

*А. И. Ильченко*

## К ВОПРОСУ ОБ АСИММЕТРИИ В ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ СЕМАНТИКЕ

*Аннотация:* В статье обсуждаются ключевые аспекты теоретико-игровой семантики, и демонстрируются ее преимущества в деле анализа игр с несовершенной информацией и несовершенной памятью по сравнению с логикой первого порядка Фреге — Рассела. В статье обсуждаются ограничения теоретико-игровой семантики Я. Хинтикки относительно проблемы асимметрии в семантических играх. Представлен обзор характеристик параллельной теоретико-игровой семантики.

*Ключевые слова:* теоретико-игровая семантика, параллельная теоретико-игровая семантика, несовершенная информация, асимметрия.

*A. I. Ilchenko*

## ON THE QUESTION OF ASYMMETRY IN THE GAME-THEORETIC SEMANTICS

*Resume:* This article offers an analysis of the key aspects of the game-theoretic semantics, and demonstrates its advantages regarding the presentation of incomplete information and imperfect recall in comparison with Frege — Russell first-order logic. The article offers a review of some limitations of the game-theoretic semantics towards the problem of asymmetry in semantic games. Author provides an overview of the concurrent game-theoretic semantics.

*Keywords:* game-theoretic semantics, concurrent game-theoretic semantics, imperfect information, asymmetry.

На современном этапе развития логики теоретико-игровая семантика, сформулированная в середине XX в. Я. Хинтиккой [Hintikka 1973], является одним из наиболее актуальных семантических подходов. Одно из ее основных преимуществ состоит в том, что она открывает возможность анализа игр с несовершенной информацией, что послужило важным фактором усиления интереса к теоретико-игровой семантике в конце XX — начале XXI в. Актуализации проблематики теоретико-игровой семантики во многом способствует рост интереса к параллельным, или взаимосвязанным,

---

*Ильченко Анна Игоревна* — аспирантка кафедры логики Киевского национального университета им. Т. Шевченко.

*Ilchenko Anna* — PhD student, department of logic, Kyiv National Shevchenko University.

играм. Имеется много способов содержательной интерпретации параллельных игр: «опосредованное взаимодействие (использование играми общих ресурсов, решение проблем с помощью распределенных систем), непосредственная коммуникация между играми (взаимодействия внутри сети как вариант перестройки готовых игр, достраивания решения в процессе игры)» [Нечитайлов 2003: 142]. Поскольку эту концепцию взаимодействия невозможно отобразить в теоретико-игровой семантике, первоначально сформулированной Я.Хинтиккой, постольку возникает потребность в разработке альтернативных семантических подходов.

Теоретико-игровая семантика в указанном обновленном ракурсе рассматривается в работах многих логиков, в частности Я. Хинтикки [Hintikka 1996], Г. Санду, А. Пиетаринена [Hintikka, Sandu 1997], У. Ходжеса [Hodges 1997], А. Манна, М. Севенстера [Mann, Sandu, Sevenster 2011], Е. Г. Драгалиной-Черной [Драгалина-Черная 2012], Ю. В. Нечитайлова [Нечитайлов 2003: 142] и др. Параллельные игры разрабатывались такими логиками, как С. Абрамски и П.-А. Меллиес [Melliès, Abramsky 1999].

Задача данной статьи состоит в том, чтобы рассмотреть принципы параллельной теоретико-игровой семантики и показать ее преимущества в сравнении с теоретико-игровой семантикой Я. Хинтикки.

Основная идея семантической игры довольно проста: «Ты и я противостоят друг другу, соблюдая ряд правил, которые говорят, какие ходы являются законными, преследуя одну и ту же цель. Мы оба пытаемся выиграть игру, выиграв какое-либо действие игры, и если один из нас находит систематический способ сделать это, он или она имеет выигрышную стратегию. Набор правил игры фиксируется логически активными компонентами языка, который, в случае языков первого порядка включает два квантора  $\forall$ ,  $\exists$  и пропозициональные связки» [Pietarinen 2009: 67].

Я. Хинтикка создал теоретико-игровую семантику в качестве альтернативы рекурсивному определению истины через понятие выполнимости Тарского, трактуемое, с одной стороны, дедуктивно, а с другой, — при помощи теории множеств [Tarski 1936]. В результате задача истинностного означивания для непустого конечного множества высказываний получила простое и элегантное решение, однако если неизвестно, является ли множество высказываний конечным, определение Тарского может оказаться несостоятельным. В теоретико-игровой семантике истинность или ложность предложения связана с наличием выигрышной стратегии для данной формулы, а не с необходимостью перечисления всех высказываний данной теории с целью выбрать истинные. Пионером идеи интерпретировать логическое значение подкванторных выражений теоретико-игровым способом через существование соответствующих стратегий был Л. Хенкин. Практически одновременно с ним Я. Хинтикка подметил, что эту идею можно легко распространить на понимание логического значения конъюнкции  $\phi \wedge \psi$  как выбора игроком — Фальсификатором дальнейшего развития игры, а дизъюнкции  $\phi \vee \psi$  — как соответствующего выбора игроком — Верификатором. Целью Хинтикки было не просто обеспечение альтернативной теории истинности для логики первого порядка, но и обоснование теории значения с использованием идеи

«языковой игры» Л. Витгенштейна, поэтому теоретико-игровая семантика — это одно из направлений логической семантики, которое обычно относится к философской логике.

В основе теоретико-игровой семантики лежит экстенсивная форма игры. Как отмечают А. Пиетаринен и Г. Санду, «оригинальный вклад теоретико-игровой семантики состоит в создании метода оценивания высказываний для логики первого порядка, альтернативного по отношению к методу их оценивания в семантике Тарского, и тем самым в уточнении понимания значения логических понятий. С технической точки зрения к играм часто обращаются, когда традиционные методы оценки трудно применять, например, в случае логики с несовершенной информацией» [Pietarinen, Sandu 2000].

Игра в экстенсивной форме в отличие от ее представления в табличной стратегической форме позволяет явным образом репрезентировать ряд важных аспектов, а именно: последовательность возможных ходов игроков, их выбор в каждый момент принятия решения. Такие игры дают возможность отображать информацию, в том числе несовершенную, которую каждый игрок, принимая решение о своем ходе, имеет относительно хода другого игрока, а также дают представление о наградах игроков для всех возможных исходов игры. Экстенсивная форма игры также способна представлять несовершенную информацию в виде случайных событий.

Семантические игры рассматриваются как игры в экстенсивной форме в смысле классической теории игр. Это означает, что такие логические игры можно было бы рассматривать исключительно в терминах того, каким образом происходит переход информационного потока в формуле от одного компонента к другому, и изучать различные способы, которыми этот поток можно контролировать и регулировать. «Эта точка зрения не ограничивается функциональной зависимостью, и, следовательно, можно сказать больше о теоретико-игровой интерпретации логики, чем было бы возможно, используя лишь наличие выигрышных стратегий» [Pietarinen 2009: 67].

Игры в экстенсивной форме выходят за рамки нормальной (стратегической) формы, в том смысле, что в то время как нормальные формы удобно применять, для того чтобы показать, какие стратегии являются выигрышными для каждого игрока, в играх с экстенсивной формой стратегии игроков генерируются в процессе самой игры.

Структуру любой семантической игры в понятиях Хинтикки можно описать следующим образом. Во-первых, это игра двух игроков: Верификатора Элоизы (Eloisa,  $\exists$ loisa), ее начальная задача — обоснование, и Фальсификатора Абеляра (Abelard,  $\forall$ belard), его начальная задача — опровержение. Традиция использования имен схоласта Абеляра и его возлюбленной Элоизы для обозначения кванторов  $\forall$  и  $\exists$  соответственно в теоретико-игровой семантике восходит к Дж. Пеано. Истинность предложения  $\varphi$  на модели  $M$  соответствует существованию выигрышной стратегии для Элоизы в семантической игре  $G(\varphi, M)$  относительно  $\varphi$  и его выполнения на модели  $M$ . Ложность предложения  $\varphi$  означает, что, напротив, существует выигрышная стратегия для Абеляра. Таким образом, интуитивно Элоиза может рассматриваться как защитник утверждения « $\varphi$  истинно в  $M$ » против любых попыток опровержения данного утверждения Абеляром. Аналогичным образом Абеляр отстаивает утверждение

« $\phi$  ложно в  $M$ » против любой попытки опровержения этого утверждения Элоизой. Игры  $G(\phi, M)$  определены так, что  $\phi$  действительно является истинным (ложным) в  $M$ , если существует стратегия Элоизы (Абеляра), которая позволяет данному игроку выиграть, несмотря на всю остальную последовательность ходов другого игрока. Учитывая семантическую игру  $G(\phi, M)$ , наличие или отсутствие выигрышной стратегии для любого игрока является объективным фактом модели  $M$ . Следует отметить, что любая игра в теоретико-игровой семантике — это игра с нулевой суммой, она является конечной и антагонистической по своей сущности, т. е. в каждой игре обязательно должен быть победитель и проигравший.

Изначально Хинтикка рассматривал игры с полной (совершенной) информацией, т. е. такие, в которых в любом моменте игры каждый игрок имеет доступ к «истории» ходов игры, и знает в каком именно «месте» на дереве игры он находится. В играх с нулевой суммой общий суммарный выигрыш для всех игроков, для каждой комбинации стратегий, всегда равен нулю, поэтому такие игры называют win-lose играми, или играми выигрыша-проигрыша.

Проблема возникает при моделировании и анализе игр с несовершенной информацией. Под несовершенной информацией в теории игр понимается ограниченность доступа игроков к истории игры. В первую очередь проблему отображения несовершенной информации на языке логики первого порядка Хинтикка связывает с зависимостью кванторов в первопорядковой логике Фреге–Рассела, в частности, с зависимостью кванторов существования от кванторов всеобщности. Хинтикка считает, что если переменная  $\phi$ , связанная квантором существования, записана в формуле после квантора всеобщности, связывающего переменную  $\phi$ , то  $\phi$  зависит от  $\forall$ , так как находится в области ее действия. Такая зависимость, по мнению Хинтикки, есть теоретико-игровое выражение того, что в процессе игры игроки обладают полной информацией относительно всех сделанных в ней ходов. Одним из вариантов отображения несовершенной информации в семантических играх выступает внесение изменений в язык логики первого порядка, которые отражали бы идею переосмысления природы кванторов в сторону большей дескриптивной выразительности. В качестве такого переосмысления Я. Хинтикка выдвинул идею информационной независимости кванторов, и в формальном языке предложил выражать ее при помощи слэш-обозначения «/». Введение слэша в язык первопорядковой логики существенным образом модифицировало логические и выразительные свойства данной теории, в результате чего возникла IF-логика (Independence Friendly, дружественная к независимости) Я. Хинтикки.

Понятие информационной независимости в IF логике открывает возможность уточнения некоторых аспектов теоретико-игровой семантики, в результате чего первопорядковая формула предстает как своего рода семантическая игра, или «экстенсивная игра с несовершенной информацией за счет ограничения доступа игроков к текущему означиванию» [Mann, Sandu, Sevenster 2011: 62]. Таким образом, игрок часто оказывается вынужденным принимать решения о выборе своих дальнейших действий без знания всей истории игры.

В работе «IF-логика: теоретико-игровой подход» А. Манн, Г. Санду и М. Севенстер показывают, что «ограниченность информации, доступной игрокам не влияет на его или ее возможность выполнять какое-либо конкретное действие. Это просто препятствует использованию определенной стратегии» [Mann, Sandu, Sevenster 2011: 62].

Идея информационной независимости кванторов в IF логике имеет двоякое преимущество. Во-первых, она дает возможность рассматривать ветвящиеся кванторы Л. Хенкина линейно, «что позволяет естественно выражать сложные информационные отношения, скажем, независимость квантора не только от другого квантора, но и от пропозиционального или интенционального оператора» [Драгалина-Черная 2012: 117]. Во-вторых, в силу того, что эту важную для моделирования действий игроков идею невозможно выразить при помощи языка логики первого порядка Фреге-Рассела, возникает необходимость не только создания новой логической теории, способной это реализовать, — и на роль такой теории справедливо претендует IF-логика, но и необходимость уточнения ключевых логических свойств подобных теорий, как тех свойств, которые влекут данные ограничения выразительной силы, так и тех, что обеспечивают преодоление указанных ограничений.

Традиционные формы игровых семантик, которые появились в логике и информатике в середине XX в., настойчиво придерживались экстенсивного формата игры и соответствующего понимания игр, согласно которому игра оформляется как определенная последовательность ходов. Ключевой особенностью этого формата является поэтапное осуществление цельного плана игры: в каждой (конечной) позиции наступает очередь хода именно одного из игроков. Однако у такого последовательного формата имеется ряд ограничений при его использовании для моделирования стратегических действий игроков или доказательств. В своей статье «Параллельные игры и исчерпывающая полнота» С. Абрамски и П.-А. Меллиес указывают следующие ограничения:

«Ограниченность моделирования. Последовательные игры могут быть использованы для моделирования последовательных вычислений, но не приспособлены для построения модели параллельных вычислений естественным образом.

Математическое ограничение. Несмотря на очевидную присущность играм двойственности в силу смены ролей игроками, компактность отображения является препятствием для моделирования логических теорий в классическом формате» [Melliès, Samson 1999: 432].

Несмотря на то, что экстенсивные формы представления игр имеют ограничения, они все же выражают нечто такое, с чем логический механизм не готов справиться. «В деревьях игры информационные множества могут включать в себя узлы только на некоторой данной (одной и той же) глубине, и, следовательно, неопределенность может быть создана “условно”, ограничена некоторыми частными выборами на дереве, и непонятно, чему это будет соответствовать в логических языках» [Pietarinen 1999].

Вместе с тем в логике существует такое понятие, как абсолютно неограниченный поток информации, который может быть двунаправленным, или даже циклическим, и для семантического отображения этой концепции экстенсивная форма игры оказы-

вается неподходящей. Соответственно возникает необходимость в разработке альтернативных моделей игры, например, параллельной модели.

А. Пиетаринен также указывает на наличие других ограничений, свидетельствующих в пользу недостаточной выразительной силы игр в экстенсивной форме. С одной стороны, в таких играх существует возможность повторения решения — это понятие говорит, что одинаковый набор информации может содержаться более чем в одном узле в любой конкретной ветке дерева. Другими словами, во время одной и той же игры игрок может посетить некоторый узел на дереве игры более одного раза, или определенные узлы с идентичной информацией. «Гипотеза о неповторении была принята в первоначальном определении игр в экстенсивной форме, и теория игр практически полностью пренебрегает играми с повторениями» [Pietarinen 1999]. Тем не менее вследствие ограничений применения экстенсивной формы в семантических играх не возникают классические задачи из области теории игр. Таким образом, по причине вышеуказанных ограничений, вопросы, связанные с предположением о рациональности игроков или с выплатами в результате игр, а также последующее ветвление в случайные и чистые стратегии в поиске равновесия — все подобные вопросы исключаются из проблематики теоретико-игрового подхода. В равной мере эти ограничения препятствуют тому, чтобы исследовать игры с повторяющимися ходами.

Игровые модели для логики с несовершенной информацией предусматривают также рассмотрение игр с несовершенной памятью игроков, т. е. забывание игроками истории игры. Возможность исследовать нетождественность эпистемических состояний рациональных агентов — одно из преимуществ теоретико-игровых моделей, применимых для случаев неполной или несовершенной информации, в отличие от теоретико-модельного похода в духе Крипке [Ковальчук 2011: 21; Микиртумов 2009]. Класс игр с несовершенной информацией не обязательно задает неповторяющиеся состояния в игре. Вместе с тем существует альтернативный способ моделировать несовершенную память игроков, который выглядит более естественным и простым — способ «мульти-я» игрока (игроков), или многообразия игроков, поэтому игры с повторениями не являются существенным компонентом игры с несовершенной информацией, несмотря на их потенциал в деле определения понятия несовершенной памяти.

Следует указать на еще одно ограничение, свойственное играм в экстенсивной форме, которое вызвано проявлением «лесоводства» традиционной теории игры. Непривлекательной характеристикой «деревьев» выступает то, что они являются последовательными однонаправленными цепочками ходов. Это означает, что как только игрок достиг крайнего узла ветки, он не может вернуться обратно (без дополнительного введения цикла); выбрав определенный путь, он тем самым отсекает остальные пути и они становятся более недоступными для него; сделав свой выбор хода, игрок оказывается в ситуации неопределенности относительно последующей части текущих локализованных вариантов.

В действительности же семантические игры можно легко избавить от этих ограничительных аспектов экстенсивных форм. Один из путей к этому — параллельная теоретико-игровая семантика, которая позволяет отображать игры без опоры на экс-

тенсивную форму их представления. Такой способ позволяет рассматривать параллельные семантические игры — оценочные игры, в которых линейная последовательность ходов не является обязательным условием. Как отмечает А. Пиетаринен, «в таких играх можно играть до  $N$ -ного количества игр параллельно, в соответствии с  $N$  логически активными компонентами в формуле» [Pietarinen 1999]. Эта игровая модель решает проблему абсолютно неограниченного потока информации в формулах, которая возникает в случае, когда синтаксически создается циклическая зависимость между компонентами. Она также освобождает семантические игры от фундаментального ограничения, а именно ограничения в том, чтобы все игровые модели считались по определению асимметричными, ведь кто-то всегда должен сделать первый ход.

В результате оказывается, что в семантических играх асимметрии может и не быть, однако в таком случае возникает вопрос о выражении симметрии в теоретико-игровой семантике. Проблема асимметрии особенно важна при рассмотрении ветвящихся кванторов, когда становится не ясно, с какого именно квантора следует начинать игру. Предположим, имеются две параллельные формулы, и обе они начинаются с одинакового квантора, связывающего разные переменные. В таком случае у нас есть два варианта начала игры, однако посредством теоретико-игровой семантики мы не можем рассмотреть эти две игры как параллельные. Очевидным решением кажется применение параллельной игры, а соответственно и параллельной теоретико-игровой семантики.

Наиболее важным изменением в параллельной теоретико-игровой семантике является то, что базовая модель игры больше не рассматривается в экстенсивной форме. Гипотеза об асимметрии лежит в основании теории семантических игр, когда игры описываются либо в экстенсивной, либо в нормальной форме. В отличие от этого в параллельных играх гипотеза об асимметрии более не имеет места, потому что игроки могут делать одновременные выборы ходов в разных играх или начать игру в одно и то же время с другим игроком.

Поскольку в играх в экстенсивной форме существует заранее заданный порядок ходов, который стартует с самого начала игры, когда один из игроков непременно должен делать первый ход, постольку в таких играх несимметричная параллельная ситуация не допустима. С одной стороны, для классической семантической игры достаточно действовать в условиях асимметрии, потому что синтаксический вид формулы полностью определяет ход игры. С другой стороны, асимметрия не всегда дает возможность моделировать реальные ситуации, вследствие чего возникает потребность в альтернативном варианте теоретико-игровой семантики.

По мнению А. Пиетаринена, наиболее важным отличием параллельных игр от игр в экстенсивной форме является возможность репрезентации игры в частично упорядоченной в форме, а не просто в виде деревьев. «Поскольку в частично упорядоченных множествах может быть много максимальных элементов, все они соответствуют первым ходам в игре. Эти первые ходы связаны с циклическим фрагментом формулы так, что каждый компонент в цикле связан с первым ходом в максимальном узле игры. Игра продолжается по частично упорядоченным цепочкам, и допускает переключе-

ние между цепями. Такие случаи переключений являются точками слияния некоторых двух элементов в частично упорядоченных играх, назовем их точками ожидания. Когда игрок попадает в такую точку ожидания, он или она не может продолжать игру до получения информации о выборе, сделанном оппонентом в другом элементе соединения. Мы можем, например, предусмотреть, что в точке ожидания игрок сделает пустой ход. Когда сведения о ходе оппонента достигнут соединения, первый игрок может продолжать движение» [Pietarinen 1999].

Это и есть базовая схема структуры параллельной игры. Из-за этих переключений между параллельными играми, могут возникать ситуации, в которых игроки пытаются привлечь один и тот же элемент из области структуры или выбрать одно и то же соединение; более того, такие действия могут происходить во время игры одновременно. Таким образом, параллельные семантические игры оказываются симметричными в том смысле, что ни один игрок не оказывается дискриминирован по сравнению с противником, потому что в таких играх для любого игрока отсутствует преимущество первенства.

Как отмечают Г. Санду и А. Пиетаринен: «На сегодняшний день остается по большому счету не известно, что такое подлинная логика параллелизма. Более того, если мы хотим строго моделировать знания и информацию в многоагентных (многопроцессорных) системах передачи сообщений, имеющиеся языки представления знаний, кажется, не обеспечивают достаточной выразительной силы, чтобы отразить все интересные конфигурации, которые могут возникать в таких системах. Но теперь у нас есть логика, которая содействует информационной независимости» [Pietarinen, Sandu 2009: 123–124]. На современном этапе параллельные игры как выражающие структуры событий были введены в качестве предварительной новой основы для формальной семантики параллельных систем и языков программирования.

Таким образом, решение проблемы анализа игр с несовершенной информацией было найдено при помощи внесения изменений в язык логики первого порядка, вследствие чего возникла IF-логика. Однако экстенсивная форма игры, которая лежит в основе первоначальной теоретико-игровой семантики Хинтикки, служащей семантическим основанием IF-логики, не позволяет рассматривать симметричные игры. Для преодоления данного затруднения была предложена параллельная теоретико-игровая семантика. Поскольку такая семантика базируется на играх в экстенсивной форме, а не на частично упорядоченных играх, то ее использование позволяет моделировать и анализировать симметричные игры, что придает такому семантическому подходу гораздо большую выразительную силу и открывает возможности исследовать многообразные коммуникативные процессы [Shapiro 2012].

Автор выражает признательность рецензентам, замечания которых способствовали улучшению первоначальной версии статьи.



## ЛИТЕРАТУРА

- Драгалина-Черная 2012 — *Драгалина-Черная Е. Г.* Онтологии для  $\forall$ белая и Элоизы. М., 2012. 231 с.
- Ковальчук 2011 — *Ковальчук И. А.* Семантика возможных миров и эпистемическая логика // Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. 2011. № 101. С. 16–21.
- Микиртумов 2009 — *Микиртумов И. Б.* Логико-прагматические характеристики модификаций эпистемических состояний // Логико-философские штудии. 2009. Вып. 7. С. 124–141.
- Нечитайлов 2003 — *Нечитайлов Ю. В.* Параллельная композиция в динамической логике игр с ограниченной рациональностью // Логические исследования. 2003. Вып. 10. С. 142–149.
- Hintikka 1973 — *Hintikka J.* Logic, Language Games and Information. Oxford, 1973. 291 p.
- Hintikka, Sandu 1997 — *Hintikka J., Sandu G.* Game-theoretical semantics // Handbook of Logic and Language / eds. J. van Benthem, A. ter Meulen. Amsterdam, 1997. P. 361–410.
- Hintikka 1996 — *Hintikka J.* The Principles of Mathematics Revisited. New York, 1996. 288 p.
- Hodges 1997 — *Hodges Wilfrid.* Compositional semantics for a language of imperfect information // Logic Journal of the IGPL. 1997. N 5. P. 539–563.
- Mann, Sandu, Sevenster 2011 — *Mann Allen L., Sandu G., Sevenster M.* Independence-Friendly Logic A Game-Theoretic Approach. Cambridge, 2011. 216 p.
- Melliès, Abramsky 1999 — *Melliès P., Abramsky S.* Concurrent Games and Full Completeness // Proceedings of the Fourteenth International Symposium on Logic in Computer Science. New York, 1999. P. 431–442.
- Pietarinen 1999 — *Pietarinen A.* Directions in Game-Theoretic Semantics. 1999. URL: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.50.2509&rep=rep1&type=pdf> (дата обращения: 02.02.2014).
- Pietarinen 2009 — *Pietarinen A.* Semantic Games in Logic and Epistemology // Logic, Epistemology, and The Unity Of Science. 2009. P. 57–103.
- Pietarinen, Sandu 2000 — *Pietarinen A., Sandu G.* Games in philosophical logic // Nordic Journal of Philosophical Logic. 2000. Vol. 4, N 2. P. 143–173.
- Pietarinen, Sandu 2009 — *Pietarinen A., Sandu G.* If Logic, Game-Theoretical Semantics, and the Philosophy of Science // Logic, Epistemology, and The Unity Of Science. 2009. P. 105–138.
- Shapiro 2012 — *Shapiro O. A.* Communication: multilevel game to the rules of logic // Вісн. нац. ун-ту «Юридична академія України імені Ярослава Мудрого». 2012. № 1 (11). С. 82–89.
- Tarski 1936 — *Tarski A.* О роєсїу wynikania logicznego // Przegląd filozoficzny. Warszawa, 1936. R. xxxix, z. 1. S. 58–68 (пер. на русск. яз.: *Тарский А.* О понятии логического следования / пер. Б. Т. Домбровского. URL: [http://philosophy.ru/library/tarski/sledov.html#\\_ftnref1](http://philosophy.ru/library/tarski/sledov.html#_ftnref1) (дата обращения: 02.02.2014)).