ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

MISCONCEZIONI IN MATEMATICA: UNA SPERIMENTAZIONE NELLA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO NEGRINI

Presentata da:
CHIARA GAMBERI

Sessione II
Anno Accademico 2016/2017

"L'entusiamo è per la vita
quello che la fame è per il cibo"
Bertrand Russell

Indice

Introduzione

Federigo Enriquez riteneva che l'errore fosse una tappa naturale del processo di ricerca della verità, tanto da parte degli scienziati nella formulazione di nuove teorie, quanto da parte degli studenti durante il processo di apprendimento.
"Il maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante nella sua arte didattica" [14].

Condividendo il pensiero del grande matematico F. Enriquez, in questa tesi ci proponiamo di analizzare una delle possibili cause di errore in matematica: le misconcezioni. Questo termine nel corso degli ultimi decenni in Didattica della Matematica ha subito diverse interpretazioni, inizialmente con connotazioni negative, ma evolvendo fino ad acquisire l'odierno significato per cui una misconcezione rappresenta una conoscenza precedentemente acquisita (intuitivamente o attraverso trasposizioni didattiche) e accertata come corretta ma che successivamente, in un diverso contesto, si rivela errata.
La misconcezione rappresenta un momento di delicato passaggio da una prima concezione elementare ed intuitiva ad una più elaborata; tanto che Silvia Sbaragli riflette sul fatto che tutta la carriera scolastica di un individuo possa essere costituita dal passaggio da misconcezioni a concezioni più evolute.
Caratterizzeremo quindi, nel primo capitolo di questa trattazione, il significato del termine misconcezione, partendo dall'evoluzione della sua interpretazione a livello storico.
Per poter affrontare efficacemente la correzione degli errori causati da misconcezioni è essenziale conoscerne le cause, che risiedono nel processo di formazione dei modelli mentali, secondo l'interpretazione costruttivista di Bruno d'Amore.
In questo processo sono spesso i modelli intuitivi a causare misconcezioni grazie alla loro

forza di persuasione che, come analizza Efraim Fischbein, può portare alla formazione di modelli parassiti.
Un'altra possibile causa è rappresentata da trasposizioni didattiche inadeguate.
Si possono, infatti, distinguere due tipi di misconcezioni: misconcezioni evitabili, che sono appunto causate da scelte didattiche inadeguate, e misconcezioni inevitabili, in quanto necessarie rappresentazioni iniziali e non complete di un concetto matematico.
Per un docente, conoscere come possono crearsi misconcezioni è fondamentale non solo per limitarne la formazione, ma anche per poterle riconoscere nel momento della loro manifestazione. Se un errore causato da una misconcezione viene interpretato dall'insegnate come distrazione o poca preparazione, lo studente continuerà molto probabilmente a commettere errori similari, poiché per adattare una misconcezione non basta 'correggere' l'errore singolo dello studente ma è necessario rendere l'allievo consapevole della misconcezione che ha.
Nel secondo capitolo analizzeremo alcuni esempi di misconcezioni, note in letteratura: le misconcezioni sulle operazioni, le misconcezioni specifiche della geometria, le miscocezioni legate alla rappresentazione con frazioni dei numeri razionali e le misconcezioni correlate al concetto di infinito.
Nel terzo capitolo viene presentata una sperimentazione svolta in alcune classi seconde e quinte di licei scientifici bolognesi.
È stato somministrato un questionario, selezionando accuratamente argomenti e domande, per verificare quanto misconcezioni che si formano nel percorso precedente alla scuola secondaria di secondo grado possano essere ancora persistenti e per vedere se sono presenti possibili misconcezioni che si ipotizza possano formarsi nell'arco di questo livello scolastico.
Per ogni domanda viene svolta un'analisi sia sul tipo di misconcezione su cui questa verte, che sui risultati raccolti, riportando alcune interessanti motivazioni date dagli studenti.

Capitolo 1

Alla base delle Misconcezioni

In questo Capitolo verrà analizzato il modello teorico dentro il quale negli ultimi anni le misconcezioni sono state studiate, per poter comprendere al meglio cosa queste siano, da cosa sono causate e come affrontarle per fornire la miglior didattica possibile.

In questo elaborato e, più in generale in molti studi di Didattica della Matematica, si parte dal presupposto che un *errore* non sia solo la prova di una preparazione non esaustiva da parte dello studente, quanto piuttosto un segnale, che il docente deve essere in grado di accogliere ad analizzare per comprendere la tipologia e l'entità del problema cognitivo che ha portato lo studente a commettere quell'errore.
"Dare agli errori una solo connotazione negativa e non interpretarli come segnali di malessere cognitivo, appunto, è troppo semplicistico e banale: non si tratta solo di valutare negativamente lo studente che sbaglia; si tratta, invece, di dare gli strumenti necessari per l'elaborazione critica " afferma Silvia Sbaragli in [10] ed è il punto di partenza della nostra riflessione.
Lo studio sulle motivazioni per cui gli studenti sbagliano è talmente importante, da poter parlare di una vera e propria analisi dell'errore, come la intende Rosetta Zan in [30]: *"se i comportamenti fallimentari causano errori, l'individuazione dei comportamenti fallimentari riconducono al classico filone di ricerca - trasversale - che è dato dall'interpretazione di errori. Appaiono interessanti in questo senso tutti i contributi che avanzano ipotesi interpretative sull'origine degli errori sistematici: in particolare quelli sui misconcetti ".*

Questo approccio in Didattica della Matematica fa parte della cosiddetta Didattica B [6] (ricerca empirica focalizzata sullo studente nella fase dell'apprendimento attraverso il suo punto di vista, al contrario della Didattica A che fissa l'attenzione sulla fase dell'insegnamento dal punto di vista del docente) e si basa, appunto, sull'analisi delle cause che generano errori negli studenti. Una di queste è rappresentata proprio dalle protagoniste di questa tesi: le misconcezioni.
Nel quadro dell'analisi degli errori, le misconcezioni rappresentano un fenomeno di largo interesse, in particolare per l'apparente difficoltà nel riconoscerle. Spesso, infatti, le manifestazioni da parte dello studente di una misconezione rischiano di essere lette dal docente come semplici distrazioni o imprecisioni; rappresentano, invece, profondi conflitti cognitivi che possono ostacolare l'apprendimento. Non solo, proprio per la loro natura (che analizzeremo nel dettaglio nella prossima Sezione) tendono ad essere difficili da 'adattare' e, per usare un termine di uso comune, da correggere.

1.1 Il termine Misconcezione

"Misconcetti, misconcezioni, concezioni errate, fraintendimenti, sono i termini italiani utilizzati in letteratura in corrispondenza del termine inglese misconceptions" [29]. Questo termine, a causa del suo prefisso 'mis', possiede un'intrinseca connotazione negativa, e può venire interpretato come "idea sbagliata", "interpretazione erronea", "malinteso"o addirittura banalmente "errore". Le prime volte che, in letteratura, il termine viene utilizzato assume il significato di "errore"o "malinteso"e avviene a partire dal 1980 nei campi della Fisica e dell'Economia [11, 12]. Parallelamente, con la stessa interpretazione, viene utilizzato anche nel campo della Matematica, come, a titolo esemplificativo, in uno dei lavori di Wagner che tratta dell'apprendimento di equazioni e funzioni [27].
Dopo gli anni '80 l'utilizzo di questo termine nella letteratura didattico-matematica si è molto diffuso, anche se sempre con significati non ben definiti, tanto che successivamente si sviluppa un filone di ricerca specifico sull'argomento mantenendo una vaga interpretazione sulla linea di "idea sbagliata", "errore".
Si osserva che, dopo qualche anno di ricerche, il termine subisce in una rilettura; gli viene

attribuito un senso di inconsapevolezza: *"se l'analogia è una potenziale generatrice di ipotesi, può anche essere causa di misconcetti o fraintendimenti. Succede spesso che, quando il soggetto si trova in forte incertezza di fronte a un problema da risolvere, è portato a trasformare un certo nucleo di informazioni da un dominio ben conosciuto ad un altro meno noto tramite un trasferimento per analogia. Può avvenire allora che si assumano per valide corrispondenze analogiche che invece non sono plausibili per quei particolari sistemi. Si parla di analogie tacite che possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo "* [18], o ancora *"le convinzioni specifiche scorrette (misconceptions) sulla Matematica sono quelle responsabili di errori, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile"* [28].
Ormai, soprattutto grazie all'evoluzione del concetto di misconcezione e alle riflessioni sulle cause che lo generano, il termine ha assunto uno specifico significato che Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli descrivono in un articolo [10] proprio con l'intento di fare chiarezza semantica sull'uso del termine: *"Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione."*
Rispetto alla forte connotazione negativa e al significato intuitivo che il termine aveva al suo ingresso nella terminologia della Didattica della Matematica, l'interpretazione odierna è costruttivista: l'analogo della misconcezione è, in alcuni casi, quello di un ostacolo all'apprendimento, una conoscenza precedente che non risulta essere adeguata ad una nuova situazione e non solo un'interpretazione erronea.
È quindi chiaro che in questi termini la misconcezione ha una connotazione completamente diversa rispetto a quella che aveva al suo ingresso in letteratura: è il frutto di una conoscenza, non un'assoluta mancanza di conoscenza, ma il cui insieme di validità non è stato sistemato opportunamente: *"Ogni concezione ha il suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire*

a che dominio queste appartengano", come esplica Colette Laborde [10].

1.2 La Formazione di Misconcezioni

I concetti matematici sono caratterizzati da due peculiari caratteristiche, che li differenziano da concetti di altra natura:

- *ogni concetto matematico ha rinvii a non-oggetti [...] dunque la concettualizzazione non è e non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta dato che, in matematica, non sono possibili rinvii ostensivi*;
- *ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono oggetti da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi [...] in matematica non c'è accesso sensibile diretto agli oggetti ma solo a loro rappresentazioni semiotiche in diversi registri linguistici* [5].

Il tutto Raymond Duval riassume con *"non c'è noetica senza semiotica"* [13].
In matematica, più che in tutte le altre discipline, la conoscenza di un concetto può avvenire solo attraverso lo studio approfondito delle sue rappresentazioni, che necessità però di essere supportato da un modello teorico-formale; questo inevitabilmente genera difficoltà cognitive. *"L'apprendimento, come acquisizione di un comportamento non innato, si svolge nel tempo; ha quindi natura processuale, e può essere descritto come una successione di stati transitori e finali"* [21], per capire dove un docente deve agire in questi stati, per favorire la corretta formazione dei concetti matematici, analizziamo brevemente come questi si formano.

1.2.1 L'interpretazione costruttivista del concetto di Misconcezione

In prima istanza è importante definire la terminologia che seguiremo lungo tutto l'elaborato per non rischiare di generare ambiguità, trattando spesso con termini anche di uso comune.

L'impostazione, che si riferisce esclusivamente al campo del cognitivo nell'apprendimento della matematica, è quella proposta da Bruno D'Amore in [6], in seguito ai suoi numerosi studi in Matematica, Pedagogia e Psicologia e poi rielaborata in [10] dove supporta l'interpretazione costruttivista del concetto di misconcezione.
Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale (o misto) prodotto da una sollecitazione interna o esterna. L'immagine mentale è condizionata da una molteplicità di fattori come influenze culturali o esperienze personali, ed è quindi un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può essere elaborata più o meno consciamente (anche questa capacità di elaborazione dipende dall'individuo), tuttavia l'immagine mentale è interna all'individuo ed almeno in prima istanza, involontaria.
L'insieme delle immagini mentali elaborate, tutte inerenti ad uno stesso concetto, costituisce il *modello mentale* del concetto in questione. Il modello mentale, dunque, riunisce in sé ciascuna delle immagini mentali che di quel concetto si sono formate nelle diverse occasioni.
Per comprendere al meglio cosa sia il modello mentale, si può immaginare come il limite della successione di immagini mentali: relativamente ad un certo concetto, una persona tende a creare immagini mentali sempre più generali, accogliendo ogni volta dettagli, informazioni e proprietà più comprensive. Quando, anche sotto nuove sollecitazioni, non si rende più necessaria la formazione di nuove immagini e l'ultima di queste non ha bisogno di 'aggiornarsi', si stabilizza e diventa modello mentale, che per la persona rappresenterà il concetto nella sua totalità.
Tutto ciò avviene, dunque, attraverso un processo dinamico che consiste in una successione di immagini mentali che via via si completano fino a raggiungimento del modello mentale, che rappresenta il limite di questa successione.
E' fondamentale sottolineare che questo processo non è così lineare, nell'arco della crescita di uno studente.
La formazione di un'immagine mentale, essendo almeno in prima istanza involontaria, può essere generata da associazioni personali, ad esempio iconiche oppure verbali. In seguito a successive sollecitazioni può verificarsi che una successiva immagine invece di rappresentare qualche informazione nuova del concetto in questione, ne contenga una

contrastante con la precedente. Quello che si verifica è un *conflitto cognitivo*: un contrasto tra l'immagine formatasi spontaneamente (e non) e la nuova sollecitazione.
Per superare questo conflitto l'individuo dovrà elaborare l'immagine che aveva, fino ad *accomodarla* all'immagine frutto della sollecitazione (che potrebbe aver fornito il docente) creando una nuova immagine, che rappresenti in maniera coerente le informazioni possedute dall'individuo. È proprio questa coerenza che, quando si verifica un conflitto cognitivo, rende necessaria l'accomodazione della prima immagine alle nuove informazioni. *"L'utilità del modello consiste essenzialmente nel suo valore euristico: esso facilita la risoluzione di un problema inizialmente posto nei termini dell'originale. Questo è possibile soltanto se, tra l'originale e il modello, sussiste un certo isomorfismo"*. [16]

Il meccanismo di formazione del modello mentale di un concetto appena descritto non rappresenta in questa trattazione una teoria pedagogica su come i bambini costruiscano cognitivamente i concetti; viene, invece, utilizzato come schema esemplificativo (che possiamo vedere riassunto in Figura 1.1) che ci permette, nella sua semplicità, di comprendere la genesi delle misconcezioni e poterle così limitare e/o affrontare.

Nel "farsi un modello di un concetto"possono verificarsi due casi [21]:

- il modello si forma al momento giusto nel senso che si tratta davvero del modello atteso, auspicato in quel momento, proprio quello previsto per quel concetto del Sapere matematico al momento in cui si sta parlando; in questo caso, l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello atteso del concetto;

- il modello si forma troppo presto, quando ancora avrebbe dovuto essere solamente un'immagine debole che necessitava di essere ulteriormente ampliata; a questo punto per l'allievo non è facile raggiungere il concetto perché la stabilità del modello è di per sè stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

I conflitti cognitivi che gli studenti possono trovarsi ad affrontare possono essere quindi di diverso tipo: sia tra immagini che lo studente deve accomodare secondo le sollecitazioni ricevute che tra un modello e una sollecitazione che sono in contrasto. In quest'ultimo caso, ovviamente, la situazione è molto più complessa perché per poter ac-

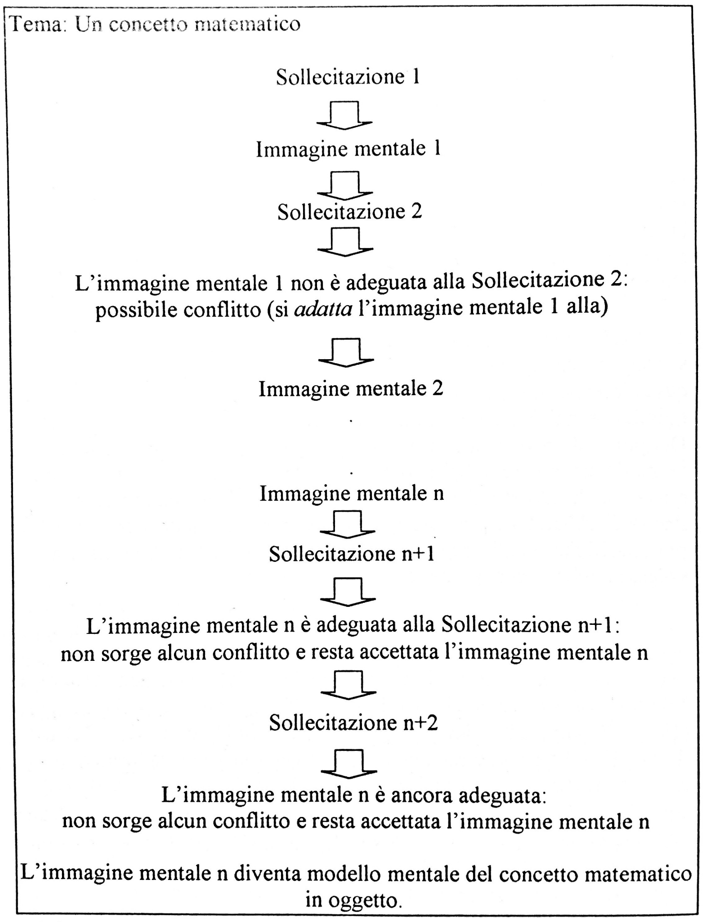

Figura 1.1: Schema riassuntivo della formazione di un modello mentale

quisire la nuova immagine lo studente deve 'sgretolare' un modello forte che si era già sedimentato.
Alla base dei conflitti cognitivi troviamo proprio le misconcezioni, che in questa prospettiva rappresentano immagini mentali che erano esatte precedentemente, ma che necessitano di una sistemazione adeguata al nuovo contesto: *"concezioni momentaneamente non corrette, in attesa di una sistemazione cognitiva più elaborata e critica "* [6].

Uno dei principali casi che genera conflitti cognitivi nella successione di immagini che porta alla formazione del modello è la congiunzione tra il modello intuitivo e una successiva generalizzazione del concetto.

1.2.2 Modelli Intuitivi

Come riporta Efraim Fischbein in [16], si può ritenere che ogni tipo di attività matematica comprenda necessariamente un livello formale, un livello algoritmico e un livello intuitivo.
Il livello formale rappresenta la struttura logico-deduttiva che caratterizza la matematica. Quando è sviluppato pienamente comprende proprio l'organizzazione assiomatica di quella parte della matematica.
Il livello algoritmico è quell'aspetto che consiste nel 'saper operare': include le operazioni matematiche, le formule, le definizioni, gli enunciati dei teoremi, le strategie di risoluzione e tutte le procedure standard di risoluzione di problemi.
Il livello intuitivo è quel piano che viene considerato nell'accettazione di un enunciato e nel suo riconoscimento come cosa evidente e certa. È ovviamente il livello più soggettivo e soprattutto quello in cui spesso avvengono associazioni e passaggi inconsci al soggetto stesso.
In quest'ultimo livello possiamo riconoscere due tipi di intuizione: quella di anticipazione e quella di accettazione. La prima è una congettura preliminare, globale e plausibile che viene fatta di solito nei processi di soluzione di un problema. Questa si verifica soprattutto quando un concetto ha un significato intuitivo, quando cioè vi è un'evidente correlazione tra il concetto stesso e il suo corrispondente comportamentale (ad esempio è evidente la correlazione tra il concetto di addizione e la sua azione in un problema in cui bisogna trovare il totale delle mele possedute da Lucia se Anna, se Lucia ne possiede 6 e Anna 4).
L'intuizione di accettazione è una rappresentazione che viene accettata come certa, autoevidente, dal soggetto che apprende e che spesso trascende da informazioni oggettive, ma comunque esercita sul modo di pensare e di agire una certa sicurezza della sua veridicità.
"In modo spontaneo tendiamo costantemente ad organizzare le cognizioni, così che esse diventino il più possibile autoevidenti e autoconsistenti. Di solito questo processo non è deliberato; deliberatamente, semmai, cerchiamo prove esplicite. Sembra dunque che sia

naturale, automatico, quasi istintivo cercare l'evidenza diretta ed affidarsi ad essa "[16]. Dunque, quando un concetto non ha un significato intuitivo, l'uomo tende a cercarlo costruendosi un modello su cui l'intuizione di accettazione agirà. Per aumentare il grado di autoevidenza studia qualche esempio, al quale attribuisce la capacità di dimostrare la veridicità del modello che ha costruito.
"*Il più delle volte crediamo di pensare nei termini dell'originale, ma in effetti stiamo pensando nei termini del modello. Cosa ancora più importante, assai spesso non siamo consapevoli di questa trasposizione di termini. Molti errori sistematici e molte idee sbagliate che ricorrono nel corso di una ricerca scientifica trovano la loro origine nell'uso inadeguato dei modelli intuitivi* " [16].

Infatti, nel contesto delle misconcezioni, uno dei nemici più pericolosi alla formazione corretta di un modello mentale sono proprio i modelli intuitivi; poichè portano ad un'accettazione immediata grazie alla loro forza di persuasione, che però non è sempre supportata dalla correttezza del modello. Si basa piuttosto su un'immagine forte e convincente del concetto (spesso proposta dal docente stesso) che diventa persistente.
Questo non è di per sé un problema finché il modello resiste; ma la fiducia che il soggetto ripone in un modello senza fondamenta formali, non gli permette di analizzarlo ed eventualmente 'adattarlo' in contesti nuovi, generando così una misconcezione.
Introduciamo un esempio classico per essere più chiari: un bambino, studiando la moltiplicazione tra naturali, si crea il modello mentale dell'operazione, che passa dall'immagine mentale visiva della 'moltiplicazione per schieramento'. Il modello intuitivo che si può creare, confermato da tutti i casi che incontra, è: "la moltiplicazione accresce sempre". Questa affermazione diventa una misconcezione quando, erroneamente, il bambino estende il modello della moltiplicazione a tutti gli insiemi numerici (spesso nemmeno sa, per ovvie ragioni, che sta lavorando su un solo definito insieme numerico). Questo risulta essere forte, stabile ed estremamente intuitivo; finché non si ritrova a dover moltiplicare per $0,5$. In questo caso il modello non funziona e il bambino sta risentendo di un forte conflitto cognitivo, perché la supposta regola, fino a quel momento infallibile, non funziona più e per lui quel caso non ha differenze con tutti quelli affrontati precedentemente.
Il modello intuitivo della moltiplicazione che 'accresce sempre' diventa un *modello paras-*

sita perché ad un certo punto della storia scolastica del bambino non solo gli fornirà una visione errata del concetto che rappresenta ma ostacolerà anche la comprensione corretta di quel concetto. Questa, del resto, potrà avvenire solo attraverso la presa di coscienza dal parte del ragazzo e un adeguato supporto didattico da parte del docente.
La soluzione non è però eliminare la formazione di modelli intuitivi, che non è possibile e nemmeno auspicabile. Infatti, quella prima immagine anche se intuitiva ed inconscia ci permette di partire nella costruzione di un concetto. La necessità è quella di non rafforzare quell'immmagine e adattarla il prima possibile.
"L'insistere eccessivamente nel fornire suggerimenti intuitivi usando rappresentazioni artificiali e troppo elaborate può fare più male che bene. Chiaramente la Matematica è una scienza formale: la validità dei suoi concetti, enunciati e ragionamenti è basata su fondamenti logici; le argomentazioni non possono essere sostituite da processi intuitivi. [...] Ma, d'altra parte, dobbiamo essere consapevoli che noi tutti (bambini, insegnanti e matematici!) abbiamo la tendenza naturale ad attribuire ad ogni concetto o enunciato un'interpretazione intuitiva" [16].

1.3 Mantifestazione di Misconcezioni

La più evidente manifestazione di una misconcezione è l'errore effettuato dallo studente. Risulta però difficile capire che quell'errore è frutto di una misconcezione e non di distrazione, poca preparazione o semplicemente incomprensioni sull'argomento.
Come abbiamo visto nelle sezioni precedenti, la misconcezione ha radici profonde nelle conoscenze dello studente. Questo perché, al contrario degli errori dati da distrazione o poca preparazione, è frutto di una conoscenza e non di una mancanza di conoscenza, e al contrario degli errori dati da incomprensione, è frutto di un modello forte e stabile (anche se questo può essere intuitivo) quando invece l'incomprensione ha sempre carattere di incertezza e dubbio.
Spesso la misconcezione si manifesta attraverso una serie di errori sistematici che appunto derivano da una conoscenza che precedentemente era stata corretta (ovviamente in un contesto diverso). È fondamentale ricordare che le misconcezioni sono cause sensate di errori, ma che potrebbero diventare ostacolo per l'apprendimento.

Usiamo il termine ostacolo secondo l'interpretazione delineata da Brousseau [4], in cui un ostacolo cognitivo è una conoscenza che è stata efficace per la risoluzione di problemi durante la formazione del concetto di cui fa parte, ma che successivamente si rivela fallimentare in contesti nuovi. A causa del successo iniziale si tende a conservare l'idea già comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di confermarla generando così contraddizioni; e questo fa sì che quella conoscenza diventi un muro davanti a successivi apprendimenti. Il fatto, da un certo punto di vista preoccupante, è che anche una volta superato, in modo sporadico l'ostacolo-misconcezione si ripresenta.
Anche se le misconcezioni sono alla base dei conflitti cognitivi e possono diventare ostacoli all'apprendimento, bisogna sottolineare che alcune risultano essere *inevitabili*; sia per il fatto che la tendenza ad associare interpretazioni intuitive è inconscia, sia per il fatto che durante la costruzione di un concetto a volte risulta necessario passare attraverso delle misconcezioni momentanee.
Silvia Sbaragli in [10] propone addirittura di denominarle *concezioni personali* per evidenziarne il carattere costruttivo non negativo, legato all'aspetto di interpretazione personale; inoltre *"si potrebbe addirittura pensare che tutta la carriera scolastica di un individuo, per quanto attiene alla Matematica, sia costruita dal passaggio da misconcezioni a concezioni più evolute; esse sembrano cioè un momento delicato necessario di passaggio, da una prima concezione elementare, ingenua, spontanea, primitiva ad una più elaborata e comprensiva"*.
Metaforicamente, l'apprendimento di concetti matematici diventa così una salita verso un raffinamento sempre maggiore, che comporta il passaggio attraverso molte immagini mentali nel corso degli anni. Fortunatamente, considerando questa 'scalata', le immagini-misconcezioni non sempre rappresentano un ostacolo all'apprendimento; questo si verifica solo quando le immagini diventano modelli forti e stabili del concetto, prima che questo sia definito o caratterizzato a sufficienza.
Per questo si può delineare una distinzione tra queste due tipologie, come viene fatto in [23]:

- le misconcezioni evitabili derivano direttamente dalla trasposizione del sapere e sono una diretta conseguenza delle scelte dell'insegnante;

- le misconcezioni inevitabili derivano solo indirettamente dalla trasposizione didattica, essendo dovute alla necessità di dover partire da un certo sapere per poter comunicare, sapere iniziale che non può essere completo sul concetto matematico in questione. Nel presentare un concetto si è poi costretti ad utilizzare rappresentazioni di questo, lo studente potrebbe confondere la rappresentazione con il concetto stesso. Sono quindi misconcezioni inevitabili nel processo di costruzione dei concetti.

In conclusione, limitando trasposizioni didattiche inadeguate, le misconcezioni di per sé non rappresentano un evento da evitare, rappresentano un passaggio quasi essenziale nella costruzione di un concetto. Sono una prima immagine mentale intuitiva o necessariamente incompleta che dovrà essere 'adattata' man mano. Anche la componente intuitiva ha un ruolo importante, come sottolinea Fischbein [16] *"Il nostro presupposto è che le forme intuitive messe in atto nei processi di comprensione e di soluzione continuino a giocare un ruolo importante ad ogni età, indipendentemente dal livello di ragionamento astratto raggiunto dal soggetto. Il problema non è allora quello di eliminare le componenti intuitive del ragionamento degli alunni, il che, in effetti, non è possibile e nemmeno auspicabile. Il problema educativo è di sviluppare nei ragazzi nuovi modi di vedere, che si adattino meglio alle esigenze della struttura concettuale raggiunta. [...] Se la contraddizione tra un enunciato formale o un'operazione e la corrispondente rappresentazione intuitiva non può essere rimossa dai consueti strumenti didattici, la cosa migliore, secondo noi, è quella di rendere consapevole l'alunno del conflitto esistente e di sviluppare in lui la capacità di riferirsi alle procedure formali".*
Le misconcezioni assumono un carattere strettamente negativo quando diventano ostacoli ai successivi apprendimenti; questo si verifica, come abbiamo visto, quando la misconcezione non rimane un'immagine in via di adattamento, ma si stabilizza in modello mentale e la stabilità del modello costituisce un ostacolo ai futuri apprendimenti. Per questo motivo *"didatticamente conviene quindi lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al Sapere matematico che si vuole raggiungere"* [10].

Capitolo 2

Esempi di Misconcezioni

Per rendere la trattazione teorica del precedente capitolo più chiara, forniamo ora alcuni esempi di misconcezioni. La scelta è ricaduta su alcune delle misconcezioni più studiate in letteratura. Questo perché ci permette di presentare misconcezioni celebri e dalla forte chiarezza esemplificativa, che poi verranno affrontate o declinate nel questionario che verrà trattato nel Capitolo 3.

2.1 Misconcezioni sulle operazioni

2.1.1 Non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo

La forza dei modelli intuitivi, anche senza che rappresentino modelli parassiti, agisce incisivamente nelle scelte e nei ragionamenti degli studenti, in particolare nei processi di problem solving. Forza che risulta essere un'arma a doppio taglio, perché nei casi in cui il problema viene posto e formulato con termini tali per cui il modello abbraccia precisamente il modus operandi da seguire per risolvere il problema, tutto appare chiaro, lineare ed immediato. Quando invece il problema non è espresso con termini corrispondenti al modello intuivo che abbiamo dell'operazione che bisogna applicare, risulta molto meno scontato arrivare a capire che la procedura da seguire per risolvere il problema è

attraverso quella determinata operazione.
Sono moltissimi i casi studiati dai ricercatori su questa non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo, uno dei più noti è la terna di problemi additivi ad una tappa (cioè problemi che si risolvono con una sola operazione di addizione) ideata da Fischbein [8]:

- Problema A
  Intorno ad un tavolo ci sono 4 ragazzi e 7 ragazze. Quanti sono in tutto?
- Problema B
  Giovanni ha speso 4 euro. Egli ha ora in tasca 7 euro. Quanti euro aveva prima?
- Problema C
  Roberto ha giocato due partite. Nella prima ha perso 4 punti, ma alla fine della seconda partita si è trovato in vantaggio di 7 punti. Che cosa è successo nella seconda partita?

Ovviamente per risolvere tutti i problemi è necessario eseguire la stessa operazione $4+7$; le percentuali di successo nel risolvere questi tre problemi sono però estremamente differenti. Questo, come anticipavamo, proprio a causa dei diversi livelli di coincidenza tra significato intuitivo e significato formale dell'operazione di addizione. Il primo problema rappresenta in pieno quello che l'addizione operativamente fa: 'unisce e conta' due insiemi, man mano negli altri due problemi questo significato intuitivo viene nascosto dal come è posto il problema, e questo porta ad una differenziazione sostanziale: il Problema A viene risolto da quasi il 100% degli studenti in seconda primaria, invece solo il 25% degli studenti in prima o seconda media sono in grado si risolvere il Problema C [6].
Situazione analoga si verifica anche nel caso dell'operazione di sottrazione, che però non è rappresentata solo dal significato intuitivo di 'togliere, ma anche quello del 'complemento a'. *"Quando si cerca di risolvere un problema non ci si affida soltanto al livello algoritmico, anche se tutto il bagaglio di algoritmi necessari è virtualmente presente nella mente. Come abbiamo già sottolineato, il processo risolutivo comprende anche il contributo delle rappresentazioni intuitive. Quando l'algoritmo e il livello intuitivo lavorano in accordo si ottiene una semplificazione. In questo caso il ruolo della rappresentazione intuitiva non si nota neppure, ma se tra i due livelli c'è una relazione di conflitto, l'incidenza degli*

aspetti intuitivi diventa evidente" [17].
Anche i significati intuitivi di moltiplicazione che 'somma ripetutamente' o di divisione che 'ripartisce un insieme grande in un numero minore di sottoinsiemi uguali' nascondono limiti operativi che anche più profondi di quelli di addizione e sottrazione secondo i risultati in letteratura.
Fishbein ha verificato la differenza nella risoluzione del seguente problema legato al significato intuitivo di divisione:"con 2 euro si può comprare una bottiglia di $0.75l$ di aranciata. Quanto costa $1l$ di aranciata?"[16].
In questo caso le difficoltà sono due, la prima è che non è chiaro come il significato intuitivo di divisione ci permetta di risolvere il problema, come invece sarebbe se il problema fosse formulato "con 4 euro compro $2l$ di aranciata, quanto costa $1l$ di aranciata?". La seconda è che la presenza di una quantità non intera rende ancora meno immediato l'utilizzo della divisione per la risoluzione del problema.
Si potrebbe, poi, riflettere sull'ulteriore fatto che il significato intuitivo di divisione impedisce anche di svolgere tale operazione quando il dividendo è minore del divisore.

Per concludere, in questi due casi il modello intuitivo di operazione diventa misconcezione solo quando questo non permette di riconoscere l'operazione come strumento risolutore del problema, data la non coincidenza tra il significato formale richiesto dal problema e il significato intuitivo che ha l'operazione stessa.
È quindi una misconcezione inevitabile, e anche facilmente superabile, perché lo studente non deve adattare il modello che ha a situazioni nuove, ma deve semplicemente riconoscere che il significato formale di quell'operazione permette di risolvere il problema.

2.1.2 Il caso della Moltiplicazione: estensione o operazioni diverse?

Avevamo già accennato alla misconcezione legata all'operazione di moltiplicazione parlando dei modelli intuitivi nel Capitolo precedente; è una delle misconcezioni più diffuse tra gli studenti e, conseguentemente, anche tra le più studiate dai ricercatori. È causata dalla formazione prematura del modello mentale di moltiplicazione, quando si conosce l'operazione solo nel contesto dell'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$; tutti gli esempi

e le prove a cui lo studente sottopone la sua immagine di moltiplicazione confermano l'idea che 'la moltiplicazione è maggiore dei fattori' (escludendo i casi in cui uno dei fattori è 1 oppure 0).
Precisamente due immagini, fortemente intuitive, supportano questa idea: la prima è data dalla definizione operativa di moltiplicazione, un'addizione ripetuta, e la seconda è la sua rappresentazione grafica attraverso rettangoli di punti-unità (moltiplicazione per schieramento).
Se quest'immagine si stabilizza può diventare modello dell'operazione. Ma se questo accade, come abbiamo visto, diventa un modello parassita che rischia di ostacolare i futuri apprendimenti dello studente, come la moltiplicazione in $\mathbb{Q}$ dove la regola non funziona più. È uno di quei casi in cui, anche se l'insegnante ha posto la giusta attenzione nel non rafforzare le immagini intuitive e magari ha anche già accennato al fatto che esistono numeri per cui la moltiplicazione non aumenta sempre, la misconcezione potrebbe comunque crearsi.
È inevitabile, lo studente non incontra ancora quei casi direttamente e la forza del modello intuitivo lo portano a 'fidarsi' dell'esattezza della sua idea. Questa misconcezione non è imputabile alla trasposizione didattica, ma alla necessità di partire da alcune immagini del concetto matematico, per quanto grezze e lontane dalla totalità, per procedere nella sua costruzione.
Per ovviare a questo problema alcuni autori hanno ipotizzato di distinguere due simboli diversi di moltiplicazione; scelta che però omette un altro dei concetti fondamentali della matematica, l'estensione tra strutture, e quindi forzerebbe una distinzione in realtà inesistente e che potrebbe generare un'altra misconcezione, questa per di più evitabile.
"Bisogna semplicemente riconoscere che $(\mathbb{N}, \times_{\mathbb{N}})$ *è una struttura isomorfa ad una sottostruttura di* $(\mathbb{Q}, \times_{\mathbb{Q}})$*, il che costituisce un esempio facilmente dominabile di uno dei momenti più interessanti della Matematica e della costruzione del pensiero matematico: l'estensione da una struttura ad un'altra"* [10].

2.2 Misconcezioni in Geometria

Un insieme di misconcezioni molto frequenti (anche tra gli stessi insegnanti) sono quelle legate a concetti geometrici.
È importante sottolineare che, in generale, non sono frutto di immagini intuitive inesatte che diventano modelli parassiti. Questo perché l'utilizzo di disegni e rappresentazioni, come caratteristica stessa della geometria, aiuta a formare immagini coerenti dei concetti che raffigurano. È la non generalizzazione sensata di proprietà o di caratteristiche che porta alla formazione di misconcezioni: *"in geometria sono molti gli allievi che hanno difficoltà a capire le indicazioni, i problemi e le spiegazioni fornite dall'insegnante o dal manuale, perché le loro concezioni geometriche rimangono strettamente legate alle figure e ai modelli concreti utilizzati come supporti visivi per formare queste concezioni"* [20].
Ciò che quindi va evitato nel momento della didattica sono: notazioni ambigue, ripetitività negli esempi e non formalizzazione di ciò che si illustra graficamente.
Se una delle caratteristiche intrinseche della matematica, e ancora di più della geometria nello specifico, è l'utilizzo di diverse rappresentazioni di un concetto, non è accettabile che uno studente universitario possa credere che un angolo sia la lunghezza dell'arco, come in Figura 2.1.
"La continua, inivoca e impropria rappresentazione fornita da insegnanti diversi, anno

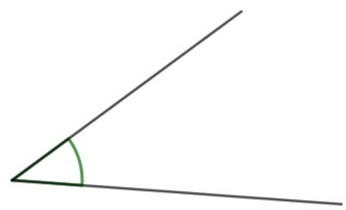

Figura 2.1: Rappresentazione standard di un angolo.

dopo anno, ha dato forza nella mente dello studente a caratteristiche 'parassite' della semiotica a sfavore della noetica. Questo ha comportato che l'allievo identificasse quell' 'archetto' con l'angolo, confondendo così la rappresentazione fornita con il concetto. L' 'archetto' è così la rappresentazione fornita con il concetto. L' 'archetto' è così diventato l'elemento caratterizzante il concetto proposto e questo ha comportato che lo studente *andasse alla ricerca della proprietà che maggiormente lo caratterizza: la sua lunghezza"* [21].

E questo non è solo un caso sporadico, sono moltissimi gli esempi studiati in letteratura di istituzionalizzazione delle scelte didattiche.

Un'altra situazione in cui la ripetività di una rappresentazione senza fomalizzazione può creare misconcezioni evitabili è quando le figure vengono disegnate sempre nella stessa posizione.

In questo caso rischia di diventare la posizione della figura geometrica la caratteristica principale (tanto che lo studente non è in grado di distinguere rombi da quadrati [19] o di riconoscere triangoli isoceli e scaleni o trapezi).

Una misconcezione linguistica che è supportata anche dalle notazioni sui libri di testo è derivante dal legame con i termini spaziali che contraddistinguono la posizione dell'oggetto matematico. Si parla di lati obliqui, di altezze verticali o ancora di basi nel piano; quando queste sono tutte caratteristiche che dipendono da come viene disegnata la figura. Non andrebbero quindi mai utilizzate per descrivere formalmente una figura per la loro relatività, invece vengono usate addirittura nelle formule. Queste nozioni (o perlomeno così espresse) legano le proprietà intrinseche della figura alla sua posizione, rischiando di limitare l'apprendimento dello studente solo 'alle figure messe in quel modo', non permettendogli quindi di comprendere i concetti geometrici per quello che sono (a prescindere del fatto che, ad esempio, un'altezza di una figura possa non essere verticale rispetto all'osservatore).

In realtà ci sono studi che confermano il fatto che per l'uomo sia innato e a volte essenziale utilizzare punti di riferimento 'geologici', *"è stato affermato che le linee verticali e orizzontali costituiscono le direzioni fondamentali su cui gli oggetti possono essere orientati in relazione alla gravità. Evidentemente, la percezione delle linee verticali e orizzontali è programmata nel sistema visivo dei mammiferi"* [24].

Effettivamente il problema non consiste tanto nell'utilizzo di questi termini, quanto alla limitatezza che immettono nel concetto matematico a cui sono associati. Se il lato obliquo in un trapezio fosse inteso come l'unico lato che non forma angoli retti con i lati a cui è adiacente, il concetto sarebbe corretto, ma spesso il lato obliquo del trapezio viene inteso come il lato che è disegnato obliquo nel foglio, il che può diventare una misconcezione quando un trapezio viene posizionato diversamente dalla posizione standard e così anche per gli altri casi (il fatto che esista una posizione standard, in quanto istituzionalizzazione di una scelta è già di per sé un problema, come abbiamo visto).

2.3 Misconcezioni legate alle frazioni

La molteplicità di definizioni e di interpretazioni che si possono dare alle frazioni, sono solo il punto di partenza della complessità che questo argomento rappresenta per gli studenti.
A causa di ostacoli ontologici, non si può dai numeri naturali passare direttamente allo studio dei numeri razionali (in quanto coppie ordinate (a, b) $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$), il passaggio attraverso frazioni e numeri decimali (con la virgola periodici e non) risulta quindi essenziale. Non è però molto chiaro come frazioni e numeri decimali siano due rappresentazioni semiotiche dello stesso concetto matematico: un numero razionale.
Le frazioni spesso vengono intuitivamente definite come: data un'unità, questa viene divisa in parti uguali, poi di tali parti se ne prendono alcune. *"Questa accezione intuitiva di frazione dell'unità ha il vantaggio di essere chiara e facilmente acquisibile: ha inoltre il vantaggio di essere modellizzata nella vita quotidiana; ma ha il difetto di non essere poi teoricamente sufficiente, di fronte alle varie e multiformi interpretazioni che si vogliono dare dell'idea di frazione"* [15].
La definizione di frazione, infatti, unita alle varie rappresentazioni di torte o barrette di cioccolato divise, rendono benissimo l'idea di quello che operativamente si può fare per ottenere una frazione, ma lascia largo spazio all'insinuarsi di misconcezioni.
Le parti uguali in cui deve essere divisa la parte intera richiama il problema del significato del termine 'uguale' per gli studenti (questo termine, può infatti assumere significato procedurale, di equivalenza o di uguaglianza in senso di identità, il che genera molta confusione nella testa di chi non ha ancora ben maturato questi concetti). In più coerentemente con questa definizione non sono considerate frazioni espressioni del tipo $\frac{n}{n}$ con $n \in \mathbb{N}_+$ oppure $\frac{m}{n}$ con $n, m \in \mathbb{N}_+, m > n$. Infine la ripetività degli esempi di frazionamento di torte e simili rende persistente e stabile quest'immagine di frazione che

dovrebbe, invece, essere solo un'immagine di passaggio.
Per questo l'idea che uno studente crea in linea a questa definizione non abbraccia nel complesso il concetto matematico che dovrebbe rappresentare e non appena si trova a dover lavorare con una frazione come $\frac{7}{3}$, il modello che si era costruito non risulta più essere adeguato. Non essendo più solo un'immagine però, questo modello rappresenta per lui un grosso ostacolo da dover affrontare perché precedentemente rappresentava una conoscenza corretta, ma ora si dimostra inadeguata per poter proseguire nella costruzione del concetto.
In conclusione riflettiamo sul fatto che l'oggetto frazione rappresenta tanti diversi concetti: una parte di un uno-tutto, un quoziente, un rapporto, un punteggio, un numero razionale, ... e questo porta ad una molteplicità di possibili misconcezioni (misconcezioni legate all'ordinamento di frazioni, all'equivalenza di frazioni, alle operazioni, ...) su cui non ci dilungheremo ancora e rimandiamo per maggiori approfondimenti a [15].

2.4 Misconcezioni legate al concetto di infinito

Uno tra i concetti matematici che esercita più fascino nel mondo della matematica è quello dell'infinito. Fin dalla scuola primaria i bambini si trovano, ovviamente a livelli intuitivi, a lavorare con il concetto di infinito (un segmento ha infiniti punti...) che però non viene mai realmente definito nell'arco della scuola pre-univeristaria. Questo, unito alla forte connotazione immaginativa che anche culturalmente si costruisce intorno a questo concetto, porta tutti gli studenti ad avere una forte immagine mentale intuitiva di infinito, che raramente è coerente al relativo concetto matematico (va certamente considerato che è un concetto assai complicato da trattare, anche da matematici esperti, basti pensare allo sviluppo storico di questo argomento [7]).
Il concetto di infinito in tutti i livelli d'istruzione è quindi soggetto a diverse misconcezioni, senza considerare le innumerevoli questioni filosofiche che esulano dai fini di questa tesi, ma che certamente influenzano l'immagine di infinito che hanno gli studenti.
Riassumiamo alcune delle misconcezioni legate al concetto di infinito:

- Appiattimento dei cardinali transfiniti [2].

Per molti studenti risulta essere ovvio che la cardinalità di $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono uguali, dato che sono entrambi insiemi infiniti. Conseguentemente risulta altrettanto ovvio che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ debbano avere la stessa cardinalità perchè anch'essi, sono entrambi insiemi infiniti. Questa è una misconcezione inevitabile, considerando che durante la scuola secondaria di primo grado, quando incontrano tutti questi concetti, non hanno nè ovviamente gli strumenti formali nè tanto meno quelli ontologici per comprendere la differenza tra un infinito numerabile e uno non numerabile.

- Dipendenza dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure.
  Diversi processi mentali, oltre ad un diffuso senso comune, portano gli studenti a ritenere che in un determinato segmento vi siano più punti rispetto ad un secondo segmento più corto. Il fatto che la rappresentazione (grafica) di un segmento non espliciti a sufficienza il fatto che contenga infiniti punti, a prescindere dalla sua lunghezza, non può permettere di limitare l'efficacia rappresentativa che invece ha per tante altre proprietà. Il fatto che, a nostro parere, in questo caso è importante è che l'azione del docente deve sempre sottolineare il fatto che tra due punti qualsiasi della retta reale, troviamo infiniti punti.
  Le due misconcezioni appena citate, anche se in contrapposizione tra loro, spesso coesistono nell'immagine di infinito che hanno gli studenti, i quali non si accorgono della rispettiva incoerenza. Questo rende ancora più chiaro quanto per gli studenti il concetto di infinito sia nebuloso e indefinito.

- Scivolamento.
  La nomenclatura di questo tipo di misconcezione riprende l'episodio della dimostrazione di Galileo Galilei sulla corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e il sottoinsieme dei numeri pari di $\mathbb{N}$. Si manifesta, appunto, quando parlando di una cosa ci si trova a parlare d'altro; gli studenti *"applicano ad insiemi infiniti considerazioni che potrebbero essere applicate soltanto ad insiemi finiti. Il fatto che un insieme infinito possa essere messo in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria (la definizione stessa di insieme infinito) non viene tenuto presente"* [3]. Questa misconcezione non è causata solo dalle difficoltà date dal concetto di infinito, ma anche dai ragionamenti che gli studenti applicano per analogia, considerando pas-

saggi e proprietà che erano leciti in un contesto e non lo sono più nel nuovo.
Del resto, la radice storica di questa misconcezione è antichissima: essa può essere fatta risalire agli Elementi di Euclide, dove troviamo la nozione comune: *"Il tutto è maggiore della parte"* (Euclide, 1970, p. 74) che ovviamente è vero riferito solo a insiemi finiti.

Come abbiamo anticipato, sono diverse le misconcezioni collegate a questo tema, già di per sé il dibattito storico-filosofico tra infinito attuale e potenziale ci dà l'idea di quanto si potrebbe indagare su questo tema, di cui la letteratura è ricchissima e a cui rimandiamo per maggiori approfondimenti [1].

Capitolo 3

Sperimentazione in classe

Studiando su libri ed articoli di Didattica della matematica inerenti alle misconcezioni ci si accorge che la maggior parte degli esempi e delle sperimentazioni sono riferite a studenti appartenenti alla scuola primaria. Il nostro interesse è rivolto principalmente ad alunni della scuola secondaria di secondo grado, ma condividiamo l'attenzione verso gli studi sulla fascia d'età 6-12 anni per almeno due motivi molto forti: il primo è che le misconcezioni più comuni si formano proprio durante gli anni delle elementari. Questo perché il bambino, in questa fase scolastica, deve formare le immagini dei primi concetti matematici in base alle indicazioni, sicuramente molto intuitive, che dà l'insegnante, il quale spesso tende a forzare alcune di queste immagini nell'illusione che il concetto risulti così più chiaro.
Come abbiamo visto precedentemente, però, forzare i modelli intuitivi quando ancora lo studente non ha una buona conoscenza del concetto matematico in questiona, rischia di essere controproducente e di generare ostacoli cognitivi che si manifesteranno negli anni successivi.
È perciò fondamentale analizzare fin dalla fase iniziale di costruzione di un concetto quali sono i punti critici che possono portare a future misconcezioni, e questo avviene proprio nel corso della scuola primaria.
Il secondo motivo per cui gli studi sono concentrati su questo livello scolastico, è per il fatto che la tipologia di argomenti che vengono trattati in questo livello, per naturali limiti ontologici, non vengono accompagnati da una formalizzazione in grado di comple-

tare le immagini che gli studenti formano; cosa che invece ricevono in maniera progressiva nell'arco degli anni di studio successivi.
Aumentando il livello di formalizzazione diminuisce il rischio di modelli intuitivi parassiti. Analizzando, infatti, il momento di massima formalizzazione che possono acquisire gli studenti nell'arco della scuola secondaria di secondo grado, cioè lo studio dell'analisi in quinta liceo, riteniamo che gli studenti siano soggetti a misconcezioni, ma non tanto su gli argomenti specifici dell'analisi considerando che questi vengono presentati attraverso un alto livello formale, quanto piuttosto sono soggetti al manifestarsi di misconcezioni acquisite negli anni scolastici precedenti e mai adattate. Per questo, anche per gli insegnanti di scuole secondarie di secondo grado, è importante conoscere tutte le criticità che gli studenti possono incontrare nel percorso formativo precedente a quello in cui si trovano, perché potrebbero non averle ancora affrontate.

L'oggetto della nostra ricerca sono alcune misconcezioni a cui potrebbero essere soggetti gli studenti nell'arco della scuola secondaria di secondo grado.
Dopo un'attenta riflessione su quali potessero essere possibili misconcezioni non ancora analizzate in letteratura inerenti il quinto anno di un liceo scientifico, abbiamo concluso, appunto, che per il forte livello formale che viene utilizzato (che di per sè spesso rappresenta uno scoglio per gli studenti) il rischio che si formino modelli intuitivi errati di concetti, come ad esempio limiti o integrali, è molto basso. Piuttosto gli studenti continuano a fare errori legati a misconcezioni riguardanti argomenti precedenti, come frazioni o moltiplicazioni. Questo probabilmente perché l'alta concentrazione che utilizzano nel trattare oggetti nuovi e/o complessi fa insorgere le misconcezioni inerenti a concetti in confronto semplici precedentemente trattati e ormai quasi 'scontati'.
Per quanto riguarda gli altri anni della scuola secondaria di secondo grado, gli argomenti che potrebbero essere più soggetti a misconcezioni sono proprio quelli la cui trattazione appoggia su idee o rappresentazioni intuitive e che a volte per necessità di sintesi o per difficoltà ontologiche degli studenti, non vengono poi formalizzate adeguatamente.
Un esempio può essere la differenziazione e le proprietà dei diversi insiemi numerici. I numeri naturali vengono spesso rappresentati su di una retta in cui i numeri vengono simboleggiati attraverso le perline di una lunghissima collana. Quando si affrontano i

numeri reali e si parla della retta reale è chiaro a tutti gli alunni che quella reale sia una retta con molti più numeri-punti in confronto a quella dei numeri naturali (formalmente infatti abbiamo che i numeri naturali sono un'infinità numerabile, i reali no), ma non è, spesso, chiaro a tutti che hanno caratteristiche completamente diverse, e che l'immagine dei numeri (naturali) come collana di perle non deve passare per analogia alla retta dei numeri reali. Anche sui numeri razionali questo modello non funziona più, non essendo il suo ordinamento discreto, sebbene l'insieme dei numeri razionali sia di cardinalità numerabile come l'insieme dei numeri naturali.

Abbiamo quindi deciso di preparare un questionario, selezionando accuratamente argomenti e domande, per verificare quanto misconcezioni che si formano nel percorso precedente alla scuola secondaria di secondo grado possano essere ancora persistenti, e per vedere se sono presenti possibili misconcezioni che si ipotizza possano formarsi nell'arco di questo livello scolastico.

3.1 Quadro teorico della ricerca

3.1.1 Metodologia della ricerca

Il questionario è stato somministrato ad un campione casuale di 4 classi, due quinte e due seconde di indirizzo scientifico tradizionale o di scienze applicate di due licei: Liceo Scientifico Albert Bruce Sabin, Bologna, e Liceo Leonardo da Vinci, Casalecchio di Reno. Ogni allievo ha lavorato individualmente, in modo anonimo e con l'utilizzo di sola carta e penna. Il tempo a disposizione per svolgere la prova era di 45 minuti e come unica indicazione è stato richiesto di motivare il più possibile le risposte.
Sono stati somministrati 19 questionari in 2A Sabin, 21 questionari in 2Fsa Sabin, 20 questionari in 5Csa Sabin e 24 questionari in 5A Da Vinci, per un totale di 40 questionari in classi seconde e 44 questionari in classi quinte (TOT 84).
Il campione raccolto è volutamente considerato solo ai fini di una sperimentazione e non ad una ricerca con validità statistica; per questo non vengono analizzate differenze di genere, di classe sociale o livello di scolarizzazione generale (sono campi che risultereb-

bero falsati dalla dimensione del campione). In un futuro, potrebbe essere interessante ripetere analisi simili per campioni maggiori e aggiungendo anche questi valori di ricerca, per poter comprendere se tali fattori hanno un peso nel formarsi di misconcezioni negli studenti.
Nei questionari, per poter analizzare oggettivamente differenze o analogie nei risultati tra le classi seconde e le classi quinte, sono state somministrate le stesse domande in entrambi i livelli, a parte l'aggiunta dei quesiti 10 e 11 nel questionario per le quinte, trattando argomenti che gli studenti di una seconda liceo scientifico non hanno ancora affrontato. In conclusione di questa Sezione riportiamo il questionario per le quinte.
Il tempo concesso per svolgere il questionario appositamente è stato calcolato per permettere di finire la prova, ma non lasciare troppo tempo in più. Questo poiché le misconcezioni, spesso, si verificano quando lo studente si trova a dover rispondere celermente ad uno stimolo, accedendo così al livello intuitivo del concetto (ovviamente non rientrano in questo caso le misconcezioni che diventano ostacolo all'apprendimento dello studente, perché in quel caso, anche dopo un'attenta riflessione, lo studente, da solo, fatica a capire dov'è l'incorrettezza nella conoscenza che ha del concetto matematico); cioè, prendendo in prestito le parole di Silvia Sbaragli: *in situazioni nelle quali non c'è un esplicito richiamo ad una competenza cognitiva forte, il modello intuitivo dell'operazione emerge sempre con energia* [21].

3.1.2 Ipotesi della ricerca

Abbiamo ritenuto interessante svolgere un'analisi a priori sui possibili risultati del questionario, sulla base del livello di scolarizzazione degli studenti, del livello di conoscenza degli argomenti trattati nei vari quesiti in base alle Indicazioni Nazionani [] e del peso che alcune misconcezioni hanno nel 'sapere comune'.
In linea generale ci aspettiamo che la maggior parte degli alunni sia in grado di rispondere in maniera corretta ai quesiti, magari anche senza motivare adeguatamente, fornendo motivazioni formalmente non precise, ma comunque dando la risposta corretta. Questo non vuol dire che riteniamo di trattare un argomento che non ha peso all'interno delle problematiche dell'insegnamento della matematica, perché, a nostro parere, anche se un

solo allievo mostra di avere una qualche misconcezione, l'insegnante deve essere in grado di comprenderlo ed agire di conseguenza.
Nella seguente sezione vedremo nello specifico per ogni quesito le ipotesi di ricerca da cui siamo partiti per poi analizzare i risultati del campione raccolto.

QUESTIONARIO

DATA:
SCUOLA E CLASSE:

Rispondi alle seguenti domande, **motivando sempre la tua risposta.**

1. Senza svolgere calcoli, indica quale delle seguenti operazioni dà risultato maggiore e perché: $179 \cdot 0.257$ oppure $179 : 0.257$.
   ....
   ....

2. Se $a > b > 0$, allora è vero che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $a^t > b^t$?
   ....
   ....

3. E' vero che se la distanza di $x \in \mathbb{R}$ da 0 è inferiore alla distanza di $y \in \mathbb{R}$ da 0, allora $x < y$?
   ....
   ....

4. Siano x, y, a, b numeri reali. Completa gli spazi con:
   $<$ quando sicuramente vale tale disuguaglianza;
   $>$ quando sicuramente vale tale disuguaglianza;
   ? quando i dati a disposizione non permettono di stabilire la disuguaglianza e in questo caso perché.

$$2 + a \quad .... \quad 3 + a; \qquad \frac{7}{2} \quad .... \quad \frac{7}{3}; \qquad -7(a^2 + 1) \quad .... \quad -5(a^2 + 1)$$

$$x(2 + a) \quad .... \quad 2x; \qquad \frac{7}{3}x \quad .... \quad \frac{7}{2}x;$$

   ....
   ....

5. Indica con SI se i seguenti numeri sono disposti in ordine strettamente crescente oppure con NO se non lo sono, indicando poi quale sarebbe l'ordine corretto.

$1,3//1,12//1,35$ .... $\frac{1}{4}//\frac{1}{3}//\frac{1}{2}$ ....

$\frac{1}{3}//\frac{1}{12}//\frac{3}{12}$ .... $1,10//1,55//1,90$ ....

6. Nell'insieme dei numeri reali, è vero che la cardinalità dell'intervallo $[0, 100]$ è uguale alla cardinalità dell'intervallo $[0, 1]$?

....

7. Indica se le seguenti affermazioni sono Vere o False:

$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ .... $-0,5 \in \mathbb{Q}$ .... $\sqrt{16} \in \mathbb{Q}$ .... $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ....

$0,5 \in \mathbb{Z}$ .... $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ .... $\frac{10}{2} \in \mathbb{Z}$ ....

....

....

8. Inserisci al posto dei puntini il numero che verifica l'uguaglianza:

$$11 - 6 = ... - 11$$

9. Siano a, b numeri reali. Indica se le seguenti identità sono vere per qualunque valore delle lettere eventualmente presenti:

$|-5| = 5$ ....; $|-a| = a$ ....; $|-a^2| = a^2$ ....;

$|a^2| = a^2$ ....; $|a| = a$ ....; $|2| = 2$ ....;

$|a-b| = a+b$ ....; $|a+b| = a+b$ ....; $|a| = \pm a$ ....

....

....

10. Indica se le seguenti identità sono vere e spiega perché:

$$|-ln(\pi-3)| = -ln(\pi-3) \quad ....; \qquad |-ln(2)| = ln(2) \quad ....;$$

....

....

11. Considera le seguenti disequazioni e indica se la soluzione è corretta e perché.

$x^2 \leq 9$ Soluzione: ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $-3 \leq x \leq 3$

....

....

$\sin(x) < 1/2$ Soluzione: ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x < \arcsin(1/2)$

....

....

$e^x < 10$ Soluzione: ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x < ln(10)$

....

....

3.2 Analisi del questionario

3.2.1 Quesito 1

Senza svolgere calcoli, indica quale delle seguenti operazioni dà risultato maggiore e perché: $179 \cdot 0.257$ oppure $179 : 0.257$.

Analisi della Domanda

Abbiamo già parlato nel Capitolo precedente delle misconcezioni legate al modello intuitivo di moltiplicazione, per questo non ci dilungheremo troppo nell'analisi di questa domanda. Il quesito verte a verificare se lo studente è in grado di capire che, in questo caso, l'operazione di divisione dà un risultato maggiore rispetto alla moltiplicazione, senza però svolgere i calcoli (questo grazie alla scelta dei numeri che non permette in maniera immediata di svolgere i calcoli a mente).
La risposta corretta è $179 : 0.257$ e lo studente può rispondere correttamente solo se non risente della misconcezione rappresentata da: la moltiplicazione 'aumenta sempre' o inversamente che la divisione 'diminuisce sempre'.

Ipotesi di Ricerca

Anche se in [21] si afferma che *non è un caso che molti studenti evoluti (anche universitari) si dichiarino meravigliati di fronte al fatto che tra le due operazioni:* 18×0.25 *e* $18 : 0.25$ *la prima è quella che dà un risultato minore*; noi ci aspettiamo che nelle classi seconde ci sia qualche sporadico caso in cui la misconcezione legata alla moltiplicazione (o inversamente alla divisione) sia presente.
Ipotizziamo, invece, che nelle classi quinte la totalità degli allievi sia in grado non solo di rispondere correttamente, ma anche di motivare adeguatamente la risposta.

Analisi dei Risultati

- Esatte: 77/84, nelle quinte 44/44, nelle seconde 33/40;
- Non risposte: 1/84, nelle quinte 0/44, nelle seconde 1/40;

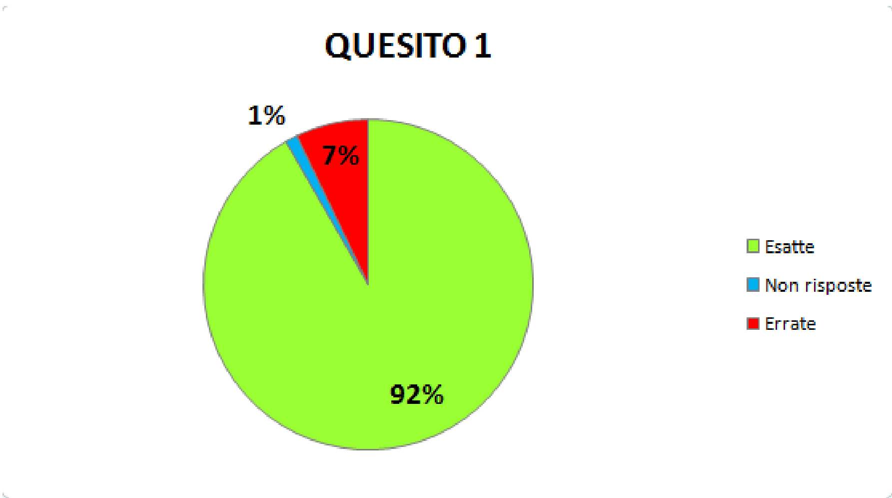

Figura 3.1: Risultati in percentuale del Quesito 1.

- Errate: $6/84$, nelle quinte $0/44$, nelle seconde $6/40$.

77 studenti su 84 hanno risposto correttamente al quesito.
Nelle classi quinte tutti i 44 studenti hanno risposto correttamente e motivato la risposta con espressioni del tipo:
"$179 : 0.257$ *perché dividere per un numero compreso fra* 0 *e* 1 *è come moltiplicare per un numero maggiore di* 1" oppure sfruttando la scrittura frazionaria $179 : \frac{257}{1000} \Rightarrow \frac{179000}{257}$.
Nelle seconde 33 studenti su 40 hanno riposto correttamente e quasi tutti motivando la loro risposta, o attraverso le motivazioni sopra riportate o attraverso il ragionamento "$179 : 0.257 < 179 \cdot 0.257$ *perché* 0.257 *è compreso in 179 molte volte, mentre un numero intero per un numero decimale non dà come risultato un numero intero*".
È interessante osservare che anche chi tra gli studenti ragiona attraverso la definizione procedurale di divisione (quante volte il divisore sta nel dividendo), che potrebbe supportare l'immagine di 'divisione che diminuisce sempre', utilizzandola correttamente, non ha manifestando la misconcezione.
Dei 6 studenti che hanno risposto in maniera errata al quesito, 4 hanno esplicitamente affermato
"*perché è una moltiplicazione quindi il numero aumenta mentre nella divisione diminuisce*"
mentre due studenti hanno affermato che

"è maggiore la moltiplicazione perché un numero non è divisibile per 0".
Questi due studenti hanno commesso un errore che non ci aspettavamo, non hanno riconosciuto la scrittura decimale, considerando solamente lo zero nella divisione, e al contrario il numero completo 0.257 nella moltiplicazione.
I risultati di questo quesito sono coerenti a quello che ci aspettavamo, solo 4 studenti su 84 hanno manifestato di possedere la misconcezione secondo la quale 'la moltiplicazione aumenta sempre'.

3.2.2 Quesito 2

Se $a > b > 0$, allora è vero che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $a^t > b^t$?

Analisi della Domanda

La risposta corretta a questo quesito è NO e per motivarla è sufficiente fare un qualsiasi controesempio con $t < 1$.
La principale causa di errore in questo caso è il ragionamento nell'errato insieme numerico, anche se è chiaramente specificato che $t \in \mathbb{R}$. È infatti probabile che se qualcuno risponderà SI alla domanda, sarà perché ha valutato il variare di t solo nei numeri naturali.
Questa misconcezione è attribuibile al fatto che l'alunno, dal momento in cui l'insieme dei numeri da lui conosciuti si è esteso da $\mathbb{N}$, non si è ancora abituato a ragionare considerando gli altri numeri oltre a $\mathbb{N}$. Nel quesito viene appositamente specificato l'insieme di appartenenza di t per vedere se si verifica qualche caso in cui il modello di ragionamento abituale in $\mathbb{N}$ è addirittura più forte di una specifica richiesta scritta. Possiamo, infatti, interpretare questo comportamento come la versione della misconcezione 'more of A-more B' (che analizzeremo nel dettaglio nel quesito 4) nell'operazione di elevamento a potenza.
Quesiti simili sono stati posti nella tesi di master del ricercatore Kopelevich S. (non pubblicata), e ne è risultato che almeno il 50% degli allievi in ogni classe in cui era stato sottoposto il questionario (seconda classe di scuola secondaria di primo grado e prima,

seconda e terza classe di scuola secondaria di secondo grado) affermavano che se $a > b$ allora $a^t > b^t$.

Ipotesi di Ricerca

In questo quesito ci aspettiamo che alcuni allievi di classi seconde (ma non la metà come ha invece verificato Kopelevich) risponda in maniera errata, essendo abituato da meno tempo a ragionare su insiemi diversi da $\mathbb{N}$ rispetto agli allievi di quinta per i quali, al contrario, confidiamo che nessuno non si accorga della falsità dell'enunciato.

Analisi dei Risultati

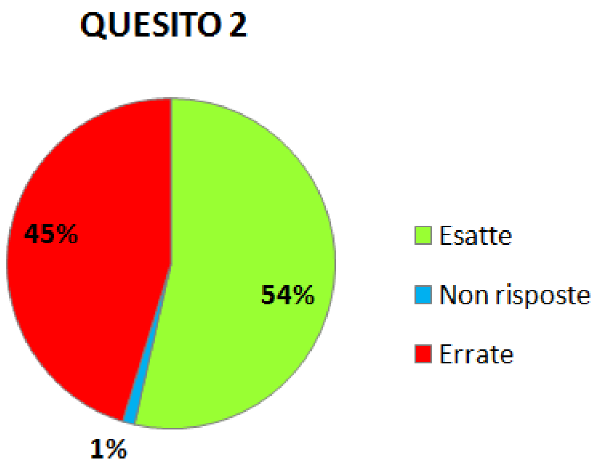

Figura 3.2: Risultati in percentuale del Quesito 2.

- Esatte: 45/84, nelle quinte 34/44, nelle seconde 11/40;
- Non risposte: 1/84, nelle quinte 0/44, nelle seconde 1/40;
- Errate: 38/84, nelle quinte 10/44, nelle seconde 28/40.

Sia nelle quinte che nelle seconde, chi ha risposto correttamente e ha motivato la risposta ha presentato un controesempio, oppure ha considerato il fatto che se t assumesse valori negativi la disuguaglianza non sarebbe verificata. Alcuni studenti di seconda non

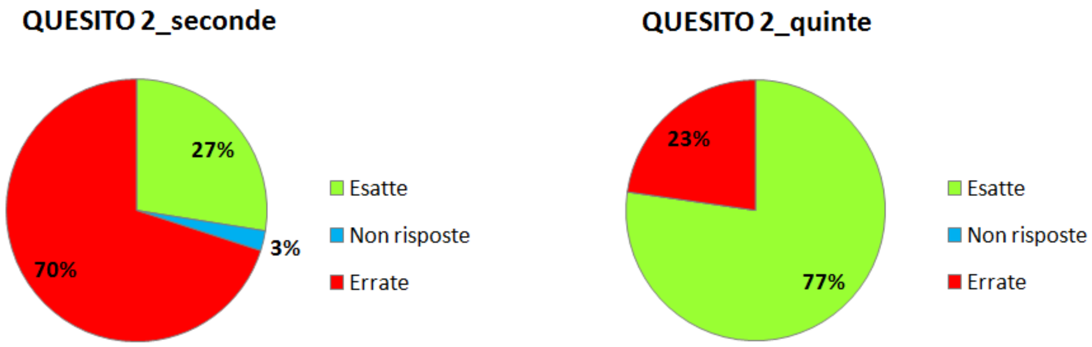

Figura 3.3: Risultati ottenuti in seconda e in quinta in percentuale Quesito 2.

hanno considerato il variare di t sui numeri negativi, ma hanno osservato che se $t = 0$ la disuguaglianza sarebbe $1 > 1$ e quindi Falsa.
È chiaro che la nostra ipotesi a priori era errata su diversi punti: non solo ben più della metà degli studenti di seconda non ha risposto correttamente, ma anche circa un quarto degli studenti di quinta. Questo dimostra quanto la tendenza naturale a ragionare nell'insieme numerico $\mathbb{N}$ rischi di manifestarsi anche in studenti che sicuramente sanno e hanno studiato l'elevamento a potenza sui numeri reali.
La motivazione che ha presentato chi ha risposto che la disuguaglianza è verificata per ogni $t \in \mathbb{R}$ è stata: $a > b$ e quindi la sua potenza rispetta questa relazione.
Nello specifico nelle classi seconde diversi studenti hanno motivato restringendosi al caso di elevamento al quadrato o al cubo, come ad esempio:
"è vero perché se $a > b$ anche il quadrato sarà maggiore $a^2 > b^2$".
Sempre allievi di seconda superiore, motivando, hanno confuso l'operazione di elevamento a potenza con quella di moltiplicazione:
"si è vero perché se $a > b$ e lo moltiplichi per t cioè per lo stesso numero sarà sempre maggiore di b ".
Molti di coloro che in quinta hanno sbagliato a rispondere, hanno solo affermato SI, senza motivare, il che potrebbe significare che non hanno riflettuto molto bene sulla domanda (questo ci permette di confidare che il tal caso si sarebbero accorti della Falsità dell'enunciato).
Interessante è la risposta fornita da una studentessa:

"si perché i numeri vengono moltiplicati lo stesso numero di volte quindi essendo $a > b$ il risultato di a^t sarà maggiore ".
Questa dimostra esplicitamente che non ha ancora esteso la sua immagine dell'operazione di elevamento a potenza nell'insieme dei reali, cosa che in quinta dovrebbe essere già acquisita; infatti ragionando ancora nei naturali, l'elevamento a potenza coincide con la procedura di moltiplicare la base tante volte quante la potenza.

3.2.3 Quesito 3

È vero che se la distanza di $x \in \mathbb{R}$ da 0 è inferiore alla distanza di $y \in \mathbb{R}$ da 0, allora $x < y$?

Analisi della Domanda

La risposta esatta del quesito è NO, per motivarla è sufficiente fare un controesempio come: la distanza di -3 da 0 è minore della distanza di -4 da zero, ma è falso che $-3 < -4$.
La domanda è basata sull'utilizzo dell'immagine della retta dei numeri reali e non ha particolari criticità, la possibile causa d'errore qui potrebbe essere, anche in questo caso, l'abitudine degli studenti a ragionare intuitivamente nell'insieme dei naturali, considerando quindi solo il valore assoluto del numero, non tenendo conto del ruolo del relativo segno.
"In Matematica alcune proprietà spesso funzionano in determinati ambienti numerici, ma crollano quando la realtà dei numeri si fa più estesa. Ad esempio, quando confrontiamo due numeri naturali mediante la linea dei numeri, si potrebbe affermare che 'il numero più lontano dallo zero sia il numero più grande'. Quando viene applicata ai numeri relativi, tuttavia, questa regola può spingerci, non correttamente, a stabilire, ad esempio, che -5 è più grande di -2 perché 'esso è più lontano dallo zero'. La regola 'il più lontano-il più grande' è valida per tutti i numeri naturali, ma non per quelli relativi " [24].
Nel caso di una trasposizione didattica adeguata, questa misconcezione è inevitabile, perché finché uno studente non lavora con i numeri negativi o con i razionali non gli si

può spiegare che esistono numeri per cui la regola 'il più lontano-il più grande' non vale.
È fondamentale quindi aiutare gli allievi a superare questa misconcezione 'naturale', esplicitandola il più possibile.

Ipotesi di Ricerca

Per quanto questa misconcezione sia 'naturale' non ci aspettiamo che nei livelli di scolarizzazione in cui svolgiamo la nostra indagine sia ancora molto presente.
Coerentemente alle ipotesi del quesito precedente, ci aspettiamo che nelle classi seconde una piccola percentuale di studenti non risponda correttamente alla domanda e confidiamo che nelle quinte, invece, la totalità degli studenti non manifesti questa misconcezione.
Il motivo principale di questa ipotesi è il fatto che le Linee Guida del Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca per i Licei Scientifici specificano tra gli Obiettivi Specifici di Apprendimento del Primo Bienni *"Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta "*.
Già dal sesto anno di scolarizzazione gli allievi conoscono i numeri razionali e hanno imparato a svolgere calcoli con le radici. In più il primo anno del liceo dovrebbero aver acquisito l'immagine, per quanto intuitiva, della retta reale e questa dovrebbe eliminare o portare ad affrontare le possibili misconcezioni 'il più lontano-il più grande'.

Analisi dei Risultati

- Esatte: 45/84, nelle quinte 36/44, nelle seconde 9/40;
- Non risposte: 3/84, nelle quinte 2/44, nelle seconde 1/40;
- Errate: 66/84, nelle quinte 6/44, nelle seconde 30/40.

Leggendo i dati, il risultato che impressiona di più è che meno di un quarto degli studenti in seconda sono stati in grado di rispondere correttamente a questo quesito e, addirittura, in una delle due classi nessun allievo ha risposto correttamente.
I 9 studenti che hanno risposto in maniera esatta hanno tutti motivato con precisione e cognizione di causa la loro risposta:

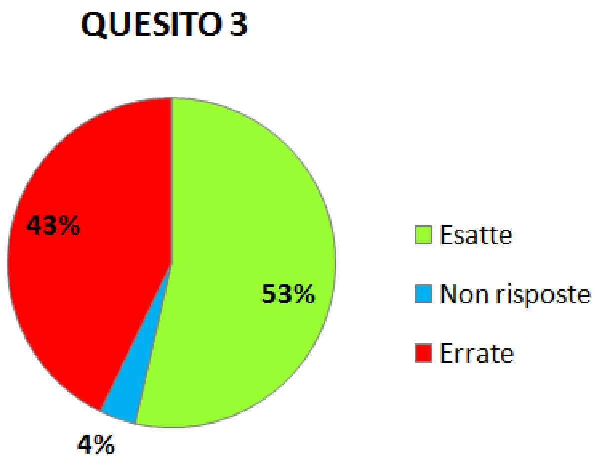

Figura 3.4: Risultati in percentuale del Quesito 3.

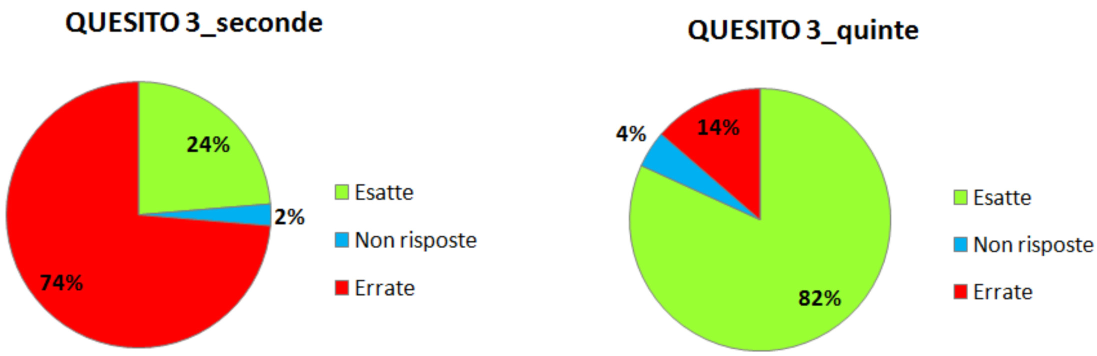

Figura 3.5: Risultati ottenuti in seconda e in quinta in percentuale Quesito 3.

"No, perché se i numeri fossero $\mathbb{N}$ *allora sarebbe corretto, ma* $\mathbb{R}$ *comprende anche i numeri negativi "*, oppure
"No perché la distanza equivale al $|x|$ *e* $|y|$ *di conseguenza* y *può avere una distanza maggiore ma essere negativo, mentre* x *una distanza minore ma essere positivo e di conseguenza* $x > y$*"*.
Considerando la preparazione non solo sui numeri reali ma anche sul piano cartesiano che crea una giusta immagine rappresentativa per situazioni come quelle poste nel quesito, risulta strano che comunque 6 allievi abbiano risposto in maniera errata. In realtà loro si sono serviti proprio di motivazioni legate alla geometria analitica, probabilmente

interpretando però male la domanda:
"Si, perché oltre che ad una verifica visiva tramite un grafico, possiamo usare la formula della distanza tra due punti per esserne sicuri";
"$x - 0 < y - 0 \Rightarrow x < y$ si è vero per la distanza (geometria analitica) di due punti";
"Si perché x e y hanno lo stesso punto di inizio e quindi hanno la stesso sistema di riferimento".
Queste motivazioni, per nulla chiare, ci hanno fatto pensare che gli studenti abbiano interpretato le lettere "x","y"come ascissa e ordinata di un punto nel piano, traendone comunque conseguenze prive di senso, oltre a dimostrare di non conoscere la corretta notazione da utilizzare per indicare punti nel piano cartesiano.
Dai risultati si vede comunque una grande differenza tra le quinte e le seconde, segnale del fatto che lavorando con i numeri reali e le loro rappresentazioni, la misconcezione viene superata, nonostante il fatto che in seconda sarebbe auspicabile che il numero di misconcezioni a riguardo fosse minore.

3.2.4 Quesito 4

Siano x, y, a, b numeri reali. Completa gli spazi con:
$<$ quando sicuramente vale tale disuguaglianza;
$>$ quando sicuramente vale tale disuguaglianza;
? quando i dati a disposizione non permettono di stabilire la disuguaglianza e in questo caso perché.

$$2 + a \quad .... \quad 3 + a; \qquad \frac{7}{2} \quad .... \quad \frac{7}{3}; \qquad -7(a^2+1) \quad .... \quad -5(a^2+1)$$

$$x(2+a) \quad .... \quad 2x; \qquad \frac{7}{3}x \quad .... \quad \frac{7}{2}x;$$

Analisi della Domanda

$$A) \quad 2 + a < 3 + a; \qquad B) \quad \frac{7}{2} > \frac{7}{3}; \qquad C) \quad -7(a^2+1) < -5(a^2+1)$$

$$D)\quad x(2+a)\ \textbf{?}\ 2x; \qquad E)\quad \frac{7}{3}x\ \textbf{?}\ \frac{7}{2}x;$$

Come i precedenti, questo quesito verte sulla capacità degli studenti di ragionare nell'insieme numerico dei numeri reali, al variare o meno di una variabile.
La misconcezione che potrebbe celarvisi è quella che in letteratura viene chiamata: 'More of A-more of B' [25].
Questa misconcezione è causata dalla regola intuitiva per la quale, nel confrontare due espressioni similari composte sia da una parte letterale che da una numerica, il valore maggiore verrà assunto automaticamente dell'espressione con la parte numerica maggiore, senza minimamente considerare i possibili valori delle variabili.
Ad esempio nel caso A) di questo quesito le espressioni differiscono di una quantità, e a causa di questa misconcezione per alcuni studenti in maniera ovvia e logica avrà valore maggiore l'espressione che supera di quella quantità l'altra espressione. Ma questa è una conoscenza corretta solo finché lavoriamo nei numeri naturali e non considerando i possibili valori negativi, la disuguaglianza non viene valutata correttamente.
Se la trasposizione didattica è adegiata, anche questa può essere considerata una misconcezione inevitabile (nel senso definito nel paragrafo 1.3), poiché avviene spesso in maniera inconscia quando la necessità di chiarezza ed evidenza con cui si valutavano le disuguaglianze tra numeri naturali, viene traslata (erroneamente) su espressioni che variano su altri insiemi numerici.
Per esempio nella disuguaglianza $\frac{7}{3}x$ .... $\frac{7}{2}x$ non si può stabilire il termine maggiore a causa del variare di x, il quale può essere sia positiva che negativa. Nella tesi di master non pubblicata, il ricercatore A. Rapaport rileva che un'ampia maggioranza di allievi in classi che vanno dalla prima alla quarta superiore forniscono risposte sbagliate del tipo $4 > 2$ perciò $4x > 2x$. Secondo i dati di questo studio, quindi, la misconcezione che inizialmente si cela dietro questi errori, si mantiene anche dopo anni che gli studenti lavorano con variabili reali (o comunque, non necessariamente positive).
Sono diversi gli studi che analizzano la regola intuitiva 'More of A-more of B' la quale non si verifica solo in casi di espressioni matematiche ma anche in trasformazioni fisiche o proprietà geometriche (conservazione di aree o volumi).

Ipotesi di Ricerca

Nonostante i dati che in letteratura troviamo su studi avvenuti proprio nei livelli di scolarizzazione su cui anche noi indaghiamo, confidiamo che la maggioranza degli allievi in quinta superiore sia in grado di attribuire il giusto valore alle disuguaglianze.
Ci aspettiamo che una buona parte degli studenti di seconda commetta almeno un errore di valutazione.

Analisi dei Risultati

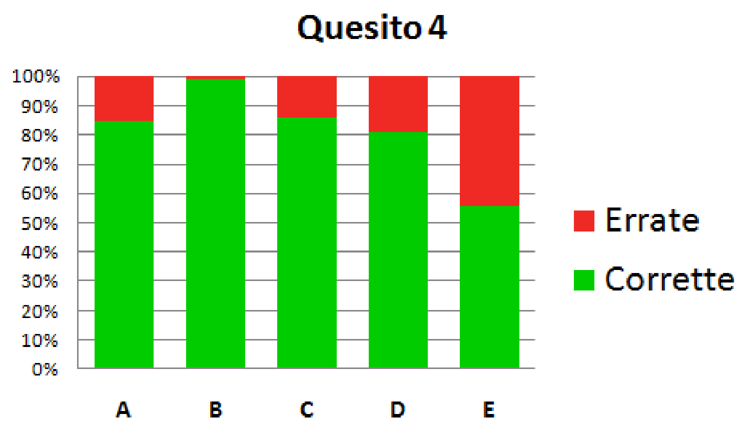

Figura 3.6: Risultati in percentuale del Quesito 4.

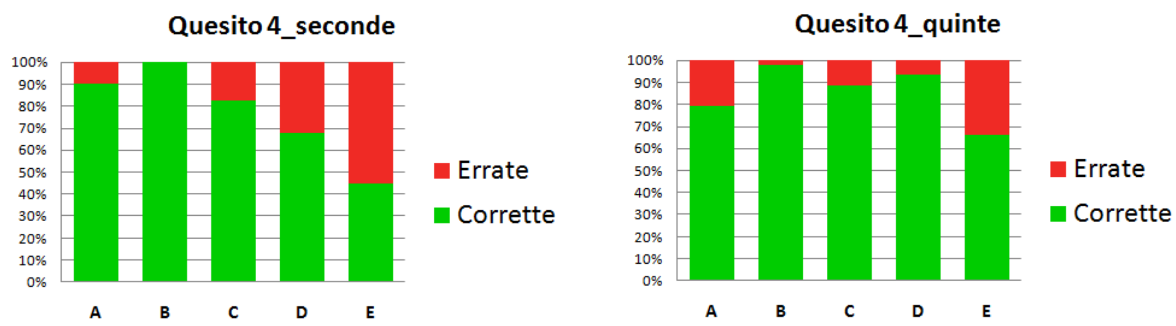

Figura 3.7: Risultati ottenuti in seconda e in quinta in percentuale Quesito 4.

- A) Esatte: 71/84, nelle quinte 35/44, nelle seconde 36/40;

- B) Esatte: 83/84, nelle quinte 43/44, nelle seconde 40/40;
- C) Esatte: 72/84, nelle quinte 39/44, nelle seconde 33/40;
- D) Esatte: 68/84, nelle quinte 41/44, nelle seconde 27/40;
- E) Esatte: 47/84, nelle quinte 29/44, nelle seconde 18/40;

Nelle quinte la percentuale d'errore maggiore si è verificata nel punto E) dove, probabilmente riconoscendo le stesse due frazioni presenti nel punto B) non hanno considerato che la variabile x, in questo caso, rendeva impossibile stabilire la disuguaglianza. Molti studenti hanno 'ceduto al tranello' che però è segnale del fatto che la misconcezione è presente.
Riferendoci sempre ai risultati degli studenti delle classi quinte, la percentuale di riuscita dei punti A), D) ed E), è una riconferma del fatto che diversi studenti non valutano correttamente il variare di semplici espressioni a variabili reali. Assurdamente infatti nel caso A) la percentuale di risposte corrette è più alta per le classi seconde rispetto a quella delle quinte. Questo, a nostro parere, si verifica perché nel caso A) valutando le due espressioni secondo solo gli addendi 'numerici' si ottiene comunque la disuguaglianza corretta.
Nel punto D) alcuni studenti di seconda hanno risposto correttamente motivando però la loro risposta con il fatto che le due incognite non permettono di stabilire la disuguaglianza, ma non perché il loro variare non lo permette, ma proprio perché sono due; motivazione che non ci permette di capire se questi studenti risentono o meno di misconcezione in questo caso.
Fortunatamente (a parte un probabile errore di distrazione) nessuno ha valutato in maniera errata la disuguaglianza B) inerente alla valutazione di frazioni.
Concludendo possiamo affermare che la misconcezione in quinta è ancora presente, al contrario di quello che speravamo, e in seconda è molto più forte di quello che ci aspettavamo, perché in diversi casi anche se gli studenti hanno risposto correttamente, la motivazione che li ha portati a farlo non era adeguata.

3.2.5 Quesito 5

Indica con SI se i seguenti numeri sono disposti in ordine strettamente crescente oppure con NO se non lo sono, indicando poi quale sarebbe l'ordine corretto.

A) $1,3//1,12//1,35$ .... B) $\frac{1}{4}//\frac{1}{3}//\frac{1}{2}$ ....

C) $\frac{1}{3}//\frac{1}{12}//\frac{3}{12}$ .... D) $1,10//1,55//1,90$ ....

Analisi della Domanda

Questo quesito nasce con l'intenzione di verificare se le misconcezioni legata all'ordinamento dei numeri razionali è ancora presente nella scuola secondaria di secondo grado. La rappresentazione dei numeri razionali attraverso frazioni o numeri decimali (periodici e non) rappresenta una delle maggiori criticità ontologiche della scuola secondaria di primo grado che purtroppo, spesso, si trascina anche negli anni successivi.
Come abbiamo visto nel capitolo precedente, le misconcezioni legate alle frazioni hanno molteplici cause; nello specifico quelle relative all'ordinamento dipendono principalmente dal fatto che lo studente tende ad attribuire l'ordinamento su frazioni o numeri decimali analogamente a come fa sui numeri naturali, senza ricordare che queste sono rappresentazioni di numeri diversi e l'ordinamento non funziona semplicemente applicando un ordinamento simile a quello sui naturali, ma necessita di diversi 'accorgimenti'.
Per esempio tenderebbe ad ordinare in modo strettamente crescente i seguenti numeri: $1,3//1,12//1,35$ osservando che il numero davanti alla virgola (parte intera) è lo stesso e che i numeri dietro la virgola (parte decimale) sono ordinati in modo crescente: $3,12,35$. Analogamente può avvenire nell'ordinamento di frazioni dove invece di considerare le proprietà specifiche della rappresentazione-frazione, lo studente consideri la frazione $\frac{1}{3} < \frac{1}{12}$ perché differiscono solo dal denominatore e $3 < 12$. Questi passaggi per analogia avvengono inconsciamente perché permettono in un primo momento allo studente di lavorare con oggetti nuovi e sentirsi sicuro utilizzando strumenti già rodati per efficacia precedente. Man mano che si approfondiscono questi argomenti tali misconcezioni si manifestano e il docente può affrontarle adeguatamente, se però questo non avviene, le misconcezioni legate a queste rappresentazioni rischiano di diventare un ostacolo cognitivo notevole per tutti gli anni della scuola secondaria di secondo grado.

Ipotesi di Ricerca

Ci aspettiamo che quasi la totalità degli allievi in seconda e la totalità degli allievi in quinta sia in grado di riconoscere i corretti ordinamenti di queste terne di numeri. Riteniamo che la misconcezione legata all'ordinamento di frazioni e numeri decimali raramente non venga identificata ed affrontata prima della scuola secondaria di secondo grado, principalmente per il fatto che i conflitti cognitivi che lo studente avrebbe, anche solo il primo anno di liceo, sarebbero tali per cui la serie di errori che lo studente commetterebbe porterebbero il docente a provvedere con interventi didattici ad hoc.

Analisi dei Risultati

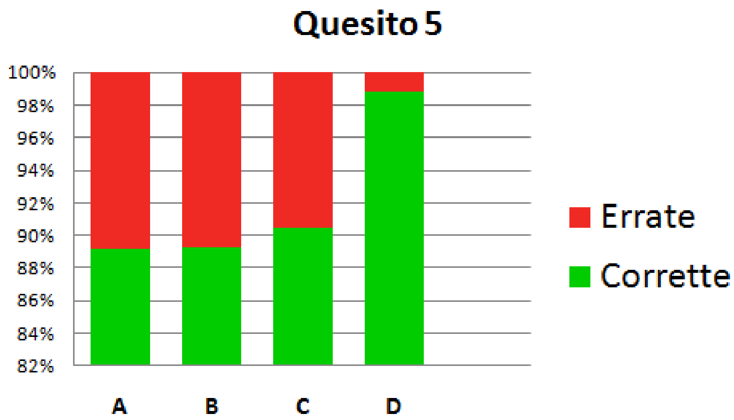

Figura 3.8: Risultati in percentuale del Quesito 5.

- A) Esatte: 74/84, nelle quinte 42/44, nelle seconde 32/40;
- B) Esatte: 75/84, nelle quinte 43/44, nelle seconde 32/40;
- C) Esatte: 76/84, nelle quinte 41/44, nelle seconde 35/40;
- D) Esatte: 83/84, nelle quinte 44/44, nelle seconde 29/40;

Come ci aspettavamo, a parte qualche sporadico caso, gli studenti in quinta non manifestano misconcezioni su questi argomenti; i pochi errori che si sono verificati erano

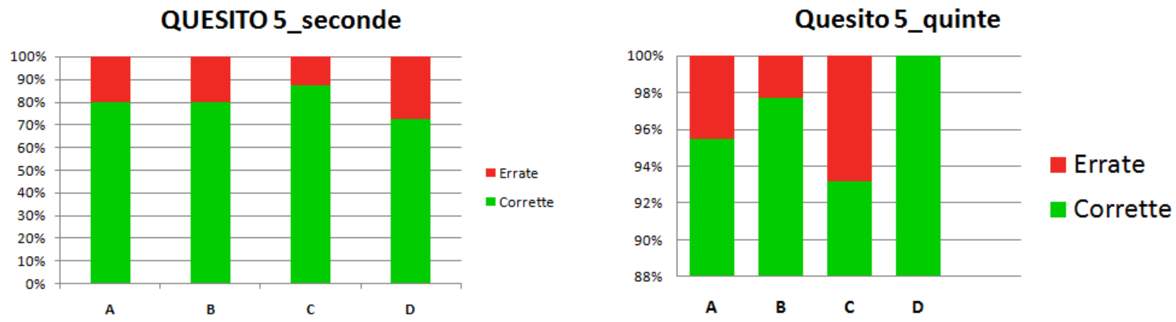

Figura 3.9: Risultati ottenuti in seconda e in quinta in percentuale Quesito 5.

o perché l'ordinamento è stato effettuato in ordine decrescente oppure, riteniamo, per distrazione.

Possiamo dire allora che all'ultimo anno del percorso scolastico liceale gli studenti mediamente posseggono i modelli di questi concetti ben definiti (fortunatamente aggiungiamo, essendo concetti di base).

In seconda invece i dati ci dicono che alcune misconcezioni sono ancora presenti, in particolare nella scrittura decimale. Infatti ben 5 studenti di seconda hanno espresso l'ordinamento del punto A) $1,35//1,12//1,3$ ordinando secondo la logica $35 > 12 > 3$ (per di più ordinamento decrescente anche se era stato chiesto crescente), misconcezione molto comune appena si inizia a lavorare con i numeri decimali, non molto comprensibile in seconda superiore. Si sono verificati anche diversi errori negli ordinamenti fra le frazioni, ma non sempre è possibile distinguere se l'errore è causato dalla misconcezione (cioè ritenere $\frac{1}{4} > \frac{1}{3}$) o dall'ordinamento inverso (decrescente invece che crescente).

3.2.6 Quesito 6

Nell'insieme dei numeri reali, è vero che la cardinalità dell'intervallo $[0, 100]$ è uguale alla cardinalità dell'intervallo $[0, 1]$?

Analisi della Domanda

La risposta corretta di questa domanda è SI. Come giustificazione a questa risposta era sufficiente affermare che entrambi gli intervalli hanno infiniti elementi, perché rispondendo si alla domanda gli studenti già dimostravano di non essere soggetti alla misconcezione che stiamo per esplicitare.
Formalmente, invece, sarebbe necessario costruire una funzione invertibile (e quindi biunivoca) tra i due intervalli, come ad esempio $f : [0, 100] \to [0, 1]$ con $f(x) = \frac{x}{100}$.
La domanda è strettamente legata alle misconcezioni sull'infinito anticipate nella Sezione 2.4, nello specifico la misconcezione della dipendenza dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure. Infatti, come molti ricercatori hanno verificato [1], anche se gli studenti sono coscienti del fatto che entrambi sono sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$, dovendo valutare un confronto tra le cardinalità dei due, riportano il ragionamento sull'immagine intuitiva che rappresenta i due intervalli come segmenti sulla retta reale e li confrontano considerando la cardinalità come la lunghezza dei segmenti: *"[...] vede ancora il segmentino secondo il modello 'collana'.*
È evidente che una simile concezione porta alla convinzione che la cardinalità delle perle-punti dipenda dalla lunghezza del sostegno-segmento: cioè lo studente immagina che valga l'implicazione: maggior lunghezza allora cardinalità dei punti maggiore" [2].

Ipotesi di Ricerca

In questo caso, visti anche i risultati in letteratura [1, 2, 3], ci aspettiamo che una buona parte degli studenti di seconda (possiamo supporre i $\frac{3}{4}$) risponda in maniera errata alla domanda, perché a nostro avviso questa misconcezione in questo livello di scolarizzazione, non è ancora stata affrontata adeguatamente, anche se secondo le linee guida del Ministero gli studenti dovrebbero avere *"una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta"* [26] (bisognerebbe poi riflettere, sulla scelta di darne un'idea appunto intuitiva, che rischia proprio di causare queste misconcezioni).
Riteniamo invece che una percentuale maggiore di studenti in quinta possa rispondere in maniera corretta, non tanto perché ha corretto questa misconcezione, ma piuttosto perché è molto più probabile che questo fatto sia stato affrontato esplicitamente dal do-

cente e che, a causa del contratto didattico [9], lui abbia memorizzato e accettato il fatto, senza adattare adeguatamente il suo modello mentale.
Concordiamo infatti con la riflessione presente in [2]: *"È difficile immaginare che uno studente non iniziato all'insegnamento dell'Analisi possa avere un'immagine della topologia dei punti della retta (quindi almeno della loro densità) che gli permetta di capire perfettamente questo fatto"*.

Analisi dei Risultati

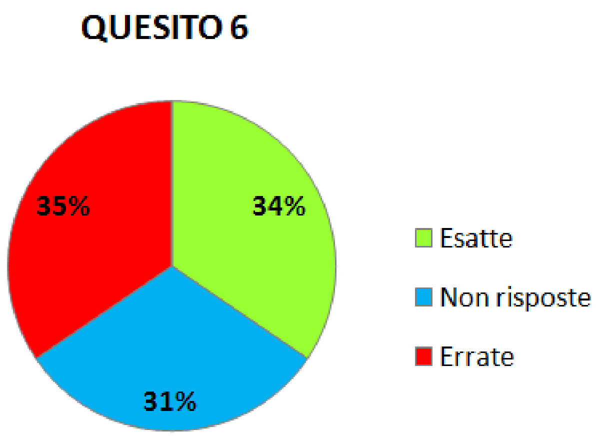

Figura 3.10: Risultati in percentuale del Quesito 6.

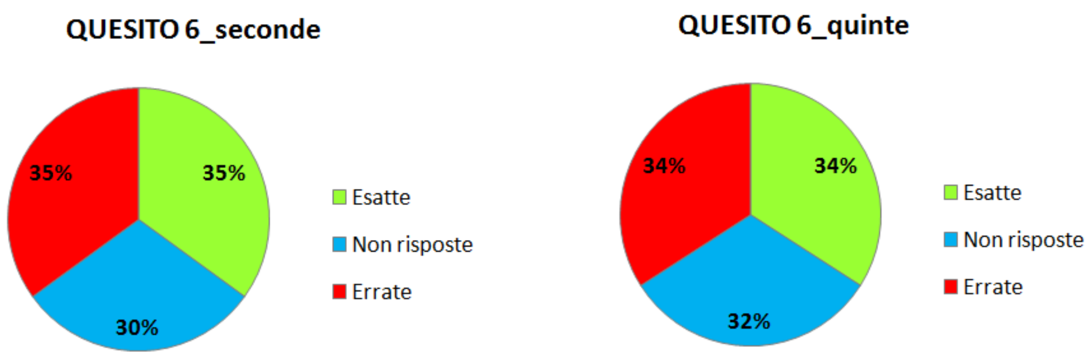

Figura 3.11: Risultati ottenuti in seconda e in quinta in percentuale Quesito 6.

- Esatte: 29/84, nelle quinte 15/44, nelle seconde 14/40;
- Non risposte: 26/84, nelle quinte 14/44, nelle seconde 12/40;
- Errate: 29/84, nelle quinte 15/44, nelle seconde 14/40.

Come possiamo evincere dai dati, la percentuale di correttezza nelle risposte di questo quesito non presenta differenze tra le classi seconde e le classi quinte.
Nonostante ci aspettassimo nelle classi quinte un andamento migliore, sottolineiamo che in una delle due classi la maggior parte degli studenti non conoscevano il significato del termine cardinalità. Questo ci fa credere che non solo per quella classe, ma anche per le altre, l'alto tasso di non risposte sia soprattutto per questo motivo.
C'è chi, addirittura, ha tentato una personale interpretazione
"No, perché la cardinalità sono gli estremi dell'intervallo "(classe quinta) oppure
"No, perché $[0,1]$ *e* $[0,100]$ *sono punti diversi "* (classe quinta).
In alcuni casi all'interno delle classi seconde la notazione utilizzata è stata confusa con la scrittura decimale, tanto che:
"Vero, perché $0,1 = 0,100$*"*; autorizzando il sospetto che costoro non conoscano bene neppure la simbologia relativa agli intervalli.
Un'interessante motivazione che è stata ripetuta cinque volte, era basata sulla positività dei numeri e sui rispettivi 'cardini' degli intervalli, ma che non siamo riusciti ad interpretare.

Anche le risposte esatte non sono sempre da considerarsi tali, perché le motivazioni riportate non combaciano con il senso della domanda
"Si, perché entrambi gli intervalli hanno la x *in* 0 *"*(classe quinta).
Chi ha risposto correttamente, motivando la domanda, ha sempre riportato la motivazione
"nei numeri reali, gli intervalli contengono infiniti punti".
Considerando tutti questi elementi non si può sicuramente valutare questo quesito limitandosi a valutare solo i dati numerici, che non rispecchiano assolutamente la varietà delle risposte che sono state date. Questo è senza dubbio segnale di quanto sia nebulosa e confusa l'idea che hanno gli studenti di infinito, ma non solo, anche di tutti gli argomenti

che sono correlati ad esso, come la cardinalità di un insieme.

Possiamo quindi concludere che la misconcezione legata alla dipendenza dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure è presente indistintamente dal livello di scolarizzazione e non solo, anche il concetto di cardinalità non è ancora definito nemmeno nelle classi quinte.
Osserviamo per completezza che nelle classi seconde si sono verificati anche errori legati al concetto di intervallo.

3.2.7 Quesito 7

Indica se le seguenti affermazioni sono Vere o False:

$$\frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \quad .... \qquad -0,5 \in \mathbb{Q} \quad .... \qquad \sqrt{16} \in \mathbb{Q} \quad .... \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \quad ....$$

$$0,5 \in \mathbb{Z} \quad .... \qquad \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad .... \qquad \frac{10}{2} \in \mathbb{Z} \quad ....$$

Analisi della Domanda

Le risposte corrette a questo quesito sono:

$$\text{A) } \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \quad \mathbf{V} \qquad \text{B) } -0,5 \in \mathbb{Q} \quad \mathbf{V} \qquad \text{C) } \sqrt{16} \in \mathbb{Q} \quad \mathbf{V} \qquad \text{D) } \sqrt{2} \in \mathbb{R} \quad \mathbf{V}$$

$$\text{E) } 0,5 \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{F} \qquad \text{F) } \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \quad \mathbf{F} \qquad \text{G) } \frac{10}{2} \in \mathbb{Z} \quad \mathbf{V}$$

In questa domanda giocano un ruolo fondamentale le misconcezioni legate alle rappresentazioni dei numeri. Spesso gli studenti distinguono i numeri attraverso la tipologia della rappresentazione utilizzata, cioè una frazione è sempre un numero razionale e non può essere un numero naturale. Infatti di per sé è vero che una frazione è sempre un numero razionale, ma solo se ho chiaro il concetto che l'insieme dei numeri razionali include l'insieme dei numeri naturali.
Sono quindi due i punti cruciali che nascondono possibili misconcezioni per gli studenti, la caratterizzazione degli insiemi numerici, la quale spesso viene vista come esclusiva

non inclusiva e (analogamente ai dubbi relativi alla verità delle seguenti disuguaglianze $3 \leq 3$ e $3 \leq 4$), e la rappresentazione dei numeri per la quale gli studenti pensano che l'appartenenza ad un insieme numerico di un numero, dipenda solo dalla sua scrittura. Purtroppo questa domanda include anche un'altra criticità che potrebbe limitare la veridicità dei risultati di questo quesito: molti studenti tendono a confondere la nomenclatura degli insiemi numerici, visto spesso il poco tempo dedicato a questo argomento in classe, e quindi buona parte degli errori che potrebbero verificarsi, potrebbero non essere frutto delle suddette misconcezioni, ma della non conoscenza della corretta nomenclatura degli insiemi numerici.

Ipotesi di Ricerca

Ci aspettiamo che circa uno studente su tre del campione raccolto all'interno delle classi seconde risponda in maniera errata ad almeno uno dei punti presenti nel quesito. Per quanto riguarda gli studenti delle classi quinte, riteniamo che le misconcezioni legate alla rappresentazione dei numeri o all'appartenenza ad un insieme numerico dovrebbero essere superate, quindi ci aspettiamo che quasi la totalità del campione risponda in maniera corretta.

Analisi dei Risultati

- A) Esatte: 64/84, nelle quinte 33/44, nelle seconde 31/40;
- B) Esatte: 50/84, nelle quinte 27/44, nelle seconde 23/40;
- C) Esatte: 42/84, nelle quinte 26/44, nelle seconde 16/40;
- D) Esatte: 55/84, nelle quinte 29/44, nelle seconde 26/40;
- E) Esatte: 57/84, nelle quinte 28/44, nelle seconde 29/40;
- F) Esatte: 53/84, nelle quinte 28/44, nelle seconde 25/40;
- G) Esatte: 62/84, nelle quinte 31/44, nelle seconde 31/40;

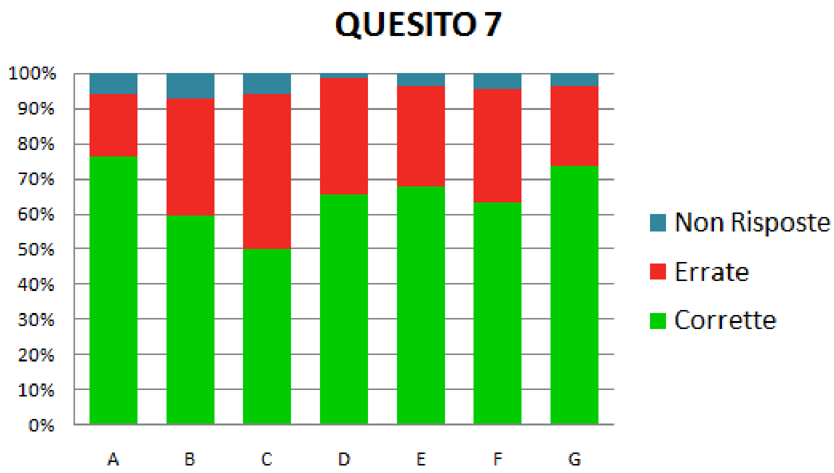

Figura 3.12: Risultati in percentuale del Quesito 7.

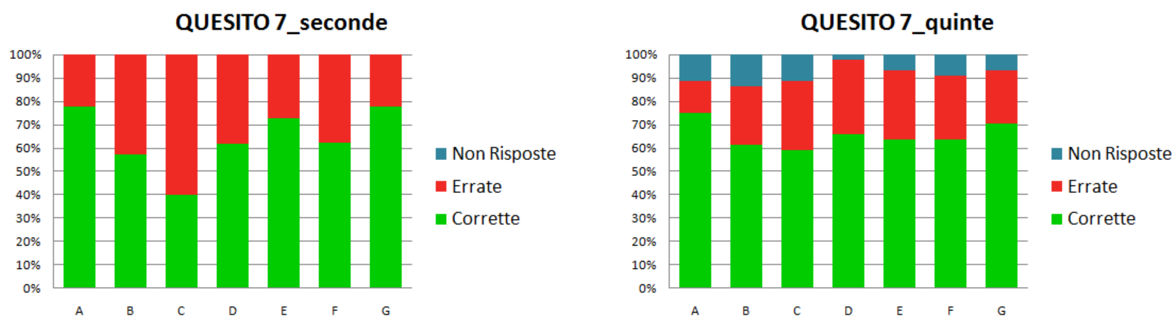

Figura 3.13: Risultati ottenuti in seconda e in quinta in percentuale Quesito 7.

Come ci aspettavamo durante la correzione dei questionari abbiamo osservato una grande confusione a sul piano delle nomenclature.

Riteniamo che in diversi casi gli studenti non fossero certi di quale insieme numerico corrispondesse al simbolo $\mathbb{Q}$ oppure $\mathbb{Z}$, rendendo, come nel caso del quesito precedente, inutile un'analisi dei risultati solo a livello numerico:

"$\mathbb{R}$ sono i numeri reali, quindi anche quelli irrazionali. $\mathbb{Z}$ sono i numeri razionali, quindi frazioni e decimali, $\mathbb{Q}$ non me lo ricordo"(classe quinta).

Non solo, spesso gli studenti hanno dimostrato di non conoscere quali relazioni di inclusione esistono tra questi insiemi:

"perché a $\mathbb{Q}$ appartengono i numeri razionali (quindi le frazioni) e non i numeri negativi

" (classe quinta) oppure
"$\sqrt{16} \notin \mathbb{Q}$ *perché* $\sqrt{16} \in \mathbb{Z}$"(classe seconda).
Si sono ovviamente verificati errori dati dal non riconoscimento di un numero, dato in una rappresentazione non semplificata come $\sqrt{16}$ oppure $\frac{10}{2}$.
L'unica considerazione che possiamo fare sui grafici dei risultati è che, visto il livellamento dei risultati nelle classi quinte, è probabile che gli errori fossero causati soprattutto dalla confusione sulle nomenclature. Considerando invece le differenze tra i risultati dei diversi punti nelle classi seconde, è probabile che in questo caso gli errori siano causati soprattutto da misconcezioni inerenti gli insiemi numerici.

3.2.8 Quesito 8

Inserisci al posto dei puntini il numero che verifica l'uguaglianza:

$$11 - 6 = ... - 11$$

Analisi della Domanda

La risposta corretta al quesito è 16.
Questa domanda, ripresa dall'articolo [22], mira a verificare la presenza di misconcezioni legate all'interpretazione del simbolo 'uguale'.
Questo, per noi matematici, rappresenta una relazione binaria di uguaglianza. Gli studenti invece prima imparano durante la scuola primaria di primo grado ad usarlo come simbolo procedurale delle operazioni, cioè è di collegamento tra gli operandi, alla sua sinistra e il risultato dell'operazione, alla sua destra. Solo successivamente questo simbolo inizia ad assumere connotazioni diverse, e anche se lo studente le acquisisce, il rischio è che non riesca a discostarsi dal quell'interpretazione procedurale.
"È stato ampiamente rilevato dalla ricerca internazionale, ritenuta oramai classica, che lo studente ha, nei confronti dell'uguaglianza, un comportamento cognitivo diverso da quello atteso dall'insegnante, specie all'ingresso nel ciclo di studio superiore" [22].
La possibile risposta procedurale è quindi 5 perché $11 - 6 = 5$, risposta che omette completamente un senso a quel -11.

È possibile un'altra risposta errata: 6, che è sinonimo dell'attribuzione di un intuitivo senso di simmetria al simbolo di uguale.

Ipotesi di Ricerca

È secondo noi interessante verificare quanto la misconcezione legata all'uguale possa essere presente nella scuola secondaria di secondo grado considerando il ruolo e i significati che questo simbolo ha e assume (equazioni, funzioni, ...).
Confidiamo principalmente sul fatto che nessuno a questo livello di scolarizzazione interpreti ancora l'uguale come simbolo procedurale.

Analisi dei Risultati

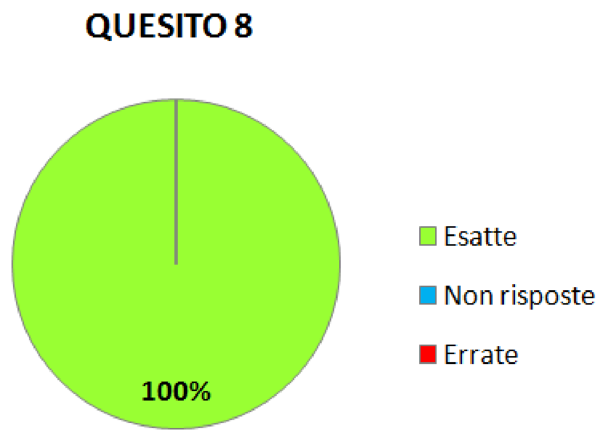

Figura 3.14: Risultati in percentuale del Quesito 8.

- Esatte: 84/84, nelle quinte 44/44, nelle seconde 40/40;
- Non risposte: 0/84, nelle quinte 0/44, nelle seconde 0/40;
- Errate: 0/84, nelle quinte 0/44, nelle seconde 0/40.

Questo risultato, molto rincuorante, dimostra con estrema precisione che nel campione del nostro studio, nessuno studente ha manifestato la misconcezione data dall'interpretazione procedurale del simbolo di uguale.

3.2.9 Quesito 9

Siano a, b numeri reali. Indica se le seguenti identità sono vere per qualunque valore delle lettere eventualmente presenti:

$$|-5| = 5 \quad ....; \qquad |-a| = a \quad ....; \qquad |-a^2| = a^2 \quad ....;$$

$$|a^2| = a^2 \quad ....; \qquad |a| = a \quad ....; \qquad |2| = 2 \quad ....;$$

$$|a-b| = a+b \quad ....; \qquad |a+b| = a+b \quad ....; \qquad |a| = \pm a \quad ....$$

Analisi della Domanda

Le risposte corrette ai punti di questa domanda solo le seguenti:

$$\text{A) } |-5| = 5 \quad \mathbf{V}; \qquad \text{B) } |-a| = a \quad \mathbf{F}; \qquad \text{C) } |-a^2| = a^2 \quad \mathbf{V};$$

$$\text{D) } |a^2| = a^2 \quad \mathbf{V}; \qquad \text{E) } |a| = a \quad \mathbf{F}; \qquad \text{F) } |2| = 2 \quad \mathbf{V};$$

$$\text{G) } |a-b| = a+b \quad \mathbf{F}; \qquad \text{H) } |a+b| = a+b \quad \mathbf{F}; \qquad \text{I) } |a| = \pm a \quad \mathbf{F}$$

La misconcezione che viene indagata da questo quesito è l'utilizzo procedurale del valore assoluto.
Quando uno studente non lavora con il calcolo letterale, e quindi applica la funzione valore assoluto solo a numeri 'espliciti', rischia di memorizzare il fatto che il valore assoluto 'trasformi il segno dei numeri', facendo diventare tutti i segni $-$ in $+$, e non i numeri negativi in positivi.
La differenza diventa sostanziale quando poi lo studente si trova a lavorare con il calcolo letterale, perché a questo punto, erroneamente, trasforma solo i segni e non considera che le variabili letterali possono assumere sia valori positivi che negativi.
La misconcezione può essere considerata, in generale, inevitabile perché è profondamente inconscia a causa dell'intuitività dell'interpretazione di valore assoluto come 'trasformatore di segni'.

La cosa che peggiora il ruolo di questa misconcezione è che, spesso, nel tentativo di essere più chiari agli studenti, gli insegnanti tendono ad esplicitare questa regola procedurale che però ha intrinseca una profonda interpretazione errata di quello che è la funzione valore assoluto.
Un chiaro esempio di questo atteggiamento da parte degli insegnanti è rappresentato dal seguente estratto dal sito 'http://www.ripmat.it/mate/a/ag/agga.html': *"In pratica il concetto di valore assoluto di un numero è quello di considerare il numero stesso senza che abbia un segno: siccome dai numeri razionali in avanti ogni numero (tranne lo 0) ha un segno dovremo far coincidere il valore assoluto sempre con il numero con segno positivo perché è quello che meglio coincide con il numero senza segno"*.
Particolarmente errata è l'ultima affermazione, segnale del fatto che la misconcezione in questione non è esplicitata solo per tentare di rendere l'argomento 'più facile' ma forse è presente anche nell'autore di questa frase, che dovrebbe essere un esperto in materia.

Ipotesi di Ricerca

Riteniamo che una buona metà degli studenti di seconda commetta almeno un errore a valutare la veridicità delle identità di questo quesito, a causa principalmente della non completa familiarità con il calcolo letterale.
Ci aspettiamo, invece, solo qualche sporadico caso di errore tra gli studenti di quinta superiore, soprattutto poiché dovrebbero conoscere bene il valore assoluto come funzione: *"[lo studente] approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi [...] sarà in grado di analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse"* [26].

Analisi dei Risultati

- A) Esatte: 73/84, nelle quinte 44/44, nelle seconde 33/40;
- B) Esatte: 35/84, nelle quinte 28/44, nelle seconde 7/40;
- C) Esatte: 66/84, nelle quinte 37/44, nelle seconde 33/40;
- D) Esatte: 79/84, nelle quinte 44/44, nelle seconde 35/40;

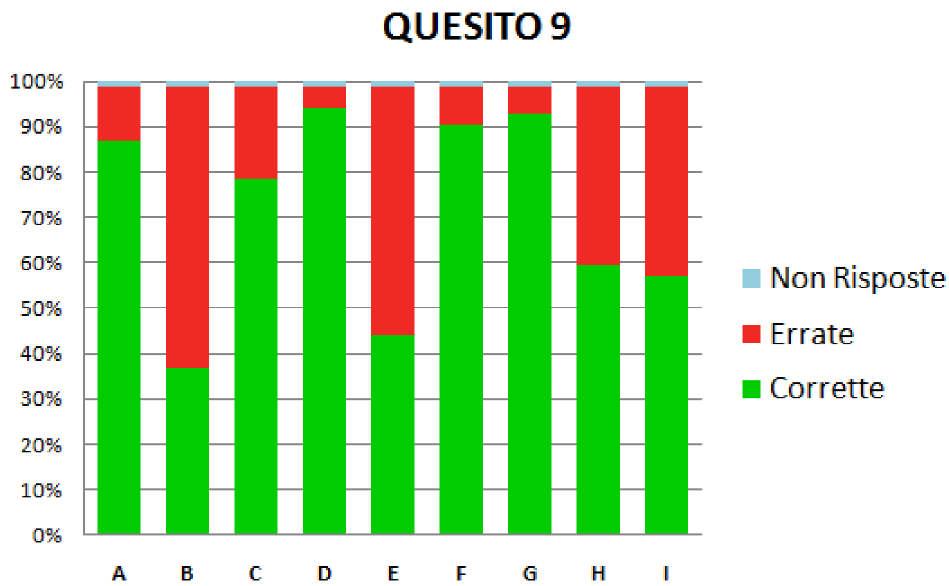

Figura 3.15: Risultati in percentuale del Quesito 9.

- E) Esatte: 37/84, nelle quinte 30/44, nelle seconde 7/40;
- F) Esatte: 76/84, nelle quinte 40/44, nelle seconde 36/40;
- G) Esatte: 78/84, nelle quinte 44/44, nelle seconde 34/40;
- H) Esatte: 50/84, nelle quinte 36/44, nelle seconde 14/40;
- I) Esatte: 48/84, nelle quinte 20/44, nelle seconde 28/40.

Dopo aver osservato che uno studente di seconda non ha risposto a nessuno dei punti di questo quesito, iniziamo analizzando il punto A al quale, anche se uno studente fosse soggetto alla misconcezione sopra citata, dovrebbe rispondere correttamente.
Analizziamo perciò cosa ha portato alcuni studenti appartenenti alle classi seconde a rispondere in maniera errata.
Un primo studente definisce False tutte le identità di questo quesito a parte l'ultima, con la motivazione:
"Perché le due stanghette significano che il segno può essere o + o − ";

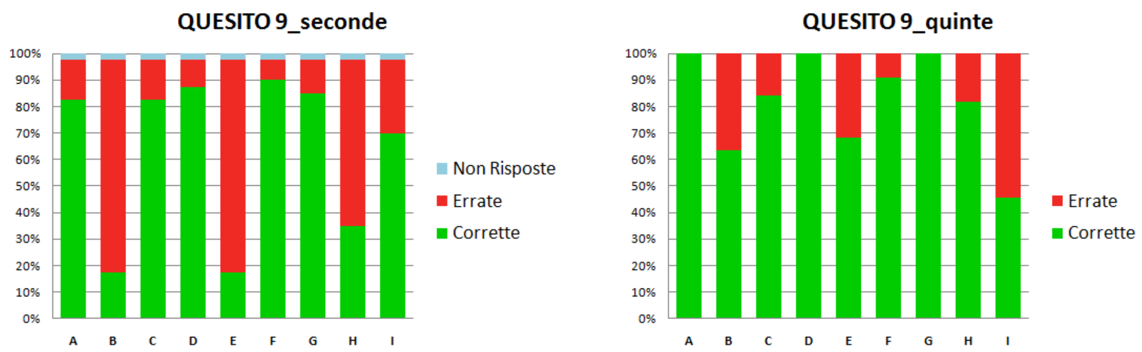

Figura 3.16: Risultati ottenuti in seconda e in quinta in percentuale Quesito 9.

questo significa che lo studente ha proprio una conoscenza errata del concetto matematico.

Un altro studente invece

"A, B, C, sono False perché il valore assoluto di un numero non può essere lo stesso numero col segno meno "

come se l'immagine della funzione valore assoluto fosse l'argomento stesso del valore assoluto. Anche in questo caso possiamo affermare che lo studente ha una conoscenza errata del concetto.

Un terzo studente ha motivato scrivendo le identità $|5| = 5$, $|a| = a$, rendendo lecito il sospetto che abbia una misconcezione evitabile, probabilmente acquisita nell'arco della scuola media. Questo ci fà pensare al fatto che non sappia quale significato abbia la simbologia $|\cdot|$, come del resto gli altri che hanno motivato la falsità del punto A con

"No, perché non è un'identità ".

Le 7 risposte errate del punto A, quindi, sono tutte causate dalla non conoscenza o conoscenza errata del valore assoluto.

Analizzando il punto B si osserva che solo 7 allievi di seconda e 28 di quinta sono stati in grado di affermare che la relazione $|-a| = |a|$ non è valida per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Questi risultati, su un'identità così semplice, dimostrano a nostro parere che in entrambi i livelli scolastici (omettendo chi proprio non ha la conoscenza del concetto di valore assoluto) tale è presente e si manifesta con grande forza. In questo caso non possiamo interpretare, infatti, i dati giustificandoli come errori distrazione, considerando che l'u-

nico elemento da valutare in questo punto è solo l'agire del valore assoluto.
Nel terzo punto tra gli studenti di seconda, coerentemente, abbiamo lo stesso numero di errori che c'è nel punto A, invece 7 studenti di quinta hanno sbagliato questa risposta, quando erano stati in grado di rispondere al primo punto; purtroppo solo uno studente ha motivato la sua risposta:
"il risultato vale solo nel caso in cui a e b siano positivi " (classe quinta),
non curante del fatto che l'elevamento al quadrato rende a^2 positivo (o nullo) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
Il punto D) è quello che ha il livello di risposte esatte più alto, proprio perché anche chi non conosce il concetto di valore assoluto, vede in questo punto comunque un'identità.
Il punto E), come il punto B) è dimostrazione di quanto sia presente la misconcezione qui indagata.
Nel punto F), come nel punto, D) l'identità dovrebbe essere ovvia. Alcuni studenti, anche nelle classi quinte, hanno risposto però in maniera errata.
Due esempi delle motivazioni di cui questi studenti si sono serviti sono:
"$|2| = \pm 2$ " (classe quinta);
"il valore assoluto cambia i segni "(classe seconda),
quindi secondo questo studente l'identità corretta sarebbe $|2| = -2$.
I risultati dei punti successivi del quesito sono solo conferme di quanto concluso fino ad ora.
Per completezza riportiamo altre motivazioni date dagli studenti, che sottolineano quanto la misconcezione legata al valore assoluto sia profonda:
"il valore assoluto rappresenta 'la cifra senza segno' quindi se ci sono dei segni nel valore assoluto, vengono tolti "(classe quinta);
"per valore assoluto si intende il numero senza tener conto che sia positivo o negativo "(classe seconda);
"il valore assoluto di un numero è soltanto la cifra senza segno "(classe seconda);
"non si può fare il valore assoluto di una sottrazione perché poi col valore assoluto diventa un'addizione e il risultato è diverso "(classe seconda);
"Con le lettere non si può fare il valore assoluto perché per farlo servirebbero limitazioni per le lettere "(classe seconda).

3.2.10 Quesito 10

Indica se le seguenti identità sono vere e spiega perché:

A) $|-ln(\pi - 3)| = -ln(\pi - 3)$ ....; B) $|-ln(2)| = ln(2)$ ....;

Analisi della Domanda

Ricordiamo che questo e il quesito 11 sono stati sottoposti solo nelle classi quinte. La prima identità presentata dal quesito è vera, perché:

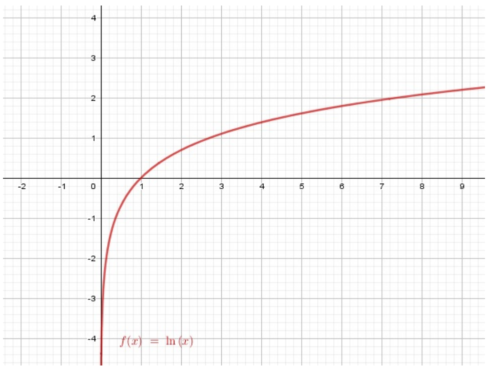

Figura 3.17: Grafico funzione $y = ln(x)$

$$0 < (\pi - 3) < 1 \quad \Rightarrow \quad ln(\pi - 3) < 0 \quad \text{allora} \quad -ln(\pi - 3) > 0$$

quindi risulta verificato che $|-ln(\pi - 3)| = -ln(\pi - 3)$.
Anche la seconda identità si verifica essere vera, semplicemente considerando che $ln(2) > 0$ quindi $|-ln(2)| = ln(2)$.
Questo quesito, come il precedente, mira a testare le misconcezioni legate al valore assoluto, in un contesto che per gli studenti risulta essere meno elementare di quello del quesito 10; in questo modo potremo osservare se ci sono delle differenze sostanziali e quindi considerare quanto il livello di difficoltà della domanda influisca sulla manifestazione delle misconcezioni.

Ipotesi di Ricerca

Ci aspettiamo che quasi la totalità degli studenti risponda in maniera corretta al secondo punto.
Invece, riteniamo che circa una parte degli studenti possano non considerare adeguatamente il valore del logaritmo del primo punto, applicando il valore assoluto solo come operatore che 'cancella il segno meno'.

Analisi dei Risultati

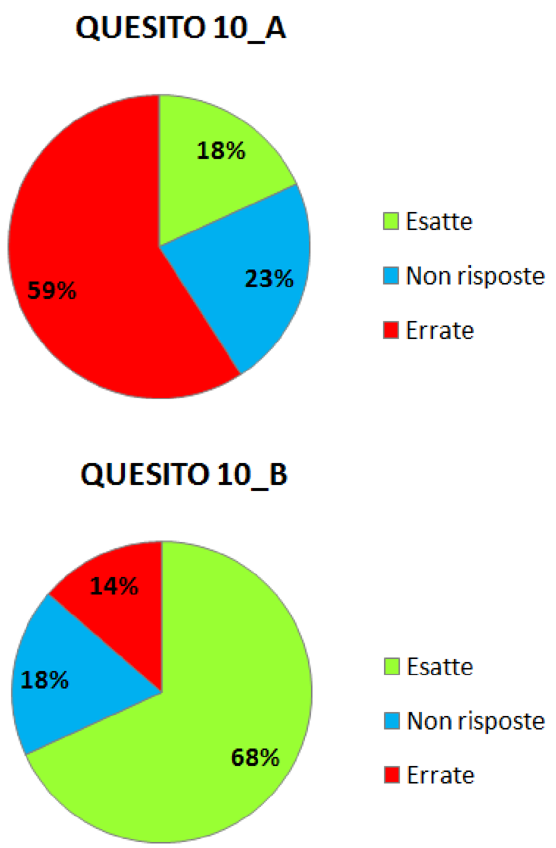

Figura 3.18: Risultati ottenuti in percentuale Quesito 10.

- Esatte: A) 8/44 - B) 30/44;

- Non risposte: A) 10/44 - B) 8/44;
- Errate: A) 26/44 - B) 6/44.

Anche solo considerando i risultati del quesito 9 possiamo anticipare che la nostra ipotesi di ricerca riguardo questo quesito non potrà verificarsi.
Riteniamo che gli 8 studenti che non hanno risposto a questo quesito, alla sola vista della funzione logaritmo naturale, abbiamo deciso di 'saltare' la domanda, considerando che poi hanno svolto il quesito successivo.
Cerchiamo, attraverso le motivazioni, di capire perché invece 6 studenti abbiano sbagliato il punto B): anche in questo caso troviamo chi afferma che *"$|-ln(2)| = \pm ln(2)$ "*.
Due studenti, invece, non considerano proprio il valore assoluto e affermano
"$-ln(2) = ln(\frac{1}{2}) \neq ln(2)$"e
"$-ln(2) = [ln(2)]^{-1} = \frac{1}{ln(2)} \neq ln(2)$".
Per quanto riguarda il primo punto, come spiegato precedentemente, bisognava risolvere il valore assoluto ragionando sul logaritmo.
Riteniamo che solo chi non risente della misconcezione legata al valore assoluto, può aver risposto correttamente a questa domanda e risultano essere solo 8 studenti.
Riportiamo alcune delle motivazioni più curiose a supporto della risposta errata del punto A:
"Falso, perché avendo due valori si ha la formula $|a+b| = a+b, a-b$ ";
"Falsa, perché bisogna calcolare il segno ";
"$|-ln(\pi-3)|$ è sempre positivo, $-ln(\pi-3)$ è sempre negativo, allora $|-ln(\pi-3)| \neq -ln(\pi-3)$ ".

3.2.11 Quesito 11

Considera le seguenti disequazioni e indica se la soluzione è corretta e perché.

$$x^2 \leq 9 \qquad \text{Soluzione: ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } -3 \leq x \leq 3$$
$$\sin(x) < 1/2 \qquad \text{Soluzione: ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < \arcsin(1/2)$$
$$e^x < 10 \qquad \text{Soluzione: ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < ln(10)$$

Analisi della Domanda

$$x^2 \leq 9 \qquad \text{Soluzione: ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } -3 \leq x \leq 3 \qquad \textbf{Vera}$$

Si verifica facilmente che questa disequazione è vera, sia applicando il procedimento di risoluzione standard sia considerando il grafico della funzione $f(x) = x^2$.

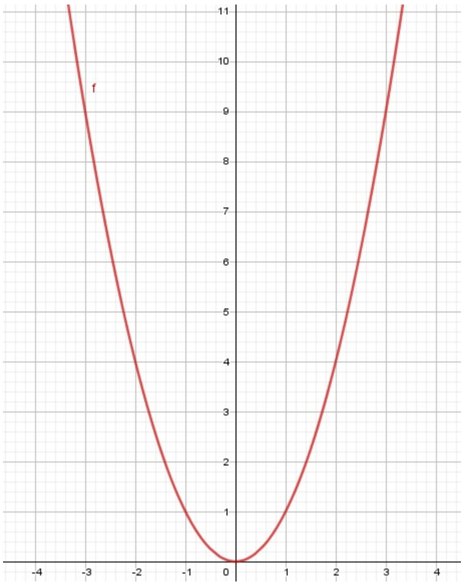

Figura 3.19: Grafico della funzione $f(x) = x^2$.

$$\sin(x) < 1/2 \qquad \text{Soluzione: ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < \arcsin(1/2) \qquad \textbf{Falsa}$$

La soluzione indicata di questa disequazione è Falsa.
La soluzione corretta è $0 + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$.
Il quesito è stato ideato per vedere se, in linea con gli altri due punti, lo studente tende ad applicare meccanicamente la funzione inversa senza considerare che il risultato così ottenuto non ha alcun senso perché avremmo $x < \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$.

$$e^x < 10 \qquad \text{Soluzione: ogni } x \in \mathbb{R} \text{ tale che } x < ln(10) \qquad \textbf{Vera}$$

Quest'ultimo punto si motiva considerando semplicemente che l'inversa all'esponenziale è il logaritmo naturale ed essendo $10 > 0$, ha senso applicare la funzione inversa.

$$e^x < 10 \qquad \Rightarrow \quad x < ln(10)$$

I tre punti precedenti sono stati ideati per vedere quanto gli studenti risolvano le disequazioni 'meccanicamente', ripetendo le procedure che applicavano in disequazioni alfanumeriche in disequazioni con funzioni che hanno caratteristiche e particolarità che non si possono omettere. In questo caso la misconcezione che potrebbe verificarsi sarebbe causata, appunto, dalla traslazione per analogia di una procedura da casi in cui funzionava, ad altri in cui ha bisogno di essere adattata.

Ipotesi di Ricerca

Ci aspettiamo che la totalità degli studenti risponda correttamente al primo quesito. Per quanto riguarda il secondo punto crediamo che circa un terzo degli studenti affermerà che la soluzione della disequazione è corretta. Infine ci aspettiamo che qualche studente affermi che la soluzione dell'ultima disequazione sia errata, probabilmente a causa di qualche errore di passaggio che commetterà nel risolvere la disequazione.

Analisi dei Risultati

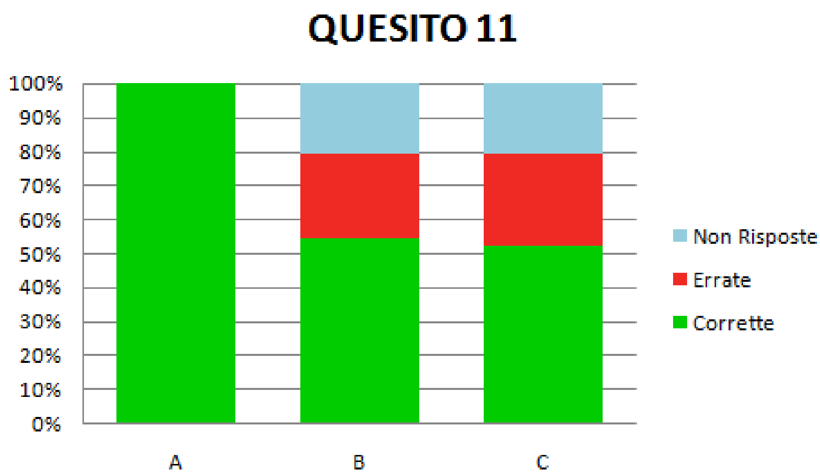

Figura 3.20: Risultati ottenuti in percentuale Quesito 11.

- Esatte: A) 44/44 - B) 24/44 - C) 23/44;

- Non risposte: A) 0/44 - B) 11/44 - C) 12/44;
- Errate: A) 0/44 - B) 9/44 - C) 9/44.

Possiamo, felicemente, confermare che tutti gli studenti hanno risposto correttamente al primo punto del quesito, come avevamo ipotizzato.
Osserviamo che 9 studenti non hanno risposto né al punto B) né al punto C).
Tra le 24 risposte corrette nel punto B) abbiamo considerato tutti coloro affermassero che la soluzione indicata fosse errata.
Le risposte nelle quali la motivazione presentata forniva un'altra soluzione, ma anch'essa errata, sono state comunque considerate come corrette, perché il fine della nostra analisi è vedere se lo studente commette errori a causa dell'azione di una misconcezione. In questo caso se lo studente afferma che la soluzione da noi fornita è errata, dimostra di non aver applicato la procedura meccanica, e quindi di non avere questa misconcezione.
I risultati del punto B) rispecchiano la nostra ipotesi di ricerca, circa un terzo degli studenti ha affermato che la soluzione fosse corretta. Tutte le motivazioni a sostegno del fatto che la soluzione fosse corretta erano del tipo:
"*Corretta, perché* $\arcsin(sin(x)) < \arcsin(\frac{1}{2})$ ",
motivazione che conferma il fatto che questo studente abbia applicato meccanicamente la funzione arcoseno ad entrambi i membri della disequazione;
"*è un'uguaglianza, un diverso modo di scrivere la funzione, in quanto arcoseno è la funzione inversa del seno* ";
"*Falsa, perché bisogna calcolare il segno* ".
L'ultima disequazione C) presenta praticamente gli stessi risultati del punto B).
La maggiore causa di errore, in questo caso, è stata il non riconoscimento, nella risoluzione della disequazione, del fatto che $ln(e) = 1$, cosa che è paradossalmente in opposizione alla causa d'errore del punto B).
Presentiamo alcune delle motivazioni a supporto della risposta errata:
"*no, la soluzione è:* $x \cdot ln < ln(10) \Rightarrow \frac{ln(10)}{ln}$ ";
"*la soluzione è* $x < e^{10}$ ";
"*non si può determinare perché* e^x *varia al variare di* x *e quindi può essere minore come maggiore* ";

"non è detto".

Nell'analisi di questo quesito abbiamo potuto appurare diverse lacune su argomenti che ritenevamo acquisiti, come le funzioni goniometriche o le proprietà dei logaritmi. Infine, la misconcezione legata all'applicazione per analogia di procedure è presente negli studenti di quinta superiore, e anche se hanno le competenze per rispondere correttamente ai quesiti, la misconcezione, spesso, ha il sopravvento.

Capitolo 4

Conclusioni

Le misconcezioni rappresentano una complessa causa di errore negli studenti, sia a livello elementare che a livello superiore. Grazie alla sperimentazione svolta abbiamo verificato che sono diverse le misconcezioni presenti negli studenti della scuola secondaria di secondo grado, spesso anche in percentuale più alta rispetto a quanto ci aspettassimo. Questo sottolinea l'importanza della preparazione dei docenti su queste tematiche, in maniera che possano ideare interventi didattici ad hoc per ogni caso, proprio perché molti studenti hanno trascinato misconcezioni relative ad argomenti di livelli di scolarizzazione precedenti fino alla quinta superiore (vedi ad esempio Quesito 10).
Fortunatamente la misconcezione relativa al significato del simbolo di uguaglianza (Quesito 9) e la misconcezione relativa alla moltiplicazione (Quesito 1) sono state manifestate da una percentuale nulla o irrisoria degli studenti.
Abbiamo verificato in diversi casi (Quesiti 2, 3, 4) che molti studenti continuano a ragionare nell'insieme dei numeri naturali e non negli insiemi richiesti dai quesiti, o comunque 'dimenticando' di considerare i soprattutto i numeri negativi.
Tra gli studenti di seconda superiore abbiamo appurato diversi errori legati all'ordinamento di numeri razionali rappresentati attraverso frazioni o scrittura decimale.
Inaspettatamente sia nelle classi seconde che nelle classi quinte vi è molta confusione relativa alla caratterizzazione degli insiemi numerici (Quesiti 7,8) e sottolineiamo che per quanto riguarda il quesito 6, la maggior parte degli studenti non conosceva il significato del termine cardinalità.

Nell'arco dell'analisi dei risultati ci ha colpito in particolare l'importante presenza della misconcezione legata al valore assoluto (Quesiti 10, 11) , soprattutto per quanto riguarda le classi quinte in cui ci aspettavamo che si manifestasse solo in qualche sporadico caso. Riteniamo, considerando che gli studenti delle classi quinte sicuramente conoscono la funzione valore assoluto, che sia fortemente importante riflettere su come questo argomento venga affrontato in classe e forse convenga caratterizzarlo maggiormente come funzione, per evitare che gli studenti lo interpretino solo come un 'trasformatore di segni'.
Infine, anche in presenza di studenti con tutte le competenze necessarie per rispondere correttamente ai quesiti, le misconcezioni si manifestano, come nel caso della misconcezione legata all'applicazione per analogia di procedure (Quesito 11).

Bibliografia

[1] Gianfranco Arrigo, Bruno D'Amore, *Infiniti*, Angeli, (1993).

[2] Gianfranco Arrigo, Bruno D'Amore, *Lo vedo ma non ci credo. Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integnate, [22B, 5, 465-494], (1999).

[3] Giorgio Bagni, *Un'interpretazione categoriale di una misconcezione riguardante gli insiemi infiniti*, Atti e memorie dell'ateneo di Treviso [15, 51-60], (1998).

[4] Guy Brousseau , *Les obstacles épistémologiques et les probleèmes en mathématiques*, atti del XXVIII congresso di C.I.E.A.E.M. a Louvain-la-Neuve, Belgio (1976).

[5] Bruno D'amore, *Concetti e oggetti in matematica*, Rivista di Matematica dell'Univeristà di Parma, [3, 143-151], (2000).

[6] Bruno D'amore , *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice Bologna, (1999).

[7] Bruno D'Amore, *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, La matematica e la sua didattica [3, 341-360], (1996).

[8] Bruno D'Amore, *Problemi. Pedagoglia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Angeli, (1996).

[9] Bruno D'amore, *Le basi epistemologiche della Didattica della Matematica*, Matematica: l'emergere della didattica nella formazione. Rassegna, [XIV, 29, 8-14], (2006).

[10] Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli, *Analisi semantica e didattica dell'idea di misconcezione*, La matematica e la sua diattica [2, 139-163], (2005).

[11] Andrea A. diSessa, *Phenomenology and the evolution of physics*, Mental models [5-33], (1983).

[12] Andrea A. diSessa, John P. Smith III, Jeremy Rochelle *Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition*

[13] Raymond Duval, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement congnitif de la pensée*, Annales de Didactique et da Sciences Cognitives [5, 37-65], (1993).

[14] Federigo Enriquez, *Il significato della storia del pensiero scientifico*, Barbieri Ed, (2005).

[15] Martha Isabel Fandiño Pinilla, *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*, Pitagora, (2005).

[16] Efraim Fischbein , *Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica*, Numeri e operazioni nella scuola di base, aspetti psicologici e processi cognitivi [8-19], (1985).

[17] Efraim Fischbein , *Ostacoli intuitivi nella risoluzione dei problemi aritmetici elementari*, Numeri e operazioni nella scuola di base, aspetti psicologici e processi cognitivi [122-132], (1985).

[18] Efraim Fischbein , *Modelli taciti e ragionamento matematico*, Matematica a scuola: Teorie ed Esperienze [25-38], (1989).

[19] E. Gallo *Geometria, percezione, linguaggio*, L'educazione matematica [61-104], (1985).

[20] Hermann Maier, *Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica*, La matematica e la sua didattica [69-80], (1993).

[21] Berta Martini e Silvia Sbaragli, *Insegnare e apprendere la Matematica*, Tecnodid Editrice, (2005).

[22] Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica della Matematica e di Divulgazione della Matematica, *Uguale: Ã¨ un segno di relazione o un indicatore di procedura?*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, [25, 3, 255-270], (2002).

[23] Silvia Sbaragli, *Misconcezioni inevitabili e misconcezioni evitabili*, La matematica e la sua didattica, [1, 57-71], (2005).

[24] Ruth Stavy e Dina Tirosh, *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?*, Erickson [44-45], (2000).

[25] Ruth Stavy e Dina Tirosh, *Intuitive rules in science and mathematics: the case of 'more of A-more of B'*, International Journal of Science Education [vol 18, n. 6, 653-667], (1996).

[26] Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca, *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attivita' e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento*,Decreto Ministeriale 211 del 7 ottobre 2010 Indicazioni Nazionali, allegato F .

[27] Sigrid Wagner, *Conservation of Equation and Function under Transformations of Variable*, Journal for Research in Mathematics Education Vol. 12 [2, 107-118], (1981).

[28] Rosetta Zan, *Problemi e convinzioni*, Pitagora Editrice, (1998).

[29] Rosetta Zan, *Misconceptions e difficoltà in matematica*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate [23, 1, 45-68], (2000).

[30] Rosetta Zan, *Verso una teoria per le difficoltà in matematica. Contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica*, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, (2002).