

# FENÓMENOS DE INSTABILIDADE EM ELEMENTOS TUBULARES SUBMETIDOS À COMPRESSÃO

Fonseca, E.M.M.<sup>1</sup>; Oliveira, C.A.M.<sup>2</sup>; Melo, F.Q.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instituto Politécnico de Bragança - ESTIG

<sup>2</sup>Faculdade e Engenharia da Universidade do Porto - DEMEGI

<sup>3</sup>Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Aveiro



## RESUMO

Neste artigo estuda-se o fenómeno de encurvadura por varejamento em elementos tubulares através dos resultados obtidos com um elemento finito de tubo, desenvolvido para análise não linear e com um programa comercial utilizando um elemento de viga com características não-lineares. Efectuaram-se ainda ensaios à temperatura ambiente em elementos tubulares, observando-se experimentalmente que a carga de colapso e o deslocamento lateral da estrutura apresentam comportamentos semelhantes aos resultados numéricos obtidos.

## 1- INTRODUÇÃO

A noção de estabilidade aparece associada ao conceito de equilíbrio de uma estrutura, caracterizada pelos valores dos deslocamentos dos seus pontos. Essa instabilidade pode surgir pela ocorrência de uma bifurcação de equilíbrio (instabilidade bifurcacional) ou pela ocorrência de um ponto limite (instabilidade por *snap-through*). O esforço de compressão tende a acentuar o efeito de curvatura em elementos estruturais. Os deslocamentos laterais que são produzidos traduzem o fenómeno de encurvadura por flexão ou por varejamento. Alguns elementos do tipo casca (calotes esféricas, arcos...) podem possuir um estado não linear de pré-encurvadura caracterizado por deslocamentos e rotações, estando a tensão crítica de bifurcação associada à ocorrência simultânea de dois modos de instabilidade: o modo axissimétrico (caracterizado pela não existência de semi-ondas circunferenciais) e o assimétrico (caracterizado pela existência

de semi-ondas longitudinais e circunferenciais), conforme se pode observar na figura 1.

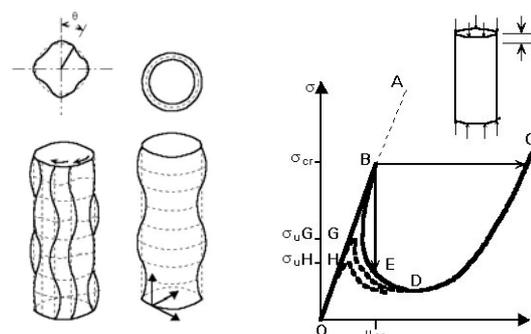


Fig. 1 - Modo axissimétrico e assimétrico. Comportamento de uma casca cilíndrica comprimida. (Cortesia ESDEP-CD Electronic version)

A tensão de colapso de uma casca cilíndrica pode ser significativamente inferior à correspondente tensão crítica, dado o facto do comportamento inicial de pós-encurvadura das cascas cilíndricas ser extremamente instável, o que implica uma grande sensibilidade às imperfeições

geométricas, como referido por Reis e Camotim, 2001.

Existem elementos estruturais em que o estado de pré-encurvadura não pode ser determinado com base numa teoria geometricamente linear, nomeadamente: arcos, calotes esféricas, cascas cilíndricas, em que a relação comprimento/raio é pequena. Para este tipo de estruturas a trajectória de equilíbrio não é linear desde o início do carregamento e a instabilidade ocorre por *snap-through* quando se atinge o ponto limite, (trajectória BF do gráfico da figura 1).

No caso em que a relação comprimento/raio é muito grande, a deformação não envolve encurvadura localizada da secção recta e o estudo da instabilidade pode ser efectuado com base na resistência à encurvadura por varejamento, conforme regras apresentadas em códigos e regulamentos.

Na figura 2 observam-se estes dois tipos de fenómenos, conforme ensaios realizados em estruturas tubulares.



Fig. 2 - Encurvadura localizada e por varejamento.

No projecto de elementos estruturais cilíndricos submetidas a esforços de compressão, pode-se utilizar a recomendação da ECCS (*European Convection for Constructional Steelwork*), 1988. Este método é válido para cilindros impedidos de se deslocarem numa das extremidades (na direcção radial e tangencial) e para uma geometria que não exceda o seguinte limite geométrico:  $L/r \leq 0.95\sqrt{r/t}$ . Este limite é imposto para impossibilitar a interacção da encurvadura por varejamento em colunas, com a instabilidade localizada de cascas.

Em relação ao fenómeno de instabilidade por varejamento, a segurança em relação ao

estado último de encurvadura é definido em função da carga última de uma estrutura associada ao colapso por instabilidade elástica ou elasto-plástica.

## 2 – FENÓMENO DE ENCURVADURA POR VAREJAMENTO EM ESTRUTURAS TUBULARES

No caso da resistência à encurvadura por compressão à temperatura ambiente e conforme proposto pelo Eurocódigo3 Part1-1, 2003, a carga limite define-se pela expressão:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}} \quad (1)$$

Para cada classe da secção recta em estudo, definem-se os vários parâmetros desta equação.  $A$  é a área da secção recta,  $f_y$  a tensão de cedência do material e  $\gamma_{M1}$  um factor parcial de segurança igual a 1.

O cálculo do factor de redução  $\chi$  respeitante à equação 1, deve ser determinado em função da esbelteza adimensional  $\bar{\lambda}$ , sendo este factor inferior ou igual à unidade.

$$\chi = \frac{1}{\phi + (\phi^2 - \bar{\lambda}^2)^{0.5}} \quad (2)$$

O parâmetro  $\phi$  na expressão anterior é dependente da esbelteza adimensional e de um factor de imperfeição  $\alpha$ .

$$\phi = 0.5 [1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2] \quad (3)$$

O Eurocódigo3 Part1-1, 2003, classifica o tipo de curva de encurvadura em função da secção recta do elemento estrutural. Para uma secção circular deve ser considerado um factor de imperfeição  $\alpha$  igual a 0.21.

Para as estruturas tubulares submetidas a um estado de instabilidade por varejamento, considera-se que a esbelteza adimensional à temperatura ambiente, se calcula em função do factor de esbelteza  $\lambda$  e das propriedades do material:

$$\bar{\lambda} = (\lambda/\lambda_1) = \left[ \lambda / (\pi(E/f_y)^{0.5}) \right] \quad (4)$$

O factor de esbelteza é calculado conforme a expressão:

$$\lambda = \frac{L_e}{i} = \frac{L_e}{\sqrt{I/A}} \quad (5)$$

onde  $L_e$  é o comprimento de encurvadura do elemento e  $i$  o raio de giração, em

relação ao eixo correspondente ao plano de varejamento considerado.

A resistência à encurvadura por compressão a altas temperaturas é obtida de forma diferente da apresentada anteriormente, uma vez que o comportamento do material é não linear, pois as propriedades variam em função da temperatura. A expressão apresentada no Eurocódigo3 Part1-2, 2003, para um determinado instante de tempo  $t$  em elementos à compressão que pertençam às classes 1, 2 ou 3, à temperatura  $T_a$  é obtida em função da expressão:

$$N_{b,fi,t,Rd} = \chi_{fi} AK_{y,T} f_y / \gamma_{M,fi} \quad (6)$$

$\chi_{fi}$  representa o factor de redução para a encurvadura por flexão em situação de incêndio e  $K_{y,T}$  é um factor de redução da deformação do aço à temperatura  $T_a$  no instante de tempo  $t$ .

O cálculo do factor de redução é determinado em função da expressão:

$$\chi_{fi} = \frac{1}{\varphi_T + \sqrt{\varphi_T^2 - \bar{\lambda}_T^2}} \quad (7)$$

O parâmetro  $\varphi_T$  é dependente da esbelteza adimensional e de um factor  $\alpha$ .

$$\varphi_T = 0.5 [1 + \alpha \bar{\lambda}_T + \bar{\lambda}_T^2] \quad (8a)$$

$$\alpha = 0.65 \sqrt{235 / f_y} \quad (8b)$$

A esbelteza adimensional a altas temperaturas  $\bar{\lambda}_T$  calcula-se em função do factor de esbelteza adimensional e de factores de redução das propriedades mecânicas do aço, Eurocódigo3 Part1-2, 2003.

$$\bar{\lambda}_T = \bar{\lambda} [K_{y,T} / K_{E,T}]^{0.5} \quad (9)$$

A encurvadura por varejamento é apresentada neste trabalho através de resultados obtidos com um elemento finito de tubo desenvolvido para análise não linear. Os resultados são comparados com os obtidos no programa Cosmos e com a realização de ensaios em elementos tubulares com as mesmas características.

### 3 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO TUBULAR DE 2 NÓS

Para o desenvolvimento do novo elemento tubular de 2 nós, para análise de problemas tridimensionais, foram incluídas na formulação algumas hipóteses

simplificativas, tal como considerado por Fonseca, Melo *et al*, 2002:

- a espessura é considerada muito pequena quando comparada com o raio da secção transversal;
- o raio da secção é considerado muito inferior ao raio de curvatura do círculo médio;
- a deformação circunferencial é considerada nula em problemas com cargas mecânicas, conforme a seguinte expressão:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (10)$$

sendo diferente de zero, em problemas térmicos;

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \alpha \Delta T \quad (11)$$

- a contribuição da flexão segundo a direcção longitudinal é considerada desprezável, pelo que o problema será resolvido com base na teoria de semi-membrana.

Os parâmetros geométricos considerados para a definição do elemento são: o comprimento do arco curvo ( $s$ ), o raio de curvatura média ( $R$ ), a espessura ( $h$ ), o raio da secção recta do tubo ( $r$ ) e o ângulo ao centro ( $\alpha$ ), como se indica na figura 3.

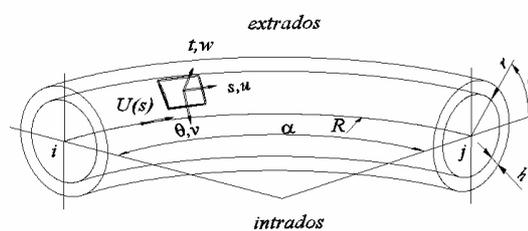


Fig. 3 - Geometria do elemento de tubo.

O campo de deslocamentos à superfície da casca é função do deslocamento longitudinal ao longo de  $s$  ( $u$ ), do deslocamento meridional segundo  $\theta$  ( $v$ ) e do deslocamento transversal da casca  $t$  ( $w$ ). Este campo de deslocamentos é obtido por sobreposição de um campo de deslocamentos associado a um tubo de secção circular, em que a sua configuração não é alterada para qualquer ponto da secção e por deslocamentos associados aos fenómenos de ovalização e empenamento da secção.

A solução apresentada para o cálculo dos deslocamentos de ovalização e empenamento consiste na utilização de funções lineares, polinómios de 1ª ordem,

com desenvolvimentos em série trigonométrica. O deslocamento da superfície na direcção radial resultante unicamente da ovalização, considerada dentro e fora do plano, conforme definido por Thomson, 1980 é obtido através da equação 12.

$$w(s, \theta) = \left( \sum_{n \geq 2} a_n \cos n\theta + \sum_{n \geq 2} \bar{a}_n \sin n\theta \right) N_i + \left( \sum_{n \geq 2} a_n \cos n\theta + \sum_{n \geq 2} \bar{a}_n \sin n\theta \right) N_j \quad (12)$$

O deslocamento meridional resultante da ovalização obtém-se através da seguinte expressão.

$$v(s, \theta) = \left( - \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n} \sin n\theta + \sum_{n \geq 2} \frac{\bar{a}_n}{n} \cos n\theta \right) N_i + \left( - \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n} \sin n\theta + \sum_{n \geq 2} \frac{\bar{a}_n}{n} \cos n\theta \right) N_j \quad (13)$$

Finalmente o deslocamento longitudinal resultante do empenamento da secção é função da equação 14.

$$u(s, \theta) = \left( \sum_{n \geq 2} b_n \cos n\theta + \sum_{n \geq 2} \bar{b}_n \sin n\theta \right) N_i + \left( \sum_{n \geq 2} b_n \cos n\theta + \sum_{n \geq 2} \bar{b}_n \sin n\theta \right) N_j \quad (14)$$

Os termos  $a_n$  e  $\bar{a}_n$  são constantes a determinar, função do desenvolvimento da série de Fourier para os termos de ovalização, dentro e fora do plano, respectivamente. As constantes  $b_n$  e  $\bar{b}_n$  são também função do desenvolvimento da série de Fourier e resultam dos deslocamentos devidos ao empenamento, para o plano e fora do plano.

Sobrepondo o campo de deslocamentos mencionado, aos de um elemento de viga indeformável e adicionando a contribuição da variação térmica da expansão da secção recta tubular e o alongamento do elemento, obtém-se o campo de deslocamentos à superfície de uma casca, conforme as seguintes equações:

$$u = U_{(s)IN} - r \cos \theta \varphi_{(s)IN} - r \sin \theta \varphi_{(s)OUT} + u(s, \theta) + s \alpha \Delta T \quad (15a)$$

$$v = -W_{(s)IN} \sin \theta + W_{(s)OUT} \cos \theta + r \beta_{(s)OUT} + v(s, \theta) \quad (15b)$$

$$w = W_{(s)IN} \cos \theta + W_{(s)OUT} \sin \theta + w(s, \theta) + r \alpha \Delta T \quad (15c)$$

onde  $\alpha$  representa o coeficiente de dilatação térmica do material e  $\Delta T$  a variação térmica.

Para os deslocamentos obtidos no plano de curvatura, designado pelo sub índice *IN* nas expressões 15, considerou-se uma formulação de ordem elevada através da utilização de um polinómio de 5ª ordem, conforme apresentado por Fonseca *et al*, 2003. O campo de deslocamentos para fora do plano, sub índice *OUT*, utiliza funções de forma que se referem a deslocamentos do tipo viga de terceira e de primeira ordem. No caso de elementos tubulares rectos utilizam-se unicamente as funções de Hermite.

Consideraram-se 22 deslocamentos nodais, representando 6 os graus de liberdade de viga indeformável e 16 os deslocamentos no desenvolvimento da série de Fourier para a ovalização e empenamento.

O campo de deformação linear a ser utilizado, refere-se a deformações de membrana e a variações de curvatura. Adoptou-se um modelo de deformação de semi-membrana, conforme proposto por Kitching, 1970, Flügge, 1973 e Melo e Castro, 1992.

$$\varepsilon_l = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_{\theta\theta} \end{Bmatrix}_l = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{\sin \theta}{R} & \frac{\cos \theta}{R} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Nesta expressão  $\varepsilon_{\theta\theta}$  representa a deformação longitudinal de membrana,  $\gamma_{s\theta}$  a deformação de corte e  $\chi_{\theta\theta}$  é a curvatura meridional relativa à ovalização.

O campo de deformação não linear adoptado, refere-se a deformações de membrana, tendo-se desprezado o efeito da curvatura.

$$\varepsilon_{nl} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_{\theta\theta} \end{Bmatrix}_{nl} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right) \frac{\bar{w}}{R} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

O vector deformação térmico é obtido em função da expressão:

$$\varepsilon_{th} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix}_{th} = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \end{Bmatrix} \quad (18)$$

A matriz rigidez tangencial referida ao sistema global do elemento, englobando as partes: linear e geometricamente não-linear, é definida através da expressão seguinte:

$$K'' = [T]([K]_l + [K]_{nl} + [K]_\sigma)[T]^T \quad (19)$$

A componente linear é definida por:

$$K_l = \int_{s=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} [B]_l^T [D] [B]_l r h d s d \theta \quad (20)$$

A componente relativa aos grandes deslocamentos ou não linear define-se como:

$$K_{nl} = \int_{s=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} [B]_{nl}^T [D] [B]_{nl} r h d s d \theta + \int_{s=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} [B]_l^T [D] [B]_{nl} r h d s d \theta \quad (21)$$

A matriz das tensões iniciais ou geométrica material  $K_\sigma$ , por ser dependente do estado inicial instalado, não foi considerada na formulação. As matrizes  $B_l$  linear e  $B_{nl}$  não linear são definidas em função das derivadas de um conjunto de funções de forma, referidas por Fonseca *et al*, 2003, e respectivos operadores diferenciais do campo de deformações apresentado.  $D$  representa a matriz de constantes elásticas definida por:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Se o problema tem características não lineares, devido a grandes deformações ou ao comportamento não linear material, a matriz rigidez torna-se dependente do vector de deslocamentos, sendo impossível resolver o sistema de equações recorrendo aos métodos de solução directa. Utiliza-se então, a forma incremental e iterativa do princípio dos trabalhos virtuais na obtenção da solução:

$$[K]'' \{\Delta\delta\} = \{\Delta F_n\} + \{\Delta F_{th}\} \quad (23)$$

onde  $\Delta\delta$  representa o campo incremental dos deslocamentos nodais,  $\Delta F_n$  é o vector forças mecânicas aplicadas e  $\Delta F_{th}$  o vector de cargas térmicas obtido em função das

deformações térmicas existentes, conforme a expressão 24.

$$F_{th} = \int_{s=0}^L \int_{\theta=0}^{2\pi} [B]_l^T [D] \{\varepsilon\}^{th} r h d s d \theta \quad (24)$$

O vector força  $F_n$  pode ser formado por termos que envolvam forças longitudinais, forças transversais, momentos de flexão e de torção, ou termos relativos à expansão de Fourier para os deslocamentos de ovalização e empenamento.

## 4 – CASOS EM ESTUDO

### 4.1 – Encurvadura em tubos submetidos à compressão e temperatura ambiente

O fenómeno de encurvadura por compressão é estudado através dos resultados obtidos utilizando o modelo de elementos finitos desenvolvido para um tubo recto em análise não linear. Comparam-se os resultados com os obtidos no programa Cosmos utilizando um elemento de viga não linear.

Na análise à temperatura ambiente, realizaram-se ensaios em tubos submetidos à compressão, em que a carga é incrementada no tempo. Os deslocamentos foram obtidos através da utilização de comparadores para os vários incrementos de carga registados. A figura 4 representa um desses ensaios, verificando-se o fenómeno por varejamento.

Estudaram-se quatro tubos em aço com comprimentos diferentes 0.38[m] e 1[m], raio médio de 0.0135[m] e espessura 0.001[m]. Consideraram-se as propriedades mecânicas do aço propostas pelo Eurocódigo3 Part1-2, 2003.



Fig. 4 – Realização de ensaios.

A figura 5 representa a evolução do deslocamento lateral em função da carga incrementada, verificando-se o valor do colapso atingido, com base nos resultados numéricos e experimentais, para tubos de diferentes comprimentos.

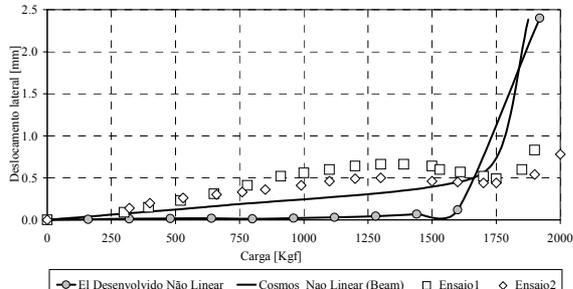


Fig. 5a – Deslocamento lateral em função da carga de compressão incremental, à temperatura ambiente,  $L=0.38[m]$ .

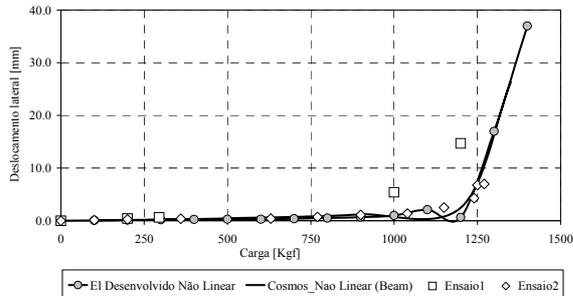


Fig. 5b – Deslocamento lateral em função da carga de compressão incremental, à temperatura ambiente,  $L=1.0[m]$ .

Na figura 6 representa-se o limite de resistência à encurvadura por varejamento obtido para as colunas em estudo, comparado com a curva teórica de Euler e a curva que o Eurocódigo3 Part1-1, 2003, propõe à temperatura ambiente.

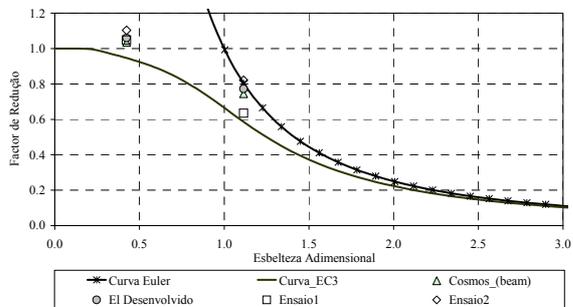


Fig. 6 – Limite de resistência atingido.

Para cada um dos comprimentos do tubo em análise, verificou-se a deformada da

seção em função dos deslocamentos obtidos à superfície da casca.

As figuras 7 e 8 representam a seção deformada a meio do elemento estrutural e ao longo do seu comprimento para a carga de  $11[kN]$  e para o tubo com  $1[m]$  de comprimento.

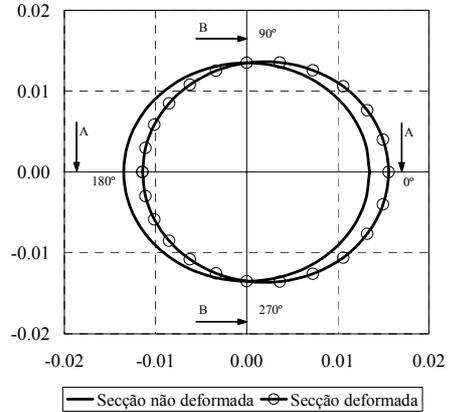


Fig. 7 - Deformada a meio vão na seção tubular.

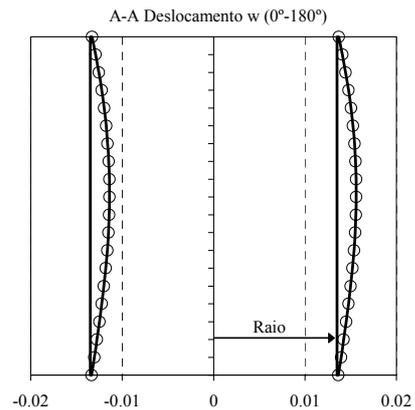


Fig. 8a - Deslocamento lateral no tubo a  $0^{\circ}$ - $180^{\circ}$ .

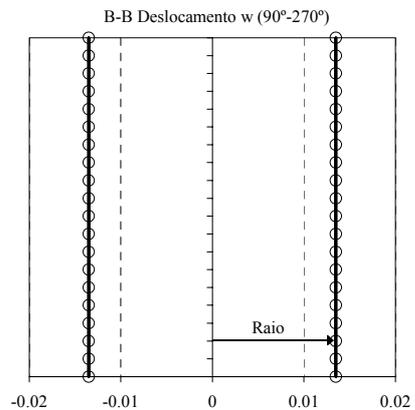


Fig. 8b - Deslocamento lateral no tubo a  $90^{\circ}$ - $270^{\circ}$ .

#### 4.2 – Encurvadura em tubos submetidos à compressão e a elevadas temperaturas

O mesmo procedimento foi utilizado, mas considerando agora a presença de um

aquecimento uniforme no elemento estrutural. Apresentam-se os resultados numéricos obtidos para diferentes temperaturas com o elemento de tubo desenvolvido e verifica-se o limite de resistência à encurvadura, utilizando a curva de projecto proposta pelo Eurocódigo3 Part1-2, 2003, conforme a figura 9.

Foi imposta uma carga de compressão incremental, atingindo-se o valor crítico máximo para cada caso em estudo. Teve-se em consideração a variação das propriedades do material a diferentes temperaturas.

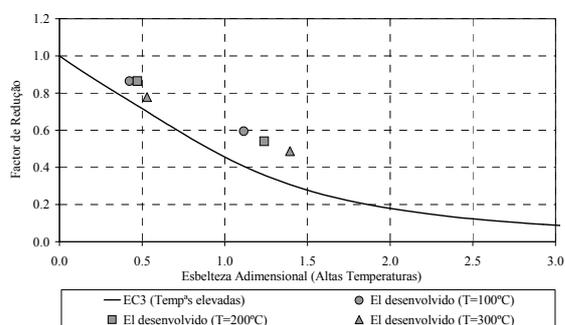


Fig. 9 – Limite de resistência atingido.

As figuras 10 e 11 representam a secção deformada a meio da estrutura para uma carga de compressão de 8[kN]. A secção não deformada representa a secção recta inicial da estrutura à temperatura ambiente. O elemento estrutural utilizado tem 1[m] de comprimento e é submetido à temperatura de 200[°C].

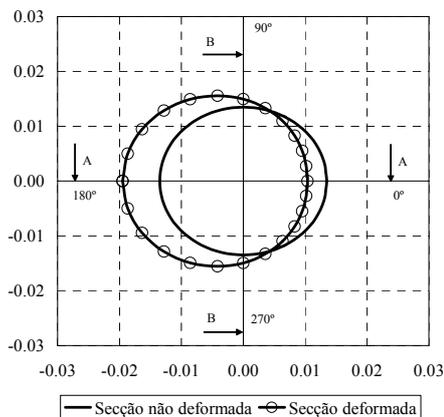


Fig. 10 - Deformada a meio vão na secção tubular.

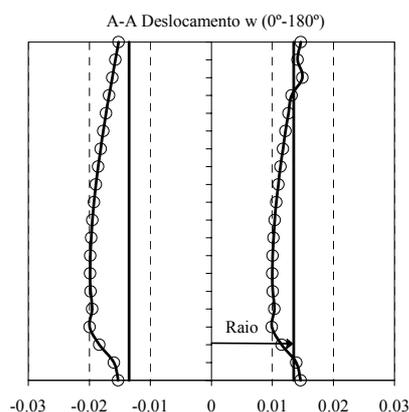


Fig. 11a - Deslocamento lateral no tubo a 0°-180°.

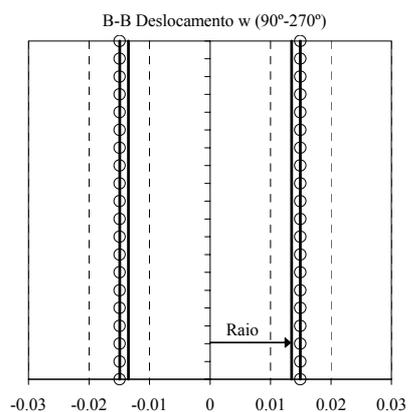


Fig. 11b - Deslocamento lateral no tubo a 90°-270°.

## 5 - CONCLUSÕES

Apresentou-se o estudo do fenómeno de encurvadura por varejamento em elementos tubulares. Utilizaram-se os métodos de dimensionamento estabelecidos nos Eurocódigos para situações de temperatura ambiente e a altas temperaturas. Os estudos efectuados utilizaram um elemento finito tubular desenvolvido, em regime não linear. Realizaram-se ensaios à temperatura ambiente para a determinação da carga limite resistente atingida na estrutura. Utilizou-se o elemento finito de viga do programa Cosmos nas mesmas condições dos problemas em estudo. O elemento de tubo desenvolvido apresenta capacidades de cálculo para análise não linear, utilizando um procedimento incremental e iterativo.

## 6 - REFERÊNCIAS

ESDEP-European Steel Design Education Programme, WG 8 –Plates and Shells,

- Design of Unstiffened Cylinders*, CD-electronic version.
- Reis, A.; Camotim, D.; *Estabilidade Estrutural*, McGraw-Hill, Portugal, 2001.
- ECCS-European Convection for Constructional Steelwork, *Buckling of Steel Shells European Recommendations*, 4<sup>th</sup> edition, 1988.
- prEN 1993-1-1, *Eurocode 3 - Design of Steel Structures – Part 1.1: General rules and rules for buildings*, 2003.
- prEN 1993-1-2, *Eurocode 3 - Design of Steel Structures – Part 1.2: General rules – Structural fire design*, 2003.
- E.M.M. Fonseca; F.J.M.Q. de Melo and C.A.M de Oliveira; *Determination of flexibility factors on curved pipes with end restrains using a semi-analytic formulation*, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol.79/12, pp 829-840, 2002.
- Thomson G.; *In Plane Bending of Smooth Pipe Bends*, PhD Thesis, University of Strathclyde, Scotland, UK, 1980.
- Kitching R.; Smooth and Mitred Pipe Bends, Gill, S.S. (Ed.), *The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessels Components*, Chapter 7, Pergamon Press, Oxford, 1970.
- Flügge W.; *Thin Elastic Shells*, Berlin: Springer, 1973.
- Melo F.J.M.Q.; Castro P.M.S.T.; *A Reduced Integration Mindlin Beam Element for Linear Elastic Stress Analysis of Curved Pipes Under Generalized in-plane Loading*, Computers & Structures, Vol.43 N° 4, pp.787-794, 1992.
- Fonseca, E.; Oliveira C.; Melo F.; Piloto P.; *A New Finite Element Pipe for Generalized in-Plane Loading. Experimental and Numerical Comparison*, WIT Press, C.A.Brebbia, G.M.Carlomagno & P.Anagnostopoulos, (Ed.), Eleventh International Conference on Computational Methods and Experimental Measurements, May, Halkidiki, Greece, ISBN 1-85312-969-0, pp. 641-660, 2003.
- Fonseca, Elza M.M.; Oliveira, Carlos A.M.; Melo, Francisco J.M.Q; Ribeiro, Paulo; *Um Novo Elemento Finito de Tubo Curvo para Análise de Tubagens Tridimensionais. Caso de Estudo Numérico e Experimental*, Joaquim Infante Barbosa, (Ed.), VII Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional, Évora, ISBN: 972-778-058-X, Vol.n°3, pp. 1701-1709, 2003.