

# VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DE UM MODELO TEÓRICO PARA CÁLCULO DE ELEVADOS GRADIENTES TÉRMICOS EM ESTRUTURAS DE PAREDE FINA

Fonseca, E.M.M.<sup>1</sup>; Oliveira, C.A.M.<sup>2</sup>; Melo, F.Q.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Prof. Adjunta, <sup>2</sup>Prof. Associado, <sup>3</sup>Prof. Auxiliar

<sup>1</sup>Escola Superior de Tecnologia e de Gestão de Bragança do IPB

<sup>2,3</sup>Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial da FEUP



## RESUMO

*É apresentada uma formulação baseada no método dos elementos finitos para modelação de estruturas de parede fina para cálculo de temperaturas ao longo da espessura. Com base na teoria de condução de calor em corpos sólidos, foi possível desenvolver uma metodologia de cálculo simplificada para situações deste género. Pretende-se ainda validar o modelo teórico desenvolvido através da execução de ensaios como será demonstrado.*

## 1- INTRODUÇÃO

É frequente a exposição de elementos estruturais a solicitações térmicas agressivas, quer climáticas quer devidas a elevadas temperaturas de funcionamento ou mesmo à ocorrência de incêndios em instalações. É importante o conhecimento prévio do campo de temperaturas a que um dado elemento estrutural possa estar sujeito, de forma a minimizar ou prevenir possíveis situações de risco.

Pretende-se desenvolver um modelo teórico com base no método de elementos finitos, utilizando elementos sólidos e planos, capaz de modelar qualquer tipo de estrutura de parede fina, para obtenção de campos de temperaturas. Considera-se assim a análise e cálculo da distribuição da temperatura num corpo sólido através das leis gerais da transmissão de calor, por condução, convecção e radiação. Formula-se a equação de calor, suas condições iniciais e de fronteira, usando o método dos resíduos pesados.

Finalmente apresentam-se os resultados obtidos com o programa desenvolvido, através de uma análise não-linear em regime transiente e comparam-se esses resultados com os obtidos experimentalmente num modelo real em estudo.

## 2 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS À EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR

A equação básica que governa a transferência de calor através de um sólido, para um material isotrópico é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \dot{Q} = \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

onde:  $\dot{Q}$  - é a quantidade de calor gerado internamente por unidade de volume e tempo;  $\rho$  - a densidade;  $c_p$  - o calor específico e  $\lambda$  - a condutividade térmica.

A equação diferencial da condução do calor (1) tem que satisfazer às condições iniciais e de fronteira do problema.

Para domínios axissimétricos em regime transitório, a mesma equação define-se por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \dot{Q} = \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2)$$

sendo:  $r$  - a coordenada radial e  $z$  - a coordenada axial.

O método dos resíduos pesados permite passar da forma diferencial das equações à sua forma integral. A aplicação do método dos elementos finitos permite obter um sistema global de equações, com a seguinte forma:

$$\underline{K} \underline{\theta} + \underline{C} \dot{\underline{\theta}} = \underline{F} \quad (3)$$

Para elementos sólidos ou planos a representação dos elementos das matrizes  $K$ ,  $C$  e vector  $F$ , no domínio cartesiano, é função de:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dy dz + \quad (4.a)$$

$$+ \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_h^e} N_i N_j h_{cr} d\Gamma_h^e$$

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} \rho c_p N_i N_j dx dy dz \quad (4.b)$$

$$F_i = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} N_i \dot{Q} dx dy dz - \sum_{e=1}^p \int_{\Gamma_q^e} N_i \bar{q} d\Gamma_q^e + \quad (4.c)$$

$$+ \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_h^e} h_{cr} \theta_\infty N_i d\Gamma_h^e$$

Para elementos axissimétricos, no domínio axissimétrico, os termos da equação (3) representam-se na forma:

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^E 2\pi \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_i}{\partial r} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \lambda \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) r dr dz + \quad (5.a)$$

$$+ \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_h^e} N_i N_j h_{cr} r d\Gamma_h^e$$

$$C_{ij} = \sum_{e=1}^E 2\pi \int_{\Omega^e} \rho c_p N_i N_j r dr dz \quad (5.b)$$

$$F_i = \sum_{e=1}^E 2\pi \int_{\Omega^e} N_i \dot{Q} r dr dz - \sum_{e=1}^p \int_{\Gamma_q^e} N_i \bar{q} r d\Gamma_q^e + \quad (5.c)$$

$$+ \sum_{e=1}^n \int_{\Gamma_h^e} h_{cr} \theta_\infty N_i r d\Gamma_h^e$$

com:  $E$  - o número total de elementos;  $n$  - o número de elementos com fronteira do tipo  $T_h$  e  $p$  - o número de elementos com fronteira do tipo  $T_q$ .

O campo de temperaturas nodais  $\theta$ , no caso de um elemento estrutural de parede fina, é obtido no plano médio do elemento, para qualquer instante de tempo,  $t$ . Admitiu-se que o fluxo de calor existe na direcção perpendicular ao plano do elemento, desprezando o fluxo em qualquer

direcção ao longo desse plano, por se considerar o modelo de parede fina. As temperaturas nas superfícies que delimitam essa parede fina são obtidas em função das equações a seguir apresentadas, função das várias condições de fronteira possíveis, figura 1. Para tal admitiu-se que a variação do campo de temperaturas ao longo da espessura é linear, considerando a taxa de transferência de calor por unidade de área proporcional ao gradiente da temperatura.

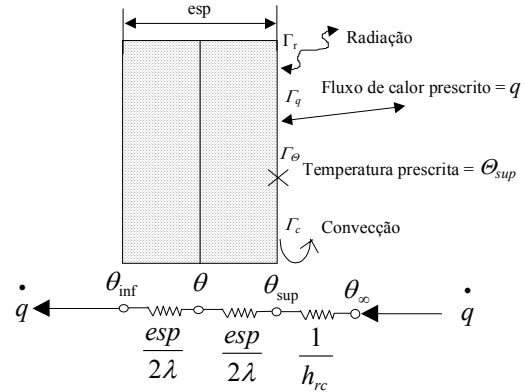


Fig. 1 - Trocas de calor no elemento de parede fina.

No caso de condições fronteira do tipo convectivo e/ou radiactivo, o cálculo do campo de temperaturas na superfície superior é obtida em função da seguinte expressão:

$$\theta_{sup} = \frac{\left( h_{rc} \theta_\infty + \frac{2\lambda\theta}{esp} \right)}{\left( h_{rc} + \frac{2\lambda}{esp} \right)} \quad (6)$$

sendo:  $h_{rc}$  - o coeficiente de convecção e/ou radiação;  $\theta$  - temperatura no plano médio;  $\theta_\infty$  - a temperatura ambiente;  $\lambda$  - a condutividade térmica e  $esp$  - a espessura do elemento estrutural.

Se a condição imposta for um campo de temperaturas prescritas, então a temperatura na superfície exterior é função unicamente do valor prescrito:

$$\theta_{sup} = \theta_{prescrita} \quad (7)$$

No caso de se impor um fluxo de calor  $\dot{q}$ , o cálculo da temperatura será como enunciado na equação:

$$\theta_{sup} = \theta + \dot{q} \frac{esp}{2\lambda} \quad (8)$$

Partindo de uma variação linear entre as superfícies externas, ao longo da espessura, o campo de temperaturas na

superfície inferior é determinado com base na seguinte equação:

$$\theta_{\text{inf}} = 2\theta - \theta_{\text{sup}} \quad (9)$$

## 2.1 - Imposição de condições fronteira numa das faces do elemento

Para imposição de condições fronteira numa das faces do elemento, o termo da equação (4.c), é representado através do cálculo do vector carregamento térmico, para o caso de modelação sólida ou modelação de estruturas planas finas (10.a) Para estruturas axissimétricas o termo da equação (5.c) é desenvolvido através da equação (10.b).

$$\begin{aligned} f_{i^{(e)}} &= -\int N_i \bar{q} d\Gamma_q + \int h_{cr} \theta_{\infty} N_i d\Gamma_{cr} = \\ &= -\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i \bar{q} J(\xi, \eta)^{(e)} d\xi d\eta + \\ &+ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i h_{rc} \theta^{\infty} J(\xi, \eta)^{(e)} d\xi d\eta = \\ &= -\sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} [N_i \bar{q} J(\xi, \eta)^e]_{p,q} W_p W_q + \\ &+ \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} [N_i h_{rc} \theta^{\infty} J(\xi, \eta)^e]_{p,q} W_p W_q \end{aligned} \quad (10.a)$$

$$\begin{aligned} f_{i^{(e)}} &= -\int N_i \bar{q} d\Gamma_q + \int h_{cr} \theta_{\infty} N_i d\Gamma_{cr} = \\ &= -2\pi \int_{-1}^{+1} N_i \bar{q} J(\xi)^{(e)} x d\xi + \\ &+ 2\pi \int_{-1}^{+1} N_i h_{rc} \theta^{\infty} J(\xi)^{(e)} x d\xi = \\ &= -2\pi \sum_{p=1}^{n_p} [N_i \bar{q} x J(\xi)^e]_p W_p + \\ &+ 2\pi \sum_{p=1}^{n_p} [N_i h_{rc} \theta^{\infty} x J(\xi)^e]_p W_p \end{aligned} \quad (10.b)$$

## 3 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Através de exemplos numéricos pretende-se testar o desempenho do modelo desenvolvido comparando-o com resultados experimentais.

Modelou-se por elementos finitos uma placa em aço através de elementos sólidos tridimensionais e planos, impondo-se a presença de calor numa das faces da placa, sendo a outra devidamente isolada. Modelou-se ainda por elementos finitos um tubo em aço através de elementos sólidos tridimensionais, planos, bidimensionais axissimétricos e unidimensionais

axissimétricos, sendo aquecido externamente e isolado no seu interior.

A evolução da temperatura ambiente segue uma variação linear no tempo, função da taxa de aquecimento imposta pelo sistema experimental a ser usado, equação (11).

$$\theta_{\infty} = 20 + 0.25 \times t \quad (11)$$

As propriedades do material variam com a temperatura conforme equações propostas no Eurocódigo3. Efectuou-se um estudo em regime transiente não-linear de forma a obter um campo de temperaturas até um instante final de 3600 segundos, para ambos os casos. Os resultados obtidos são evidenciados em forma de gráficos e comparados com os obtidos experimentalmente.

### 3.1 – Placa: caso 1

A figura 2 representa a geometria do modelo para a placa de aço. A placa numa das suas faces está sujeita a condições de fronteira de convecção e radiação, sendo isolada na outra face. Este modelo é discretizado por elementos finitos e utilizado no programa desenvolvido.

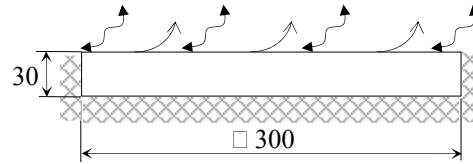


Fig. 2 – Geometria da placa e respectivas condições de fronteira.

As figuras seguintes pretendem mostrar algumas das fases de realização do ensaio para o modelo experimental. Foram aquecidas duas placas de aço através da colocação de resistências eléctricas numa das suas faces, figura 3. As placas foram devidamente isoladas conforme se observa na figura 4.



Fig. 3 – Preparação do ensaio: colocação de resistências eléctricas.



Fig. 4 – Preparação do ensaio: colocação da manta de isolamento.

Para obtenção e leitura dos resultados experimentais foram colocados quatro termopares de forma a medir a temperatura em pontos distintos da superfície superior e inferior das placas, figuras 5 e 6.



Fig. 5 – Resultados experimentais ao longo do ensaio.



Fig. 6 – Instante final.

Os gráficos que a seguir se apresentam evidenciam a evolução do campo de temperaturas obtido nas superfícies exteriores da placa. O gráfico da figura 7 representa a evolução da temperatura na superfície que é aquecida, com base nos dados numéricos e experimentais.

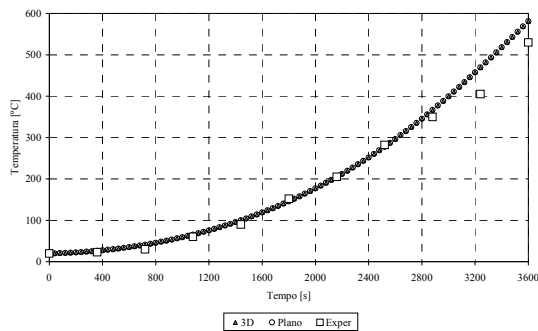


Fig. 7 – Campo de temperaturas obtido na superfície superior: resultados numéricos e experimentais.

O gráfico da figura 8 representa a evolução da temperatura na superfície média, com base unicamente nos dados numéricos.

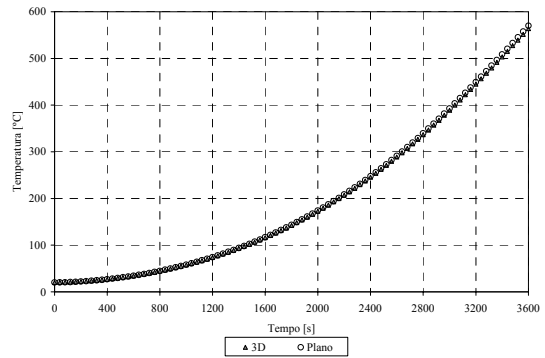


Fig. 8 – Campo de temperaturas obtido na superfície média do modelo numérico.

A figura 9 representa a evolução da temperatura na superfície isolada, com base nos dados numéricos e experimentais.

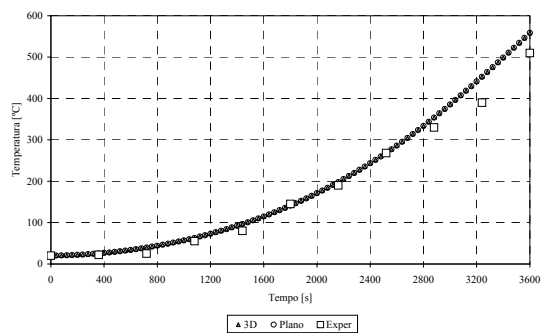


Fig. 9 – Campo de temperaturas obtido na superfície inferior do modelo: resultados numéricos e experimentais.

O erro numérico obtido pela equação (12), determinado com a formulação do elemento plano em função dos resultados obtidos com o modelo sólido, representa-se no gráfico da figura 10, em cada superfície de leitura na placa.

$$erro = \frac{|\theta_{2D} - \theta_{3D}|}{\theta_{3D}} \quad (12)$$

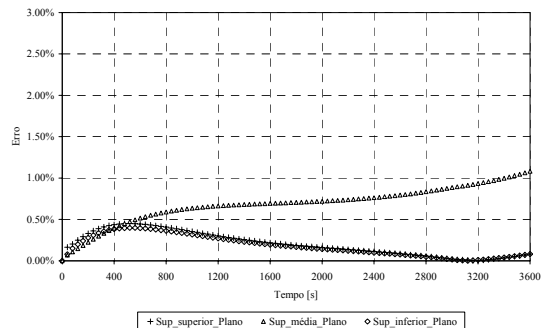


Fig. 10 – Erro numérico obtido do campo de temperaturas em relação ao modelo sólido.

O gráfico da figura 11 permite verificar a variação da temperatura entre as superfícies externas da placa, tanto para o modelo real como para o modelo numérico. Apesar da tendência verificada na

aproximação dos valores experimentais aos numéricos, verifica-se que num período de tempo inicial essa discrepância é maior. Uma das possíveis causas pode estar relacionada com o facto de que à medida que a placa aquece terá um diferencial de temperaturas mais uniforme conduzindo a uma variação térmica mais próxima da obtida numericamente.

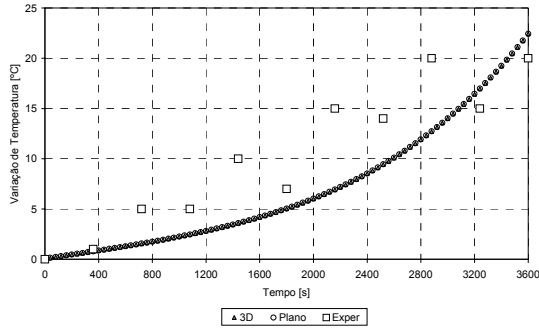


Fig. 11 – Variação da temperatura na espessura para cada modelo em estudo: numérico e experimental.

Os resultados apresentados nas figuras seguintes foram obtidos para um instante de tempo de 3600 segundos, usando um programa de pós-processamento desenvolvido para o efeito, de forma a permitir verificar o gradiente térmico tanto na modelação sólida como plana.

A figura 12 representa o modelo sólido em estudo.

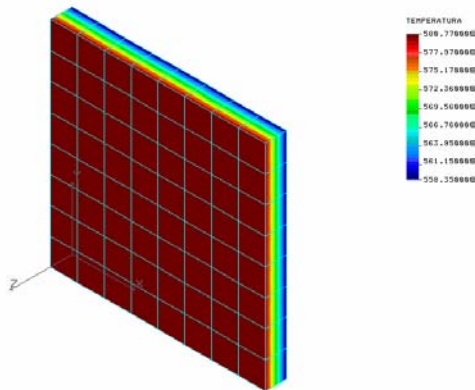


Fig. 12 – Resultado numérico das temperaturas para o elemento sólido, t=3600[s].

As figuras 13, 14 e 15 representam a distribuição do campo de temperaturas nas superfícies superior, média e inferior do modelo plano, respectivamente.

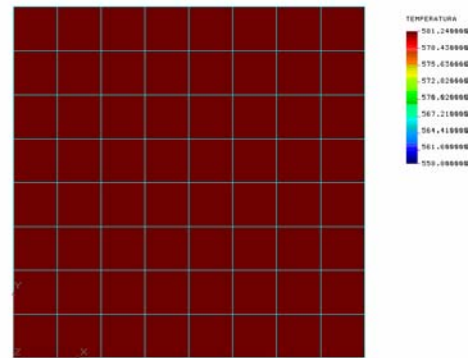


Fig. 13 – Resultado numérico das temperaturas para o elemento plano na superfície exterior, t=3600[s].

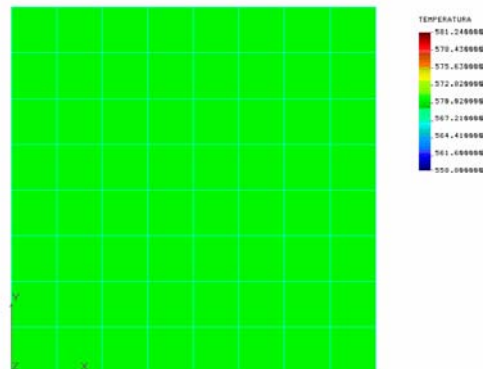


Fig. 14 – Resultado numérico das temperaturas para o elemento plano na superfície média, t=3600[s].

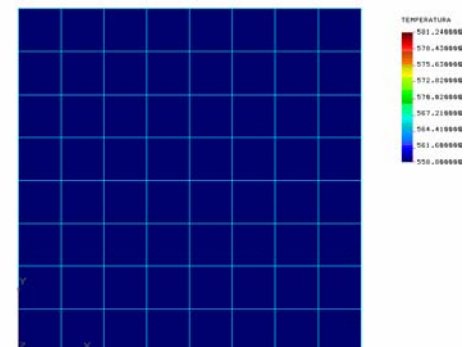


Fig. 15 – Resultado numérico das temperaturas para o elemento plano na superfície interior, t=3600[s].

### 3.2 – Tubo: caso 2

A figura 16 representa a geometria do tubo de aço e respectivas condições fronteira de convecção e radiação, a ser utilizado no programa de elementos finitos. O tubo é isolado internamente.

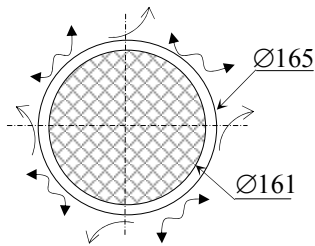


Fig. 16 – Geometria do tubo e respectivas condições de fronteira.

O mesmo tipo de ensaio será repetido para duas estruturas tubulares de aço, conforme se pode identificar pelas figuras seguintes. Os resultados experimentais são comparados com os obtidos numericamente em elementos sólido, plano, bidimensional axissimétrico e unidimensional axissimétrico. Os tubos foram isolados internamente, tendo sido envolvidos externamente por resistências eléctricas de forma a efectuar o aquecimento simultâneo e uniforme em toda a sua extensão, figura 17.



Fig. 17 – Preparação do ensaio: colocação de resistências eléctricas e isolamento no interior do tubo.

Foram colocados quatro termopares para obtenção da leitura dentro e fora dos tubos, figuras 18 e 19.



Fig. 18 – Preparação do ensaio: colocação da manta de isolamento e termopares.



Fig. 19 – Resultados experimentais ao longo do ensaio.

A figura 20 evidencia o instante final de aquecimento.



Fig. 20 – Instante final.

Os gráficos que a seguir se apresentam evidenciam a evolução do campo de temperaturas obtido nas superfícies do tubo. O gráfico da figura 21 representa a evolução da temperatura na superfície que é aquecida, com base nos dados numéricos e experimentais.

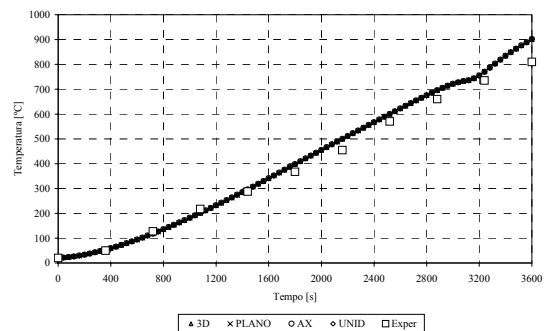


Fig. 21 – Campo de temperaturas obtido na superfície exterior: resultados numéricos e experimentais.

O gráfico da figura 22 representa a evolução da temperatura na superfície média, com base nos dados numéricos.

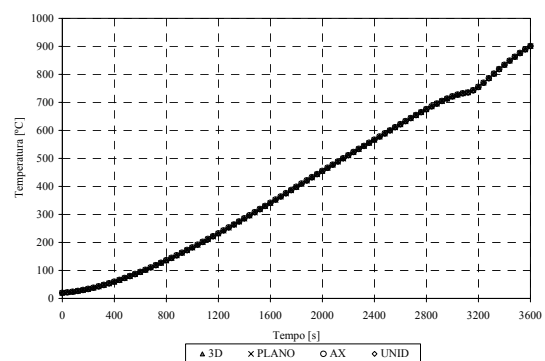


Fig. 22 – Campo de temperaturas obtido na superfície média do modelo numérico.

A figura 23 representa a evolução da temperatura na superfície interior do tubo isolada, com base nos dados numéricos e experimentais.

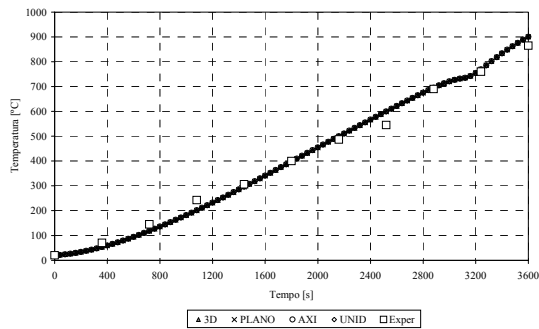


Fig. 23 – Campo de temperaturas na superfície interior do modelo: resultados numéricos e experimentais.

Para se verificar o erro numérico conforme a equação (12), função dos resultados obtidos com o modelo plano e unidimensional, em cada superfície de leitura no tubo, foi feita a comparação com o elemento sólido, figura 24.

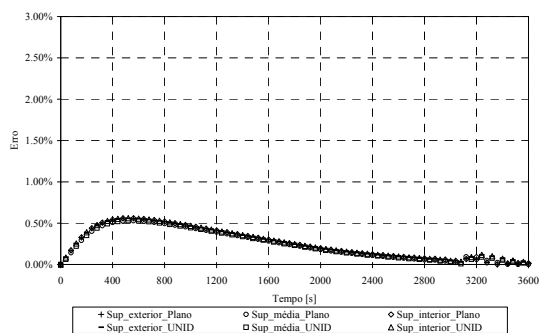


Fig. 24 – Erro numérico obtido do campo de temperaturas em relação ao modelo sólido.

A variação de temperatura neste modelo entre as superfícies externas e internas não é tão significativa, como se pode concluir dos gráficos apresentados anteriormente.

Os resultados das figuras 25 a 28 foram obtidos também para um instante de tempo de 3600 segundos, usando o mesmo programa de pós-processamento.

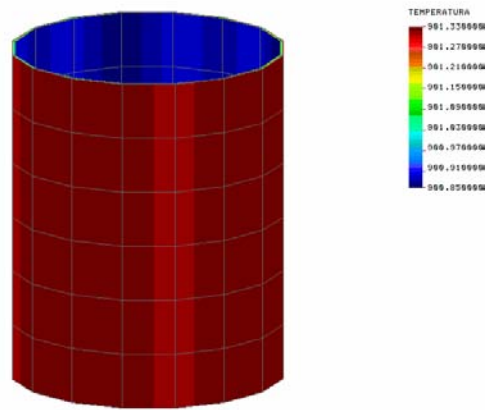


Fig. 25 – Resultado numérico das temperaturas para o elemento sólido,  $t=3600[s]$ .

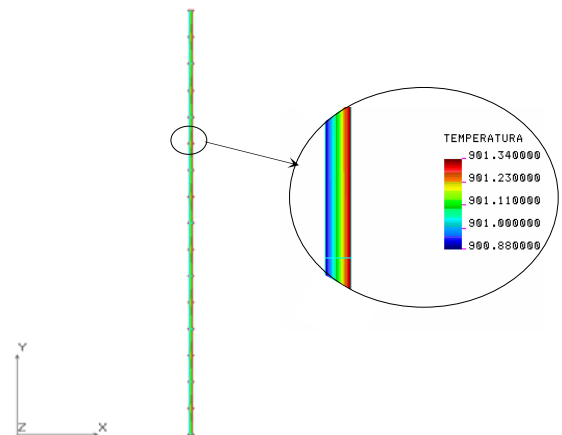


Fig. 26 – Resultado numérico das temperaturas para o elemento axissimétrico,  $t=3600[s]$ .

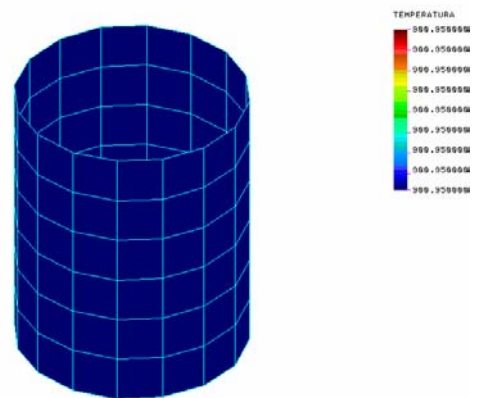


Fig. 27 – Resultado numérico das temperaturas para o elemento plano na superfície média,  $t=3600[s]$ .

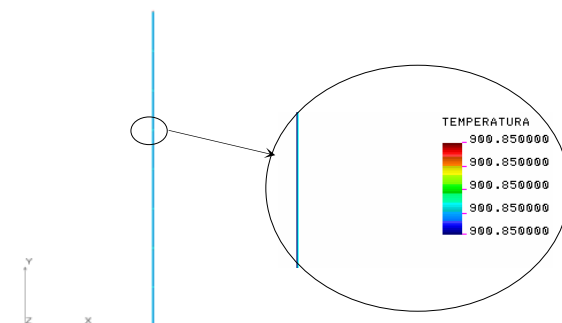


Fig. 28 – Resultado numérico das temperaturas para o elemento unidimensional,  $t=3600[s]$ .

#### 4 - CONCLUSÕES

Foram efectuados ensaios em modelos reais para obtenção de campos de temperaturas. Os mesmos modelos, nas mesmas condições, foram utilizados num programa de elementos finitos desenvolvido. Os resultados numéricos obtidos são comparáveis com os obtidos experimentalmente. De salientar a utilização de vários tipos de elementos finitos, mostrando um elevado desempenho nos vários resultados obtidos.

O modelo de cálculo matemático para obtenção do gradiente de temperaturas em elementos estruturais de parede fina, mostrou-se eficiente como se pode verificar no erro numérico obtido com a formulação tridimensional. Tendo em consideração a hipótese de desprezar o fluxo de calor em qualquer direcção ao longo do plano do elemento de parede fina, será de esperar que a obtenção do campo de temperaturas se aproxime do valor real para espessuras de elementos mais finos. Esta situação verifica-se através do cálculo do erro numérico nos casos em estudo.

Ficou ainda demonstrado que existe um gradiente térmico ao longo da espessura de elementos estruturais de parede fina, possível de quantificar.

#### REFERÊNCIAS

Fonseca, E.M.M., Program FEMSEF  
"Finite Element Modelling for

- Structures Exposed to Fire" - User's Manual, V2, ESTIG, Bragança, 2001
- Ugural, A.C., Stresses in Plates and Shells, McGraw/Hill, Inc., 1981
- Jawad, M.H., Theory and Design of Plate and Shell Structures, Chapman & Hall, 1994
- Flügge, W., Stresses in Shells, Springer-Verlag, 1973
- Oñate, E., Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1995
- Owen, D.R.J, Hinton, E., Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, 1980
- Comini, G., Giudice, S., Nonino, C., Finite Element Analysis in Heat Transfer, Taylor & Francis, 1976
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., The Finite Element Method, Vol.2, McGraw-Hill, 1991
- EUROCODE 3, Design of Steel Structures Part 1-2: General Rules - Structural Fire Design, ENV 1993-1-2:1995
- EUROCODE 1, Basis of Design and Actions on Structures Part 1-2: General Rules - Structural Fire Design, ENV 1991-2-2:1995
- Huang, H., Usmani, A., Finite Element Analysis for Heat Transfer, Springer-Verlag, 1994
- Krishnamoorthy, C.S., Finite Element Analysis, Tata Mc Graw-Hill, 1997
- Stasa, F.L., Applied Finite Element Analysis for Engineers, L.S. Fletcher, Series Editor, 1985