ТРУДЫ МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ

А. Б. Гончарова

Сравнительный анализ дедуктивных средств различных логических теорий (на примере времéнных и алетических логик)

Аннотация: В данной работе на примере ряда нормальных модальных пропозициональных логик демонстрируется эффективность метода перевода и погружающих операций для установленных ранее соотношений между классами систем различного характера.

Ключевые слова: Нормальная модельная пропозициональная логика, алетическая логика, временная логика, процедура перевода, дедуктивная сила, отношения выводимости.

Abstract: This work demonstrates the effectiveness of translation method and immersing operations for earlier established correlations between classes of systems of different types (by the example of a number of normal modal propositional logic systems).

Keywords: Normal modal propositional logic, alethic logic, temporal logic, translation procedures, deductive accountability, inferential relations.

Развитие логики все более ставит вопрос о том, как возможно сравнение различных логических систем. Интересен этот вопрос, если речь идет о сравнении теорий, сформулированных в разных языках. Целью данной работы является сравнение дедуктивных сил ряда алетических и временных логик при определениях алетических модальностей через временные.

Перевод и погружающие операции как средства сравнения теорий

Пусть T_1 и T_2 — теории, сформулированные соответственно в языках L_1 и L_2 с соответствующими логиками. Пусть φ — рекурсивная функция, сопоставляющая формуле языка L_1 форму языка L_2.

Функцию будем называть переводом теории T_1 в T_2, если и только если выполняется условие $A\in T_1 \Rightarrow \varphi(A) \in T_2$.

Если выполняется дополнительное условие $\varphi(A)\in T_2 \Rightarrow A\in T_1$, то рекурсивную функцию φ называют погружающей операцией T_1 в T_2.

Не всякий перевод будет погружающей операцией, то, что перевод является погружающей операцией, необходимо доказать.

Теорема[1]. Если φ есть перевод из S_1 в S_2 и существует такая рекурсивная функция ψ, что ψ есть перевод из S_2 в S_1 и формула $A\equiv \psi(\varphi(A))$ доказуема в S_1, то φ есть операция, погружающая S_1 в S_2.

Доказательство:

Пусть в S_2 доказуема формула $\varphi(A)$. Тогда в S_1 доказуема формула $\psi(\varphi(A))$. Но поскольку в S_1 доказуема формула $A\equiv \psi(\varphi(A))$, то в S_1 доказуема формула A. Следовательно, если $\vdash_{s2}\varphi(A)\Rightarrow\vdash_{s1}A$. Но так как $\vdash_{s1}A\Rightarrow \vdash_{s2}\varphi(A)$, то φ есть операция, погружающая S_1 в S_2. Используем данный метод для сравнения временных и алетических логик.

В качестве перевода будут взяты определения алетических модальностей через временные, данные Диодором Кроносом и Аристотелем (в дальшейшем Df_1 и Df_2 соответственно), но сначала необходимо сформулировать исчисления сравниваемых систем.

Исчесление временной и алетической логики

Для построения исчисления временной логики необходимо лишь обогатить язык КЛВ двумя модальными операторами H и G и дополнить стандартное определение формулы. Определения вывода и доказательства также стандартные.

При необходимости операторы P и F могут быть введены следующим образом:

$PA\equiv_{Df}\neg H\neg A$,

$FA\equiv_{Df}\neg G\neg A$.

Для удобства будет построено исчисление минимальной временной логики K_t, в семантике которого не накладывается никаких ограничений на отношение достижимости R.

Дедуктивные постулаты K_t — это аксиомы ИКЛВ, расширенные следующими аксиомами и нижеследующими правилами:

1. $H(A\supset B)\supset(HA\supset HB)$.
2. $G(A\supset B)\supset(GA\supset GB)$.
3. $A\supset GPA$.
4. $A\supset HFA$.

R1: modus ponens;

R2: $\dfrac{\vdash A}{\vdash HA.}$ — правило Гёделя для оператора H.

[1] Формулировка теоремы и ее доказательство взяты из книги В. А. Смирнова: *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания. С. 48–49.

R3: $\dfrac{\vdash A}{\vdash GA}$ — правило Гёделя для оператора G.

Для построения алетической логики T, необходимо расширить язык КЛВ оператором необходимости и дополнить определение формулы. Определение вывода и доказательства стандартные. К дедуктивным постулатам ИКЛВ добавляется следующее:

1. $\Box A \supset A$.
2. $\Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$.

R1: $\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$ — правило Гёделя для оператора □.

При необходимости операторы ◊ может быть введен следующим образом: $\Diamond A \equiv_{Df} \neg \Box \neg A$.

Определения алетических модальностей через временные[2]

Диодор Кронос дал следующую трактовку необходимости и возможности посредством временных характеристик:

Df.1

$\Diamond A \equiv_{Df} A \lor FA$.

$\Box A \equiv_{Df} A \& GA$.

Следующая трактовка алетических модальностей Df.2 связана с именем Аристотеля.

$\Diamond A \equiv_{Df} PA \lor A \lor FA$.

$\Box A \equiv_{Df} HA \& A \& GA$.

Погружение T в K_t(KF) при $Df_{1.}$

$Df_{1.}$ $\Diamond A \equiv_{Df} A \lor FA$.

$\Box A \equiv_{Df} A \& GA$.

Принимая во внимание определение, зададим функции перевода следующим образом:

$T \to_{\varphi} K_t$	$K_t \to_{\psi} T$
$\varphi(p_i) \equiv p_i$	$\psi(p_i) \equiv p_i$
$\varphi(\neg A) \equiv \neg\varphi(A)$	$\psi(\neg A) \equiv \neg\psi(A)$
$\varphi(A*B) \equiv \varphi(A) * \varphi(B)$	$\psi(A*B) \equiv \psi(A) * \psi(B)$
$\varphi(\Box A) \equiv G\varphi(A) \& \varphi(A)$	$\psi(GA) \equiv \Box\psi(A)$

$\forall A \in L_{KF} (\vdash_{KF} A \Rightarrow \vdash_T \psi(A))$.

[2] *Смирнов В. А.* Определение модальных операторов через временные // Модальные и интенсиональные логики и их применение к проблемам методологии науки. М., 1984. С. 56.

I. Покажем, что φ есть перевод из алетической системы T во временную систему K_t, а точнее, в ее будущный фрагмент KF, доказав утверждение:

$\forall A \in L_T(\vdash_T A \Rightarrow \vdash_{KF} \varphi(A))$.

(1) $\vdash_T A$.

(2) Существует непустая, конечная последовательность формул:

C_1

C_2

C_i 1) аксиома;

2) получена по mp из предыдущих;

3) получена по правилу Геделя.

$C_k \equiv A$.

Рассмотрим случай 1.

C_i — аксиома.

Так как аксиомы 1-10(КЛВ) в системах T и KF совпадают, то достаточно показать лишь для оставшихся.

(1) $\varphi(\square A \supset A) = \varphi(\square A) \supset \varphi(A) = (\varphi(A) \,\&\, G\varphi(A)) \supset \varphi(A)$.

Перевод этой аксиомы T в KF совпадает с A_3 обоих исчислений.

(2) $\varphi(\square (A \supset B) \supset (\square A \supset \square B)) = (\varphi(A \supset B) \,\&\, G\varphi(A \supset B)) \supset (\varphi(\square A) \supset \varphi (\square B)) = ((\varphi(A) \supset \varphi (B)) \,\&\, (G\varphi(A) \supset G\varphi (B))) \supset ((\varphi(A) \,\&\, G\varphi(A)) \supset (\varphi(B) \,\&\, G\varphi(B)))$.

Доказательство:

(1) $(\varphi(A) \supset \varphi (B)) \,\&\, (G\varphi(A) \supset G\varphi (B))$ — доп.

(2) $(2)(\varphi(A) \,\&\, G\varphi(A))$ — доп.

(3) $(((\varphi(A) \supset \varphi (B)) \,\&\, (G\varphi(A) \supset G\varphi (B))) \supset (G\varphi(A) \supset G\varphi (B))$ — A_4.

(4) $(((\varphi(A) \supset \varphi (B)) \,\&\, (G\varphi(A) \supset G\varphi (B))) \supset (\varphi(A) \supset \varphi (B))$ — A_3.

(5) $G\varphi(A) \supset G\varphi (B)$ — mp (3),(1).

(6) $\varphi(A) \supset \varphi (B)$ — mp (4),(1).

(7) $(\varphi(A) \,\&\, G\varphi(A)) \supset \varphi(A)$ — A_3.

(8) $(\varphi(A) \,\&\, G\varphi(A)) \supset G\varphi(A)$ — A_4.

(9) $\varphi(A)$ — mp (7),(2).

(10) $G\varphi(A)$ — mp (8),(2).

(11) $\varphi(B)$ — mp (6),(9).

(12) $G\varphi(B)$ — mp (5),(10).

(13) $G\varphi(B) \supset (\varphi(B) \supset (\varphi(B) \,\&\, G\varphi(B)))$ — A_5.

(14) $\varphi(B) \supset (\varphi(B) \,\&\, G\varphi(B))$ — mp (13),(12).

(15) $\varphi(B) \,\&\, G\varphi(B)$ — mp (13),(11).

Устраняя допущения по теореме дедукции, получаем искомую формулу.

Рассмотрим случай 2.

C_i получена из предыдущих по mp.

(1) $\vdash_{KF} \varphi(C_j)$.

(2) $\vdash_{KF} \varphi (C_j \supset C_i)$.
(3) $\vdash_{KF} \varphi(C_j) \supset \varphi (C_i)$.
(4) $\vdash_{KF} \varphi(C_i)$.

Рассмотрим случай 3.
C_i получена по правилу Гёделя.
(1) $\vdash_{KF} \varphi(C_i))$.
(2) $\vdash_{KF} G\varphi(C_i))$.
(3) $\vdash_{KF} \varphi(C_i) \& G\varphi(C_i)$.

II. Покажем, что ψ есть перевод будущного фрагмента K_t в алетическую систему T, доказав утверждение:
$\forall A \in L_{KF} (\vdash_{KF} A \Rightarrow \vdash_T \psi (A))$.
(1) $\vdash_{KF} A$.
(2) Существует непустая, конечная последовательность формул
C_1
C_2
C_i 1) аксиома;
2) получена по mp из предыдущих;
3) получена по правилу Геделя.
$C_k \equiv A$.

Рассмотрим случай 1.
C_i — аксиома.
$\psi (G(A\supset B) \supset (GA\supset GB)) = \psi (G(A\supset B)) \supset (\psi (GA\supset GB)) = \psi (G(A\supset B)) \supset (\psi (GA)\supset \psi (GB)) = \Box \psi(A\supset B) \supset (\Box \psi(A)\supset \Box \psi (B))$.

Нетрудно увидеть, что результат перевода данной аксиомы является аксиомой исчисления T, поэтому его можно оставить без доказательства.

Рассмотрим случай 2.
C_i — получена по mp из предыдущих.
(1) $\vdash_T \psi (C_j)$.
(2) $\vdash_T \psi (C_j \supset C_i)$.
(3) $\vdash_T \psi (C_j) \supset \psi (C_i)$.
(4) $\vdash_T \psi (C_i)$.

Рассмотрим случай 3.
C_i получена по правилу Гёделя.
(1) $\vdash_T \psi (C_i))$.
(2) $\vdash_T \Box \psi (C_i)$.

Для того чтобы показать, что система алетических модальностей S_4 также является фрагментом временной системы K_t, только уже расширенной за счет аксиомы транзитивности, достаточно добавить к доказанному выше в I, II соответственно:

I. $\varphi (\Box A \supset \Box\Box A) = \varphi (\Box A) \supset \varphi (\Box\Box A) = (G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset (G\varphi(\Box A) \& \varphi(\Box A)) = (G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset ((GG \varphi(A) \& G\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A)))$.

Доказательство:

(1) $G\varphi(A) \& \varphi(A)$ — доп.

(2) $(G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset GA$ — A_3.

(3) $G\varphi(A)$ — mp (1), (2).

(4) $G\varphi(A) \supset GG\varphi(A)$ — Атр.

(5) $GG\varphi(A)$ — mp (3), (4).

(6) $(GG\varphi(A) \supset (G\varphi(A) \supset (GG\varphi(A) \& G\varphi(A)))$ — A_5.

(7) $G\varphi(A) \supset (GG\varphi(A) \& G\varphi(A))$ — mp (5), (6).

(8) $GG\varphi(A) \& G\varphi(A)$ — mp (7), (3).

(9) $((GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \supset ((G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset ((GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A)))))$ — A_5.

(10) (10)$(G\varphi(A) \& \varphi(A)) \supset ((GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A)))$ — mp (8), (9).

(11) (11) $(GG\varphi(A) \& G\varphi(A)) \& (G\varphi(A) \& \varphi(A))$ — mp (10), (1).

(12) Устраняя допущение 1, по теореме дедукции получаем искомую формулу.

II. $\psi(GA \supset GGA) = \psi(GA) \supset \psi(GGA) = \Box\, \psi(A) \supset \Box\, \psi(GA) = \Box\, \psi(A) \supset \Box\Box\, \psi(A)$.

Легко заметить что в результате перевода ψ данной аксиомы K_t получена аксиома S_4, поэтому ее можно оставить без отдельного доказательства.

III. Теперь рассмотрим условие, которое позволяет назвать φ погружающей операцией $A \equiv \psi (\varphi(A))$:

$p_i \equiv \psi(\varphi (p_i))$

$p_i \equiv \psi (p_i)$

$p_i \equiv p_i$

$(A*B) \equiv \psi(\varphi(A*B))$

$\psi(\varphi(A*B)) \equiv \psi(\varphi(A)* \varphi (B))$

$\psi(\varphi(A)* \varphi (B)) \equiv \psi(\varphi(A))*\psi (\varphi (B))$

$\Box A \equiv \psi (\varphi(\Box A))$

$\psi (\varphi(\Box A)) \equiv \psi(\varphi(A) \& G \varphi(A))$

$\psi(\varphi(A) \& G \varphi(A)) \equiv \psi(\varphi(A)) \& \psi (G\varphi(A))$

$\psi(\varphi(A)) \& \psi (G\varphi(A)) \equiv \psi(\varphi(A)) \& \Box\, \psi(\varphi(A)$ — требуется доказать.

$\neg A \equiv \neg \psi (\varphi(A))$

$\neg A \equiv \psi (\neg\varphi(A)$

$\neg A \equiv \psi (\varphi(\neg A))$

(1) $\vdash_T A \equiv \psi(\varphi (A))$

(2) $\vdash_T \Box(A \equiv \psi(\varphi (A)))$ — по правилу Гёделя для оператора $\Box$

(3) $\vdash_T \Box A \equiv \Box\psi(\varphi (A))$

(4) $\vdash_T \Box\psi(\varphi (A)) \supset \psi(\varphi (A))$ — A_{11}

(5) $\Box\psi(\varphi (A)) \equiv \Box\psi(\varphi (A)) \& \psi(\varphi (A))$

(6) $\vdash_T \Box A \equiv \Box\psi(\varphi (A)) \& \psi(\varphi (A))$

Погружение B в Kt при Df_2.

$\Diamond A \equiv_{Df} PA \vee A \vee FA$,

$\Box A \equiv_{Df} HA \& A \& GA$.

Исходя из определения, зададим функции перевода:

$B \rightarrow_{\varphi} K_t$	$K_t \rightarrow_{\psi} B$
$\varphi(p_i) \equiv p_i$	$\psi(p_i) \equiv p_i$
$\varphi(\neg A) \equiv \neg\varphi(A)$	$\psi(\neg A) \equiv \neg\psi(A)$
$\varphi(A*B) \equiv \varphi(A) * \varphi(B)$	$\psi(A*B) \equiv \psi(A) * \psi(B)$
$\varphi(\Box A) \equiv G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)$	$\psi(H/GA) \equiv \Box\psi(A)$
	$\psi(P/FA) \equiv \Diamond\psi(A)$
$\varphi(\Diamond A) \equiv F\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee P\varphi(A)$.	

VII. Покажем, что φ есть перевод системы B в систему Kt.

$\forall A \in L_B(\vdash_B A \Rightarrow \vdash_{Kt} \varphi(A))$.

(1) $\vdash_B A$.

(2) Существует непустая, конечная последовательность формул

C_1

C_2

C_i 1) аксиома;

2) получена по mp из предыдущих;

3) получена по правилу Геделя.

$C_k \equiv A$.

Рассмотрим случай 1.

C_i — аксиома.

Так как аксиомы 1-10(КЛВ) в системах B и Kt совпадают, то достаточно показать лишь для оставшихся.

$\varphi(\Box A \supset A) = \varphi(\Box A) \supset \varphi(A) = (G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset \varphi(A)$.

Результат перевода являет собой схему аксиом КИВ, поэтому в доказательстве не нуждается.

$\varphi(A \supset \Box\Diamond A) = \varphi(A) \supset \varphi(\Box\Diamond A) = \varphi(A) \supset (G\varphi(\Diamond A) \& \varphi(\Diamond A) \& H\varphi(\Diamond A)) = \varphi(A) \supset (G(P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \& H(P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A))) = \varphi(A) \supset (GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \& (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)))$.

Доказательство:

(1) $\varphi(A)$ — доп.

(2) $\varphi(A) \supset GP\varphi(A)$ — A_{13}.

(3) $GP\varphi(A)$ — mp (1), (2).

(4) $GP\varphi(A) \supset (GP\varphi(A) \vee G\varphi(A))$ — A_6.

(5) $GP\varphi(A) \vee G\varphi(A)$ — mp (3), (4).

(6) $(GP\varphi(A) \vee G\varphi(A)) \supset (GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A))$ — A_6.
(7) $(GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A))$ — mp (5), (6).
(8) $\varphi(A) \supset (P\varphi(A) \vee \varphi(A))$ — A_6.
(9) $P\varphi(A) \vee \varphi(A)$ — mp (1), (8).
(10) $(P\varphi(A) \vee \varphi(A)) \supset (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A))$ — A_6.
(11) $P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)$ — mp (9), (10).
(12) $\varphi(A) \supset HF\varphi(A)$ — A_{14}.
(13) $HF\varphi(A)$ — mp (1), (12).
(14) $HF\varphi(A) \supset (H\varphi(A) \vee HF\varphi(A))$ — A_7.
(15) $H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)$ — mp (13), (14).
(16) $(H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \supset (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A))$.
(17) $(HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A))$ — mp (15), (16).
(18) $((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \supset ((P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \supset ((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)))))$.
(19) $(P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)) \supset ((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)))$ — mp (7), (18).
(20) $(GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A)))$ — mp (11), (19).
(21) $((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A))) \supset ((HP\varphi(A). \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \supset ((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A))) \& (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A))))$ — A_5.
(22) $(HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)) \supset (((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A))) \& (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A)))$ — mp (21), (20).
(23) $((GP\varphi(A) \vee G\varphi(A) \vee GF\varphi(A)) \& (P\varphi(A) \vee \varphi(A) \vee F\varphi(A))) \& (HP\varphi(A) \vee H\varphi(A) \vee HF\varphi(A))$ — mp (22), (17).

Устраняя допущение 1, по теореме дедукции получаем искомую формулу. $\varphi(\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)) = \varphi(\Box(A \supset B)) \supset \varphi(\Box A \supset \Box B) = (G\varphi(A \supset B) \& \& \varphi(A \supset B) \& H(A \supset B)) \supset (\varphi(\Box A) \supset \varphi(\Box B)) = (G\varphi(A \supset B) \& \varphi(A \supset B) \& H\varphi(A \supset B)) \supset ((G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset (G\varphi(B) \& \varphi(B) \& H\varphi(B))) = ((G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B))) \supset ((G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset (G\varphi(B) \& \varphi(B) \& H\varphi(B)))$.

Доказательство:
(1) $(G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B))$ — доп.
(2) $(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A))$ — доп.
(3) $((G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B))) \supset (G\varphi(A) \supset G\varphi(B))$ — A_3.
(4) $G\varphi(A) \supset G\varphi(B)$ — mp (1), (3).
(5) $(G\varphi(A) \& \varphi(A) \& H\varphi(A)) \supset G\varphi(A)$ A_3.
(6) $G\varphi(A)$ — mp (2), (5).
(7) $G\varphi(B)$ — mp (4), (6).
(8) $(G\varphi(A) \supset G\varphi(B)) \& (\varphi(A) \supset \varphi(B)) \& (H\varphi(A) \supset H\varphi(B)) \supset (\varphi(A) \supset \varphi(B))$ — A_3.

(9) $\varphi(A)\supset\varphi(B)$ — mp (1), (8).
(10) $(G\varphi(A)\& \varphi(A)\&H\varphi(A)) \supset \varphi(A)$ — A_3.
(11) $\varphi(A)$ — mp (2), (10).
(12) $\varphi(B)$ — mp (9), (11).
(13) $(G\varphi(A)\supset G\varphi(B))\&(\varphi(A)\supset\varphi(B))\&(H\varphi(A)\supset H\varphi(B))\supset(H\varphi(A)\supset H\varphi(B))$ — A_3.
(14) $H\varphi(A)\supset H\varphi(B)$ — mp (13), (1).
(15)$(G\varphi(A)\& \varphi(A)\&H\varphi(A)) \supset H\varphi(A)$ — A_3.
(16) $H\varphi(A)$ — mp (2), (15).
(17) $H\varphi(B)$ — mp (9), (11).
(18) $G\varphi(B) \supset (\varphi(B) \supset(G\varphi(B) \& \varphi(B)))$ — A_5.
(19) $\varphi(B) \supset(G\varphi(B) \& \varphi(B))$ — mp(18),(7).
(20) $G\varphi(B) \& \varphi(B)$ — mp (19), (12).
(21) $((G\varphi(B) \& \varphi(B)) \supset(H\varphi(B) \supset(G\varphi(B) \& \varphi(B) \& H\varphi(B)))$ — A_5.
(22) $(H\varphi(B) \supset(G\varphi(B)\&\varphi(B)\&H\varphi(B)))$ — mp (21), (20).
(23) $(G\varphi(B)\&\varphi(B)\&H\varphi(B))$ — mp (22), (17).

Устраняя допущения (1), (2), по теореме дедукции получаем искомую формулу.

Рассмотрим случай 2. $\vdash \rightarrow$
C_i получена из предыдущих по mp.
(1) $\vdash_{Kt} \varphi(C_j)$.
(2) $\vdash_{Kt} \varphi\ (C_j \supset C_i)$.
(3) $\vdash_{Kt} \varphi(C_j) \supset \varphi\ (C_i)$.
(4) $\vdash_{Kt} \varphi(C_i)$.
Рассмотрим случай 3.
(1) $\vdash_{Kt} \varphi(C_i)$.
(2) $\vdash_{Kt} G\varphi(C_i)$.
(3) $\vdash_{Kt} H\varphi(C_i)$.
(4) $\vdash_{Kt} G\varphi(C_i)\ \&\ \varphi(C_i)\ \&\ H\varphi(C_i)$.

VIII. Покажем, что ψ есть перевод системы Kt в систему B.
$\forall A \in L_{Kt}\ (\vdash_{Kt} A \Rightarrow\ \vdash_B \psi(A))$
(1) $\vdash_{Kt} A$.
(2) Существует непустая, конечная последовательность формул:
C_1
C_2
C_i 1) аксиома;
2) получена по mp из предыдущих;
3) получена по правилу Гёделя.
$C_k \equiv A$.

Рассмотрим случай 1.

C_i — аксиома.

ψ (G(A⊃B) ⊃(GA⊃GB)) = ψ (G(A⊃B)) ⊃(ψ (GA⊃GB)) = ψ (G(A⊃B)) ⊃ (ψ (GA)⊃ ψ (GB))= □ ψ(A⊃B) ⊃(□ ψ(A)⊃ □ ψ (B)).

ψ (H(A⊃B) ⊃(HA⊃HB)) = ψ (H(A⊃B)) ⊃(ψ (HA⊃HB)) = ψ (H(A⊃B)) ⊃ (ψ (HA)⊃ ψ (HB))= □ ψ(A⊃B) ⊃(□ ψ(A)⊃ □ ψ (B)).

ψ (A⊃GPA)= ψ(A) ⊃ ψ (GPA)= ψ(A) ⊃ □ψ(PA)= ψ(A) ⊃ □◊ψ(A).

ψ (A⊃HFA)= ψ(A) ⊃ ψ (HFA)= ψ(A) ⊃ □ψ(FA)= ψ(A) ⊃ □◊ψ(A).

Результаты перевода этих схем аксиом K_t являются схемами аксиом B, и их подробное доказательство приведено не будет.

Рассмотрим случай 2.

C_i — получена по mp из предыдущих.

(1) $\vdash_B \varphi(C_j)$.

(2) $\vdash_B \varphi (C_j \supset C_i)$.

(3) $\vdash_B \varphi(C_j) \supset \varphi (C_i)$.

(4) $\vdash_B \varphi(C_i)$.

Рассмотрим случай 3.

C_i получена по правилу Гёделя.

(1) $\vdash_B \psi (C_i)$).

(2) $\vdash_B \Box \psi (C_i)$.

Для того чтобы показать, что система алетических модальностей S_5 также является фрагментом временной системы K_t, только расширенной за счет аксиомы транзитивности и аксиом линейности в прошлое и будущее , достаточно добавить к доказанному выше в I,II соответственно:

I. φ (□A⊃□□A)= φ (□A)⊃ φ (□□A)= (Gφ(A)& φ(A)&Hφ(A)) ⊃(Gφ(□A)& φ(□A)&Hφ(□A))= (Gφ(A)& φ(A)&Hφ(A)) ⊃(G(Gφ(A)& φ(A)&Hφ(A)) & (Gφ(A)& φ(A)&Hφ(A)) & H(Gφ(A)& φ(A)&Hφ(A))).

II. ψ(GA⊃GGA)= ψ(GA)⊃ ψ(GGA)=□ ψ(A)⊃□ ψ(GA)=□ ψ(A)⊃□□ ψ(A).

Результат перевода является схемой аксиом S_5:

ψ ((PA&PB) ⊃ (P(A&PB) ∨ P(B&PA) ∨ P(A&B)))= ψ(PA&PB)⊃(ψ (P(A&PB) ∨ ψ (P(B&PA) ∨ ψ (P(A&B)))= (ψ(PA)&ψ(PB))⊃(ψ(P(A&PB))∨ψ(P(B&PA))∨ψ (P(A&B))))=(◊ψ(A)&◊ψ(B))⊃(◊ψ(A&PB)∨◊ψ(B&PA)∨◊ψ(A&B))=(◊ψ(A)& ◊ψ (B))⊃((◊ψ(A)&◊ψ(PB))∨(◊ψ(B)&◊ψ(PA))∨(◊ψ(A)&◊ψ(B)))=(◊ψ(A)& ◊ψ(B))⊃ ((◊ψ(A)&◊◊ψ(B))∨(◊ψ(B)&◊◊ψ(A))∨(◊ ψ (A)&◊ψ(B))).

ψ ((FA&FB) ⊃ (F(A&FB) ∨ F(B&FA) ∨ F(A&B)))= ψ(FA&FB)⊃(ψ (F(A&FB) ∨ ψ (F(B&FA) ∨ ψ ((FA&B)))= (ψ(FA)&ψ(FB))⊃(ψ(F(A&FB))∨ψ(F(B&FA))∨ψ (F(A&B))))=(◊ψ(A)&◊ψ(B))⊃(◊ψ(A&FB)∨◊ψ(B&FA)∨◊ψ(A&B))=(◊ψ(A)& ◊ψ (B))⊃((◊ψ(A)&◊ψ(FB))∨(◊ψ(B)&◊ψ(FA))∨(◊ψ(A)&◊ψ(B)))=(◊ψ(A)& ◊ψ(B))⊃ ((◊ψ(A)&◊◊ψ(B))∨(◊ψ(B)&◊◊ψ(A))∨(◊ ψ (A)&◊ψ(B))).

Результат перевода одинаковый, поэтому имеет смысл привести и общее доказательство:

(1) (1)(◊ψ(A)& ◊ψ(B)).
(2) (◊ψ(A)& ◊ψ(B))⊃ ((◊ψ(B)&◊◊ψ(A))∨(◊ ψ (A)&◊ψ(B))) — A_7.
(3) (◊ψ(B)&◊◊ψ(A))∨(◊ ψ (A)&◊ψ(B)) — mp(1),(2).
(4) (◊ψ(B)&◊◊ψ(A))∨(◊ψ(A)&◊ψ(B))⊃((◊ψ(A)&◊◊ψ(B))∨(◊ψ(B)&◊◊ψ (A))∨.
(5) (◊ ψ(A)&◊ψ(B))) — A_7.
(6) (◊ψ(A)&◊◊ψ(B))∨(◊ψ(B)&◊◊ψ(A))∨.
(7) (◊ ψ(A)&◊ψ(B)) — mp(3),(4).

III. Условие, необходимое для того, чтобы φ считать погружающей операцией.

A≡ψ(φ(A)),
p_i ≡ ψ(φ (p_i)),
p_i ≡ ψ (p_i),
p_i ≡ p_i.

¬A≡ ¬ ψ (φ(A)),
¬A≡ ψ (¬φ(A),
¬A≡ψ(φ(¬A).

(A*B) ≡ ψ(φ(A*B)),
ψ(φ(A*B)) ≡ ψ(φ(A)* φ (B)),
ψ(φ(A)* φ (B)) ≡ ψ(φ(A))* ψ (φ (B)),

□A ≡ ψ (φ(□A)),
ψ(φ(□A))≡ψ(Gφ(A)&φ(A)&Hφ(A)),
ψ(Gφ(A))& ψ (φ(A))& ψ (Hφ(A)),
□ψ (φ(A))& ψ (φ(A))& □ψ (φ(A)) — требуется доказать.

(1) $\vdash_B$A≡ ψ(φ (A)).
(2) $\vdash_B$□(A≡ ψ(φ (A))) — по правилу Гёделя для оператора □.
(3) $\vdash_B$□A≡ □ψ(φ (A)).
(4) $\vdash_B$□ψ(φ (A)) ⊃ ψ(φ (A)) — A_{11}.
(5) □ψ(φ (A)) ≡ □ψ (φ(A))& ψ (φ(A))& □ψ (φ(A)).
(6) $\vdash_B$□A≡□ψ(φ (A)) & ψ(φ (A)).

Сравнение алетических и временных логик посредством выражения алетических модальностей через временные дает возможность исследовать соотношение между имплицитно конституированными в этих логиках концепций времени и тем философским пониманием необходимости и возможности, которые подразумеваются при построении формальных систем алетических логик.