GRANDEZAS, UNIDADES E SISTEMAS DE UNIDADES

HÉLIO BERNARDO LOPES

Na vida corrente, hoje como desde os mais remotos tempos, o homem viu-se constantemente envolvido por fenómenos os mais diversos, cuja compreensão plena, de um modo ou de outro, sempre procurou.

À medida que o foi fazendo, foi compreendendo que nesses fenómenos surgiam entidades que poderiam ocorrer correlacionadas entre si. E o natural objectivo procurado terá sempre sido uma resposta explicativa para esses fenómenos observados.

Noutros casos, foi o próprio homem que a si mesmo colocou situações, deste modo procurando demonstrar se a sua ideia prévia, e sobre o que parecia ser fortemente evidente, era, ou não, como parecia.

No primeiro caso, a observação repetida do fenómeno observado permitia, por via conjectural e lógica, obter uma explicação para o fenómeno observado. No segundo caso, o método utilizado era o da demonstração, fosse por meios simplesmente geométricos, ou através do método lógico-dedutivo.

Qualquer destes métodos, como se sabe e é evidente, foi evoluindo ao longo do tempo, durante séculos, pela acção essencialmente individual de autênticos génios da Humanidade.

Ora, nesta sua actividade, muito em especial no estudo dos fenómenos observados no mundo físico, envolvendo corpos maiores ou menores, mais ou menos pesados, que se movimentavam durante mais tempo ou de modo simplesmente fugaz, no espaço imediatamente envolvente ou noutro mais longínquo, o homem viu-se obrigado a lidar com entidades que entendia como de certa natureza, fosse esta mais ou menos evidente. Tais entidades são hoje designadas por **grandezas**.

Estas grandezas podem ter natureza **qualitativa** ou **quantitativa**. E hoje podem ser consideradas como **escalares** ou **vectoriais**. Uma das primeiras, ligada ao domínio da Mecânica, é a massa de um corpo. Das segundas, também do mesmo domínio, é a velocidade.

Naturalmente, no caso de grandezas susceptíveis de serem expressas numericamente, foi suscitado o problema da respectiva mensuração. Ora, quando se trabalha com uma qualquer grandeza, torna-se imperativo proceder à sua **medição**.

Como facilmente se compreende, o acto de medir uma grandeza terá de requerer a definição prévia de um seu valor particular, conhecido, acessível e manuseável, que seja tomado como **unidade** de medição dessa grandeza. No fundo, um padrão da grandeza.

Mas é evidente que tais unidades de medição de grandezas podem ser escolhidas do modo mais arbitrário. De facto, nada impede que se tome como unidade de comprimento o comprimento de certa faca de cozinha e como unidade de massa a massa de certo cubo de granito, que se vá conservando bem.

Mas se tal é assim uma evidência, por igual o é que um tal critério, tão vastamente arbitrário, tem uma enorme dificuldade em ser utilizável de um modo muito geral. E por isso se impôs a criação de **sistemas de unidades**, de há muito em uso por quase toda a parte, numa situação já hoje tratada de um modo que pode considerar-se universal.

Os mais velhos, muitos dos quais já hoje no desempenho de funções docentes ou de investigação, recordar-se-ão, porventura, das referências ouvidas nas aulas ao histórico **Sistema Métrico**, surgido na sequência da Revolução Francesa, ao tempo do Iluminismo. No fundo, talvez a primeira tentativa de pôr um cobro na hiperdiversidade de grandezas, unidades e símbolos usados por Estados e academias diversas, num tempo em que a troca de conhecimentos era já razoável e frequente.

Este sistema de unidades, o Sistema Métrico, acabou por ser oficialmente adoptado em França, país onde nasceu, em 1837. Mas só já pelo final do terceiro quartel do século XIX, em 1875, essa manifestação de unificação teve o seu início. Neste sistema adoptaram-se como grandezas de referência o comprimento, a massa e o tempo.

Neste último ano - em 1875, portanto -, foi em Paris assinada a histórica **Convenção do Metro**, subscrita por diplomatas de dezassete Estados, um dos quais Portugal, que aí se fez representar por Mendes Leal.

Com esta convenção - a Convenção do Metro - instituiu-se a **Conferência Geral de Pesos e Medidas**, onde os Estados signatários são representados pelos seus diplomatas. Estados signatários cujo número foi sempre crescendo, à medida que se foi percebendo a necessidade e a vantagem de unificar este tipo de problemática.

Por sua vez, esta entidade controla a **Comissão Internacional de Pesos e Medidas**, liderada por cientistas ou técnicos de elevada reputação nos seus domínios. E é esta comissão que coordena o **Bureau Internationad des Poids et Mesures**[1], localizado na cidade de Sèvres, próximo de Paris[2].

A partir daqui sucederam-se as conferências internacionais, progressivamente adoptando novas medidas e cada vez mais universalmente aceites, acompanhando a rápida adesão de mais Estados, velhos ou novos, à referida Convenção Geral de Pesos e Medidas.

Teve assim lugar em 1889 a I Conferência Geral de Pesos e Medidas, onde se adoptaram unidades de comprimento e de massa, que se designaram por **metro-padrão** e **quilograma-padrão**, respectivamente.

O sistema de unidades assim criado passou, pois, a assentar em três unidades mecânicas, as das grandezas comprimento, massa e tempo. Mas a evolução da ciência fez com que, em 1901, Giovanni Giorgi, um engenheiro italiano, tenha acrescentado àquelas três uma quarta grandeza, com a respectiva unidade de medida, agora ligada ao domínio da Electricidade, ao tempo em veloz desenvolvimento.

Muito mais tarde, em 1948, teve lugar a IX Conferência Geral de Pesos e Medidas, que cometeu à sua comissão internacional a tarefa de estruturar um sistema completo de unidades de medida.

Finalmente, em 1960, na XI Conferência Geral de Pesos e Medidas, tomou-se a decisão de criar o que se chamou **Sistema Internacional de Unidades**, com a abreviatura **S I**, e se encontra hoje em vigor, à medida que se vão aprovando ligeiros acrescentos, mudanças ou adesões.

Em 1971 teve então lugar a XIV Conferência Geral de Pesos e Medidas, onde se adoptaram para o Sistema Internacional de Unidades as sete unidades das grandezas **comprimento**, **massa**, **tempo**, **intensidade de corrente eléctrica**, **temperatura termodinâmica**, **quantidade de matéria** e **intensidade luminosa**. Essas unidades são, respectivamente, o **metro**, o **quilograma**, o **segundo**, o **ampere**, o **kelvin**, a **mole** e a **candela**.

Note-se, contudo, como muito bem salienta BAPTISTA, 1994, que a adopção da unidade da grandeza quantidade de matéria, a mole, tem reduzida vantagem nas perspectivas científica, técnica e didáctica, uma vez que se possui já uma unidade para a massa, e também porque o conceito de quantidade de matéria não está claramente definido. Em todo o caso, é esta a realidade adoptada e que vigora.

Como se salientou, encontram-se hoje adoptadas e definidas no Sistema Internacional de Unidades sete grandezas. Essas grandezas, escolhidas arbitrariamente mas de um modo racional[3], usando a experiência e o saber, são independentes entre si. Tais entidades tomam a designação de **grandezas fundamentais**[4].

A cada uma destas grandezas encontra-se associada uma unidade, previamente definida de um modo rigoroso e internacionalmente consagrado, usando padrões adequados. Padrões que têm também variado ao longo do tempo, como tão bem se conhece do que se passou com a unidade de comprimento.

Ora, o tempo e a experiência ajudaram a perceber que há uma conveniência essencial em utilizar o que se designa por sistemas coerentes de unidades, como é o caso do Sistema Internacional de Unidades, S I.

Este tipo de sistema de unidades - o sistema coerente de unidades - é então um sistema de unidades constituído por um conjunto de **unidades fundamentais**[5], fixadas arbitrariamente mas independentes entre si, e das restantes, designadas por **unidades derivadas**, que se obtêm das fundamentais através da escolha de certas fórmulas convencionais, a que se dá a designação de **equações de definição**. Ao conjunto destas equações dá-se a designação de **estrutura metrológica** do sistema de unidades considerado.

---

[1] Nos textos de língua portuguesa é usualmente designado por **Laboratório Internacional de Pesos e Medidas**.
[2] Faz hoje parte do que poderá designar-se por área metropolitana da capital francesa.
[3] Teoricamente, poderiam escolher-se sete grandezas quaisquer.
[4] Também designadas por **grandezas básicas**, ou **grandezas de base**.
[5] Também designadas por **unidades básicas**, ou **unidades de base**.

Por fim, existem ainda algumas outras unidades, para lá das fundamentais e das derivadas, designadas por **unidades suplementares**[6], que resultam de tradições ligadas ao uso corrente, e que não pertencem a nenhum sistema de unidades correntemente utilizado.

Ora, de quanto pôde já escrever-se, se perceberá facilmente que o domínio da Mecânica tão-só requer três grandezas fundamentais, e que no Sistema Internacional de Unidades (Mecânicas) são o comprimento (*L*), a massa (*M*) e o tempo (*T*). Diz-se, por isso, que aquele **sistema** é **do tipo L M T**,ou que é um **sistema absoluto**.

Em contrapartida, se as grandezas fundamentais adoptadas forem as de comprimento (*L*), força (*F*) e tempo (*T*), o sistema dir-se-á um **sistema do tipo L F T**, ou **sistema gravitacional**.

Compreende-se o termo gravitacional, dado que neste tipo de sistemas de unidades a unidade fundamental de força varia com a aceleração da gravidade, dependente do lugar da Terra e da altitude.

Convém salientar, contudo, que no domínio da Mecânica os sistemas (coerentes) de unidades, sejam do tipo absoluto ou gravitacional, têm a mesma estrutura metrológica. E também que às unidades fundamentais e às derivadas se dá a designação conjunta de **unidades principais**, e que aos múltiplos e submúltiplos destas se dá o nome de **unidades secundárias**.

Ora, quando se procede à medição de certa grandeza, o que se faz é estabelecer uma comparação entre duas grandezas do mesmo tipo, que são a unidade adoptada e aquela que se deseja medir à custa dessa mesma unidade. Uma tal comparação pode ser realizada de um modo directo ou de uma forma indirecta.

Acontece, porém e como se sabe, que a medição de certa grandeza não se exprime, de um modo muito geral, por um simples número, mas por um número e um **símbolo**, ou uma **abreviatura**, representativos da unidade da grandeza tomada para servir de elemento de comparação.

Os símbolos, na sua esmagadora maioria, foram adoptados por decisões tomadas em congressos ou convenções, posteriormente estabelecidos, no âmbito nacional, através dos adequados diplomas legais.

Já no caso das abreviaturas o grau de liberdade é muito mais vasto, dado que a respectiva adopção se prende, principalmente, com a língua nacional.

As grandezas cuja medida se exprime apenas por um número dizem-se **grandezas adimensionais**, como se dá com o índice de refracção, com o coeficiente de atrito, com o ângulo plano ou com o ângulo sólido.

Note-se, contudo, que, para se poder medir certa grandeza X é essencial que no conjunto das grandezas da mesma espécie que X se possam definir uma adição, uma relação de ordem e o correspondente valor zero.

Com estas condições globalmente satisfeitas, torna-se possível reproduzir a unidade de cada grandeza de um modo universal e fácil, bem como as dos respectivos múltiplos e submúltiplos.

Ora, como se percebeu já, as unidades de base encontram-se definidas por meio de padrões consagrados internacionalmente, sendo as unidades derivadas determinadas através das correspondentes equações de definição, cujo conjunto constitui a a estrutura metrológica do respectivo sistema de unidades.

Assim, por exemplo, a grandeza velocidade, que é uma grandeza derivada, no Sistema Internacional de Unidades exprime-se através da equação de definição:

$$v = \frac{e}{t}$$

ou seja, pelo quociente entre as grandezas espaço e tempo. E o mesmo se dá com as respectivas unidades.

Assim, quando se pretende exprimir a equação de definição de uma unidade derivada, surgem duas situações distintas, embora a segunda possa sempre reduzir-se à primeira: *ou na equação de definição da unidade derivada figuram apenas unidades de base, ou figuram estas e outras também derivadas.* O que significa, pois, que se pode considerar que a equação de definição de certa unidade derivada se pode sempre exprimir em função das unidades tomadas para fundamentais.

[6] Também designadas **unidades isoladas** ou **unidades auxiliares**.

Assim, no anterior exemplo, a equação de definição da velocidade, que é uma grandeza derivada, vem expressa como função das unidades fundamentais de espaço e tempo:

$$v = \frac{e}{t} = e.t^{-1}.$$

Do mesmo modo, no caso da aceleração, uma outra unidade derivada, a correspondente equação de definição é:

$$a = \frac{e}{t^2} = e.t^{-2}$$

já expressa, pois, em função das unidades fundamentais de espaço e tempo.

Finalmente, o caso da unidade derivada de força, cuja equação de definição é:

$$f = m.a = m \cdot \frac{e}{t^2} = e.m.t^{-2}$$

que se pode escrever, pois, apenas em função das unidades de base.

Convém notar que o facto de se ter adoptado um sistema coerente de unidades determina, necessariamente, que as equações de definição sejam monómios nas unidades de base com coeficiente unitário.

Conhecida a equação de definição de certa grandeza *X*, no caso do S I, se se substituírem os símbolos das unidades de base pelas letras L, M, T, representativas das unidades de comprimento, massa e tempo, obtém-se a correspondente **equação de dimensões** da grandeza *X*.

Assim, para a velocidade, a aceleração e a força, a equação de dimensões seria, respectivamente:

$$\begin{array}{lllll} [V] & = & L^1 M^0 T^{-1} & = & LT^{-1} \\ [A] & = & L^1 M^0 T^{-2} & = & LT^{-2} \\ [F] & = & L^1 M^1 T^{-2} & = & LMT^{-2}. \end{array}$$

Portanto, num sistema do tipo absoluto, como se dá com o Sistema Internacional de Unidades, a equação de dimensões de uma grandeza *X* qualquer é do tipo:

$$[X] = \underbrace{L^\alpha M^\beta T^\gamma}_{(1)}$$

onde L, M e T são as **dimensões das grandezas fundamentais** L, M, T, respectivamente, e onde α, β, γ são os correspondentes **expoentes dimensionais**. Ao produto (1) dá-se a designação de **dimensão da grandeza** *X*.

No caso do Sistema Internacional de Unidades, como se disse antes, a Conferência Geral de Pesos e Medidas adoptou sete grandezas para fundamentais, definido as correspondentes unidades fundamentais.

As grandezas fundamentais, como seu referiu atrás, são as de comprimento, massa, tempo, intensidade de corrente eléctrica, temperatura termodinâmica, quantidade de matéria e intensidade luminosa, adoptando para unidades fundamentais, respectivamente, o metro, o quilograma, o segundo, o ampere, o kelvin, a mole e a candela.

Assim, no Sistema Internacional de Unidades, uma grandeza X qualquer terá sempre por equação de dimensões uma equação do tipo:

$$[X] = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \theta^\varepsilon N^\varphi J^r$$

onde L, M, T, I, θ, N e J são as dimensões das sete grandezas de base adoptadas.

Convém chamar a atenção, contudo, para o facto de grandezas diferentes poderem apresentar a mesma equação de dimensões, como se dá, por exemplo, com o momento de uma força e o trabalho.

O facto de se estar perante um sistema coerente de unidades determina que o valor de uma unidade derivada se obtém, usando a correspondente equação de dimensões, através dos valores das unidades fundamentais, englobados numa expressão monómia com coeficiente unitário.

Tal como refere LOPES, 2007, para que certa lei mecânica seja correcta ela tem de exprimir-se por uma expressão dimensionalmente homogénea.

Alguns autores designam por **grandezas geométricas** as que têm uma equação de dimensões do tipo:

$$[X] = L^{\alpha} M^{0} T^{0} = L^{\alpha}$$

com $\alpha \in \mathbf{R} - \{0\}$, chamando **grandezas cinemáticas** as que verificam a condição:

$$[X] = L^{\alpha} M^{0} T^{\gamma} = L^{\alpha} T^{\gamma}$$

com $\alpha, \gamma \in \mathbf{R} - \{0\}$, e **grandezas dinâmicas** as que têm por equação de dimensões:

$$[X] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$$

com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} - \{0\}$.

Torna-se evidente que certa grandeza *X*, quando medida relativamente a duas unidades diferentes, x_1 e x_2, terá de apresentar medidas distintas. Usando x_1 como unidade, virá o valor numérico da medida de *X* face a x_1:

$$\{X\}_1 = \frac{X}{x_1} \cdot$$

Se, pelo contrário, se usar a unidade de medida x_2, virá a nova medida de *X* faca a x_2:

$$\{X\}_2 = \frac{X}{x_2} \cdot$$

Destas duas expressões se tira que:

$$X = \{X\}_1 \cdot x_1 \qquad \wedge \qquad X = \{X\}_2 \cdot x_2$$

pelo que virá:

$$\{X\}_1 \cdot x_1 = \{X\}_2 \cdot x_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\{X\}_1}{\{X\}_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

ou seja, **as medidas de certa grandeza em unidades distintas estão na razão inversa destas**.

Considerem-se, então, dois sistemas de unidades do tipo LMT com unidades l_1, m_1, t_1 e l_2, m_2, t_2, e sejam as razões:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{l_2}{l_1} = \lambda \\[2ex] \dfrac{m_2}{m_1} = \mu \\[2ex] \dfrac{t_2}{t_1} = \tau \end{cases}$$

Seja *X* uma qualquer grandeza com equação de dimensões:

$$[X] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} .$$

Nestes termos, no sistema de unidades l_1, m_1, t_1, a unidade principal da grandeza *X* vale:

$$x_1 = l_1^{\alpha} m_1^{\beta} t_1^{\gamma}$$

valendo, no sistema de unidades l_2, m_2, t_2:

$$x_2 = l_2^{\alpha} m_2^{\beta} t_2^{\gamma} .$$

Em face do sistema de condições (2), virá:

$$x_2 = \left(\lambda l_1\right)^{\alpha} \left(\mu m_1\right)^{\beta} \left(\tau t_1\right)^{\gamma} = \lambda^{\alpha} \mu^{\beta} \tau^{\gamma} \left(\underbrace{l_1^{\alpha} m_1^{\beta} t_1^{\gamma}}_{x_1} \right)$$

ou seja:

$$\frac{x_2}{x_1} = \lambda^{\alpha} \mu^{\beta} \tau^{\gamma} \qquad \Leftrightarrow \qquad \chi = \frac{\{X\}_1}{\{X\}_2} = \frac{x_2}{x_1} = \lambda^{\alpha} \mu^{\beta} \tau^{\gamma} .$$

Dá-se a χ a designação de **coeficiente de redução** do terno constituído pela grandeza *X* e pelos sistemas de unidades l_1, m_1, t_1 e l_2, m_2, t_2, por esta ordem.

Convém notar que esta definição continua válida para o caso de uma qualquer grandeza adimensional, por razões que se mostram evidentes, e que o que se definiu para sistemas do tipo LMT vale, por igual, para sistemas do tipo LFT.

Seja, agora, o caso de certa grandeza derivada, *X*, que, estando expressa num sistema do tipo LMT, através da respectiva equação de definição, se pretende exprimir num outro sistema de unidades, mas do tipo LFT.

Seja, então, a equação de definição:

$$x = l_1^{\alpha} m_1^{\beta} t_1^{\gamma}$$

que fornece a unidade derivada da grandeza *X* em certo sistema do tipo LMT, com unidades fundamentais, l_1, m_1, t_1, e se pretende escrever num novo sistema do tipo LFT, ambos com a mesma estrutura metrológica.

Torna-se evidente que, numa situação deste tipo, terá de ocorrer uma alteração da equação de dimensões. Assim, estando em jogo a mudança de um sistema do tipo LMT para um outro, do tipo LFT, há que ter presente que a equação de dimensões da massa neste último sistema é:

$$\underbrace{[M] = L^{-1}FT^{-2}}_{(3)}$$

retirada, precisamente, da equação de definição da massa:

$$f = m.a \qquad \Leftrightarrow \qquad m = \frac{f}{a} = \frac{f}{\frac{e}{t^2}} = \frac{f.t^2}{e} = e^{-1}.f.t^2$$

onde f, m, a, e, t representam, respectivamente, a força, a massa, a aceleração, o espaço e o tempo. Se agora se introduzir (3) na equação de dimensões de certa grandeza *X*, expressa no sistema LMT:

$$[X] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$$

virá:

$$[F] = L^{\alpha}\left(L^{-1}FT^{-2}\right)^{\beta} T^{\gamma} = L^{\alpha-\beta}F^{\beta}T^{\gamma-2\beta}$$

ou seja, a equação de dimensões da grandeza *X* num sistema do tipo LFT é:

$$[X] = L^{\alpha-\beta}F^{\beta}T^{\gamma-2\beta}.$$

Partiu-se de um sistema do tipo LMT, chegando-se a um outro do tipo LFT. Ora, tem-se:

$$\left.\begin{aligned} [L] &= L^1 M^0 T^0 \\ [F] &= L^1 M^1 T^{-2} \\ [T] &= L^0 M^0 T^1 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

pelo que o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

o que significa que os segundos membros de (4) são funcionalmente independentes, que o mesmo é dizer que o espaço, L, a força, F, e o tempo, T, são dimensionalmente independentes.

Assim, se se estiver a trabalhar no domínio da Mecânica e com um sistema do tipo LMT, e certa grandeza derivada, *X*, for dependente de n grandezas derivadas, Y_i , (i=1,...,n), n$\in$**N**, através de uma relação funcional do tipo:

$$X = \phi\left(Y_1, \ldots, Y_n\right)$$

esta poderá sempre exprimir-se como uma função:

$$\underbrace{X = \psi\left(L_1, L_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots, T_1, T_2, \ldots\right)}_{(5)}$$

onde os L_i , M_i , T_i , (i=1, 2,...),representam, respectivamente, comprimentos, massas e tempos.

Ora, a função (5) dir-se-á homogénea de grau de homogeneidade α nos L_i , de grau β nos M_i e de grau γ nos T_i se se tiver:

$$X = \psi\left(\lambda L_1, \lambda L_2, \ldots, \mu M_1, \mu M_2, \ldots, \tau T_1, \tau T_2, \ldots\right) = \lambda^{\alpha} \mu^{\beta} \tau^{\gamma} \psi\left(L_1, L_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots, T_1, T_2, \ldots\right)$$

onde α, β e γ são os expoentes dimensionais num sistema do tipo LMT, e quaisquer que sejam $\lambda, \mu, \tau \in \mathbf{R}$.

Como se exprime em LOPES, 2007, as fórmulas da Mecânica devem ser dimensionalmente homogéneas, o que se consegue, (MENDONÇA, 1976-1977), pelo processo de adimensionalização, dividindo cada uma das grandezas variáveis, sejam dependentes ou independentes, por uma constante com idênticas dimensões e de medida igual à unidade no sistema de unidades para o qual a fórmula não homogénea é válida.

Finalmente, é essencial relembrar o Teorema Fundamental da Análise Dimensional, a cuja luz, em toda a expressão, equação ou fórmula física, teórica ou empiricamente deduzida, as dimensões de todos os seus termos devem ser idênticas. Ou seja, aquela deve ser dimensionalmente homogénea[7].

Mostrou-se, deste modo, a importância profunda que as noções de grandeza, de unidade e de sistema de unidades apresentam nos domínios da ciência e da tecnologia. E de como é essencial trabalhar com sistemas coerentes de unidades, de que o Sistema Internacional de Unidades, S I, é o exemplo mais apurado.

BIBLIOGRAFIA

ALMEIDA, Guilherme de (1988): *Sistema Internacional de Unidades (S I). Grandezas e Unidades Físicas. Terminologia, Símbolos e Recomendações*, Plátano Editora, SA.

BAPTISTA, António Manuel, (1994): *O Sistema Internacional de Unidades, (S I)*, Gradiva, Lisboa.

LOPES, Hélio Bernardo: *A Importância da Noção de Função Homogénea*, (No prelo).

MANZANARES, Alberto Abecasis (1979): *Hidráulica Geral. I - Fundamentos Teóricos*, Técnica, AEIST, Lisboa.

MENDONÇA, P. de Varennes e (1976-1977): *Apontamentos de Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas*, 9ª Edição ciclostilada, Instituto Superior de Agronomia, Lisboa.

[7] O enunciado que se apresenta é o que se contém em HIDRÁULICA GERAL, Volume I, Alberto Abecasis Manzanares, Técnica, AEIST, 1979.