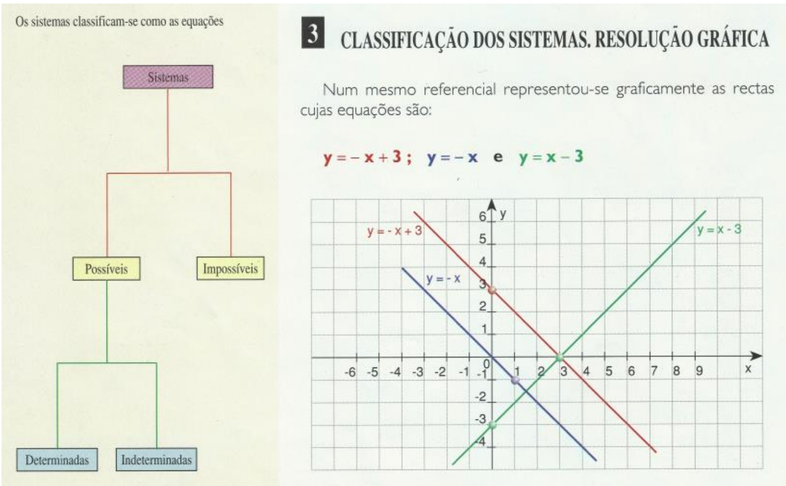


Figura 3: Imagem ilustrativa do grafismo do Manual III

Com base no grafismo, podemos afirmar que existem representações matemáticas simbólicas (tal como nos manuais anteriores, ligadas à escrita matemática) e muitas representações icónicas (designadamente figuras, desenhos, gráficos, esquemas, tabelas, etc.).

Aspetos didáticos

(i) Atividade inicial

Manual III. Antes da abordagem do subtema 2. Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas apresentam a “Actividade Zero” sobre os pesos das galinhas e dos patos acompanhada por uma figura onde constam duas balanças em equilíbrio com as galinhas, os patos e os pesos (figura 4).

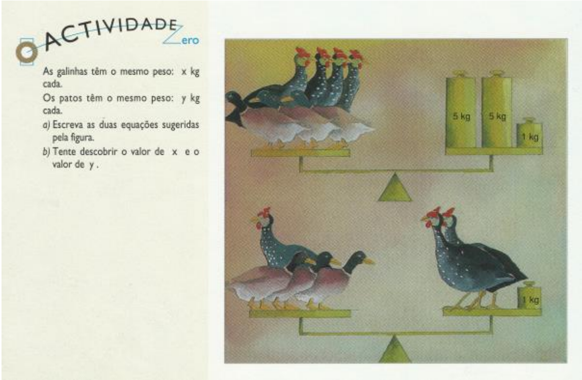
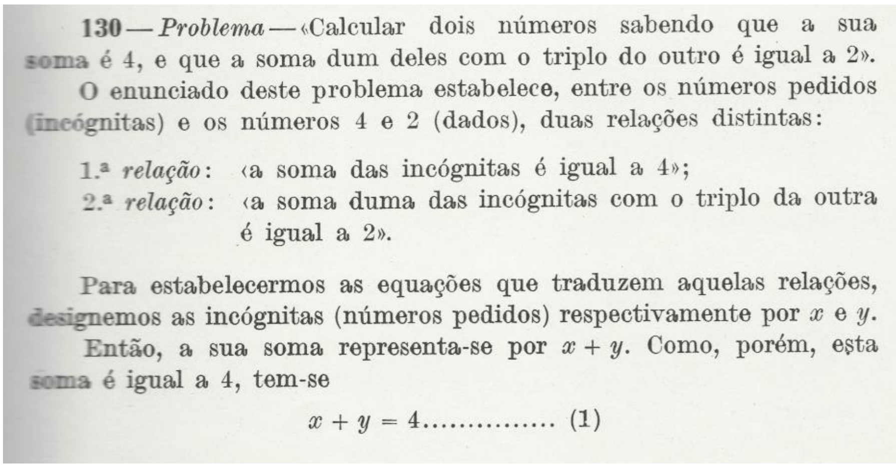


Figura 4: Atividade inicial do Manual III.

Esta atividade permite-nos considerar que existe neste manual uma representação ativa (dentro do possível tendo em conta o facto de o suporte físico ser um livro), uma vez que, por um lado sugere uma ou várias simulações para encontrar resposta para a atividade e, por outro lado, porque remete para o uso de material didático manipulável: as balanças que metaforicamente representam uma equação. Além disso, estão presentes a representação icónica com o desenho que ilustra o enunciado do problema e a representação simbólica com o enunciado escrito numa linguagem mista (natural e matemática).

(ii) Introdução aos sistemas de equações

Manual I. O segundo parágrafo (n.º 130) começa com o enunciado de um problema: "Calcular dois números sabendo que a sua soma é 4, e que a soma dum deles com o triplo do outro é igual a 2" (figura 5). Segue-se a análise do enunciado do problema para destacar as duas relações, entre as incógnitas e os números dados, ainda em linguagem natural, para, posteriormente traduzir para linguagem matemática, estabelecendo as equações que as traduzem matematicamente, ou seja, as equações $x + y = 4$ e $x + 3y = 2$, que servem de exemplo para a definição de um sistema de equações apresentada no parágrafo seguinte.



130 — *Problema* — «Calcular dois números sabendo que a sua soma é 4, e que a soma dum deles com o triplo do outro é igual a 2».

O enunciado deste problema estabelece, entre os números pedidos (incógnitas) e os números 4 e 2 (dados), duas relações distintas:

1.ª *relação*: «a soma das incógnitas é igual a 4»;
2.ª *relação*: «a soma duma das incógnitas com o triplo da outra é igual a 2».

Para estabelecermos as equações que traduzem aquelas relações, designemos as incógnitas (números pedidos) respectivamente por x e y.

Então, a sua soma representa-se por $x + y$. Como, porém, esta soma é igual a 4, tem-se

$$x + y = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Figura 5: Definição e exemplo de sistema de equações no Manual I.

Manual II. O segundo subcapítulo, Sistemas de duas equações com duas incógnitas, é iniciado com o problema (figura 6): “A soma de dois números é 12 e a soma do primeiro com o dobro do segundo é 7. Quais são os números?”, para o qual consideram duas incógnitas x e y. Segue-se a tradução do problema em linguagem matemática que dá origem a duas equações literais que têm que se verificar ao mesmo tempo, o que leva à definição de um sistema de duas equações com duas incógnitas. Analisam de uma forma geral a conjunção de duas condições para de seguida apresentarem um exemplo sobre o conjunto solução de uma conjunção de condições. Posteriormente afirmam que um sistema de equações é a conjunção de duas equações, apresentando o sistema referente ao problema inicial.

Problema:

“A soma de dois números é 12 e a soma do primeiro com o dobro do segundo é 7. Quais são os números?”

Como queremos saber o valor de dois números, vamos ter que considerar duas incógnitas:

$x \rightarrow$ 1.º número $\quad y \rightarrow$ 2.º número

a soma dos números é 12 : $x+y=12$;

a soma do 1.º com o dobro do 2.º é 7 : $x+2y=7$.

A tradução do problema em linguagem matemática deu, então, origem a duas equações literais que têm que se verificar ao mesmo tempo:

$$x+y=12 \quad \text{e} \quad x+2y=7$$

Dizemos que temos um **sistema de duas equações com duas incógnitas.**

Quando ligamos duas equações ou, mais geralmente, quaisquer duas condições com a partícula “e” que, em linguagem matemática, se escreve “$\wedge$”, obtemos uma nova condição a que damos o nome de **conjunção** das duas condições iniciais.

Como a conjunção de condições obriga a que estas se verifiquem simultaneamente, o seu conjunto solução não é mais do que a intersecção dos conjuntos solução de cada uma das condições.

Figura 6: Definição e exemplo de sistema de equações no Manual II.

Manual III. O subtema 2. Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas é apresentado com as subsecções 2.1 Definições e 2.2 Resolução de um sistema. Na primeira subsecção recorrem a um problema envolvendo moedas: “A Luísa tem, distribuídas pelos seus dois porta-moedas, 16 moedas. Num deles tem o triplo das moedas que tem no outro. Quantas moedas tem em cada um?” (figura 7) (encontra-se na margem da página a imagem de dois porta-moedas). Seguidamente traduzem algebricamente as duas informações do enunciado do problema para introduzir a definição de uma conjunção de duas equações ou um sistema de equações. Na margem fazem a leitura e apresentam o significado do símbolo $\wedge$.

Problema

“A Luísa tem, distribuídas pelos seus dois porta-moedas, 16 moedas. Num deles tem o triplo das moedas que tem no outro. Quantas moedas tem em cada um?”

Neste enunciado temos duas informações:

- o número de moedas contidas nos dois porta-moedas é 16 ;
- num porta-moedas há o triplo das moedas do outro.

Se considerarmos:

x = número de moedas de um

y = número de moedas do outro

podemos traduzir algebricamente as duas informações do seguinte modo:

- $x+y=16$
- $y=3x$.

Figura 7: Definição e exemplo de sistema de equações no Manual III.

No que diz respeito à forma como os autores introduzem o conceito de sistema de equações, verificamos que tal é feito de modo análogo nos três manuais. Partem de um problema para equacionar (Abrantes, 1989), ainda que o do manual III tenha um contexto não exclusivamente matemático como no caso dos outros dois manuais. Ou seja, estamos na presença de representações simbólicas (ainda que no manual III muito próximo da linguagem natural). No que se segue mantem-se o uso de representações simbólicas gradualmente mais próximas da escrita matemática simbólica. Todos usam o sinal de chaveta e os manuais II e III referem ainda o conetivo da conjunção. A representação icónica, para além do que foi indicado sobre o grafismo, é irrelevante, pois a única figura existente é a do manual III, a dos dois porta-moedas que ilustram o enunciado.

(iii) Método de substituição

Manual I. Após a explicação do método de substituição com base na resolução, passo a passo, de um exemplo no parágrafo 136, no 138 apresentam-se cinco passos a seguir para se resolver um sistema de equações pelo método de substituição (figura 8). De notar que no parágrafo 136, as equações finais que permitem identificar o valor da incógnita estão contornadas por um retângulo (figura 1).

138 — Na prática, para se resolver um sistema pelo método de substituição procede-se do seguinte modo:

1 — *Reduz-se o sistema à forma canónica.*

2 — *Resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas, que, teòricamente, pode ser qualquer, mas, na prática, convém que seja a de menor coeficiente.*

3 — *Substitui-se esse valor da incógnita na outra equação, que, deste modo, passará a conter uma só incógnita.*

4 — *Resolve-se então esta equação, isto é, calcula-se a sua raiz.*

5 — *Substitui-se essa raiz na expressão que nos dá a outra incógnita.*

Deste modo se obtém a solução do sistema proposto.

Figura 8: Os cinco passos para a resolução de um sistema pelo método de substituição.

Manual II. Após a explicação do método de substituição com base na resolução, passo a passo, apresenta-se um exemplo (figura 9).

Como x é uma expressão equivalente a 12−y, podemos substituir, na segunda equação, **x** pela expressão **12−y**, obtendo um **sistema equivalente** ao anterior, isto é, com a mesma solução (ou soluções).

$$\begin{cases} x = 12-y \\ 12-y+2y=7 \end{cases}$$

Esta substituição permitiu-nos obter uma equação do 1.º grau **só com uma incógnita** que já podemos resolver.

$$\begin{cases} x = 12-y \\ -y+2y=7-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12-y \\ y=-5 \end{cases}$$

Figura 9: Excerto da explicação da aplicação do método de substituição.

Segue-se o esquema (figura 10) que sintetiza o algoritmo do método de substituição.

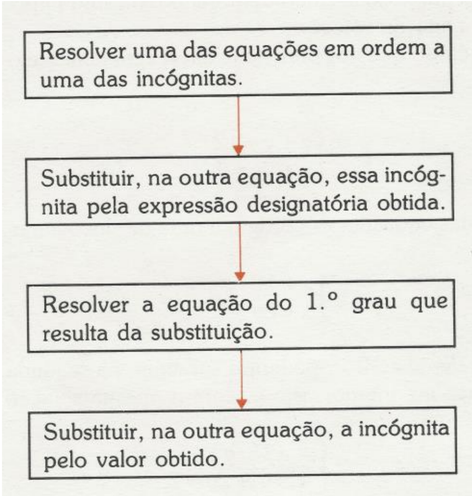
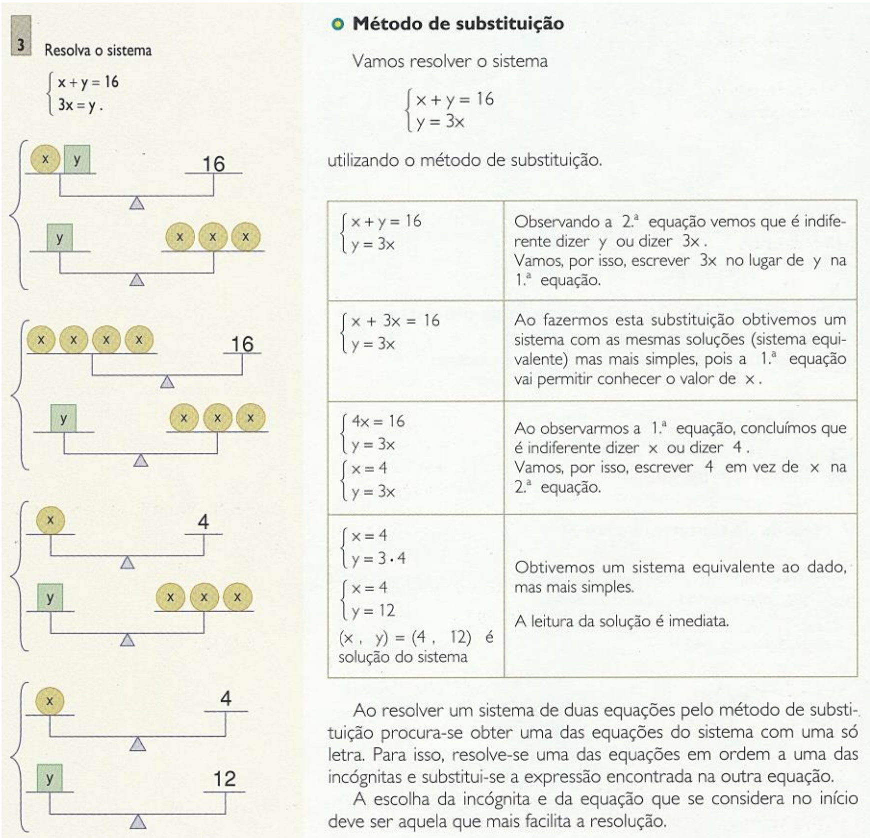


Figura 10: Os quatro passos para a resolução de um sistema pelo método de substituição.

Manual III. Apresenta, lado a lado, duas maneiras (figura 11) para resolver um sistema de duas equações com duas incógnitas, utilizando o método de substituição.



3 Resolva o sistema

$\begin{cases} x+y=16 \\ 3x=y\ . \end{cases}$

Método de substituição

Vamos resolver o sistema

$\begin{cases} x+y=16 \\ y=3x \end{cases}$

utilizando o método de substituição.

$\begin{cases} x+y=16 \\ y=3x \end{cases}$	Observando a 2.ª equação vemos que é indiferente dizer y ou dizer $3x$. Vamos, por isso, escrever $3x$ no lugar de y na 1.ª equação.
$\begin{cases} x+3x=16 \\ y=3x \end{cases}$	Ao fazermos esta substituição obtivemos um sistema com as mesmas soluções (sistema equivalente) mas mais simples, pois a 1.ª equação vai permitir conhecer o valor de x.
$\begin{cases} 4x=16 \\ y=3x \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=3x \end{cases}$	Ao observarmos a 1.ª equação, concluímos que é indiferente dizer x ou dizer 4. Vamos, por isso, escrever 4 em vez de x na 2.ª equação.
$\begin{cases} x=4 \\ y=3\cdot 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases}$ $(x, y)=(4, 12)$ é solução do sistema	Obtivemos um sistema equivalente ao dado, mas mais simples. A leitura da solução é imediata.

Ao resolver um sistema de duas equações pelo método de substituição procura-se obter uma das equações do sistema com uma só letra. Para isso, resolve-se uma das equações em ordem a uma das incógnitas e substitui-se a expressão encontrada na outra equação.

A escolha da incógnita e da equação que se considera no início deve ser aquela que mais facilita a resolução.

Figura 11: Processo de resolução de um sistema pelo método de substituição.

Num exemplo adiante é usado o mesmo tipo de tabela (como a apresentada na figura 11) e ainda uma sinalética idêntica à usada no manual II (figura 9 a cor de laranja).

Verificamos que a abordagem do método de substituição é idêntica nos três manuais, ainda que em termos de representações matemáticas se notem diferenças. Em todos os manuais são usadas representações simbólicas, mas relativamente às representações icónicas nos manuais I e II há pequenas sinaléticas a alertar para pontos delicados do processo e um algoritmo para a aplicação do método que no manual II é organizado de modo semelhante a um organigrama. No manual III estas representações icónicas são reforçadas. Neste manual há a utilização em paralelo da representação icónica, da escrita matemática formal e de um misto de linguagem natural com linguagem simbólica (figura 11). Voltamos a fazer notar a eventual presença da representação ativa.

(iv) Outros métodos de resolução de sistemas de equações

Manual I. Quanto ao método gráfico neste manual começa-se por considerar a equação do 1.º grau com duas incógnitas $2x + y = 3$ que é escrita na forma $y = -2x + 3$. Esta função do 1.º grau representa graficamente uma linha reta, fazendo referência ao parágrafo n.º 64. Este estudo é acompanhado pelo respetivo gráfico. É ainda referido o método de redução, a estratégia utilizada é idêntica.

Manual III. Quanto ao método de tentativa e erro, neste manual parte-se de um sistema de equações e através da construção de uma tabela vão sendo atribuídos valores às incógnitas até encontrar uma solução.

Estes dois manuais incluem outros métodos para além do método da substituição. No manual I encontramos a representação simbólica e a representação icónica (com o único gráfico/imagem que consta neste capítulo e o retângulo a contornar certas equações que já referimos, para o caso do método de redução é ainda usado o esquema semelhante ao algoritmo da adição, para a adição algébrica de equações. Já no manual III são usadas duas representações a simbólica e a icónica ao recorrer a uma tabela.

Conclusões

No sentido de responder às questões de investigação estabelecidas são de referir os seguintes aspetos.

Em síntese no que diz respeito ao grafismo, os três manuais dão destaque às representações simbólicas, no entanto, com ênfase que diminui do manual I para o manual III. Já as representações icónicas também presentes nos três manuais são ténues no manual I e no manual II, aumentando no manual III.

Dentro das representações simbólicas, é usada a linguagem natural e uma linguagem mista, isto é, uma linguagem que vai introduzindo alguma simbologia matemática, tal como é sugerido por Jordão e Bianchini (2014). Tal reconhecimento ocorre em todos os manuais, o que está de acordo com (Duval, 2011). A simbologia matemática (mais) específica do tema de sistemas de equações é semelhante em todos os manuais e são de referir: a chaveta (nos três manuais), o conetivo de conjunção (nos manuais II e III), as letras para as incógnitas são exclusivamente o x e o y nos manuais I e II e quase exclusivamente no manual III, onde aparecem outras letras (a, b, m e n) em exercícios propostos. Nos manuais I e III aparece a representação simbólica $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$. No caso do manual I ao apresentar a definição de sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas (sendo indicado a natureza das variáveis envolvidas). No manual III apenas aparece este sistema para indicar a forma canónica de um sistema de equações.

Quanto às representações icónicas, estas são muito esparsas nos manuais I e II, sendo usadas apenas, pontualmente, para realçar algum aspeto matemático mais delicado. No caso do manual I aparece um gráfico e no do manual II um esquema. O manual III apresenta muitas representações icónicas e variadas, mais de acordo com Duval (2003): gráficos, tabelas, ilustrações, esquemas e outra sinalética não convencional.

Realça-se a utilização de mais de um tipo de representação matemática para abordar determinados tópicos. Em geral, os manuais analisados usam a linguagem mista (natural e escrita matemática) e algumas representações icónicas. O manual III apresenta situações em que usa em paralelo três tipos de representação: a icónica (desenhos, símbolos não convencionais, diagramas) e a simbólica (em dois níveis, linguagem mista e só escrita matemática simbólica).

Foi também apenas neste manual que conseguimos identificar representações matemáticas ativas, no caso recorrendo à metáfora da balança para ilustrar (e, eventualmente, promover a simulação) de uma atividade que se traduzia matematicamente por um sistema de equações.

O aumento e a diversidade de representações matemáticas ao longo dos três manuais escolares em estudo contribuem para uma melhor visualização e compreensão dos sistemas de equações e da sua resolução e consequente solução. “Para além de conhecerem diversas representações, os alunos têm de aprender a transformar representações” (Ponte, 2014, p. 24).

Referências bibliográficas

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática, 8,* 7-10 e 35.

Aires, A. P. (2006). *O conceito de derivada no ensino secundário em Portugal ao longo do século XX: uma abordagem histórica através dos planos curriculares e manuais escolares*. Tese de doutoramento, Universidad de Salamanca, Salamanca, Espanha.

Aires, A. P., & Sierra Vázquéz, M. (2008). A noção de derivada nos manuais escolares do século XX. In L. Menezes, L. Santos & C. Rodrigues (Org.), *Avaliação em Matemática: problemas e desafios* (pp. 195-207). Lisboa: SPCE.

Battaglioli, C. S. M. (2008). *Sistemas Lineares no 2.º ano do Ensino Médio: um olhar sobre os livros didáticos*. Dissertação de Mestrado Profissional, (PUC/SP) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D’Água.

Calado, J. (1965). *Compêndio de Álgebra (2.º Ciclo)*. Lisboa: Ministério da Educação Nacional.

Canavarro, A. P., & Pinto, M. E. (2012). O raciocínio matemático aos seis anos: Características e funções das representações dos alunos. *Quadrante, 21*(2), 51-79.

Correia, A., Eusébio, C., & Albuquerque, T. (1988). *Matemática*. Porto: Edições Asa.

Duval, R. (2003). *Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica*. São Paulo: Ed. Papirus.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. São Paulo: Proem.

EIEM, 2015, Retirado 1 de setembro de 2015: http://eiem2015.spiem.pt/grupos-de-discussao/

Freitas, N., & Abar, C. (2013). Sistemas de equações lineares: uma proposta de atividades com abordagem de diferentes registros de representação semiótica. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática,* Curitiba – Paraná, Brasil.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 197-218). New York: Routledge.

Jordão, A. & Bianchini, B. (2014). Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2.º ano do Ensino Médio. *REVEMAT. Florianópolis (SC), 9* (2), 69-86. in http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9n2p69

Machado, S. D. A. (1996). O universitário principiante x significado dos sistemas de equações. *Anais do IV EPEM,* São Paulo, Brasil.

Neves, M., & Faria, M. (1999). *Matemática 9*. Porto: Porto Editora.

Ponte, J. P. (2004). As equações nos manuais escolares. *Revista Brasileira de História da Matemática 4*(8), 149-170.

Ponte, J. P. (Org.) (2014). *Práticas profissionais dos professores de matemática*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P., Salvado, C., Fraga, A., Santos, T., & Mosquito, E. (2007). Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares. *Quadrante. 16*(1), 111-145.

Teixeira, A. (2010). Os manuais escolares de matemática nos liceus portugueses (1947-1974). *Cadernos de História da Educação,* 309-328.

Vázquez, M., Astudillo, M., & Esteban, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU), 1940-1995", *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463-476.

Vázquez, M., Astudillo, M., & Esteban, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática, 15,* 21-49.

PÓSTERES – GD3

ESTUDO DE UM CONTEXTO FORMATIVO DESENCADEADO A PARTIR RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E DO CONCEITO DE FRAÇÕES

Douglas da Silva Tinti
Universidade Cidade de São Paulo/Bolsista CAPES-Brasil; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
douglastinti@uol.com.br

Ana Lúcia Manrique
Universidade Cidade de São Paulo/Bolsista CAPES-Brasil; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
manrique@pucsp.br

Palavras-chave: Formação de Professores; OBEDUC; Frações; Resolução de Problema; Materiais Manipuláveis.

O Programa Observatório da Educação (OBEDUC), criado pelo Governo Federal Brasileiro com o propósito de fomentar a produção acadêmica e a formação de profissionais com pós-graduação *stricto sensu* em educação. No Edital 049/2012/CAPES/INEP, foi aprovado o Projeto em rede intitulado *Rede Colaborativa de práticas na formação de professores que ensinam matemática: múltiplos olhares, diálogos e contextos*, que propõe a criação de uma rede colaborativa entre três instituições de ensino superior sendo a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) uma delas.

O presente trabalho tem por objetivo apresentar um estudo de caso decorrente da análise das representações realizadas pelos integrantes do grupo ao trabalhar o conceito de frações conjuntamente com a Resolução de Problemas. Este grupo é composto por: 3 professores dos anos iniciais da Educação Básica (PAI), 3 professores de Matemática dos anos finais da Educação Básica (PAF); 3 alunos do curso de Pedagogia (AP); 3 alunos do curso de Licenciatura em Matemática AM); 2 doutorandos e 1 mestrando em Educação Matemática; 1 mestrando em Educação e 1 doutora (coordenadora do projeto).

No 1.º semestre de 2013 a temática Resolução de Problemas e o conceito matemático frações foram elegidos pelo grupo como objetivo de estudos, reflexões e desenvolvimento de atividades práticas a serem desenvolvidas ao longo dos 10 encontros previstos para o 2.º semestre de 2013. Para tanto foram constituídos dois grupos heterogêneos de trabalho.

Em um destes encontros um dos grupos pensou em uma atividade para alunos do 6.º ano do ensino fundamental utilizando um material manipulável denominado disco de frações (Figura 1).

Paolo - O PIZZAIOLO MALUCO

A pizzaria DONA REDONDA contratou um novo pizzaiolo, Paolo, mas ele é conhecido como um "pizzaiolo maluco", pois reparte as pizzas em partes iguais, mas em pedaços de números diferentes. Hora ele fatia em quatro pedaços, hora em sete ... de acordo com sua vontade.

a) No último sábado, Júlia pediu duas pizzas, uma de queijo e a outra pizza de calabresa. A pizza de queijo veio repartida em 3 pedaços e a de calabresa foi dividida em 6 pedaços. Júlia achou os pedaços da pizza de queijo muito grandes e , por isso comeu só um pedaço. Já a de calabresa, conseguiu comer 3 pedaços. Represente, utilizando os discos de frações, a quantidade de pedaços de pizza que Júlia comeu.

b) Joana comeu também pediu uma pizza de queijo e uma de calabresa. A de queijo veio dividida em três pedaços e a de calabresa em 4 pedaços. Joana comeu um pedaço de pizza de queijo e um de calabresa. Represente, utilizando os discos de frações, a quantidade de pedaços de pizza que Júlia comeu.

Figura 1: Parte da atividade proposta envolvendo frações.

Posteriormente o grupo simulou a aplicação desta atividade com os membros do grupo oposto ao que elaborou a atividade. Ao refletirem sobre as atividades propostas um dos integrantes apontou um erro que pode acontecer com qualquer professor se a atividade não for bem planejada.

> "[...] eles deram os disquinhos [...] o primeiro exercício deu para fazer com os disquinhos, e o segundo não deu". (PAF 1, 5.º encontro – 2.º semestre de 2013)

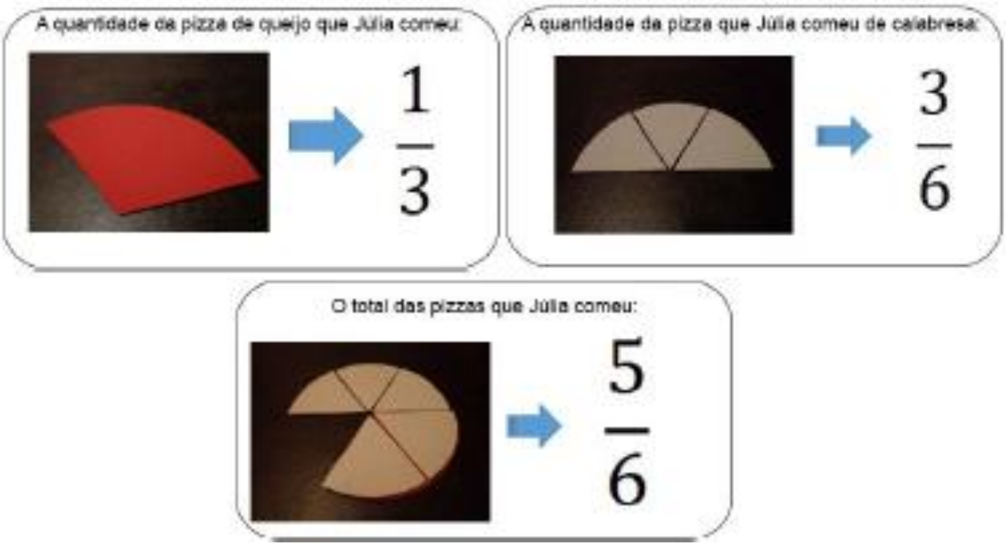


Figura 2: Resolução da atividade (a).

Além disso, um dos integrantes do grupo propôs uma solução algébrica (Figura 3) que converge para o que aponta Ponte (1992, p. 205): “uma das concepções mais prevalecentes é a de que o cálculo é a parte mais substancial da Matemática, a mais acessível e fundamental”.

Outra forma de resolver é calculando três multiplicações. Primeiro se multiplica os denominadores para chegar ao novo denominador, em seguida multiplica-se em cruz “numerador da 1ª fração x denominador da 2ª fração” + “denominador da 1ª fração x numerador da 2º fração”:

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{6}=\frac{6+9}{18}=\frac{15}{18}$$

Figura 3: Resolução algébrica da atividade (a).

Como a proposta das atividades indicava a utilização dos discos de frações para solucionar o problema, o grupo não se atentou para o fato de que este material manipulável possui uma limitação no que diz respeito à representação de números fracionários. Por este fato, outro integrante ressaltou:

> “[...] É preciso testar o material antes por que, por exemplo, o nosso grupo não trouxe material e usou os discos de fração que estavam aqui, só que mesmo usando esses discos, eu não me atentei que mão tinha um disco de 12, aí não dava para chegar à resposta correta”. (PAF 3, 5.º encontro – 2.º semestre de 2013)

Nas discussões realizadas, os integrantes ressaltaram a importância de o professor conhecer bem o material/atividade que utilizará em sua prática para que o objetivo traçado seja alcançado, corroborando com as ideias de Lorenzato (2006).

Entendemos que a formação docente e, consequentemente, a Aprendizagem da Docência, são processos contínuos e plurais. Nesse contexto, a prática passa a ser concebida como ponto de partida e de chegada da formação profissional, tendo a teoria, a pesquisa e a colaboração como mediação (Fiorentini & Nacarato, 2005).

Referências bibliográficas

Fiorentini, D., & Nacarato, A. M. (2005). Introdução: Investigando e teorizando a partir da prática a cultura e o desenvolvimento de professores que ensinam matemática. In D. Fiorentini & A. M. Nacarato (Orgs.) *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática* (pp. 7-17). São Paulo: Musa Editora.

Lorenzato, S. A. (2006). Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: Lorenzato, Sergio Aparecido (Org.). *O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores* (pp. 3-37). Campinas: Autores Associados.

Ponte, J. P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. In *Educação Matemática: Temas de Investigação* (pp. 185-239). Lisboa: IIE.