INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: APRENDER MATEMÁTICA COM COMPREENSÃO

Manuel Vara Pires
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança
mvp@ipb.pt

Resumo
Este texto centra-se numa experiência de aprendizagem desenvolvida numa turma de vinte e cinco alunos do quinto ano de escolaridade na exploração de relações numéricas no triângulo de Pascal, com o propósito principal de identificar e analisar processos de resolução desenvolvidos pelos alunos em tarefas de cariz mais investigativo. É possível concluir que o trabalho proporcionado por este tipo de tarefas, apelando a processos matemáticos complexos, como conjeturar e generalizar, permite aos alunos fazer aprendizagens matemáticas com compreensão.

Palavras-chave: aprendizagem matemática, educação básica, investigações matemáticas, triângulo de Pascal.

Abstract
This text focuses on a learning experience developed in a class of twenty-five students from the fifth grade on the exploration of numeric relations in Pascal's triangle, with the main purpose of identifying and analyzing processes of resolution developed by the students in more research forward tasks. It is possible to conclude that the work provided by this kind of tasks, reaching complex mathematical processes, such as presuming and generalizing, allows the students to do mathematical learning with understanding.

Keywords: mathematics learning, primary education, mathematical research, Pascal's triangle.

Résumé
Ce texte est centré sur une expérience d'apprentissage développée dans une classe de vingt-cinq élèves de la cinquième année à l'exploration de rapports numériques dans le triangle de Pascal, avec le but principal d'identifier et d'analyser les processus de résolution élaborés par les élèves dans les tâches plus axés à la recherche. C'est possible de conclure que le travail proportionné pour ce type de tâches, qui appellent au processus mathématiques complexes, tels que conjecturer et généraliser, permet aux élèves de faire des apprentissages mathématiques avec compréhension.

Mots-clés: l'apprentissage des mathématiques, éducation élémentaire, recherches mathématiques, triangle de Pascal.

Resumen
Este texto se centra en una experiencia de aprendizaje desarrollada en una clase de veinticinco estudiantes de quinto grado en la explotación de las relaciones numéricas en el triángulo de Pascal, con el objetivo principal de identificar y analizar los procesos de resolución elaborados por los estudiantes en tareas más orientadas a la investigación. Se concluyó que los trabajos previstos por este tipo de tareas, pidiendo procesos matemáticos complejos, como conjeturar y generalizar, permite a los estudiantes practicar aprendizajes matemáticas con comprensión.

Palabras clave: aprendizaje de matemáticas, educación primária, investigaciones matemáticas, triángulo de Pascal.

1. As investigações matemáticas no currículo

Os pressupostos e as orientações curriculares têm sofrido diversas evoluções dependendo, evidentemente, dos paradigmas e dos discursos em debate e aceites em cada época ou comunidade educativa. Esta situação é bastante significativa se recordarmos a evolução havida nas últimas décadas do papel a desempenhar e do destaque dado às tarefas matemáticas de natureza mais aberta ou exploratória, nas quais se incluem as investigações matemáticas (Oliveira & Borralho, 2014; Ponte, 2003).

Para a Associação de Professores de Matemática (1988), num contexto de resolução de problemas, "as atividades de exploração e descoberta surgem naturalmente" (p. 47), o que implica entrar em "terreno desconhecido", recolher dados, detetar diferenças, reconhecer regularidades e padrões ou estabelecer analogias. A exploração favorece a formulação de conjeturas, a argumentação e a demonstração e desenvolve capacidades ligadas à comunicação. Mais tarde, reforçando estas ideias, a Associação de Professores de Matemática (1998) recomenda que a prática pedagógica valorize "tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos (nomeadamente, resolução de problemas e atividades de investigação)" e "diversifique as formas de interação em aula, criando oportunidades de discussão entre alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projeto" (p. 44).

Na mesma linha, o National Council of Teachers of Mathematics (1991) refere que o raciocínio matemático deve envolver a formulação de conjeturas e justificações que ajudem os alunos, desde os primeiros anos, a perceber que a matemática tem sentido. Reconhece a importância da criação de ambientes em que aprendam a raciocinar e comunicar matematicamente, ou seja, a formular e validar as suas conjeturas e a ganhar confiança na discussão dos seus argumentos. Formular, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjetura, resolver problemas complexos que envolvam exploração, fazer tentativas, "fazer" erros e corrigi-los, são algumas das experiências de aprendizagem em que os alunos devem ser implicados na aula, para que adquiram mais poder matemático e se tornem cidadãos matematicamente alfabetizados. O National Council of Teachers of Mathematics (2007) sugere, também, que a escola deve habilitar todos os alunos a reconhecer o raciocínio e a demonstração como aspetos fundamentais da matemática, a formular e investigar conjeturas matemáticas, a desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticos, a selecionar e usar diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração. Adianta, ainda, que as tarefas matemáticas devem centrar-se nas relações matemáticas, mantendo a resolução de problemas e de investigações como "uma parte integrante de toda a aprendizagem" (p. 57).

Desde a década de 90 do século passado, as orientações curriculares oficiais também foram dando expressão, umas vezes mais do que outras, à relevância do trabalho matemático de natureza não rotineira, deslocando a atividade dos alunos para formas mais abertas e exploratórias. Por exemplo, no Programa de matemática do 1.º ciclo do ensino básico (Direção-Geral do Ensino Básico e Secundário, 1990), é dada uma grande relevância ao trabalho não rotineiro a realizar pelos alunos nas suas experiências de aprendizagem. Parte-se do pressuposto de que as crianças aprendem mais e melhor quando reagem dinamicamente a uma situação que lhes suscite interesse e responda à sua natural curiosidade. Para isso, é sugerido que "a resolução de problemas, quer na fase de exploração e descoberta, quer na fase de aplicação, deverá constituir a atividade fundamental desta disciplina (...) e um momento especial de interação e de diálogo" (pp. 128, 129). São dadas sugestões de situações de trabalho como, por exemplo, exploração de situações, explicitação de raciocínios ou exploração, descoberta e uso de regularidades e padrões.

O Currículo nacional do ensino básico (Departamento da Educação Básica, 2001) realça a noção de competência matemática a ser desenvolvida pelos alunos ao longo da educação básica. Esta competência apela fortemente ao trabalho não rotineiro e exige, por exemplo, explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjeturas, formular generalizações, validar uma afirmação relacionando-a com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior, discutir com outros e comunicar descobertas, compreender a noção de conjetura, entender a estrutura de um problema e desenvolver processos de resolução ensaiando estratégias alternativas. Neste sentido, os alunos devem ter oportunidade de se envolverem em diversos tipos de experiências de aprendizagem, nomeadamente, resolução de problemas, atividades de investigação, realização de projetos e jogos. Por exemplo, as atividades de investigação são entendidas com situações em que "os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjeturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões" (p. 68).

No Programa de matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007), a resolução de problemas é entendida como uma "atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático" (p. 6). Juntamente com o raciocínio matemático e a comunicação matemática, são consideradas as três capacidades transversais fundamentais. Para além de se relacionarem com os objetivos de aprendizagem, constituem também importantes orientações metodológicas para estruturar o trabalho a realizar em aula. Os alunos devem ter a possibilidade de "resolver problemas, analisar e refletir sobre as suas resoluções e as resoluções dos colegas", devendo o professor valorizar os raciocínios dos alunos, "procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas" (p. 9). A diversificação de tarefas é uma das exigências com que o professor se confronta e "a escolha das que decide propor aos alunos está intimamente ligada com o tipo de abordagem que decide fazer, de cunho essencialmente direto ou transmissivo, ou de caráter mais exploratório" (p. 12).

Rompendo com estas orientações, o Programa de matemática para o ensino básico (Ministério da Educação e Ciência, 2013) considera que o raciocínio matemático "é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo" (p. 4). Embora o programa reconheça que o raciocínio indutivo desempenha "também um papel fundamental, uma vez que preside, em matemática, à formulação de conjeturas", não sugere tarefas ou orientações que possam ajudar os alunos a desenvolver este raciocínio alertando apenas para a possibilidade de "levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras" (p. 4).

Independentemente dos diferentes pontos de vista e análise, há fortes evidências, como referem Martins, Maia, Menino, Rocha e Pires (2002), de que o trabalho de natureza mais aberta e exploratória, como o proporcionado pelas investigações matemáticas, permite aos alunos uma melhor compreensão global da natureza da atividade matemática. De facto, as investigações apelam a processos de fazer matemática característicos dos alunos mais novos como, por exemplo, representar, relacionar e operar (classificar, ordenar, calcular, estabelecer relações, interpretar), experimentar, explorar, identificar padrões e regularidades, formular, testar e validar conjeturas, generalizar ou comunicar.

2. O contexto da experiência de aprendizagem

A experiência de aprendizagem, que se apresenta, pretende identificar e analisar processos de resolução desenvolvidos pelos alunos em tarefas de cariz mais investigativo. Para isso, incide no trabalho desenvolvido numa aula de matemática pelos vinte e cinco alunos de uma turma do 5.º ano de escolaridade na resolução de uma investigação. A sua professora propôs que descobrissem, registassem e validassem "relações interessantes no triângulo de Pascal". Anteriormente, embora de forma bastante esporádica, os alunos já tinham resolvido tarefas de natureza mais aberta e exploratória.

Esta experiência insere-se num estudo mais amplo (Pires, 2011), centrado nas práticas letivas de uma professora de matemática do 2.º ciclo do ensino básico, com o principal propósito de conhecer como os professores integram as tarefas de investigação no desenvolvimento (normal) do currículo e como refletem sobre as suas práticas. O estudo segue uma abordagem de natureza qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994). A recolha de dados da experiência de aprendizagem foi feita através das produções escritas feitas pelos alunos na resolução da tarefa e das notas de campo registadas na aula pela professora e pelo autor, como observador participante. A análise dos dados foi orientada para a identificação e sistematização do trabalho desenvolvido pelos alunos, cruzando-se com comentários ou estudos referidos na literatura. No texto, que se segue, as partes colocadas entre aspas correspondem a expressões do discurso oral ou escrito dos intervenientes e os nomes associados aos alunos não são os seus nomes verdadeiros.

A experiência de aprendizagem teve a duração de oitenta minutos e estruturou-se em três fases principais: (i) apresentação da tarefa (dez minutos), (ii) resolução da tarefa em pares (trinta minutos), e (iii) apresentação e discussão dos resultados em grande grupo (quarenta minutos). Os alunos sentaram-se nos seus lugares habituais e o autor sentou-se ao lado do Rui.

3. A experiência de aprendizagem

A professora distribuiu a ficha de trabalho, com o enunciado da tarefa, pelos vinte e cinco alunos e apresentou o trabalho a realizar. Projetou, no quadro, uma transparência com o triângulo de Pascal até à sexta linha (ver Figura 1). Em conjunto, os alunos numeraram as linhas e as diagonais a fim de facilitar a comunicação no trabalho em pares e na discussão coletiva.

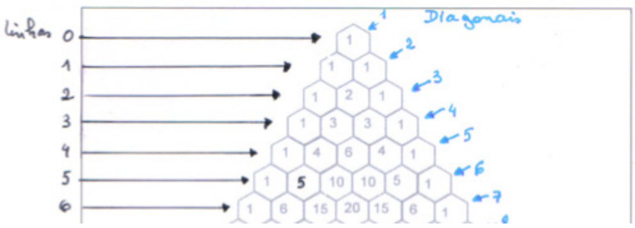

Figura 1: Numeração das linhas e das diagonais no triângulo de Pascal.

Depois os pares começaram o seu trabalho. Esta organização do trabalho inicial a "dois" foi muito útil para os alunos, potenciando quer aspetos comunicativos quer a atribuição de mais significado aos conceitos e aos procedimentos matemáticos (NCTM, 2007). Por um lado, o trabalho em pares exigiu a cada aluno um nível de organização e estruturação dos argumentos para poder ser entendido e, eventualmente, validado pelo seu colega. Mas, por outro, os alunos também tiveram de recorrer, trabalhar e falar sobre muitos termos numéricos, tais como múltiplo, divisor, número par, número ímpar, quadrado de um número, potência, número inteiro, número natural ou simetria. Em suma, as interações sociais entre os alunos são claramente mais ricas e significativas nestas situações de trabalho não rotineiro do que nas tarefas em que se limitam a seguir regras ou algoritmos já conhecidos (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). Nesta fase, a professora foi acompanhando o trabalho pelos lugares, preocupando-se em não dar respostas imediatamente e, muitas vezes, "devolvendo" a pergunta (Chamoso & Rawson, 2001). Foi notória a sua insistência com alguns alunos para o teste das conjeturas formuladas, dado que estabeleceram "verdades" sem qualquer critério de confirmação, aceitando o que lhes parecia à primeira vista (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999).

Após o trabalho em pares, passou-se à apresentação e discussão coletiva das conjeturas dos alunos. A professora tomou uma postura tentando interferir o menos possível nos argumentos e contra-argumentos dos alunos. Todos os pares (e alguns alunos individualmente) apresentaram descobertas para toda a turma. Referem-se, a seguir, as diversas conjeturas, pela ordem que foram apresentadas pelos alunos, indicando aspetos do ambiente da sua discussão e validação. Adiante-se que, genericamente, os alunos souberam apresentar e defender os seus raciocínios e, embora em menor grau, souberam ouvir e compreender as opiniões dos outros.

Conjetura 1. A primeira relação foi apresentada pelo António e pelo João, afirmando que os números representados no triângulo de Pascal "são todos números naturais". Todos aceitaram imediatamente esta conclusão sem discussão.

Conjetura 2. O Carlos e o Fernando associaram potências de base 2 aos números existentes nas linhas do triângulo. Verificaram que, em cada linha, a soma dos números correspondia a uma potência de base 2 e que o expoente da potência coincidia com o número da linha: "$1=2^0$; $1+1=2=2^1$; $1+2+1=4=2^2$; $1+3+3+1=8=2^3$; $1+4+6+4+1=16=2^4$; $1+4+6+10+6+4+1=32=2^5$" e assim sucessivamente. Os alunos basearam a apresentação da sua descoberta no registo escrito que aparece na Figura 2:

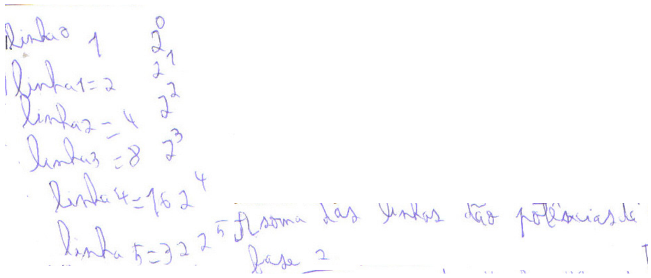

Figura 2: Explicação do Carlos e do Fernando.

Esta conclusão apenas foi estabelecida por outro par e, por isso, levantou muitas dúvidas e solicitação de esclarecimentos. A Berta interrogou "potências?", dizendo não ter entendido o que foi dito, e o Rodrigo exclamou "mas 2^0 vai dar mesmo 1?!". O Carlos esclareceu que "quando o expoente [de uma potência] é zero o resultado é sempre 1". A conjetura acabou por ser validada pela generalidade dos alunos, apesar das reservas que suscitou em alguns deles.

Conjetura 3. A Berta e a Rosa verificaram que, nas diagonais 2 do triângulo, aparecia a sequência dos "números naturais: 1, 2, 3, 4, 5, 6...". Esta conclusão também foi estabelecida pela generalidade dos pares, sendo validada por todos.

No entanto, como era bastante evidente, ajudou a dispersar a atenção da turma da explicação que estava a ser dada e a permitir que muitos alunos falassem ao mesmo tempo. Esta situação pode constituir uma dificuldade acrescida na gestão do trabalho de caráter investigativo. Um ambiente em que todos falam simultaneamente não é o mais adequado para um processo de prova e validação de conjeturas, pois cada um tem de saber ouvir os argumentos envolvidos para depois os poder aceitar ou refutar . É muito importante cada um formular as suas descobertas, mas também é muito importante ouvir e compreender as descobertas dos outros, mantendo uma postura adequada no sentido de não "contaminar" negativamente o ambiente de trabalho (Boavida, 2005).

Conjetura 4. A Célia e o Nuno descobriram a lei geral de formação associada ao triângulo de Pascal, que permite "continuar a escrever" os números em cada linha, conhecidos os números da linha anterior, registando a afirmação da Figura 3:

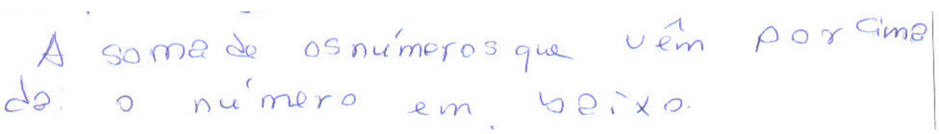

Figura 3: Conjetura da Célia e do Nuno.

O registo escrito não está totalmente claro, mas os dois alunos fizeram uma apresentação muito convincente quando trabalharam diretamente no triângulo (ver Figura 4). A Célia, apontando no triângulo, "este com este dá este, e podemos fazer isto para todos os números", convenceu rapidamente os colegas da descoberta do par, ajudando à sua aceitação por todos. Por exemplo, o Rodrigo, entendendo a lei geral de formação, concluiu com muita convicção: "Ah! Então podemos continuar o triângulo de Pascal, que nunca mais acaba".

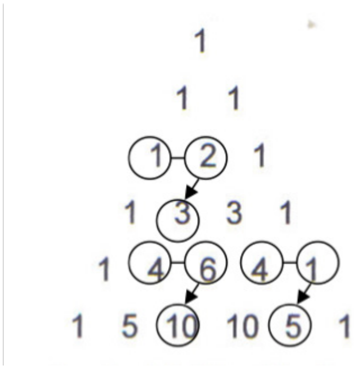

Figura 4: Esquematização da explicação da Célia.

Como foi visível em muitas situações da aula, os alunos sentem-se mais à vontade para registar, explicar e justificar as conjeturas oralmente do que recorrer a uma forma escrita (Chamoso & Rawson, 2001). A forma escrita exige um maior nível de estruturação das ideias, que se pretendem transmitir, originando mais dificuldades na sua concretização e em torná-las compreensíveis para os outros. Também se verificou que os alunos se sentem mais à vontade quando podem recorrer a um esboço ou representação gráfica.

Conjetura 5. O Rui, "não sendo um aluno muito brilhante a Matemática" na opinião da professora da turma, estabeleceu uma relação entre os números da diagonal 3 (1, 3, 6, 10, 15, 21...). Descobriu que "3=1+2 ; 6=3+3 ; 10=6+4 ; 15=10+5 ; 21=15+6...", ou seja, entre números consecutivos da sequência é necessário adicionar "1" à diferença anterior. Esta descoberta exigiu-lhe uma boa compreensão do trabalho numérico para detetar e compreender relações entre os números de um sequência e captar o padrão envolvido. Apesar do texto que elaborou para registar a descoberta estivesse bastante imperfeito e incompleto, quando apresentou oralmente e defendeu a sua conjetura perante a turma, o Rui foi facilmente compreendido por todos, que validaram a sua descoberta. O esquema, utilizado na apresentação em disposição vertical, pode ser visto na Figura 5.

+2 +3 +4 +5 +6 +7 (...)

1 3 6 10 15 21 28 (...)

Figura 5: Esquema usado pelo Rui.

Esta descoberta do Rui realça características essenciais das tarefas de natureza mais aberta ou exploratória relacionadas com a possibilidade de se seguirem "caminhos" com (mais) sentido e significado para cada um e de contactar com os temas de maneiras diversificadas. Este tipo de tarefas pode, então, proporcionar aos alunos com mais dificuldades na aprendizagem da matemática uma melhor compreensão dos conceitos, representações e procedimentos matemáticos, de modo a sentirem-se mais autónomos e confiantes nos seus desempenhos (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998).

Conjetura 6 (não validada). Carolina e Hugo referiram que "o segundo número de cada linha é uma potência de 2". Esta afirmação foi imediatamente contestada por muito alunos, que indicaram o exemplo do número 3 da linha 3 para contrariar a conjetura formulada. A aceitação deste contraexemplo invalidou imediatamente a afirmação produzida.

Na matemática, a utilização de um contraexemplo é, em muitas situações, de uma grande importância (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). A existência de apenas um caso que não verifique uma dada afirmação serve para provar que não é verdadeira. Esta ideia é fundamental no processo de prova e validação, pois basta um único exemplo para inviabilizar uma generalização. Por esta razão, num ambiente de trabalho investigativo, é preciso ter sempre presente a necessidade de confirmar uma determinada conjetura para um número adequado de casos já que a "regra" tem de ser verificada em todos os casos.

Conjetura 7. Como a conjetura anterior não foi validada, todos acordaram que a Carolina e o Hugo apresentassem outra possibilidade. Assim, os dois alunos referiram que "se obtém o número da diagonal adicionando os dois últimos números de cada linha". Esta segunda afirmação, bastante evidente, não foi contestada por qualquer aluno e, assim, foi aceite rapidamente por todos.

Conjetura 8. A Paula e a Teresa formularam uma conjetura, apoiando-se no conceito de simetria e admitindo que o triângulo de Pascal tem simetria (neste caso, simetria de reflexão). Considerando um "risco [eixo de simetria]" no triângulo (ver Figura 6), verificaram que os números são iguais de um e do outro lado do eixo, "mantendo as distâncias como num espelho". Como em outros casos, o registo escrito produzido não está muito perfeito, mas a explicação apoiada no quadro com a sinalização do eixo de simetria e a indicação dos números, "este e este, os valores são os mesmos dos dois lados", foi clarificadora do raciocínio seguido, contribuindo para a validação coletiva quase imediata.

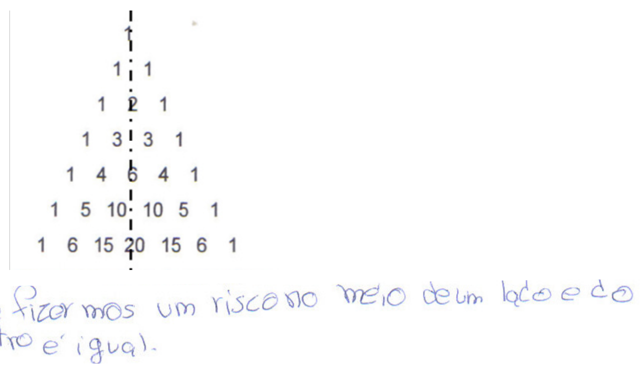

Figura 6: Explicação da Paula e da Teresa.

Conjetura 9 (aperfeiçoada). A Cristina e o Rodrigo também fizeram associações ao conceito de simetria. Verificaram que, numa linha qualquer, os números podem ser lidos da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita, como se vê na Figura 7.

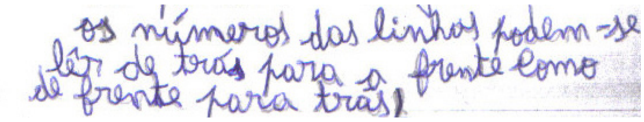

Figura 7: Conjetura da Cristina e do Rodrigo.

Os dois alunos apresentaram o exemplo das linha 3 e 5: "na linha 3 temos 1, 3, 3, 1 e 1, 3, 3, 1 [invertendo o sentido da indicação]... os números são os mesmos. Na linha 5 temos 1, 5, 10, 10, 5, 1 e 1, 5, 10, 10, 5, 1". Os restantes alunos confirmaram esta ideia, mas a Gabriela acrescentou: "claro, chegamos sempre a um número que é uma capicua". O termo "capicua" levantou dúvidas a alguns alunos, tendo o Jorge perguntado: "Capicua? O que é isso?". Imediatamente, outra aluna, a Gabriela, respondeu: "Olha, escreve cento e vinte e um [121]. Podes ler de um lado e do outro que dá sempre cento e vinte e um. É capicua!". Este diálogo não teve qualquer intervenção da professora da turma e a explicação da Gabriela foi claramente entendida por Jorge.

Esta situação destaca bem a importância da comunicação no trabalho proporcionado pelas investigações matemáticas. Previsivelmente, a aluna teria uma maior dificuldade em responder e explicar se a professora tivesse pedido uma definição de capicua (ou número palíndromo). O recurso a um exemplo ajudou a Gabriela a comunicar sobre uma noção matemática e a ser bem compreendida pelo Jorge e pelos restantes pares. Por vezes, os alunos compreendem melhor o discurso [correto] de um seu colega do que o discurso do professor.

Entretanto, como ninguém contestou a afirmação da Gabriela, eu decidi intervir para ajudar na discussão. Disse-lhe que não tinha percebido bem o seu argumento e pedi-lhe para explicar melhor a afirmação feita. A aluna apresentou a justificação dando o exemplo das linhas 2 e 3: "na linha 2 temos 1, 2, 1 que dá 121 que é uma capicua; na linha 3 dá o mesmo: 1, 3, 3, 1 dá 1331". Eu repliquei: "é verdade, mas na linha 5 aparece 1, 5, 10, 10, 5, 1; se eu fizer a leitura pela esquerda dá 15101051, que não é uma capicua...". Gabriela ficou surpreendida, pensou e reconheceu então que a regra, de facto, não funcionava para todas as linhas. Depois, pensando melhor, reformulou a sua conjetura inicial, afirmando que "se os números das linhas só tiverem um algarismo [da linha 0 à linha 4] já não há problema; é mesmo uma capicua".

Esta observação da Gabriela é bastante pertinente pois, embora o triângulo verifique a simetria dos números em cada linha (conforme visto na conjetura 8), esta simetria só pode ser estendida à escrita dos números no caso das linhas que contenham apenas números de um algarismo (basta ter em conta que $10 \neq 01$).

Este episódio da aula reforça o grande cuidado a ter na formulação e na validação de uma conjetura. Não basta verificar a conjetura uma ou duas vezes, mas torna-se necessário testá-la para muitos casos de forma a não restarem dúvidas da sua veracidade (Boavida, 2005). Este pareceu ser um dos principais problemas na prova de algumas descobertas feitas, dado que muitos alunos aceitaram facilmente uma generalização baseada apenas num ou em dois casos.

Conjetura 10. O Manuel e Telma descobriram que, na linha 7, retirando os extremos, apenas existem múltiplos de 7 (ver Figura 8). De facto, sem os números 1, os números que restam [7, 21, 35] são múltiplos de 7. Como esta conclusão apenas foi registada por este par, outros alunos questionaram se a regra funcionava para outras linhas. Os dois alunos não souberam responder e confirmaram a não verificação da descoberta em outras linhas. Por consequência, o processo de validação não despertou grande curiosidade nos restantes alunos, embora ninguém contestasse a verificação apresentada.

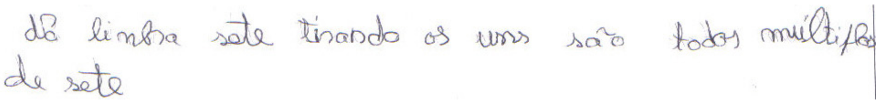

Figura 8: Verificação feita pelo Manuel e pela Telma.

Em rigor, em vez de formularem uma conjetura, os alunos apenas fizeram uma verificação. Poderia ter sido um caminho a continuar, pois esta conclusão pode ser generalizada para as linhas em que o segundo elemento é um número primo [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17...] — se for p esse número, nessa linha, excluindo os extremos, apenas aparecem múltiplos de p. Este aspeto é muito importante na resolução de tarefas de natureza mais aberta ou exploratória, pois não é possível seguir todos os caminhos possíveis ou, mesmo, os caminhos mais evidentes. Em situação de aula, o caminho a seguir dependerá, em grande medida, tanto do conhecimento e curiosidade dos alunos como da disponibilidade e atenção do professor.

Conjetura 11. A Carla e a Sara explicaram que "na linha 0, temos um número; na linha 1, temos dois números; na linha 2, temos três números; na linha 3, temos quatro números e assim sucessivamente. Cada linha tem mais um elemento que a linha anterior". Embora a conclusão fosse bastante evidente, as alunas apresentaram a confirmação para um número significativo de linhas o que lhes possibilitou fazer a generalização com segurança. Todos aceitaram e validaram rapidamente a conjetura das duas alunas.

Conjetura 12 (não validada). O Manuel foi ao quadro e apresentou a sua descoberta, relacionando-a com as potências de base 1 (ver Figura 9). Justificou-a escrevendo "$1^1=1$; $1^2=2$; $1^3=3$; $1^4 = 4$"

Figura 9: Explicação do Manuel.

Mas, apenas o Manuel tinha começado a explicar o seu raciocínio, já a Telma argumentava que a afirmação não podia ser validada porque "1^2 não é igual a 2, é igual a 1, as potências de base 1, são sempre iguais a 1 porque $1^2=1x1=1$; $1^3=1x1x1=1$". O Manuel, apercebendo-se imediatamente do seu erro, nem contra-argumentou aceitando a justificação da Telma.

Este erro é muito frequente quando os alunos resolvem tarefas envolvendo potências. Calculam a potência do número efetuando a multiplicação da base pelo expoente, esquecendo-se que uma potência é um produto de fatores iguais, em que a base é o fator que se repete e o expoente indica o número de vezes que esse fator se repete. Por isso, tarefas que exijam justificações ou validação de resultados podem ajudar os alunos a evitar esses erros e a consolidar os procedimentos corretos.

Conjetura 13. O Rodrigo afirmou que "o número da linha é sempre dado pelo segundo número dessa linha". Todos acharam que a afirmação era demasiado evidente, "isso logo se vê!", e o processo de validação foi muito rápido.

Conjetura 14. A última conjetura foi formulada e justificada pelo Hugo através do esquema da Figura 10. Trata-se da descoberta do padrão "taco de hóquei" — a soma dos elementos da diagonal está sempre na diagonal seguinte na linha imediatamente abaixo daquela em que está o último número que foi adicionado.

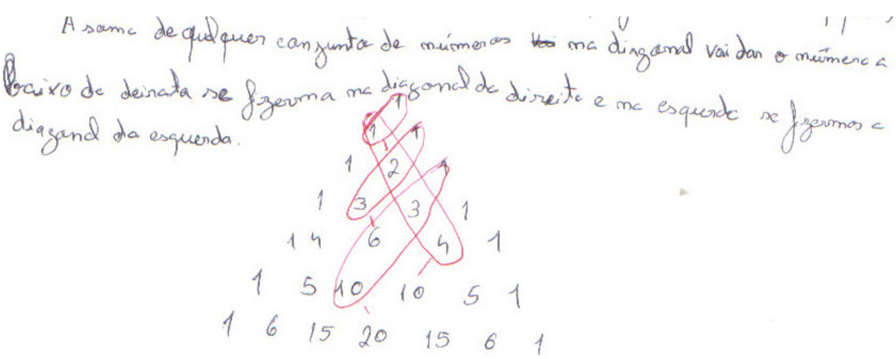

Figura 10: Conjetura do Hugo.

A generalidade dos alunos não compreendeu imediatamente a explicação do Hugo. Também alguns alunos não aceitaram a conclusão porque o esboço do triângulo de Pascal que haviam construído na sua folha de registos não estava “bem organizado” e correto. Consequentemente, os processos de discussão e validação desta conjetura não foram muito fáceis, mas a explicação do Hugo, recorrendo ao triângulo e assinalando o conjunto de números com uma cor, ajudou a clarificar a afirmação.

Em tarefas desta natureza, o processo de convencer os outros da veracidade de uma afirmação obriga os alunos a serem organizados e rigorosos nos registos escritos para que estes possam, de facto, ajudar a explicar ou compreender melhor uma dada situação. Muitas vezes, as conjeturas são mais fáceis de aceitar ou refutar quando a sua apresentação se apoia num esboço ou diagrama.

Em síntese, os alunos apresentaram e discutiram um número significativo de conjeturas a partir do triângulo de Pascal: umas mais evidentes e baseadas na observação direta, como as conjeturas 1, 3, 6, 7, 9, 11, 12 e 13, e outras mais sofisticadas e baseadas em ligações entre conceitos ou procedimentos matemático, como as conjeturas 2, 4, 5, 8, 10 e 14. No entanto, esta possível “categorização” não pretende hierarquizar ou comparar as conjeturas dos alunos, dado que cada uma delas teve significado matemático para quem a estabeleceu (Pires, 2011). Para reforçar este aspeto, recorde-se o processo de validação da conjetura 9, integrada no grupo das conjeturas mais evidentes, que proporcionou compreensões matemáticas muito significativas.

4. A concluir

Uma grande parte da experiência matemática vivida pelos alunos na escola passa pelo trabalho que lhes é proposto na aula de matemática, ou seja, pelas tarefas matemáticas que vão resolvendo. É desta forma que se vão apropriando dos aspetos essenciais da cultura e do raciocínio matemáticos de forma a tornarem-se matematicamente competentes para enfrentar as situações cada vez mais complexas do dia-a-dia. Por isso, as tarefas de natureza não rotineira, como as investigações, podem permitir formas de trabalho desafiantes e apropriadas para dar mais sentido e significado à aprendizagem.

Como ressalta da experiência de aprendizagem, num ambiente de investigações matemáticas, os alunos têm possibilidade de desenvolver um trabalho muito próximo daquele que é produzido pelos matemáticos: face a uma dada situação a que pretendem dar resposta, têm de colocar questões, formular conjeturas, testar essas conjeturas e validar os resultados. Ora, este processo de prova e validação é também uma prática social, pois os alunos têm de argumentar e comunicar aos outros os seus resultados, eventualmente contra-argumentar, para que os resultados possam vir a ser validados por todos. Assim, este tipo de tarefas, apelando a processos matemáticos complexos, permite o contacto com dimensões essenciais do conhecimento matemático, contribuindo, deste modo, para o desenvolvimento da competência matemática dos alunos e proporcionando aprendizagens com (mais) compreensão.

Concluo, dando voz à professora da turma. Na reflexão sobre as aprendizagens que os seus alunos fizeram, considerou que o trabalho realizado foi “muito rico” e que este tipo de tarefas abre mais possibilidades de compreensão e de sucesso aos alunos, especialmente àqueles que revelam mais dificuldades. De facto,

“mesmo os alunos mais fracos conseguiram descobrir relações no triângulo de Pascal o que lhes permitiu desenvolver, de certo modo, uma atitude mais positiva face à matemática e de maior apreço por esta ciência. (...) A tarefa revelou-se uma atividade em que os alunos se envolveram com muito empenho. Penso que as tarefas mais estimulantes, de descoberta e em que o aluno tem um papel mais ativo são as que permitem construir de maneira mais significativa aprendizagens matemáticas. A resolução da atividade deu aos alunos a oportunidade para explicar, discutir e testar conjeturas. Penso que a capacidade para dizer o que se deseja e entender o que se ouve deve ser um dos resultados de um bom ensino da matemática.”

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação.

Associação de Professores de Matemática. (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Associação de Professores de Matemática. (1998). *Matemática 2001: diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática & Instituto de Inovação Educacional.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: olhares sobre o trabalho do professor. In J. Brocardo, F. Mendes & A. M. Boavida (Orgs.), *XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática – Atas* (pp. 13-43). Setúbal: Associação de Professores de Matemática.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Chamoso, J., & Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas. *SUMA*, *36*, 33-41.

Departamento da Educação Básica. (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação.

Direção-Geral do Ensino Básico e Secundário. (1990). *Ensino básico: programa do 1.º ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I., & Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. In J. P. Ponte et al. (Orgs.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 59-81). Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação

Ministério da Educação e Ciência. (2013). *Programa de matemática para o ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática & Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Oliveira, H., & Borralho, A. (2014). As tarefas e a aprendizagem dos alunos. In J. Brocardo et al. (Eds.), *Investigação em educação matemática 2014 – Tarefas matemáticas* (pp. 149-156). Setúbal: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Pires, M. V. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula de matemática: práticas de uma professora de matemática. *Quadrante*, *20*(1), 31-53.

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. In *Atas do ProfMat 2003* (pp. 25-39). Santarém: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, *7*(2), 41-70.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional